Krivky a plochy v počítačovej grafike

doc. Ing. Branislav Sobota, PhD.
Katedra počítačov a informatiky, FEI TU v Košiciach

P 07

Vrstvy vizualizačného procesu

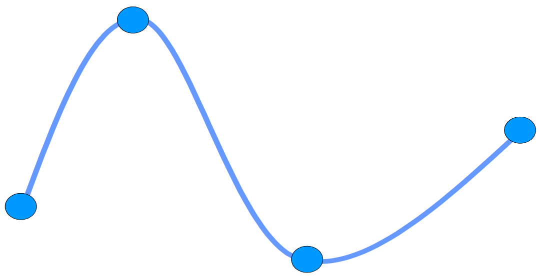
1. Definovanie/spracovanie modelu (reprezentácia, súradnicové systémy)
2. Transformácie nad objektami
3. Riešenie viditeľnosti
4. Tieňovanie
5. Osvetľovanie
6. Realistické zobrazovanie
7. Kompozícia a Vykresľovanie

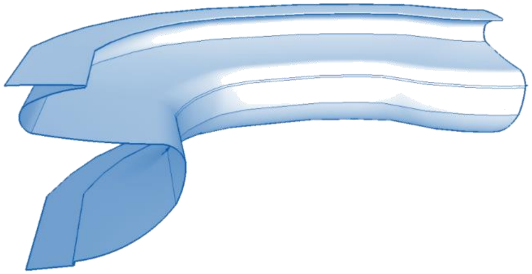
Krivky používané v PG

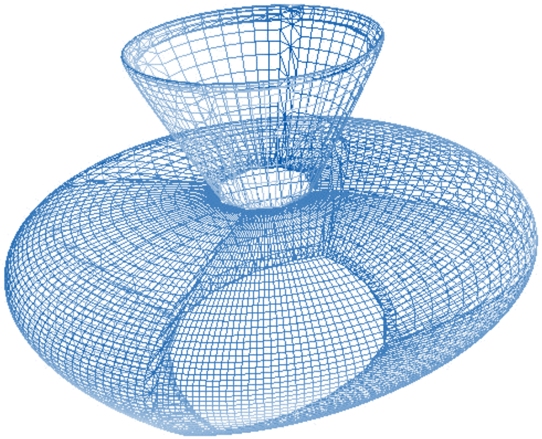
- krivky dané analytickým popisom
- interpolačné krivky
- aproximačné krivky

Použitie kriviek a plôch v PG

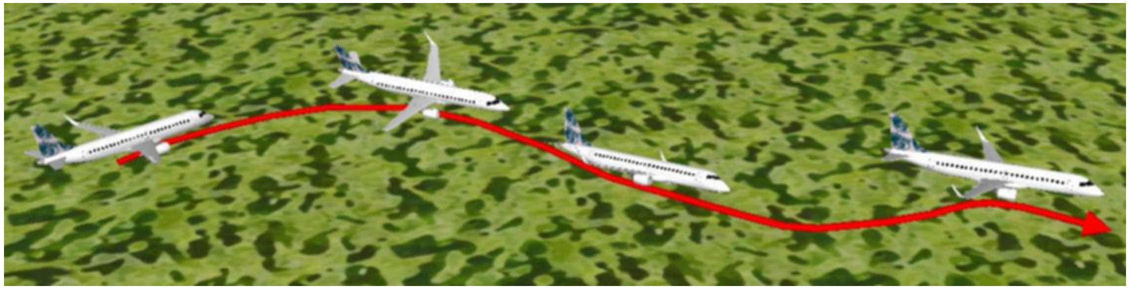
- Geometrická reprezentácia

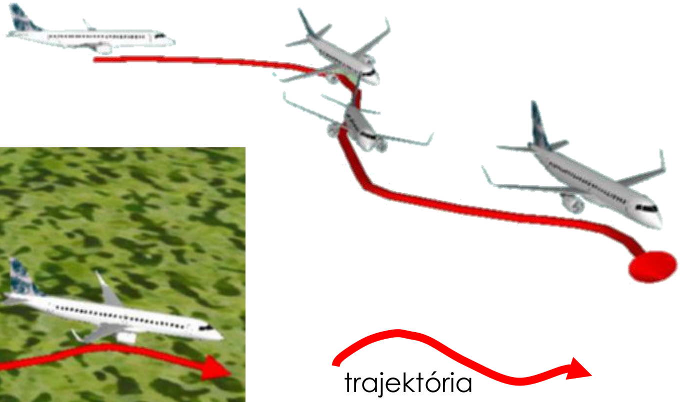






- Riadiaca funkcia

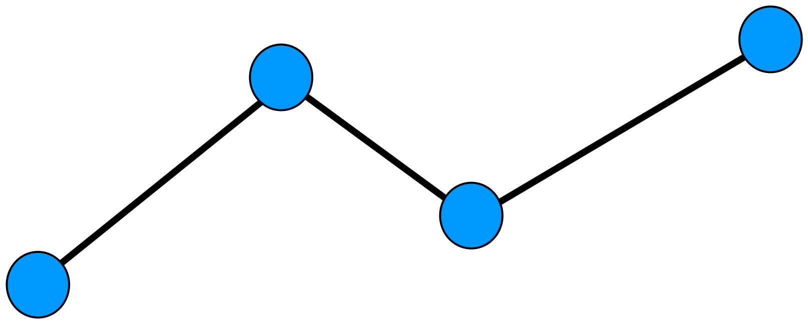


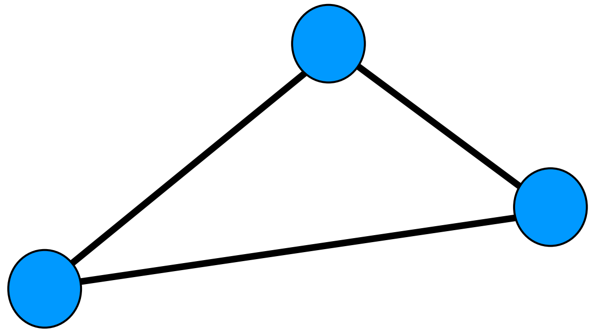


Krivkové 1D útvary - typy

1D útvar definovaný vrcholmi a hranami (segmentami)- **polyline**:

- neuzavretý (acyklický)
- uzavretý (cyklický)





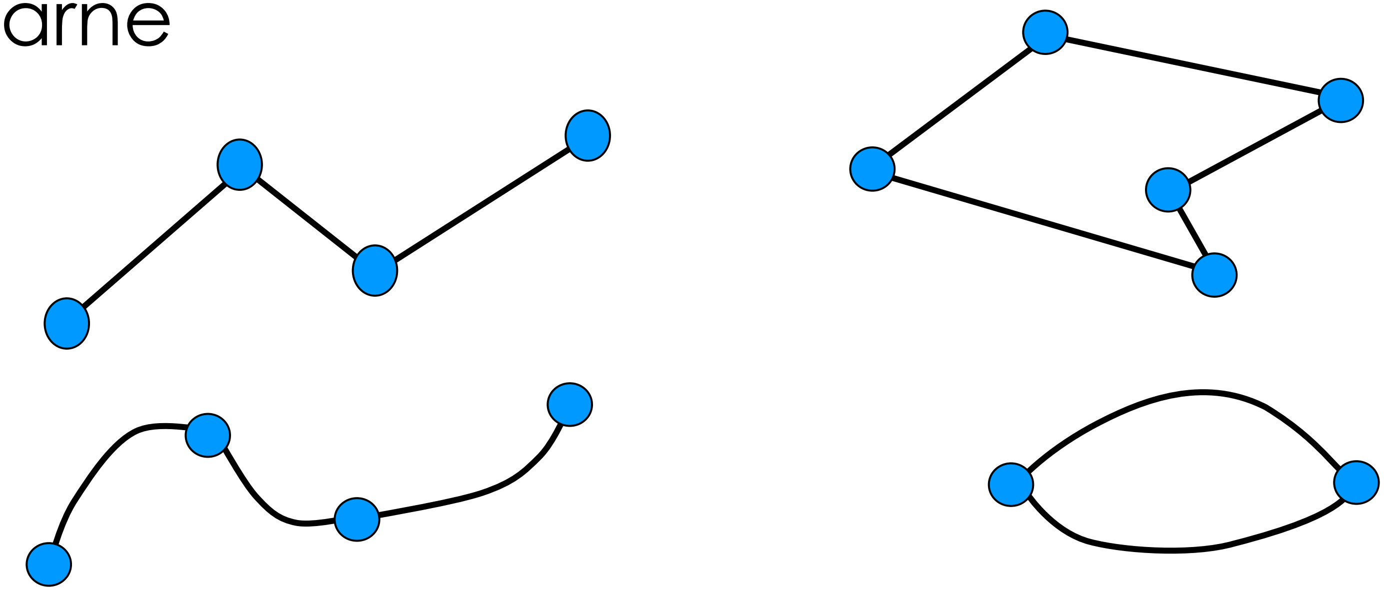
KRIVKOVÉ 1D ÚTVARY - TYPY

Podľa typov hrán (segmentov) krivky/čiary:

- lineárne
- nelineárne

lineárne

nelineárne



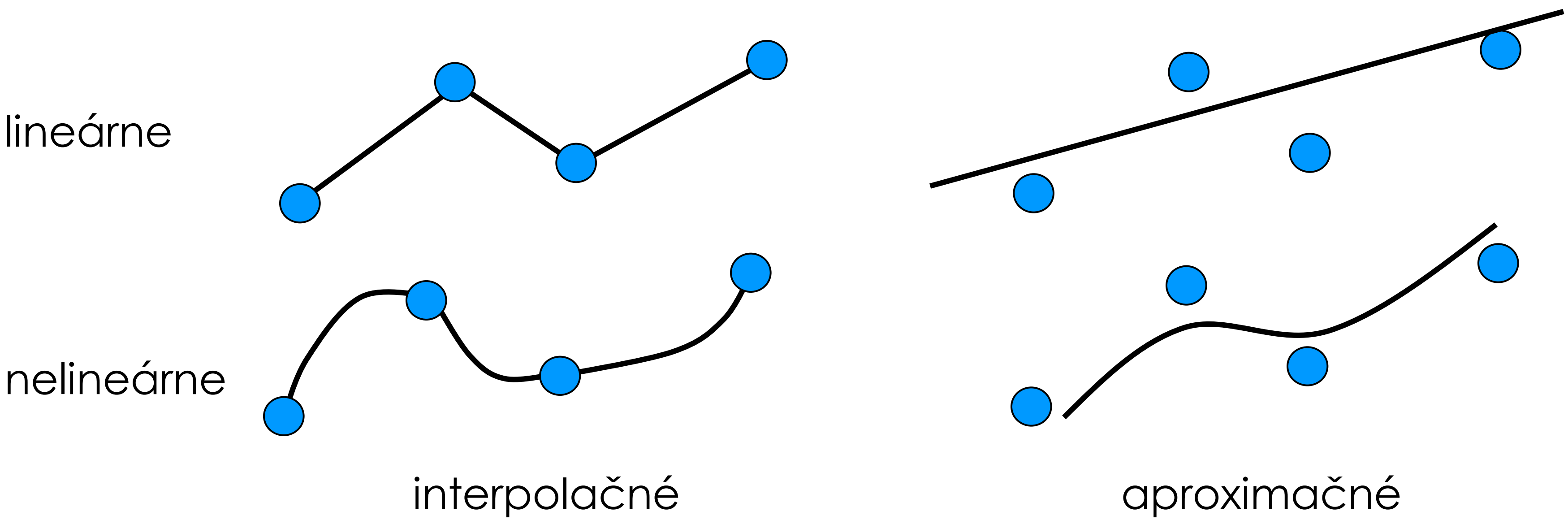
acyklické
(neuzavreté)

cyklické
(uzavreté)

KRIVKOVÉ 1D ÚTVARY - TYPY

Podľa vplyvu vrcholov na tvar krivky/čiary:

- **Interpolačné** (vrcholy sú súčasťou krivky), typovo: *lineárna* a *nelineárna*.
- **Aproximačné** (vrcholy nemusia byť súčasťou krivky, ale vplývajú na jej tvar), typovo: *lineárna* a *nelineárna*.



