離散系論 2022　第 07 講 「グラフ理論の基礎」 浅井信吉

講義日程: 7/04/2022 (月・木 1,2,3 講時), 教室: M6

Mail: nasai@u-aizu.ac.jp, Ext: 2746, Office: 303C

https://elms.u-aizu.ac.jp/

作成日: 2022 年 7 月 3 日

6.1　中間試験について

連絡事項

- 中間試験

  日時：07/11, 2022 2, 3 時限
  場所： M6

- 試験範囲

  第 6 回までの講義内容

  演習問題をきちんと復習すること

- 試験室への持ち込み

  持ち込み不可

- 後日メールでもアナウンスをします。不明な点があれば質問してください。

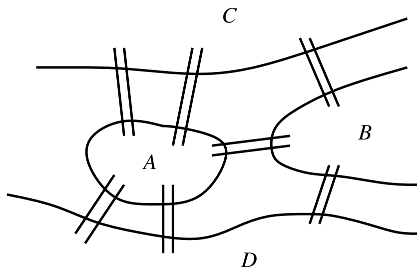

図 1: **ケーニヒスベルクの橋**

7　グラフ理論

7.1　ケーニヒスベルクの橋

18 世紀, 東プロシアの町ケーニヒスベルク (Konigsberg) には図 1 に示す 2 個の島と，7 本の橋があった.「どこから始めて，どこで終わっても良いが 7 本の橋全てを渡って，どの橋も 2 度通らずに町を散歩することができるか?」ケーニヒスベルクの人々はスイスの数学者オイラーにこの問題について手紙を送った.
いわゆる一筆書き問題，周遊可能性 (traversable) の問題である．この問題に対して 1736 年オイラーは定理 1, 定理 2 に述べるように「ケーニヒスベルクの橋」の散歩が不可能であることを証明した．ここで島と川の両岸を頂点で，橋を曲線で置き換えた図 2 の図形を用いた.

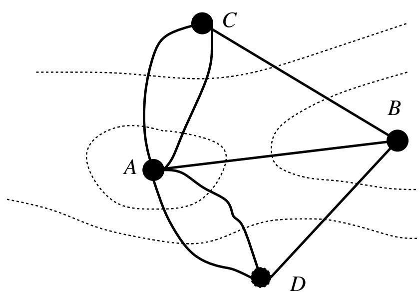

図 2: **ケーニヒスベルクの橋の図形 (グラフ) 表現**

「ケーニヒスベルクの橋」の散歩の可能性

$\Longleftrightarrow$

図形 (グラフ) の周遊可能性

ここでグラフとは頂点及び曲線 (辺) で構成される図形のことである．

定理 1 有限連結グラフがオイラーグラフであるための必要十分条件は，各頂点が偶数次数を持つこと，すなわち，全ての頂点が偶点であることである．

オイラーグラフ：グラフのすべての辺をちょうど一度だけ通るような閉路をもつグラフ

定理 2 2 個の頂点が奇数次数である任意の有限連結グラフは周遊可能である．周遊可能小道は一方の奇点から始まり，他方の奇点で終わる．

定理の持つ意味は重要である．従来の幾何学では辺の長さや辺のなす角度，さらに点の座標や相互間の距離などに基づく性質を問題にした．周回可能性は点や辺に関するそのような従来の幾何学的な性質に無関係である．例えば「ケーニヒスベルクの橋」の周遊可能性は橋の長さ，各々のなす角，ましてや橋の材質や色，島の大きさや形には無関係に決まる性質である．

さらに定理 1, 2 は各点の局所的な性質，すなわち，点を通過する辺の数の偶奇だけ (辺の個数そのものではなく) で決定される，と言う非常に簡潔で美しい結論を与えている点である．まさに"Simple is beautiful" である．以下では座標，距離に依らない別の幾何学であるグラフについて学ぶ．

7.2 グラフ

1. グラフ (graph) G とは以下の二つの集合 V, E から構成される[1]．
   (a) 集合 V: 頂点 (vertex), 点 (point), 節点 (node) の集合．(頂点の個数: $n_v = |V|$)
   (b) 集合 E: 辺 (edge) とよばれる頂点の非順序対の集合．(辺の個数: $n_e = |E|$)