Používané krivky

- Lineárna interpolácia, lomená čiara

lineárne

- Bézierove krivky stupňa n
- Racionálne Bézierove krivky stupňa n
- B-spline krivky stupňa n
- Kubické B-spline krivky
  - Uniformné
  - Neuniformné
- Racionálne B-spline krivky stupňa n
  - Uniformné
  - Neuniformné

nelineárne

Modifikovateľnosť kriviek

- Zmena polohy riadiacich vrcholov
- Zmena váh riadiacich vrcholov
- Modifikácia uzlového vektora

Krivky definované analyticky

$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t) \end{aligned}\right\} \quad t \in \langle zac, kon \rangle$$

kde t je parameter funkcie

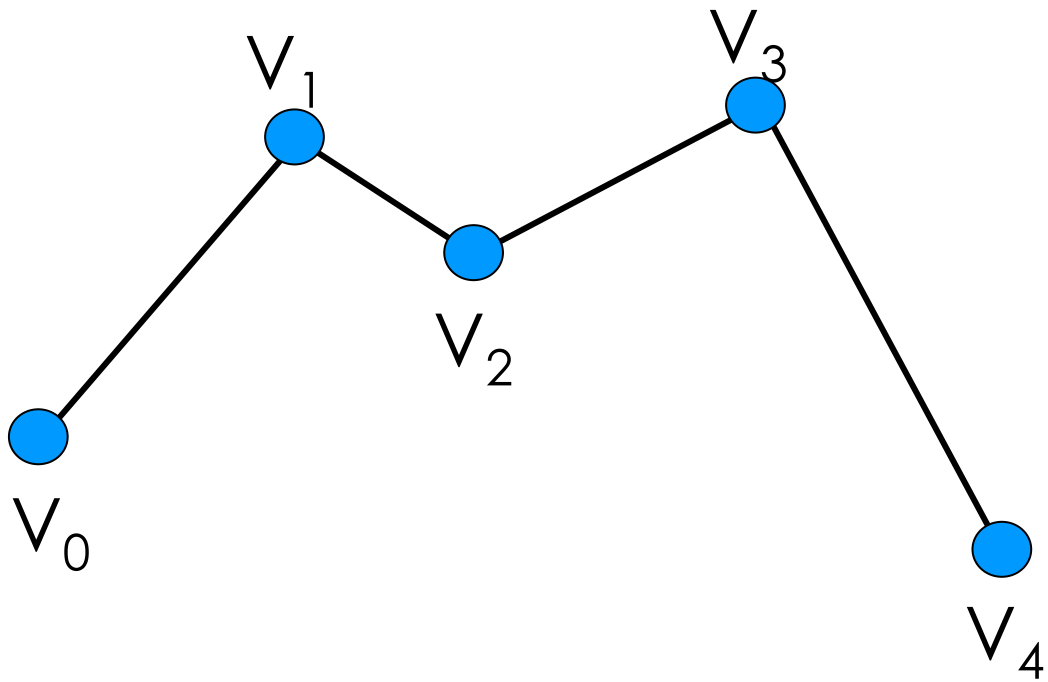
alebo (pre 2D)

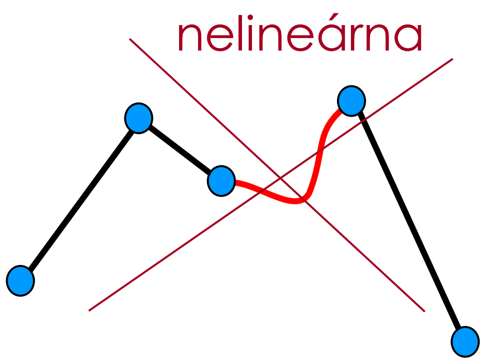
$$y = f(x) \quad x \in \langle zac_x, kon_x \rangle$$

(pre 3D)

$$z = f(x, y) \quad x \in \langle zac_x, kon_x \rangle, y \in \langle zac_y, kon_y \rangle$$

LINEÁRNA INTERPOLÁCIA, LOMENÁ ČIARA

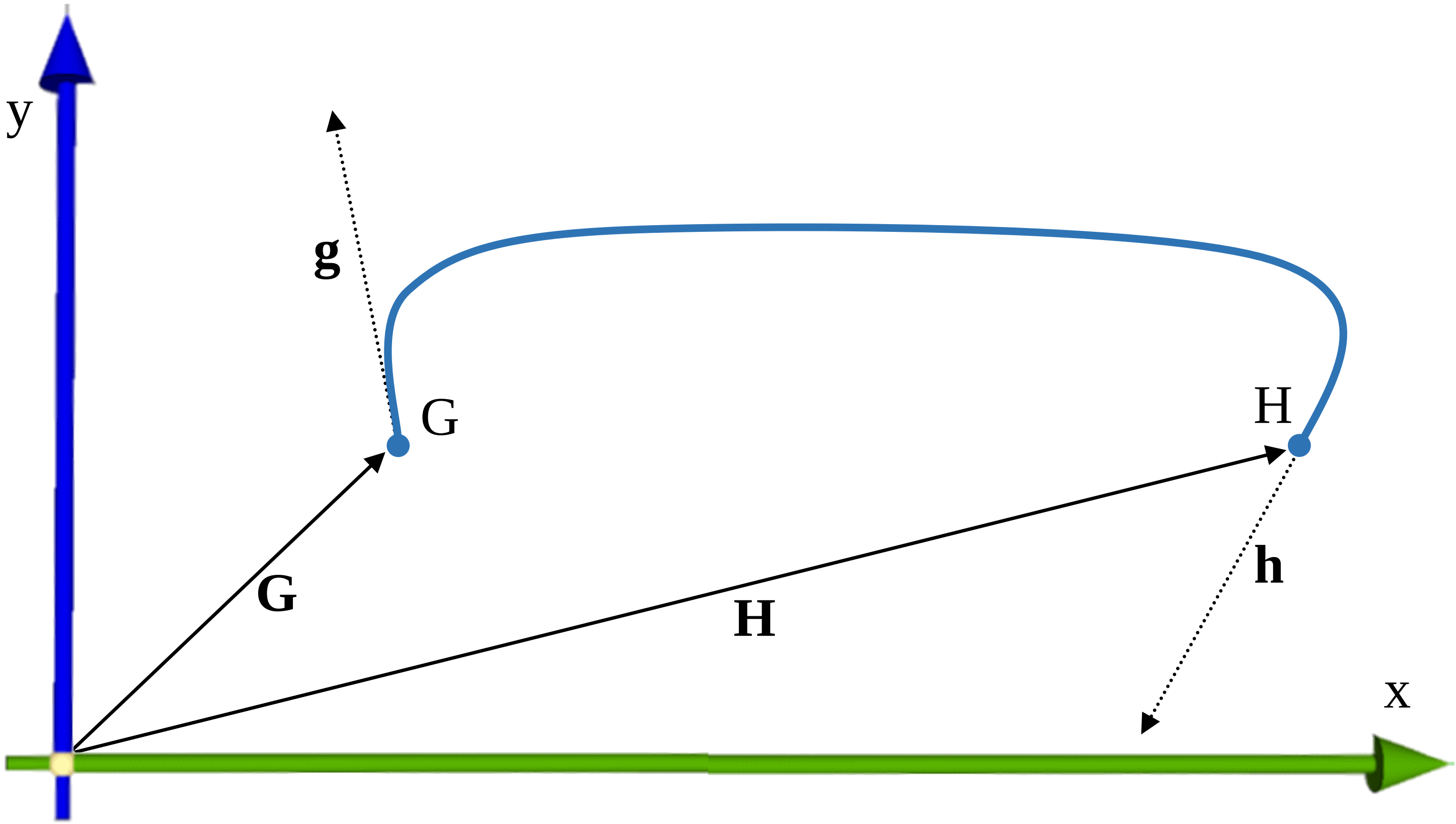




všetky segmenty musia byť lineárne

Fergusonova krivka (James C. Ferguson,1963, Boeing)

Fergusonova krivka (interpolačná krivka)



Fergusonova krivka

$$\mathbf{P}(v) = \mathbf{m}\cdot v^3 + \mathbf{n}\cdot v^2 + \mathbf{p}\cdot v + \mathbf{q}$$

v ϵ< 0,1>

$$\mathbf{P}_{xyz}(v) = \mathbf{m}\cdot v^3 + \mathbf{n}\cdot v^2 + \mathbf{p}\cdot v + \mathbf{q}$$

$$\mathbf{m} = 2\cdot\mathbf{G}_{xyz} - 2\cdot\mathbf{H}_{xyz} + \mathbf{g}_{xyz} + \mathbf{h}_{xyz}$$

$$\mathbf{n} = -3\cdot\mathbf{G}_{xyz} + 3\cdot\mathbf{H}_{xyz} - 2\cdot\mathbf{g}_{xyz} - \mathbf{h}_{xyz}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{g}_{xyz}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{G}_{xyz}$$

Fergusonova krivka

$$\mathbf{P}(v) = A(v)\cdot\mathbf{G} + B(v)\cdot\mathbf{H} + C(v)\cdot\mathbf{g} + D(v)\cdot\mathbf{h}$$

$\mathbf{G},\mathbf{H},\mathbf{g},\mathbf{h} \in E^3(E^2)$, $v \in <0,1>$

$$\mathbf{P}_{xyz}(v) = A(v)\cdot\mathbf{G}_{xyz} + B(v)\cdot\mathbf{H}_{xyz} + C(v)\cdot\mathbf{g}_{xyz} + D(v)\cdot\mathbf{h}_{xyz}$$

$$A(v) = 2\cdot v^3 - 3\cdot v^2 + 1$$

$$B(v) = -2\cdot v^3 + 3\cdot v^2$$

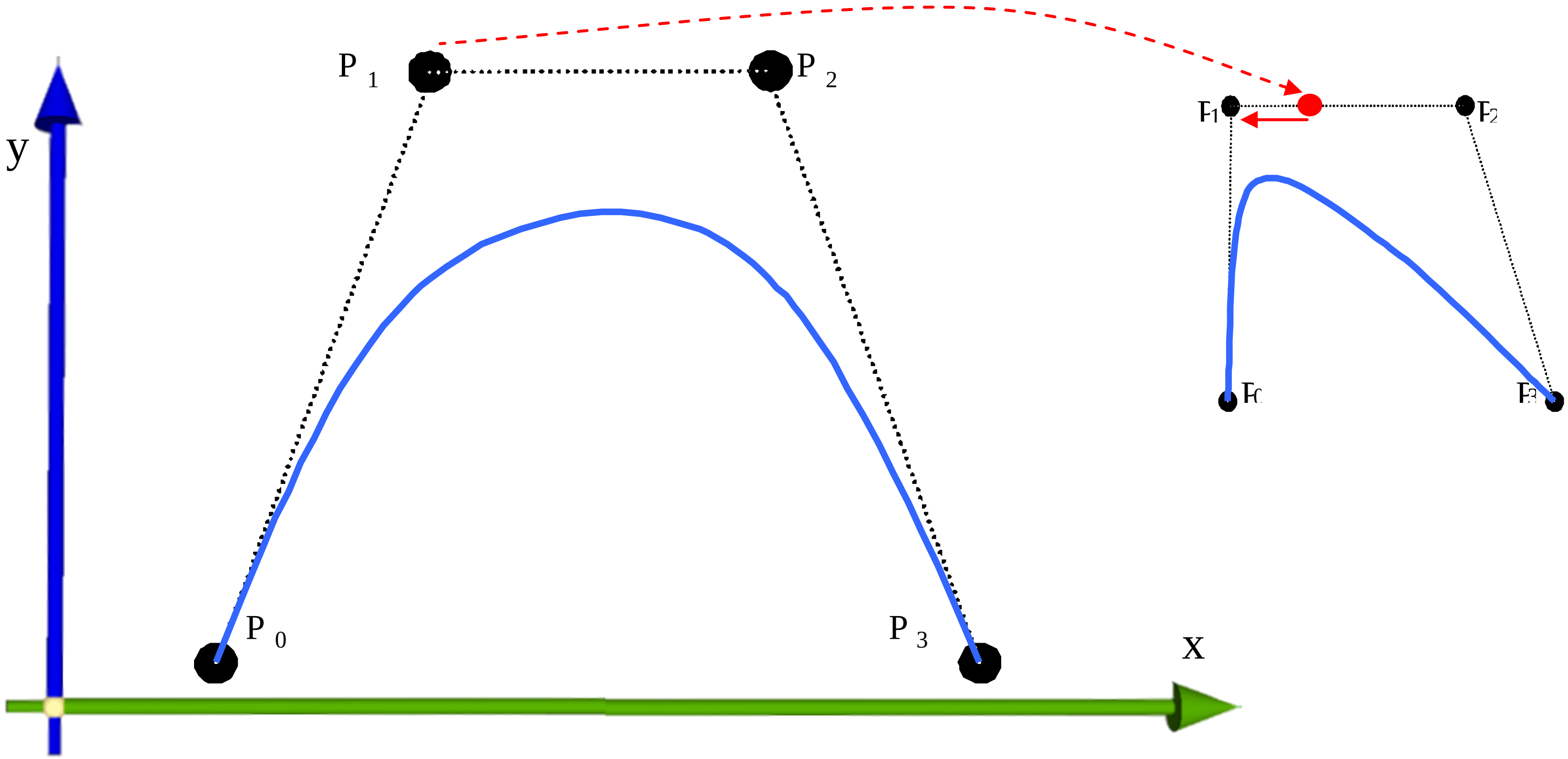
$$C(v) = v^3 - 2\cdot v^2 + v$$

$$D(v) = v^3 - v^2$$

Hermitove polynómy
(Ch.Hermit, 1869)

Bézierova krivka (Pierre Bézier, 1960's, Renault)

Bézierova kubická krivka (aproximačná krivka)

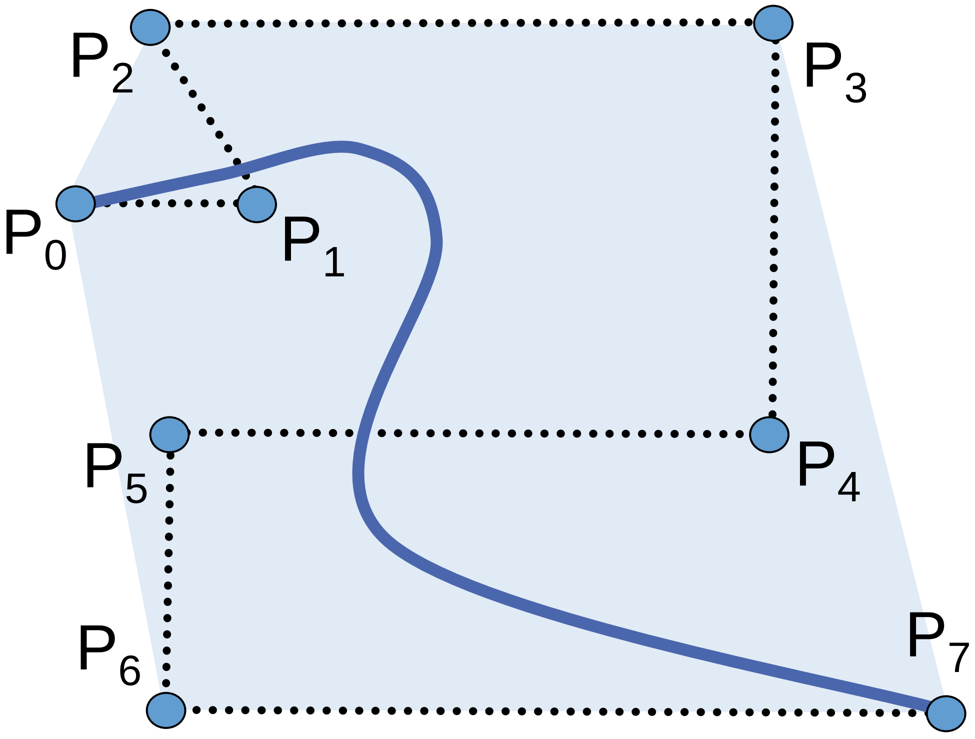


Vlastnosti Bézierovej krivky

Základné vlastnosti Bézierovej krivky stupňa *n*:

- je aproximačného typu ale interpoluje koncové vrcholy, je uniformná
- Definovaná polynomiálnou funkciou stupňa *n*, kde

  n=počet riadiacich vrcholov – 1
- Leží v konvexnom obale riadiacich vrcholov
- Pseudolokálna kontrola
- Afinná invariancia (po aplikovaní afinných transformácií zachováva tvar)



Bézierova krivka

Bernsteinove polynómy

(S.N.Bernstein, 1912)

$$\mathbf{R}(t)=\sum_{i=0}^{m}\mathbf{P}_i \cdot Be_{im}(t)$$

$$P_i \in E^3\left(E^2\right)$$

$$Be_{im}(t)=\sum \binom{m}{i} \cdot t^{i} \cdot (1-t)^{m-i}$$

$t \in < 0,1 >$

Bézierova kubická krivka

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \cdot B_0(t) + \mathbf{P}_1 \cdot B_1(t) + \mathbf{P}_2 \cdot B_2(t) + \mathbf{P}_3 \cdot B_3(t)$$

$P_i \in E^3(E^2)$, t ϵ< 0,1>

$$\mathbf{P}_{xyz}(t) = \mathbf{P}_{0xyz} \cdot B_0(t) + \mathbf{P}_{1xyz} \cdot B_1(t) + \mathbf{P}_{2xyz} \cdot B_2(t) + \mathbf{P}_{3xyz} \cdot B_3(t)$$

$$\left.\begin{aligned} B_0(t) &= (1-t)^3 \\ B_1(t) &= 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 \\ B_2(t) &= 3 \cdot t^2 (1-t) \\ B_3(t) &= t^3 \end{aligned}\right\} \text{pre } t \in < 0,1>$$

Spline krivka

Spline funkciou stupňa m pre daných $n+1$ bodov $X_i = (x_i , y_i)$, $i = 0..n$, $x_0 < x_1 < ... < x_n$, nazývame funkciu $f(x)$, pre ktorú na intervale $<x_0 ,x_n>$ platí:

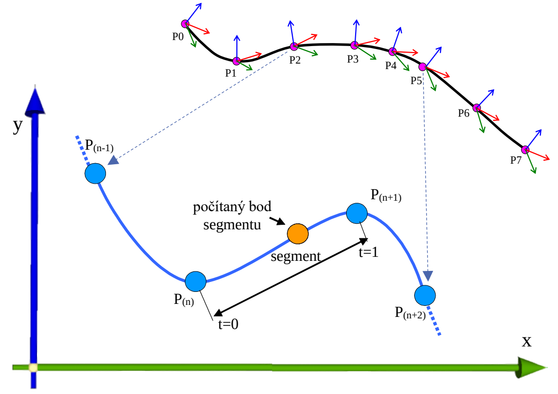
- $f(x) = f_k(x)$ na intervale $<x_k , x_{k+1}>$, kde f_k je polynómom stupňa m,
- $f(x)$ má spojité derivácie $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(m-1)$.

Najčastejšie sa používajú kubické spline funkcie ($m = 3$)

Catmull-Rom spline krivka (1974)

Ed Catmull R. Rom

Patrí medzi interpolačné krivky. Krivka prechádza cez všetky riadiace body P_i. Neexistujú žiadne diskontinuity v smere a veľkosti dotyčnice (C^1) ale druhá derivácia je lineárne interpolovaná v rámci každého segmentu (nie je C^2), čo spôsobuje, že zakrivenie sa lineárne mení po dĺžke segmentu. Výsledné body segmentu krivky môžu ležať mimo domény $P_1 \rightarrow P_2$. Aj keď segment splinu je definovaný pomocou štyroch riadiacich bodov, spline môže mať ľubovoľný počet ďalších riadiacich bodov.



$$Q(t) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(A \cdot t^0 + B \cdot t + C \cdot t^2 + D \cdot t^3\right), \quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

$$A = 2 \cdot P_{(n)\,xyz}$$

$$B = -P_{(n-1)\,xyz} + P_{(n+1)\,xyz}$$

$$C = 2 \cdot P_{(n-1)\,xyz} - 5 \cdot P_{(n)\,xyz} + 4 \cdot P_{(n)+1\,xyz} - P_{(n+2)\,xyz}$$

$$D = -P_{(n-1)\,xyz} + 3 \cdot P_{(n)\,xyz} - 3 \cdot P_{(n+1)\,xyz} + P_{(n+2)\,xyz}$$

$$P_i \in E^3\left(E^2\right)$$

B-SPLINE KRIVKA

B-spline krivky sú zovšeobecnením Beziérových kriviek, miesto Bernsteinových polynómov sa používajú jednoduchšie funkcie.

Kubický Coonsov B-spline

Coonsove polynómy
(S.A.Coons, 1966)

$$\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}_i \cdot Co_i(t)\ ,\quad t \in \langle 0,1 \rangle$$

$$P_i \in E^3\left(E^2\right)$$

B-Spline krivka

Kubický Coonsov B-spline $\mathbf{R}(t) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}_i \cdot Co_i(t)\ , \quad t \in \langle 0,1 \rangle$

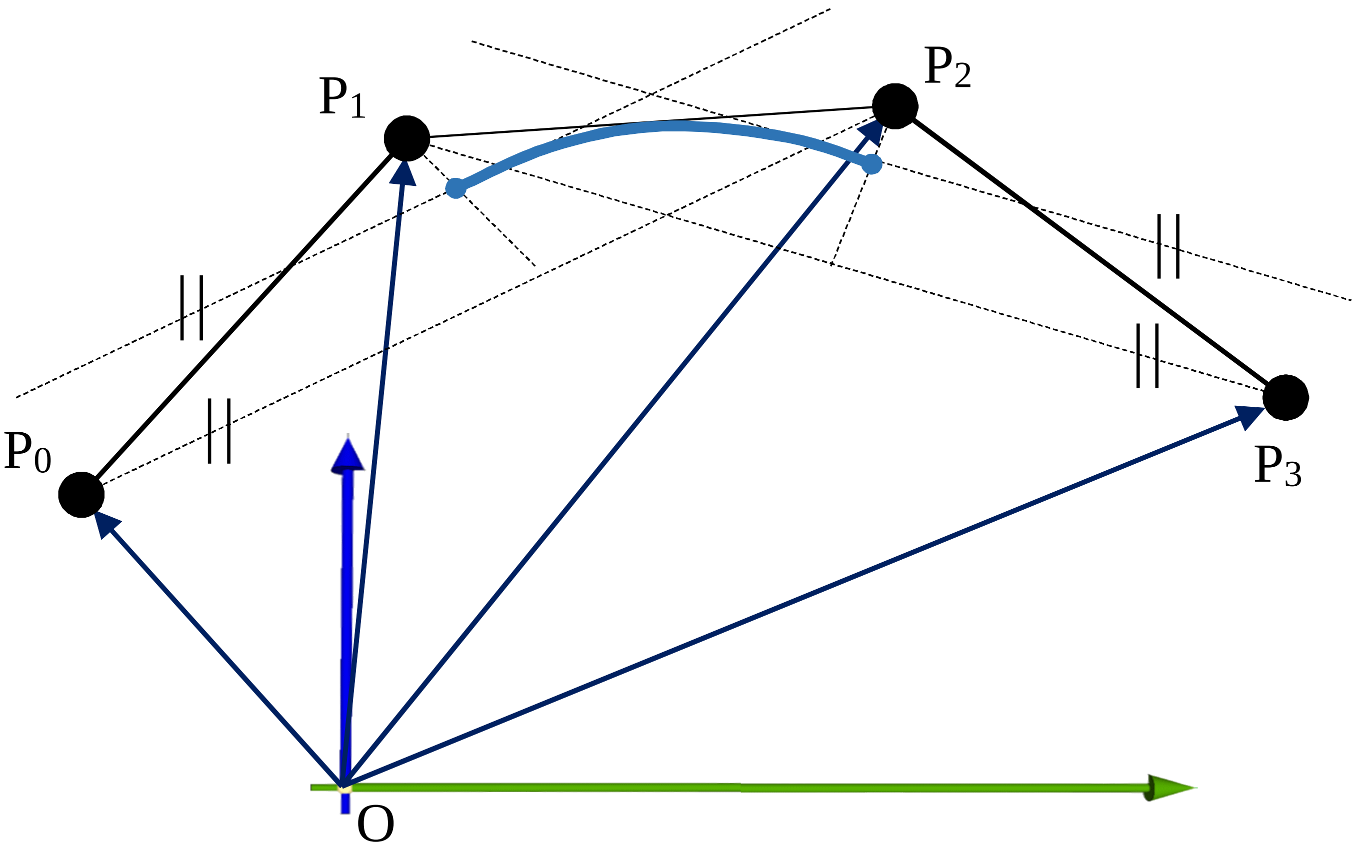
kde:

$\left\{ \mathbf{P}_i \right\}_{i=0}^{n}$ sú polohové vektory riadiacich vrcholov pre *i* = *0-3*

$$\left.\begin{aligned}
Co_0(t) &= -\frac{1}{6} \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot t^2 - \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{6} \\
Co_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot t^3 - t^2 + \frac{2}{3} \\
Co_2(t) &= -\frac{1}{2} \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{6} \\
Co_3(t) &= \frac{1}{6} \cdot t^3
\end{aligned}\right\} \text{pre } t \in < 0,1 >$$

B-SPLINE KRIVKA

Kubický Coonsov B-spline



Vlastnosti B-spline krivky

Základné vlastnosti B-spline krivky stupňa *n*:

- je aproximačná a je uniformná
- špeciálne zadané vstupné hodnoty (násobnosti) spôsobia, že krivka začína v bode P_0 a končí v bode P_{L+n-1} kde

  n=počet riadiacich vrcholov

  L=počet násobností riadiacich vrcholov
- Pseudolokálna kontrola a segmentovateľnosť
- Afinná invariancia (po aplikovaní afinných transformácií zachováva tvar)

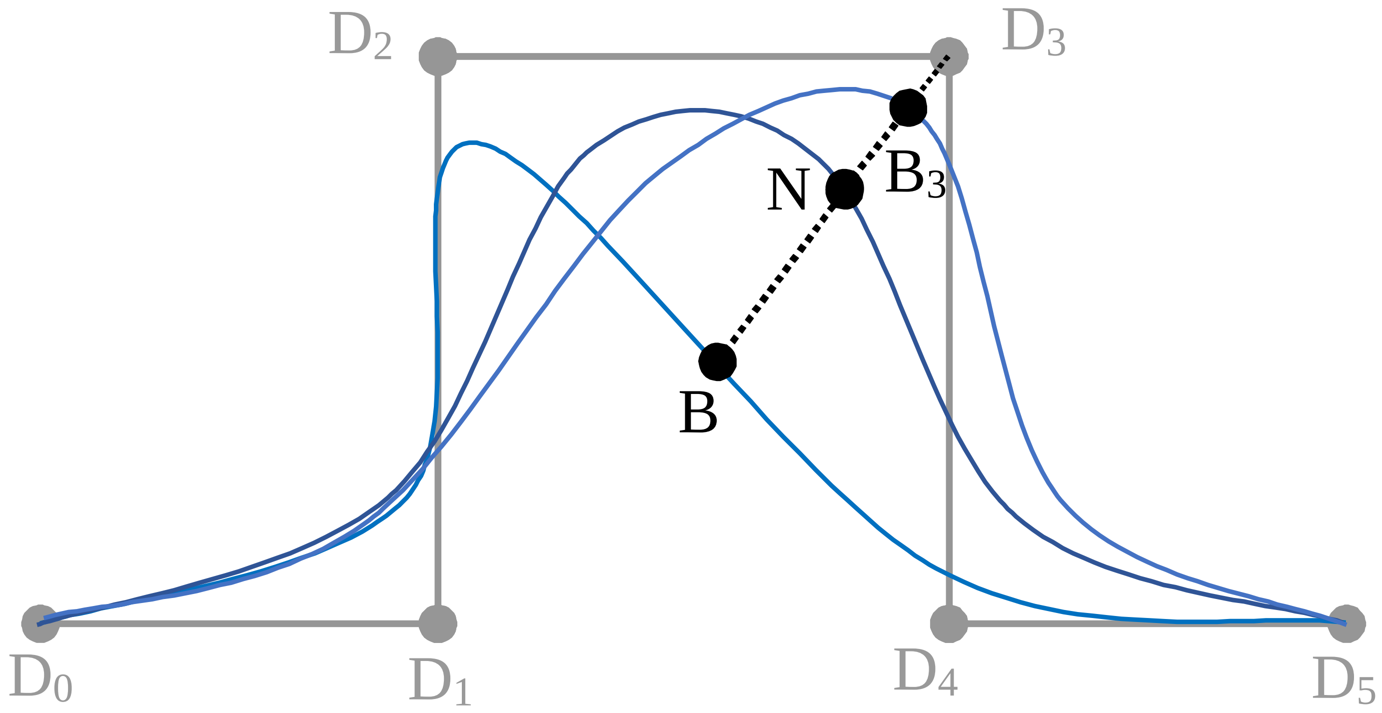
Porovnanie Bézierovej a B-spline krivky

Ak porovnáme Bézierové krivky a B-spline krivky pre daný polygón $\{P_i\}$, $i=0..n$, tak potom:

- Bézierova krivka je stupňa *n*, avšak B-spline krivka je zložená z *n-1* segmentov (prvý segment je určený bodmi P_0, P_1, P_2, P_3 , druhý segment bodmi P_1, P_2, P_3, P_4 atď.), z ktorých každý je popísaný polynómom tretieho stupňa.
- Nevýhodou B-spline kriviek je, že krivka nezačína a nekončí v začiatočnom a koncovom bode polygónu. Túto nevýhodu možno odstrániť tak, že použijeme *náhradný polygón*, alebo *sa zmení násobnosť prvých a posledných prvkov uzlového vektora*.

Racionálne krivky

Oproti reálnym pribúdajú váhy riadiacich vrcholov



UNIFORMNOSŤ A NEUNIFORMNOSŤ

Voľba uzlovej postupnosti (napr $u_i = i$):

- **Uniformná** ak $u_{i+1}-u_i$ = *konštanta* pre všetky i
- **Neuniformná** ľubovoľná neklesajúca postupnosť uzlov

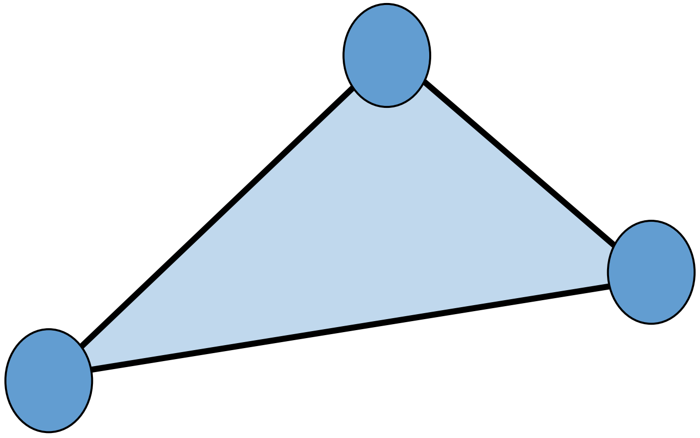
Plochy používané v PG

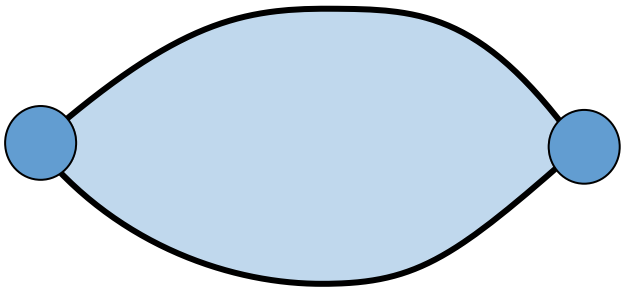
- Plochy dané analytickým popisom
- interpolačné plochy
- aproximačné plochy

PLOŠNÉ 2D ÚTVARY - TYPY

2D útvar definovaný vrcholmi a hranami - **polygón**:

- lineárny
- nelineárny





Používané plochy

- Rovinné (pravítkové) plochy
- Bézierove plochy
- B-spline plochy
- Racionálne B-spline plochy
  - Uniformné
  - Neuniformné

lineárne

nelineárne

Modifikovateľnosť plôch

- Zmena polohy riadiacich vrcholov
- Zmena váh riadiacich vrcholov
- Modifikácia uzlových vektorov

Plochy definované analyticky

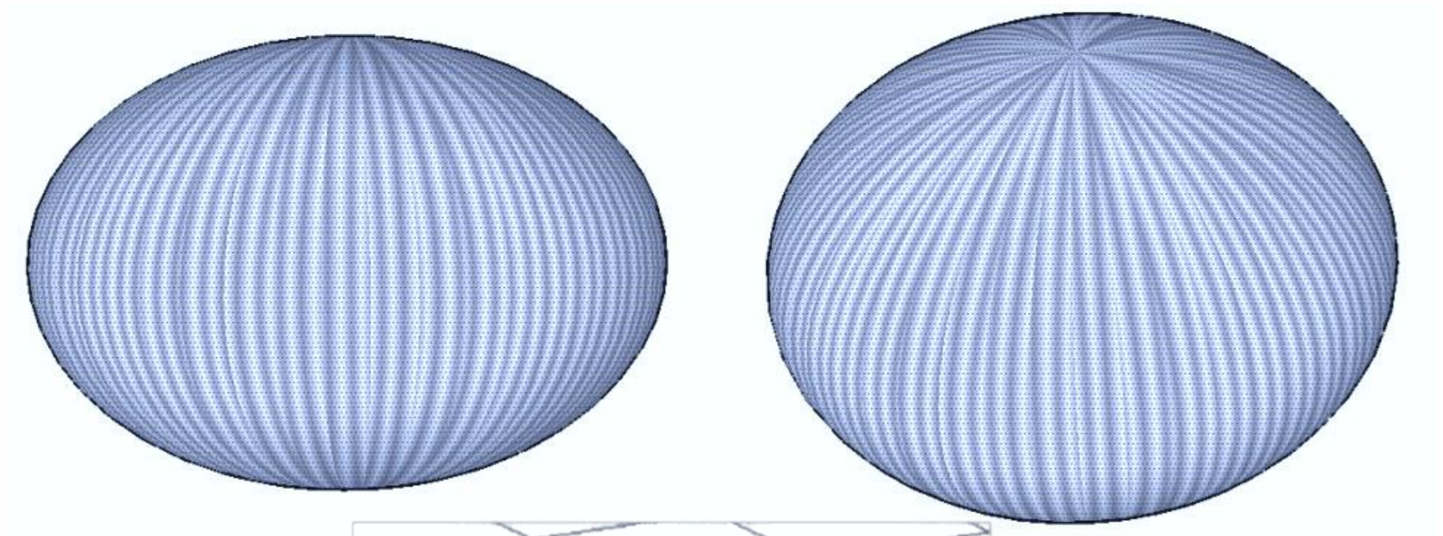
$$\left.\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \\ z &= h(t) \end{aligned}\right\} \quad t \in \langle zac, kon \rangle$$