   注意 1 非順序対であるので順序の違いは無関係．

   例題 1 図 3 のグラフの頂点の集合 V を述べよ．

   グラフを $G = G(V, E)(= V \cup E)$ と表記する[2]．コンピュータでのグラフの表現法については 7.7 で述べる．

[1]面 F を含む場合もある

[2]面を含む場合は $G(V, E, F)$ と表記する

2. 頂点の隣接 (adjacent)

   頂点 u, v に対して辺 $\{u, v\}$ (もしくは $(u, v), (v, u)$ と表わす) が存在するとき，頂点 u, v は隣接するとよび $u \sim v$ と表す[3]．

3. グラフの図示

   例題 2 4 つの頂点 A，B，C，D ($V = \{A, B, C, D\}$) を持つ図 3 のグラフの全ての辺の集合 $E = \{e_1, \cdots\}$ を述べよ．
   $e_1 = \{A, B\}$ など．

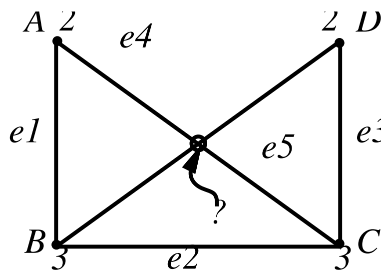

図 3: **グラフの例: 点と辺**

4. 多重グラフ (multigraph)

   図 4 のグラフは頂点 B, C を結ぶ辺が複数ある．同一頂点を結ぶ複数の辺があるグラフを多重グラフをよぶ．u, v の複数の辺を多重辺 (multiple edge)，同一頂点を結ぶ辺をループ (loop) とよぶ．

   $e4, e5$: 多重辺，$e6$: ループ

   注意 2 ： 多重辺，ループのない多重グラフをグラフとよぶこともある．

   多重グラフ (グラフ) が有限個の頂点と辺を持つとき，有限 (finite) であるという．

5. 部分グラフ (subgraph)

   $G(V, E)$ をグラフとする．$V' \subset V$ とし V' の辺の集合を $E' \subset E$ とする．$G(V', E')$ を $G(V, E)$ の部分グラフとよぶ．

7.3 頂点の次数 (degree)

1. 頂点 v の次数

[3]即ち辺とは頂点が隣接することであり $\sim$ は頂点間の関係である

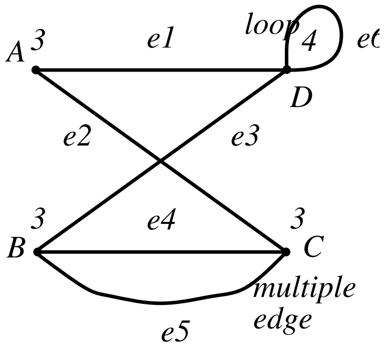

図 4: **多重グラフ**

頂点 v の次数とは v に接続する辺の集合 $N(v) = \{w \in E | w \sim v\}$ の個数 $|N(v)|$ であり，$\deg(v)$ と表わす．ここで $w \sim v$ は頂点 v を辺 w が端点としていることを表している．

> **定理 3** グラフの頂点 v_i の次数 $\deg(v_i)$ の総和は辺の個数 n_e の 2 倍に等しい．
> $$2n_e = \sum_{i=1}^{n_v} \deg(v_i)$$

証明: 各辺はグラフの頂点の次数を計算するときに各辺毎に 2 回ずつ使用されるからである．

> **例題 3 (握手の定理，お見合いの原理)**
> **パーティーに出席した人が握手した回数の総和は，パーティーで握手をかわしたペア数の 2 倍に一致することを示せ．[ヒント: 人 (頂点), 握手した回数 (次数), 握手のペア数 (辺)]**

> **例題 4 図 3，図 4 において定理 3 が成り立つことを確かめよ．**

2. 頂点の次数が奇数のとき，奇点 (odd)，偶数のとき，偶点 (even) とよぶ．

> **例題 5 図 2, 図 3，図 4 において頂点を奇点，偶点に分類せよ．**

> **例題 6 (クイズ) 演習課題 7.9.1**
> **多角形は全ての頂点が偶点である．全ての頂点が奇点であるグラフを作成せよ．**

3. 正則グラフ (regular): 各頂点の次数が一定であること．頂点の次数が d の正則グラフを 「d-正則グラフ」または「次数 d の正則グラフ」と呼ぶ.