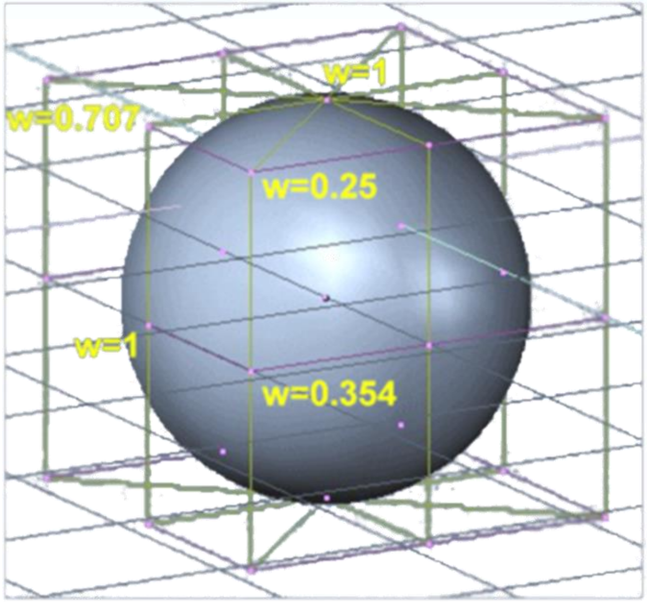
kde t je parameter funkcie

alebo

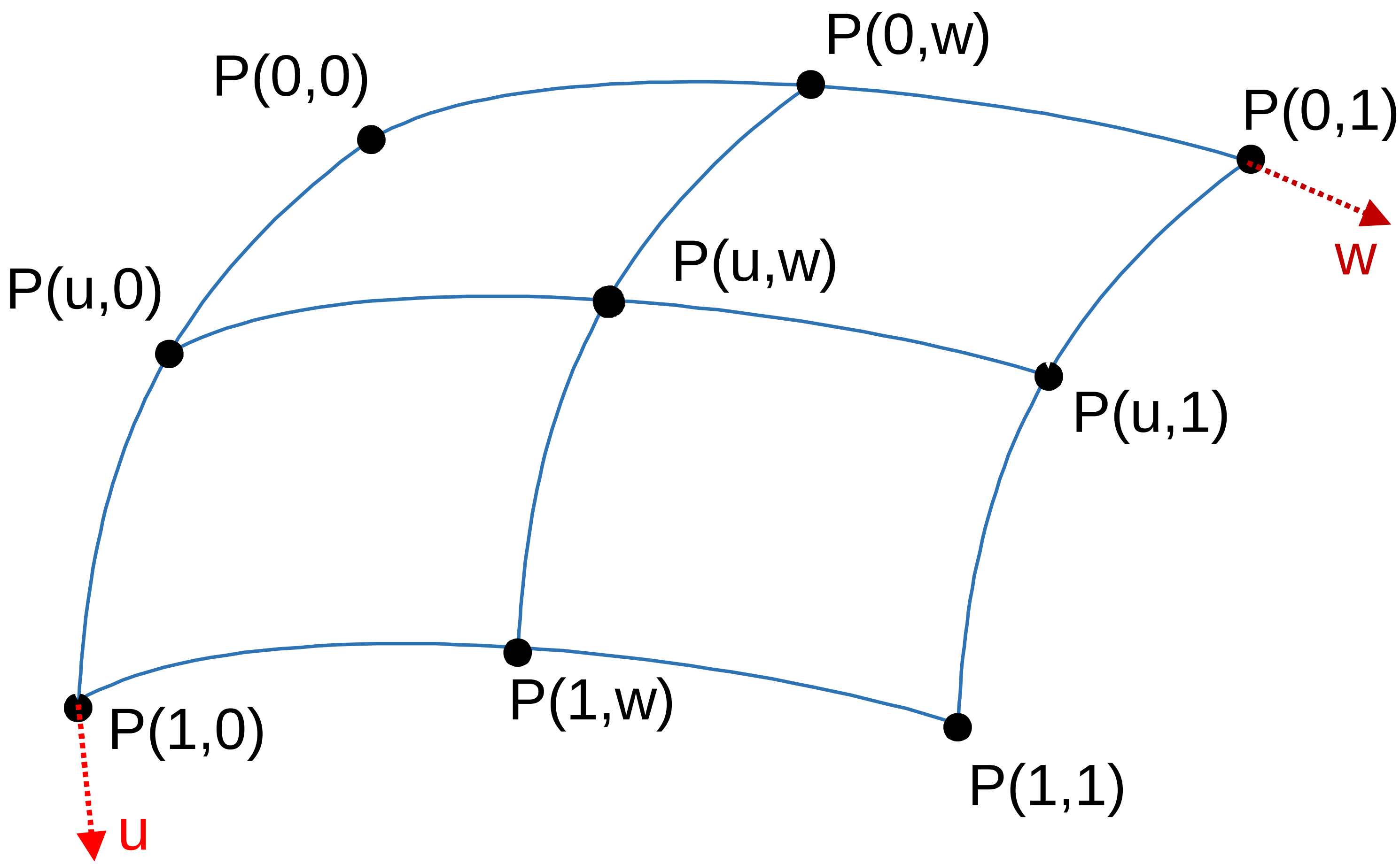
$$z = f(x, y) \quad x \in \langle zac_x, kon_x \rangle, y \in \langle zac_y, kon_y \rangle$$

Príklady pravidelných analytických plôch





BILINEÁRNA COONSOVA PLOCHA



Bilineárna Coonsova plocha

Pokiaľ protiľahlé strany budú úsečky, dostaneme tzv. ***priamkovú*** (*pravítkovú*) plochu. Coonsova bilineárna plocha je teda všeobecnejšia ako plocha priamková.

Bilineárna Coonsova plocha

$$[1-u,-1,u]*\mathbf{M}*[1-w,-1,w]^T=0$$

kde:
u a w sú parametre ($u\in<0,1>$, $w\in<0,1>$), pretože bilineárny plát je určený okrajom $P(u,0)$, $P(u,1)$, $P(0,w)$ a $P(1,w)$

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{xyz}(0,0) & \mathbf{P}_{xyz}(0,w) & \mathbf{P}_{xyz}(0,1)\\ \mathbf{P}_{xyz}(u,0) & \mathbf{P}_{xyz}(u,w) & \mathbf{P}_{xyz}(u,1)\\ \mathbf{P}_{xyz}(1,0) & \mathbf{P}_{xyz}(1,w) & \mathbf{P}_{xyz}(1,1)\end{bmatrix}$$

Bilineárna Coonsova plocha

tvar sa prevedie na explicitný, čím dostaneme:

$$P(u,w) = [1-u, u] * [\mathbf{P}(0,w), \mathbf{P}(1,w)]^T + [\mathbf{P}(u,0), \mathbf{P}(u,1)] * [1-w, w]^T - [1-u, u] * \mathbf{Q} * [1-w, w]$$

kde $\mathbf{Q}$ je matica:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{xyz}(0,0) & \mathbf{P}_{xyz}(0,1) \\ \mathbf{P}_{xyz}(1,0) & \mathbf{P}_{xyz}(1,1) \end{bmatrix}$$

BIKUBICKÁ COONSOVA PLOCHA

Je ďalším typom Coonsových plôch a predstavuje rozšírenie bilineárnej plochy, ale jej zadávanie a tvar je rovnaké. Rovnica popisujúca túto plochu je modifikáciou rovnice pre bilineárnu plochu.

$$[F_1(u), -1, F_2(u)] * \mathbf{M} * [F_1(w), -1, F_2(w)]^T = 0$$

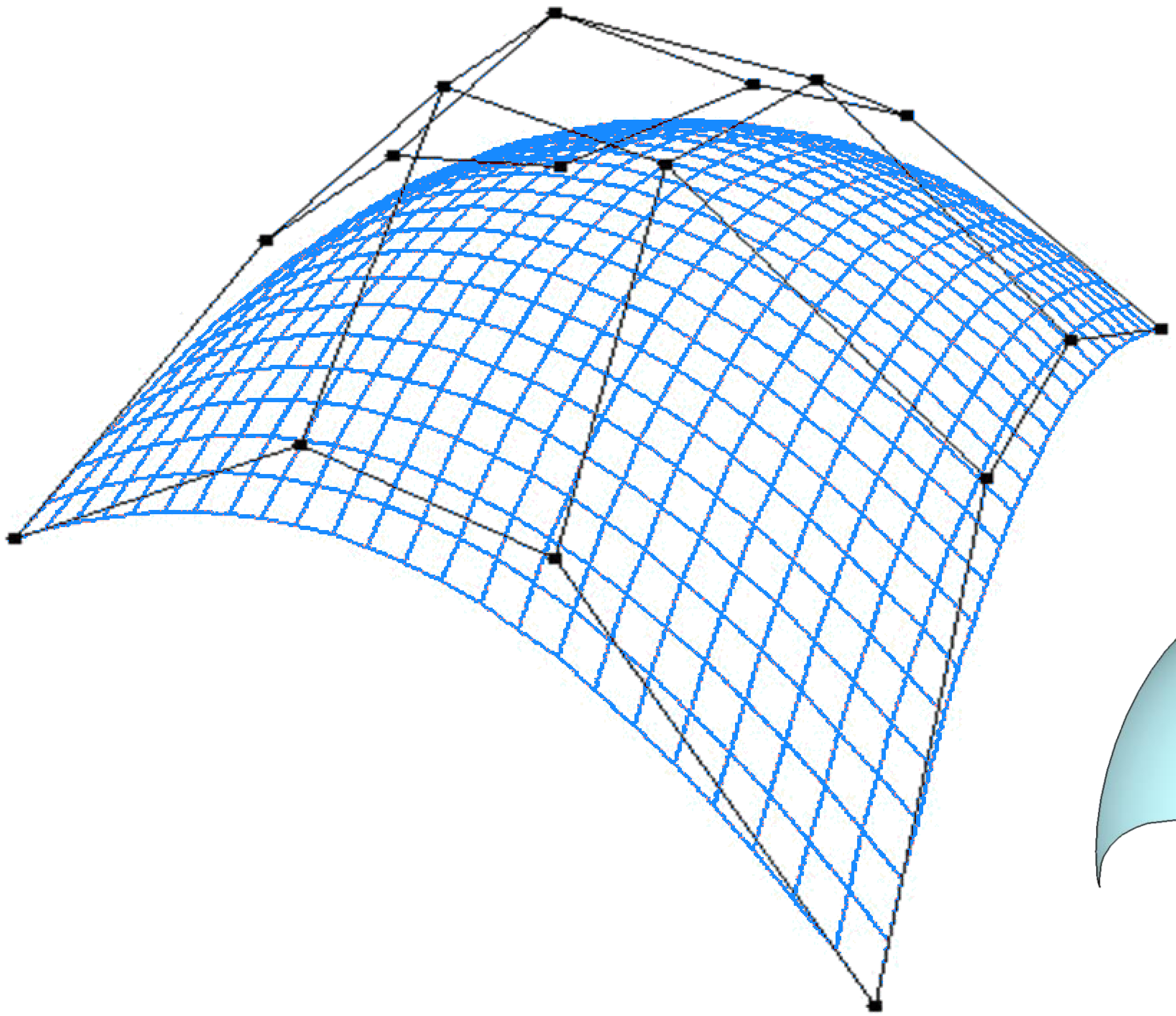
kde $\mathbf{M}$ je matica ako u bilineárnej plochy a F_1, F_2 sú známe Fergusonove polynómy :

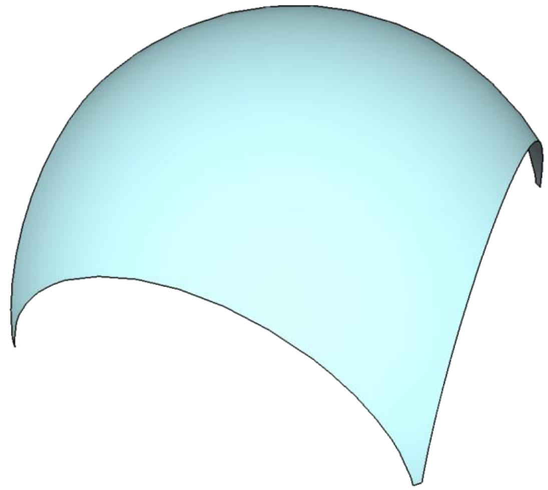
$$F_1(t) = \quad 2 \cdot t^3 - 3 \cdot t^2 + 1$$
$$F_2(t) = -2 \cdot t^3 + 3 \cdot t^2$$

Pre lepšiu implementovateľnosť túto rovnicu upravíme a dostaneme analogickú explicitnú rovnicu ako v prípade bilineárnej plochy.

Základným problémom Coonsových plôch tohto typu je veľmi ťažké vyjadrenie priamych dotyčnicových vektorov, čím sa obtiažne dosahuje hladké spojenie dvoch Coonsových plátov.