> **例題 7 (演習課題 7.9.5)**
> **d-正則グラフの頂点の個数 n_v，辺の個数 n_e の間に $2n_e = dn_v$ が成り立つことを示せ．**

4. $\deg(v) = 0$ の頂点を孤立点 (isolated vertex) とよぶ.

注意 3 任意の $d \in \mathbf{N}$ に対する d-正則グラフが存在する．cf) 演習課題 7.9.6

> **例題 8 3-正則グラフおよび 4-正則グラフを作成せよ．**

7.4 連結性

- 歩道 (walk): 頂点と辺との交互列のことである．

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \cdots, e_{n-1}, v_{n-1}, e_n, v_n$$

ただし辺 e_i は v_{i-1}, v_i を接続しているものとする．

辺 $e_1, \cdots, e_n$ の個数 n を歩道の長さ (length) とよぶ.

簡単化して頂点の列 $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$, もしくは辺の列 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ で表現する．

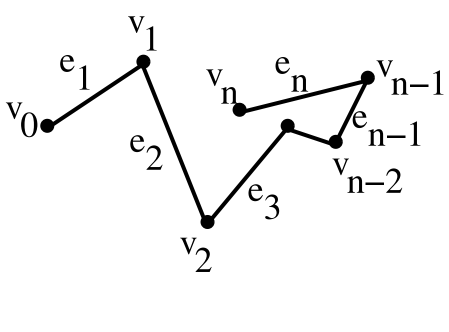

図 5: **歩道の例**

始点と終点が同一のとき，すなわち $v_0 = v_n$ のとき，閉じているという．

- 小道 (trail): 全ての辺が異なる歩道 (頂点を 2 回使用しても良い).
- 道 (path): 全ての頂点が異なる歩道.
- 閉路 (circle): $v_0 = v_n$ を除いた全ての頂点が異なる閉じた歩道.
- 長さ k の閉路を k-閉路という

定理 4 頂点 u から頂点 v への歩道が存在するとき，かつそのときに限り， u から v への道が存在する.

1. 連結

   グラフの任意の 2 頂点の間に道が存在するとき，グラフは連結 (connected) であるとよぶ.

2. 連結成分: グラフ $G(V, E)$ の連結部分グラフ H が連結成分 (connected component) とよばれるのは, H より大きな連結部分グラフで H を含むものが存在しないときである.

   任意のグラフは連結成分で分割できる．グラフ G の頂点 u, v が連結であるとき， 関係 $u \sim v$ を定義する．$\sim$ は同値関係である．同値関係で G の点を分類したとき，連結成分は同値類に対応する[4].

3. 頂点 u, v 間の距離 (distance) $d(u, v)$:

   u, v 間の最短道の長さ.

   注意 4 ：物理的な距離ではない.

4. 連結グラフ $G(E, V)$ の直径:

   $\forall u, v \in E$ に対する $d(u, v)$ の最大値

$$\delta(G) = \max_{u,v \in G} d(u, v)$$

例題 9 図 3，図 4 のグラフの直径を求めよ.

例題 10 ユーザーを頂点に対応させユーザー間でメールのやり取りがあったことを辺で表わすグラフを考える．このグラフの連結成分は何に対応するか，直径は何を表わすかを述べよ.

[4]第 3 講「関係」の 3.8「同値関係と集合の分割」を復習せよ.

7.5 定理 1 の証明

- オイラーグラフ : グラフ G の全ての辺を通るオイラー回路を持つグラフ.
- 全ての辺をただ 1 度通る閉じた道をオイラー回路 (Eulerian circuit) とよぶ.
- 全ての辺をただ 1 度通る小道をオイラー小道 (Eulerian trail) とよぶ.

有限連結グラフについて

オイラーグラフである

$\Longleftrightarrow$

全ての頂点が偶点 (偶次数を持つこと) である.

証明: オイラーグラフであるとき全ての頂点が偶点であることを示す．対偶「ある頂点が奇点 (奇次数を持つ) であるとき，オイラーグラフでない」ことを示す．一筆書の経路をたどるとき出発点及び終着点以外では頂点に入り出ることになるのでたどった辺を消すことにすると偶数個数毎に減ることになる．これを「減らし歩き」とよぶ．奇点とするとオイラー回路を持たないことは「減らし歩き」により示せる.

逆を示す．各頂点が偶点であるときオイラーグラフであることを頂点の個数 m に関する数学的帰納法で示す．$m = 1$ のとき頂点が偶点であれば図 6 に示すように頂点を始終端とするループで構成されることになるのでオイラーグラフである.

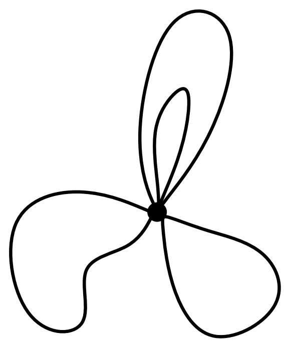

図 6: $m = 1$ **の場合**

頂点の個数が m 未満の有限連結グラフの全ての頂点が偶点であるとき m に対しても成り立つことを示せば良い[5]．図 7 に示すように頂点 v は偶点であるのでその接続する辺 $e_1, e_2, \cdots, e_{2n-1}, e_{2n}$ を 2 つずつペアにして $(e_1, e_2), (e_3, e_4), \cdots, (e_{2n-1}, e_{2n})$ を頂点 v を削除して直接結ぶことにする．頂点 v を削除したので連結グラフは非連結になる可能性はあるが，連結な部分グラフ毎に見ると頂点の個数が m 未満であり全ての頂点は偶点であるので帰納法の仮定からオイラーグラフとなる．従って一つの連結成

[5]第 5 講「再帰と帰納」の数学的帰納法の変形 (1) を参照せよ.

分に着目すると直接結んだ辺の一方を出発点として連結成分の全ての辺を周遊して出発した辺とペアのもう一方の辺から戻って来る経路が作成できることになる．この経路上では直接結んだ他の辺が含まれている可能性もある．いずれにせよもとの頂点を付け加えて，連結成分毎に v を出発点，終点としてたどることで全ての辺をたどることが可能となる．この手続きを連結成分毎に行うことで全ての辺をたどること周遊可能性が示された．すなわちオイラーグラフであることが示された．

例題 11 定理 1，定理 2 を用いて図 2 の周遊可能性を判定せよ．

7.6 ハミルトングラフ (Hamilton graph)

ハミルトンの問題

グラフが各頂点をちょうど１回だけ含む閉じた歩道を持つかどうか．

ハミルトン閉路を持つグラフをハミルトングラフとよぶ．オイラーの問題は全ての辺を通過することを求めており，頂点は何回通過しても良いのに対して，ハミルトンの問題は全ての頂点を一度だけ通過することを求めており，全ての辺を通過しなくても良い．定理 1 のオイラーの問題と違って簡単な判定法が存在しない．グラフの持つ非常に不思議な性質である．ハミルトングラフとなるための十分条件として以下の Hall の定理がある．

定理 5 頂点数を $p \geq 3$ のグラフ G で隣接しない任意の２頂点 $u, v(u \neq v)$ に対して $\deg(u)+\deg(v) \geq p$ を満たすならば，G はハミルトングラフである．

ハミルトングラフに関連して正十二面体[6]を使ったハミルトンの世界一周パズルが知られている．

例題 12 ハミルトンの世界一周パズル：正十二面体の２０個の頂点のそれぞれに世界各国の都市の名前をつけます．例えば，その頂点のひとつ「ロンドン」から出発して，全ての都市を一度だけ訪問して，また「ロンドン」に戻ってくる経路はあるでしょうか？

ハミルトンの問題に関連して以下の巡回セールスマン問題 (Traveling Salesman Problem) が知られている．この問題では辺に距離や料金などの数値が割り当てられている．

[6]第１０講「平面グラフ」の定理３と関連させて学ぶ．

巡回セールスマン問題

全ての頂点を含む閉じた最短歩道を見つけること．

分かりやすく述べれば，都市の集合と各 2 都市間の移動コスト (距離や料金) が与えられたとき，全ての都市をちょうど一度ずつたどり出発地に戻る巡回路 (閉じた歩道) の中で総コストが最小のものを求める (セールスマンが全都市を 1 回だけ巡回する場合の最短経路を求める) 組み合せ最適化問題である．問題の難しさ (計算量) は頂点の個数に対応している．頂点の数が増加すると解法が難しくなること (NP 困難のクラス) が知られている．