Bézierova bikubická plocha





Bézierova bikubická plocha

Základná Bézierova plocha je nazývaná aj *Beziérova bikubická plocha* a je daná maticou *4x4* bodov, teda 16-imi uzlami B_{ij}, $i,j=0,1,2,3$. Plocha je následne definovaná explicitnou rovnicou:

$$z = [E(u), F(u), G(u), H(u)] * \mathbf{B} * [E(w), F(w), G(w), H(w)]^T$$

Bézierova bikubická plocha

$$z = \left[E(u), F(u), G(u), H(u)\right] * \mathbf{B} * \left[E(w), F(w), G(w), H(w)\right]^T$$

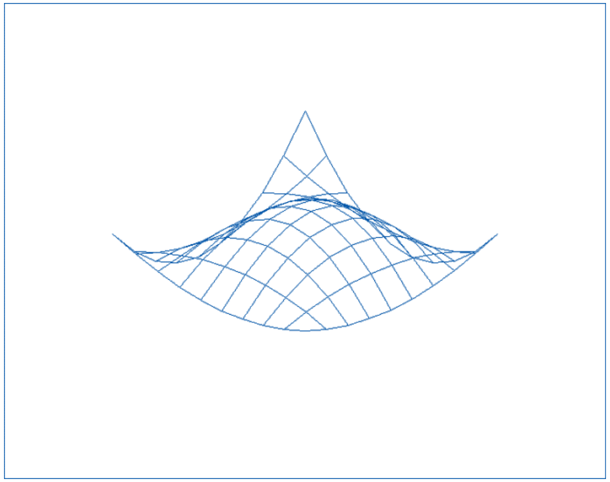
kde $E(t)$, $F(t)$, $G(t)$, $H(t)$ sú kubické Bernsteinove polynómy definované nasledovne:

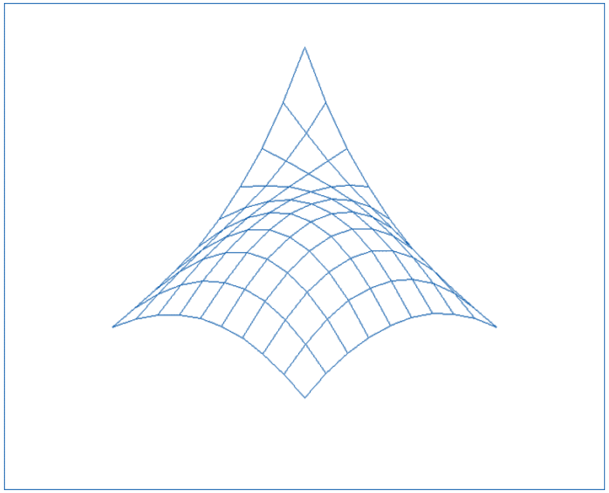
$$E(t) = (1-t)^3$$
$$F(t) = 3 \cdot t \cdot (1-t)^2$$
$$G(t) = 3 \cdot t^2 (1-t)$$
$$H(t) = t^3$$

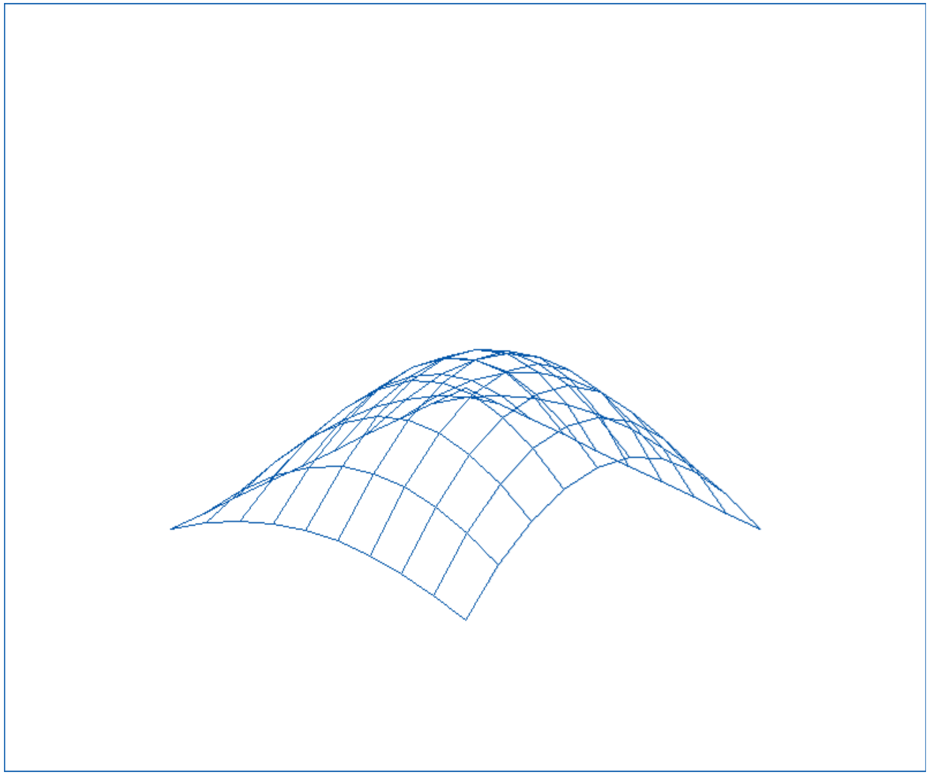
B je matica vrcholov riadiacej siete:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{00xyz} & B_{01xyz} & B_{02xyz} & B_{03xyz} \\ B_{10xyz} & B_{11xyz} & B_{12xyz} & B_{13xyz} \\ B_{20xyz} & B_{21xyz} & B_{22xyz} & B_{23xyz} \\ B_{30xyz} & B_{31xyz} & B_{32xyz} & B_{33xyz} \end{bmatrix}$$