7.7 グラフの行列表現

グラフをコンピュータで扱う上で必要な表現法
n: 辺の数，m: 頂点の数

- 辺行列: $\boldsymbol{B}$ ($n \times 2$ 行列)

  辺の構成頂点を表現する．図 8 の辺行列 $\boldsymbol{B}$ を以下に示す．$e5, \cdots, e8$ に関する要素を書き込んで完成せよ[7]．

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{c|cc} e1 & 1 & 2 \\ e2 & 1 & 5 \\ e3 & 1 & 3 \\ e4 & 2 & 3 \\ e5 & & \\ e6 & & \\ e7 & & \\ e8 & & \end{array} \right)$$

- 隣接行列 (adjacency matrix): $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ ($m \times m$ 行列)

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j \text{ が辺である．即ち} \\ & \quad v_i, v_j \text{ が隣接している．)} \\ 0 & (\text{それ以外．)} \end{cases}$$

  図 8 の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を以下に示す．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  $a_{ij} = a_{ji}$ であるので $\boldsymbol{A}$ は対称行列である．

[7]行列 $\boldsymbol{B}$ の $e_1, e_2, \cdots$ などはわかりやすさのために表示している．

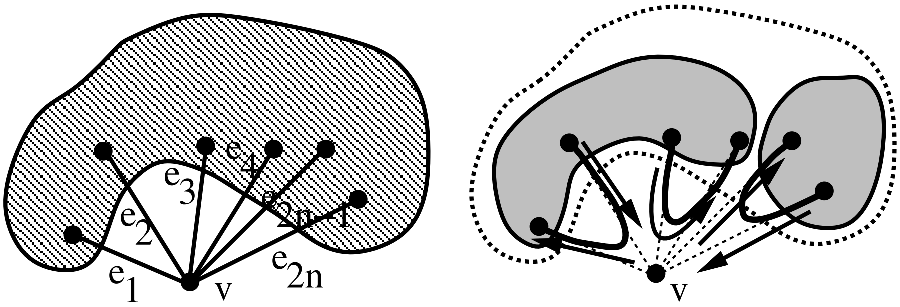

図 7: **頂点削除でできるグラフ**

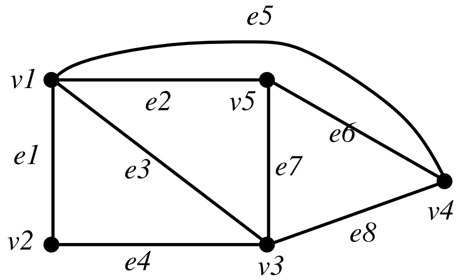

図 8: **グラフの行列表現**

> **例題 13 なぜ $a_{ij} = a_{ji}$ となるのか，理由を述べよ．**

> **例題 14 隣接行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ が与えられた時，頂点 i の次数を求めよ．**

グラフが多重グラフの時，隣接行列を以下のように拡張定義する．

$$a_{ij} = \begin{cases} n & (n \text{ は } v_i, v_j \text{ を結ぶ辺の個数．即ち} \\ & \quad v_i, v_j \text{ が } n \text{ 本の辺で隣接している．}) \\ 0 & (\text{それ以外．}) \end{cases}$$

> **例題 15 図 4 の多重グラフの隣接行列を求めよ．**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注意 5 多重グラフの隣接行列は対称行列である．

> **例題 16** 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ に対して $\boldsymbol{A}^2$ が長さ 2 の歩道の個数に対応することを示せ．

頂点 i, j 間の長さが 2 の歩道は $i \to k \to j$ のように途中に頂点 k を経由して得られる．$i \to k$ の辺の個数は a_{ik} であり， $k \to j$ の辺の個数は a_{kj} で与えられる．従って $i \to k \to j$ の経路の個数は積 $a_{ik} \cdot a_{kj}$ で与えられる．中継点を $k = 1, 2, \cdots, n$ と変化させて求めた経路数の和で総個数を計算できることになるので，その経路の個数は以下の積和で計算される．

$$b_{ij} = a_{i1} \cdot a_{1j} + a_{i2} \cdot a_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot a_{nj}$$

従って $\boldsymbol{A}^2$ で与えられることになる．

> **定理 6** $\boldsymbol{A}$ を $m(> 1)$ 頂点からなるグラフの隣接行列とする．このとき，行列 $\boldsymbol{A}^n$ の ij 成分は頂点 v_i から v_j への長さ n の歩道の個数を与える．

- G が m 頂点を持つので v_i, v_j 間の任意の道の長さは $m-1$ 以下である．従って以下の行列の和は v_i, v_j 間の道がないときに限り ij 成分が 0 になる．

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^{m-1}$$

注意 6 : $\boldsymbol{A}$ が対称行列なので $\boldsymbol{A}^n$ も対称行列となる．従って計算した結果が非対称になっていれば計算間違いであることになる．

> **例題 17** $\boldsymbol{A}$ が対称行列であれば $\boldsymbol{A}^n \quad (n \geq 1)$ も対称行列となることを示せ．さらに $\sum_n \boldsymbol{A}^n$ も対称行列となることを示せ．

- 接続行列 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$ ($m \times n$ 行列)

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } v_i \text{ が 辺 } e_j \text{ に接続}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

例題 18 図 8 の接続行列 M を作成せよ．

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{pmatrix}$$

- 連結行列 (connection matrix): $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ または } v_i, v_j \text{ 間の道がある} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

注意 7 連結行列 $\boldsymbol{C}$ は対称行列である．

- 隣接行列の和 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 + \cdots + \boldsymbol{A}^{m-1}$ と連結行列 $\boldsymbol{C}$ は主対角成分以外で同じ 0 成分を持つ．

7.8 グラフの同型

1. グラフの同型 (isomorphic/isomorphism)

   二つのグラフ $G(V, E), G^*(V^*, E^*)$ の間の 1 対 1 かつ上への写像 $f : V \to V^*$ が辺の情報を保存するとき，同型写像 (isomorphism) とよび， G, G^* は同型 (isomorphic) とよぶ．

   $$\{u, v\} \text{ が辺} \leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \text{ が辺}$$

   頂点の配置を変え頂点の名前を付け替えたグラフ

   同型写像は頂点の隣接性を保存

   例題 19 図 9 の二つのグラフは同型である．同型写像 f を作成せよ．

   解答: $1 \to a, 2 \to b, \cdots, 6 \to f$ とする．

2. グラフの同相 (homeomorphic)

   グラフ G, G^* が与えられたとき，同型なグラフの辺に頂点を加えて辺を分割し新たなグラフを作成して G, G^* が得られるときをいう．

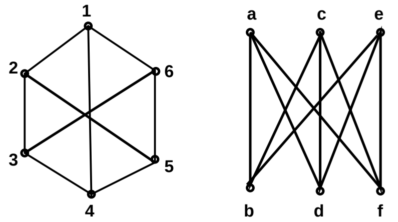

図 9: **同型なグラフの例**

7.9 第 7 講 演習課題

(必須) のついている課題は必須演習課題で採点評価対象です．必ず取り組んでください．

7.9.1 奇数次数のグラフ (クイズ/必須)

多角形は全ての頂点が偶点である．全ての頂点が奇点であるグラフを作成せよ．

7.9.2 隣接行列と多重グラフ

次の隣接行列に対応する多重グラフを描け．ただし行列の要素の順に頂点を v_1, v_2, v_3, v_4 とする．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7.9.3 グラフの隣接行列，接続行列 (必須)

図 10 のグラフの (1) 隣接行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, (2) 接続行列 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$, (3) 連結行列 $\boldsymbol{C}$ を求めよ．(4) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3$ と連結行列 $\boldsymbol{C}$ の主対角以外の成分で同じ 0 成分を持つことを示せ．

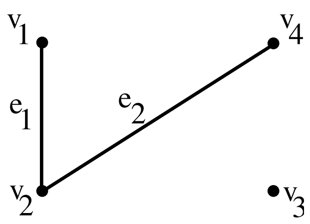

図 10: グラフの隣接行列，接続行列

7.9.4 周遊可能性 (必須)

図 11 の多重グラフ (a), (b), (c), (d) の周遊可能性を判定せよ．余裕のある学生は周遊可能なグラフの一筆書を行え．

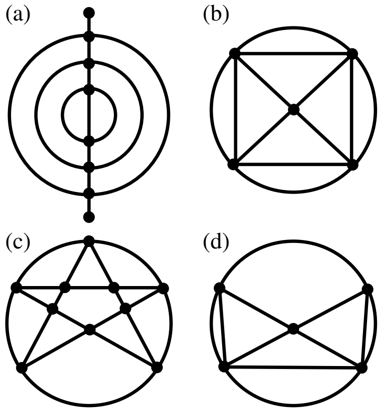

図 11: グラフの周遊可能性の判定

7.9.5 頂点の次数の性質 (必須)