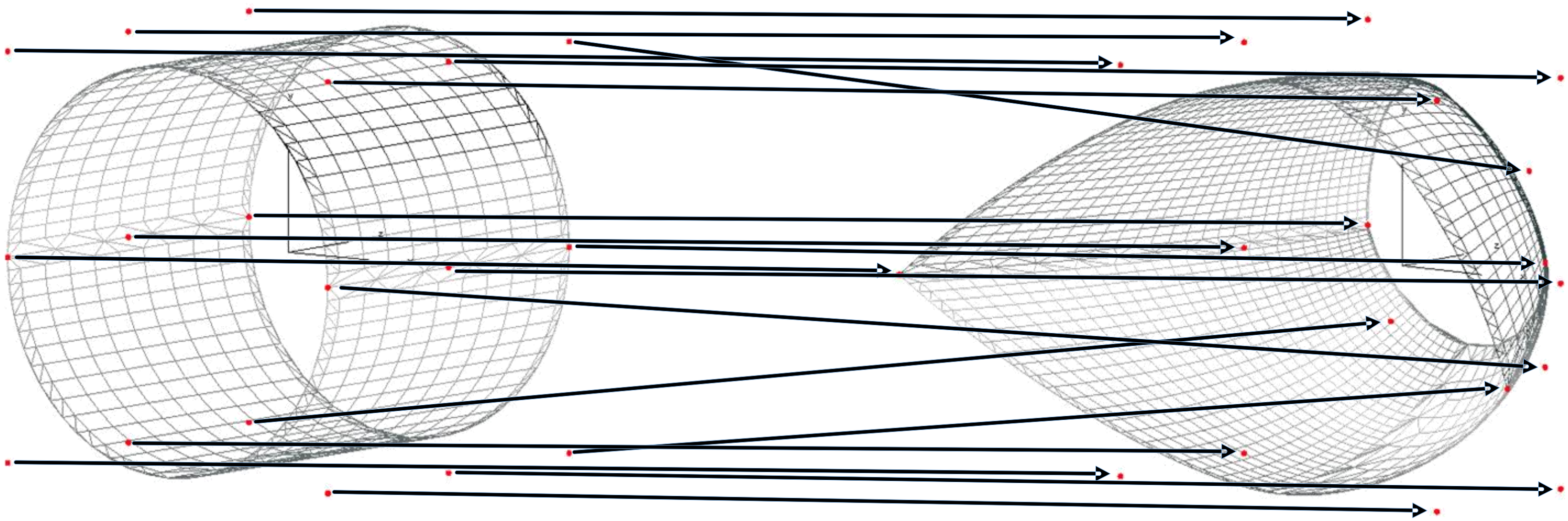
BÉZIEROVA BIKUBICKÁ PLOCHA - PRÍKLADY

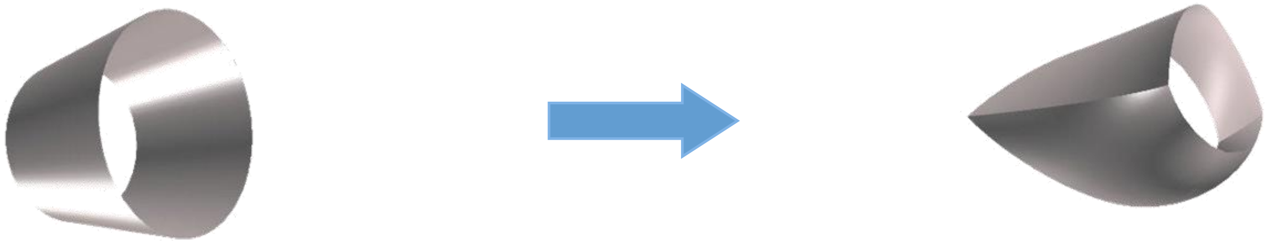




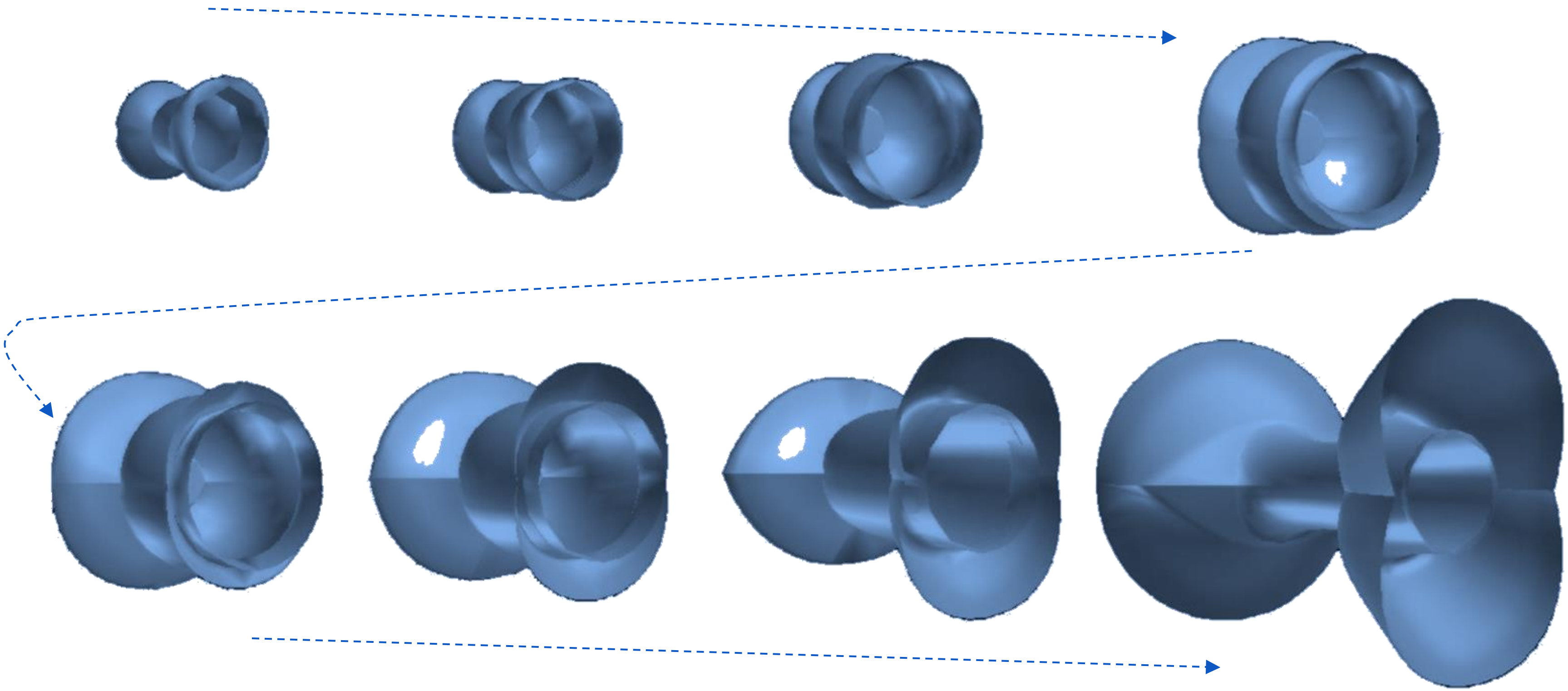


Morphing, warping
3D, morfované polohou riadiacich bodov



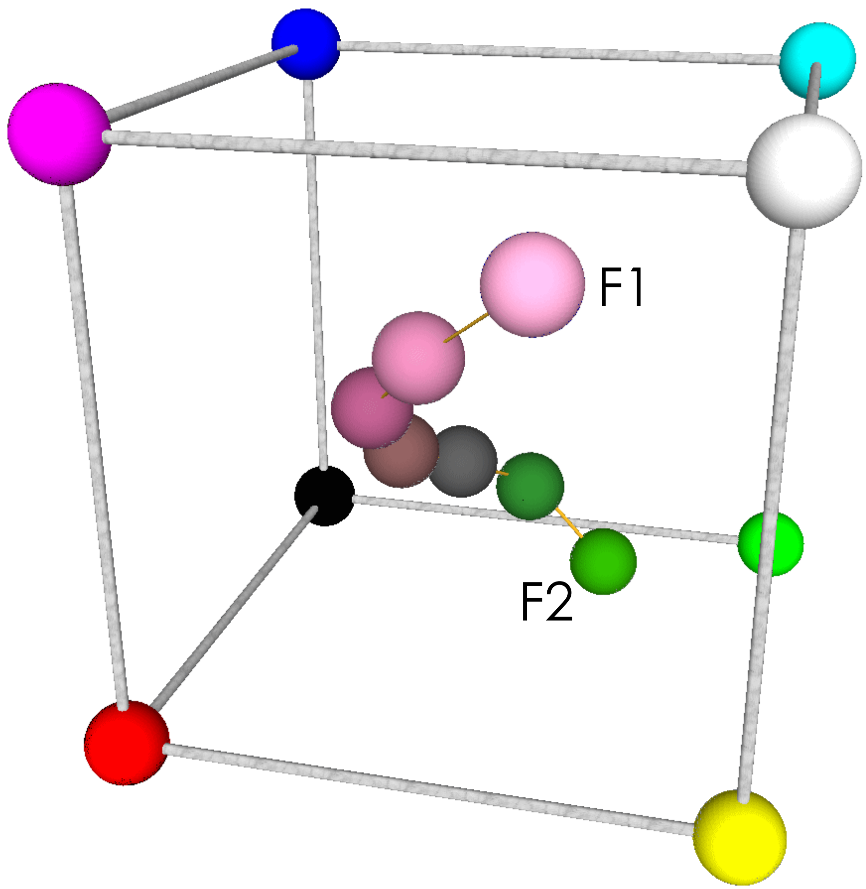


Morphing, warping (3D)

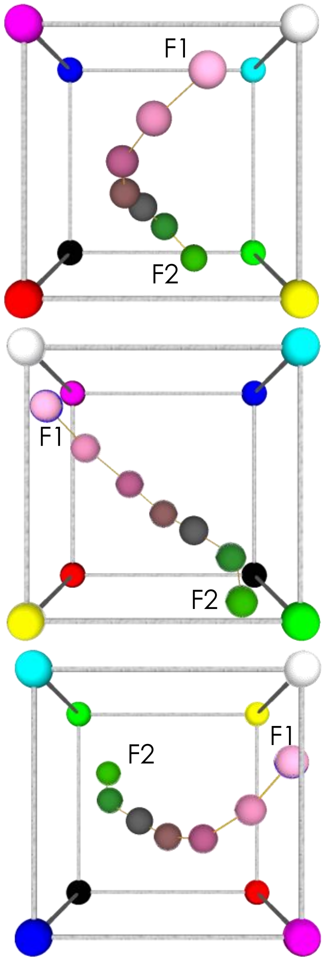


(KPI FEI TU Košice)

Príklady použitia krivky vo farebnom priestore
Nelineárne alfa-miešanie

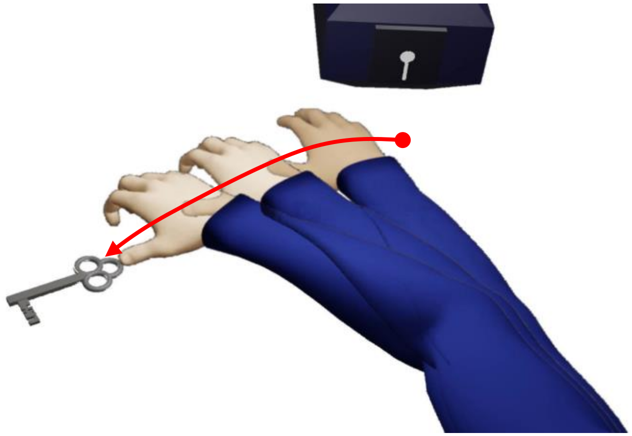


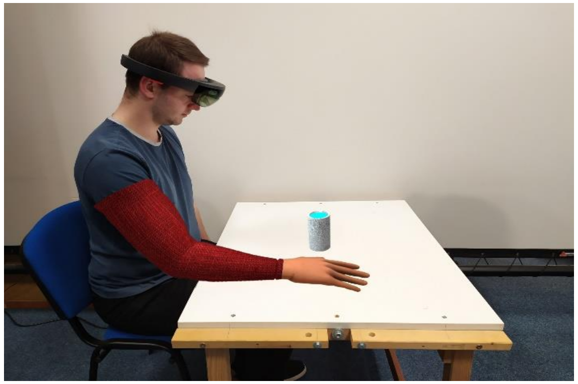
nelineárny prechod F(arba)1-F(arba)2
pri alfa miešaní, RGB priestor



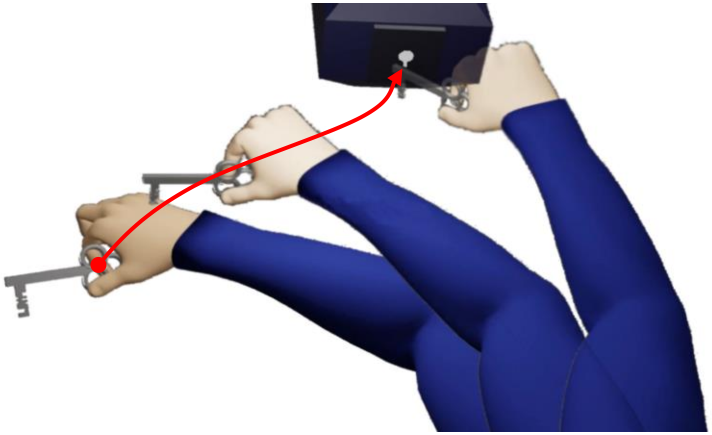
(zdroj KPI FEI TU Košice)

Príklady trajektórie pohybu ruky
Spracovanie trajektórií modelovania pohybov osôb





(LIRKIS KPI FEI TU Košice)

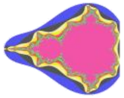
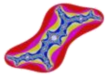
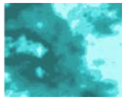
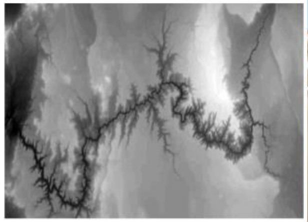


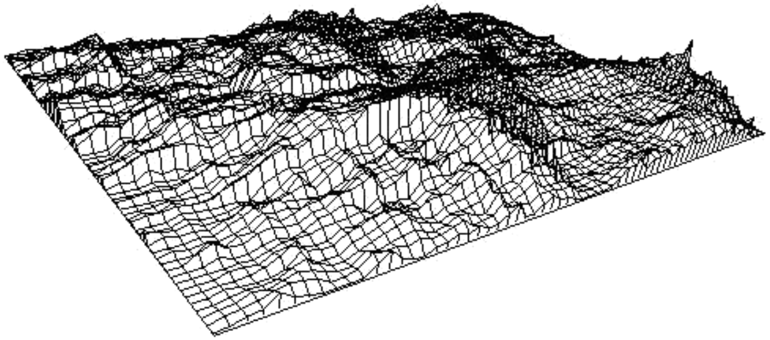
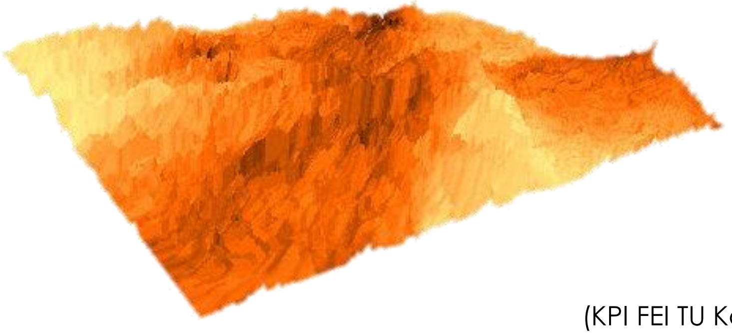
Príklad pohybu ruky po trajektórii definovanej pomocou krivky (rehabilitácia paretickej ruky, inverzná kinematika, pohľad pacienta)

Príklady použitia povrchov

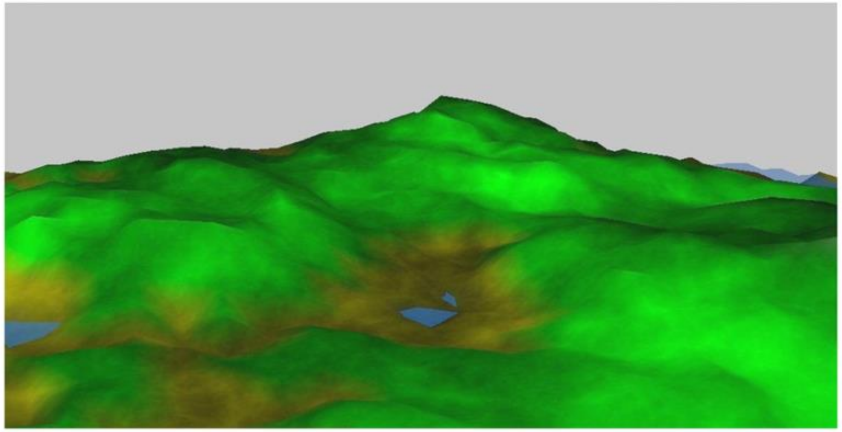
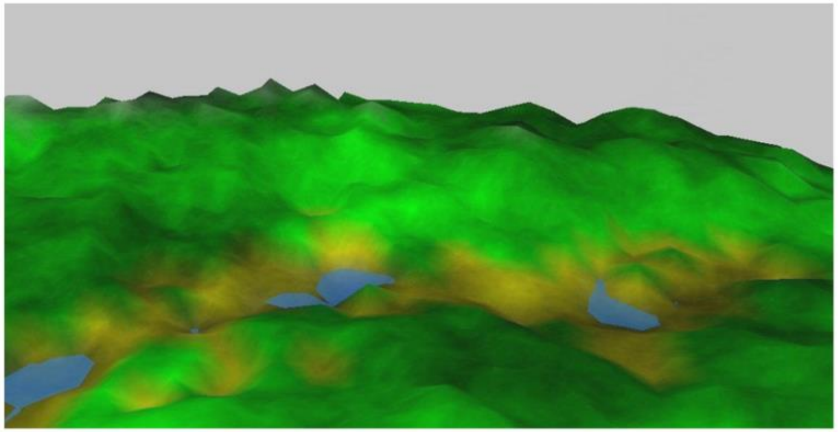
Digitálny terén:

- drôtový, polygonálny,
- preložený plochou vyššej úrovne

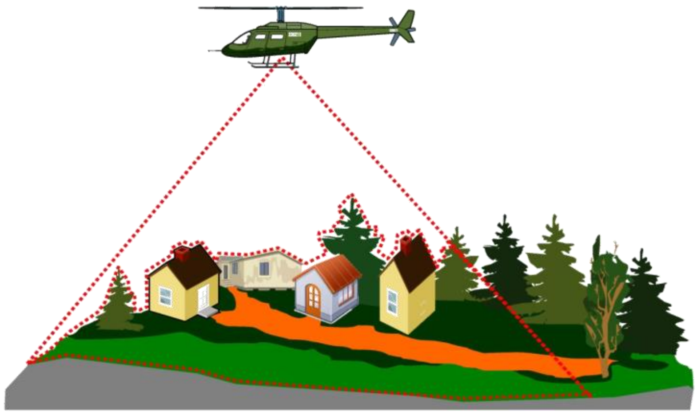





(KPI FEI TU Košice)

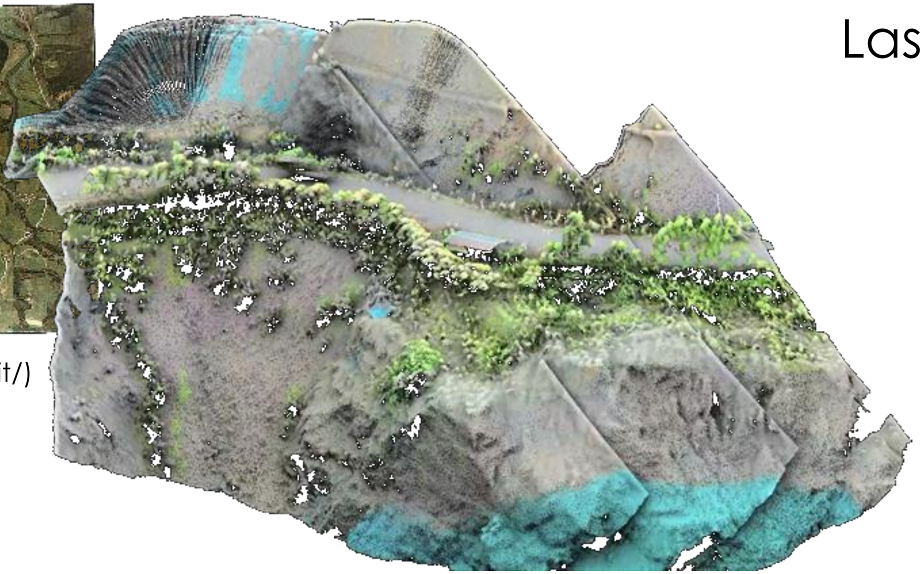



Príklady použitia plôch
pri spracovaní výsledkov 3D skenovania terénu



Lidar

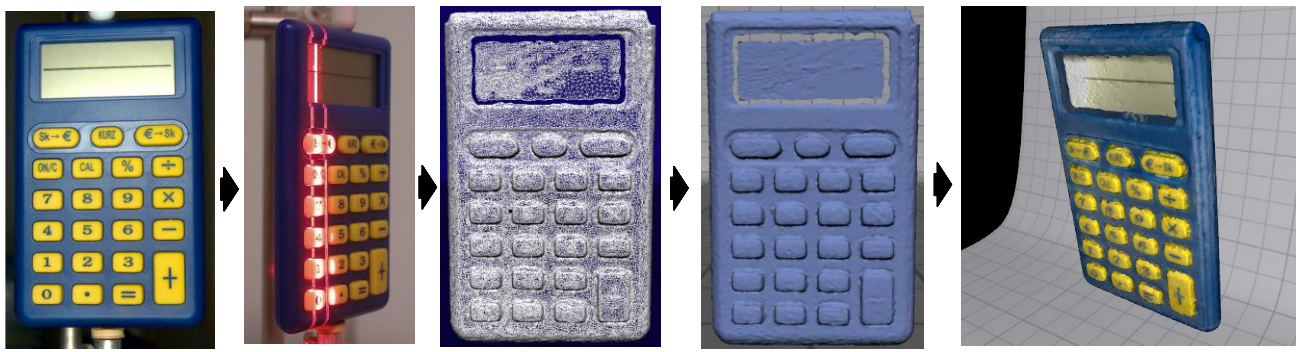
(zdroj https://www.microgeo.it/)



Laserový 3D skener

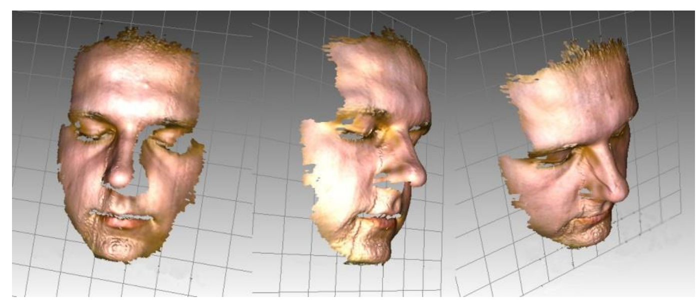
(LIRKIS KPI FEI TU Košice)

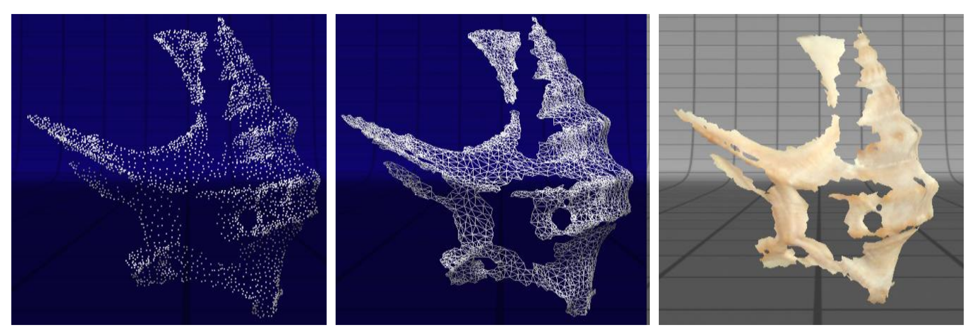
Príklady použitia plôch
pri spracovaní výsledkov 3D skenovania a pri 3D tlači



(a) (b) (c) (d) (e)

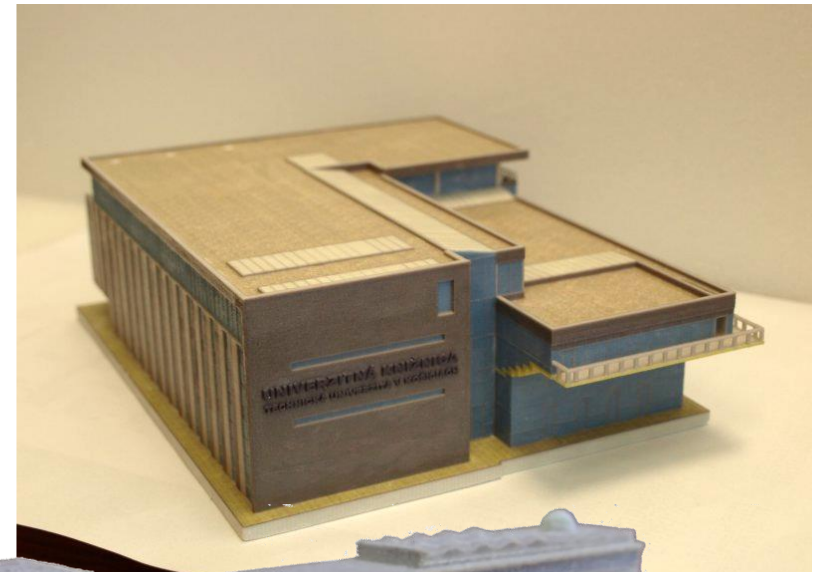
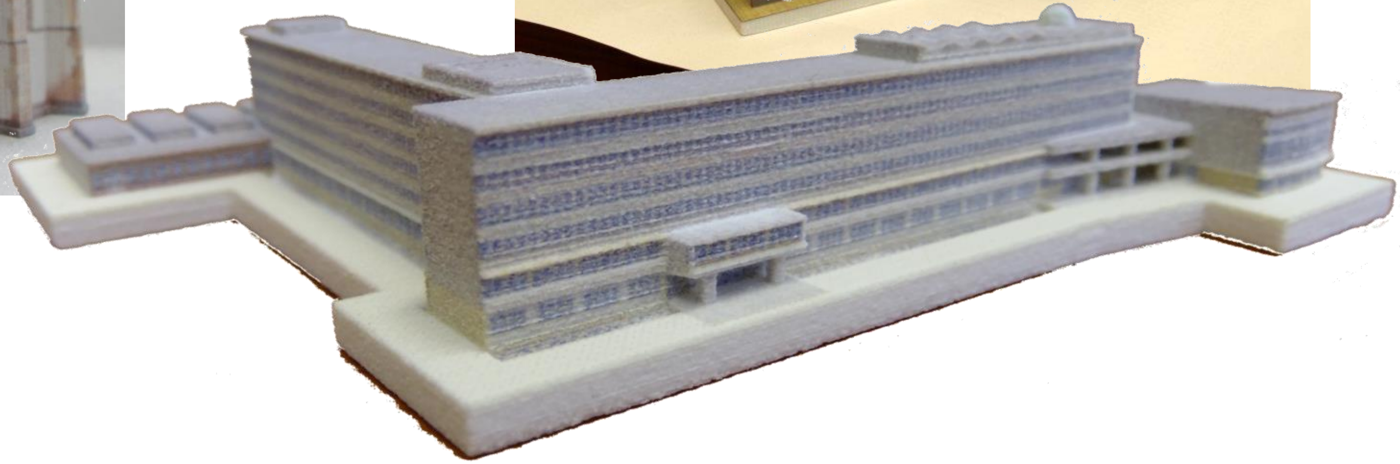
(LIRKIS KPI FEI TU Košice)





(a) (b) (c)

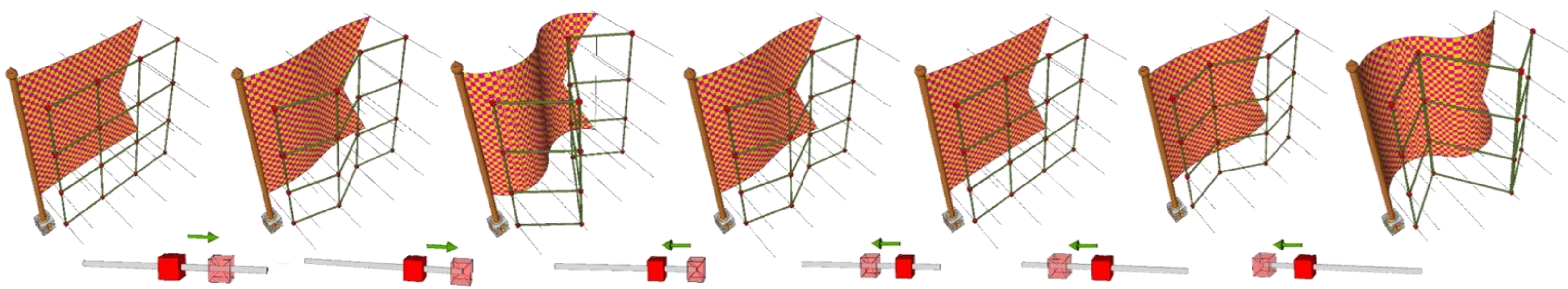
PRÍKLADY POUŽITIA PLÔCH
PRI SPRACOVANÍ VÝSLEDKOV 3D SKENOVANIA A PRI 3D TLAČI

(LIRKIS KPI FEI TU Košice)

Ostatné využitie kriviek a plôch

- pre použitie v časových osiach animácií
- ako vstupné parametre pri simulácii prirodných tvarov a javov
- ako prechodové krivky pri práci s farebným priestorom (napr. pri alfa-miešaní)
- ako základ pre evolučné a genetické algoritmy
- pri spracovaní trajektórií v prípade rôznych fyzikálnych simulácií vrátane inverznej kinematiky a modelovania pohybov osôb a živočíchov (vrátane mimických)



Ukážka riadenia povievania zástavy pomocou riadiach bodov bikubickej plochy

Q & A

branislav.sobota@tuke.sk

Katedra počítačov a informatiky, FEI TU v Košiciach