グラフの頂点の個数を n_v，辺の個数を n_e とする．小問１に答えよ．

1. 次数が奇数の頂点の個数は偶数であることを示せ。
2. 全ての頂点での次数が奇数のグラフでは頂点の個数 n_v は偶数であることを示せ.
3. 正則グラフの性質
   (a) 頂点での次数が一定 d のグラフ (d-正則グラフ) では，以下が成り立つことを示せ.
   $$2n_e = d \cdot n_v$$
   (b) 頂点での次数が一定のグラフでは頂点次数 d または頂点の個数 n_v は偶数であることを示せ.
   この性質から「３点で構成される 3-正則グラフは存在しない」ことがわかる

7.9.6 グラフの生成

グラフ $G = (V, E)$ の頂点・辺 V, E をコピーして V', E' とし $\tilde{V} = (V, V')$ とする． V, V' の対応する頂点 v_i, v_i' を結ぶ辺の集合を E'' とし $\tilde{E} = (E, E', E'')$ とする．この手順で生成できるグラフを $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ とする．

1. $G = (V, E)$ において $v = |V|, e = |E|$ とするとき，$\tilde{G}$ の頂点数，辺数 $\tilde{v}, \tilde{e}$ を v, e で表せ.
2. G を二つの頂点とそれらを結ぶ辺で構成されるグラフとする．G に対して $\tilde{G}$ を図示せよ.
3. G を立方体の頂点と辺で構成されるグラフとする．G に対して $\tilde{G}$ を図示せよ.
4. 小問２のグラフ G を γ_1 とし，$\gamma_{n+1} = \tilde{\gamma}_n$ で生成されるグラフ γ_n を n 次元超立方体 (Hyper Cube) と呼ぶ．γ_n の頂点，辺の個数 v_n, e_n および頂点次数 d_n を求めよ.

7.9.7 連結行列の計算

図８のグラフの 5×5 の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が与えられたとき，連結行列 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{A}$ から計算するプログラムを作成し計算せよ.
行数が多いですが，サンプルプログラムを以下に示します.

```
#include <stdio.h>
#define NV 5
main(){
  int A[NV][NV]
    = { { 0, 1, 1, 1, 1, }, \
        { 1, 0, 1, 0, 0, }, \
        { 1, 1, 0, 1, 1, }, \
        { 1, 0, 1, 0, 1, }, \
        { 1, 0, 1, 1, 0, } };

  int C[NV][NV], B[NV][NV], S[NV][NV];
  int temp, step;
  int i, j, k;
  for( i=0; i<NV; i++){
    for( j=0; j<NV; j++ )
      printf("%3d", A[i][j] );
    printf("\n");
  }
  for( i=0; i<NV; i++)
    for( j=0; j<NV; j++ ){
      B[i][j] = A[i][j];
      S[i][j] = A[i][j];
    }
  step = 2;
  while( step < NV ){
    for( i=0; i<NV; i++){
      for( j=0; j<NV; j++ ){
        temp = 0;
        for( k=0; k<NV; k++)
          temp += B[i][k] * A[k][j];
        C[i][j] = temp;
      }
    }
    printf("step: %d\n", step );
    for( i=0; i<NV; i++){
      for( j=0; j<NV; j++ ){
        B[i][j] = C[i][j];
        S[i][j] += C[i][j];
        printf("%3d", B[i][j] );
      }
      printf("\n");
    }
    step++;
  }
  printf(" A + A^2 + ... + A^{m-1} = \n");
  for( i=0; i<NV; i++){
    for( j=0; j<NV; j++ )
      printf("%3d", S[i][j] );
    printf("\n");
  }
  printf(" Connection Matrix = \n");
  for( i=0; i<NV; i++){
    for( j=0; j<NV; j++ ){
      if( i == j ) temp = 1;
      else {
        temp = S[i][j];
        if( temp != 0 ) temp = 1;
      }
      printf("%3d", temp );
    }
    printf("\n");
  }
}
```

DS/Quiz-07	**(7/04/2022)**
氏名:	**学籍番号:**