Уравнение Эйлера — Лагранжа

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

Уравне́ния Э́йлера — Лагра́нжа (в физике также **уравнения Лагранжа — Эйлера**, или **уравнения Лагранжа**) являются основными формулами вариационного исчисления, с помощью которых ищутся стационарные точки и экстремумы функционалов. В частности, эти уравнения широко используются в задачах оптимизации и совместно с принципом стационарности действия используются для вычисления траекторий в механике. В теоретической физике вообще это (классические) уравнения движения в контексте получения их из написанного явно выражения для действия (лагранжиана).

Использование уравнений Эйлера — Лагранжа для нахождения экстремума функционала в некотором смысле аналогично использованию теоремы дифференциального исчисления, утверждающей, что лишь в точке, где первая производная функции обращается в ноль, гладкая функция может иметь экстремум (в случае векторного аргумента приравнивается нулю градиент функции, то есть производная по векторному аргументу). Точнее говоря, это прямое обобщение соответствующей формулы на случай функционалов — функций бесконечномерного аргумента.

Уравнения были получены Леонардом Эйлером и Жозефом-Луи Лагранжем в 1750-х годах.

Содержание

Формулировка

Пусть задан функционал

$$J(f) = \int\limits_a^b F(x, f(x), f'(x))\, dx$$

на пространстве гладких функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, где через f' обозначена первая производная f по x.

Предположим, что подынтегральная функция $F(x, f(x), f'(x))$, дважды непрерывно дифференцируема. Функция F называется функцией Лагранжа, или лагранжианом.

Если функционал J достигает экстремума на некоторой функции f, то для неё должно выполняться обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0,$$

которое называется *уравнением Эйлера — Лагранжа.*

Примеры

Рассмотрим стандартный пример: найти кратчайший путь между двумя точками плоскости. Ответом, очевидно, является отрезок, соединяющий эти точки. Попробуем получить его с помощью уравнения Эйлера — Лагранжа в предположении, что *кратчайший путь существует и является гладкой кривой.*

Пусть точки, которые надо соединить, имеют координаты (a, c) и (b, d). Тогда длина пути $y(x)$, соединяющего эти точки, может быть записана следующим образом:

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Уравнение Эйлера — Лагранжа для этого функционала принимает вид:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0,$$

откуда получаем, что

$$\frac{dy}{dx} = C \Rightarrow y = Cx + D.$$

Таким образом, получаем прямую линию. Учитывая, что $y(a) = c$, $y(b) = d$, т. е. что она проходит через исходные точки, получаем верный ответ: отрезок прямой, соединяющий точки.

Многомерные вариации

Существует также множество многомерных вариантов уравнений Эйлера — Лагранжа.

- Если $q(t)$ — путь в n-мерном пространстве, то он доставляет экстремум функционалу

$$J = \int_{t1}^{t2} L(t, q(t), q'(t))\, dt$$

только если удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q'_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \; \forall k = 1, 2, \ldots n$$

В физических приложениях, когда L является лагранжианом (имеется в виду лагранжиан некоторой физической системы; то есть если $\mathcal{J}$ — действие для этой системы), эти уравнения — (классические) уравнения движения такой системы. Это утверждение может быть прямо обобщено и на случай бесконечномерного q.

- Другое многомерное обобщение получается при рассмотрении функции n переменных. Если Ω — какая-либо (в данном случае n-мерная) поверхность, то

$$J = \int_{\Omega} L(f, x_1, \ldots, x_n, f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})\, d\Omega,$$

где $x_i = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ — независимые координаты, $f = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $f_{x_i} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$,

доставляет экстремум, если только f удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial L}{\partial f} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial L}{\partial f_{x_i}} = 0.$$

Если $n = 2$ и L — функционал энергии, то эта задача называется «минимизацией поверхности мыльной плёнки».

- Очевидная комбинация двух описанных выше случаев используется для получения уравнений движения распределенных систем, таких как физические поля, колеблющиеся струны или мембраны и т.п.

В частности, вместо статического уравнения равновесия мыльной плёнки, приведённого в качестве примера в предыдущем пункте, имеем в этом случае динамическое уравнение движения такой плёнки (если, конечно, нам удалось изначально записать для неё действие, то есть кинетическую и потенциальную энергию).

История

Уравнение Эйлера — Лагранжа было получено в 1750-х годах Эйлером и Лагранжем при решении задачи об изохроне. Это проблема определения кривой, по которой тяжёлая частица попадает в фиксированную точку за фиксированное время, независимо от начальной точки.

Лагранж решил эту задачу в 1755 году и отослал решение Эйлеру. Развитый впоследствии метод Лагранжа и применение его в механике привело к формулировке лагранжевой механики. Переписка учёных привела к созданию вариационного исчисления (термин предложил Эйлер в 1766 году).

Доказательство

Вывод одномерного уравнения Эйлера — Лагранжа является одним из классических доказательств в математике. Оно основывается на основной лемме вариационного исчисления.

Мы хотим найти такую функцию f, которая удовлетворяет граничным условиям $f(a) = c$, $f(b) = d$ и доставляет экстремум функционалу

$$J = \int\limits_a^b F(x, f(x), f'(x))\, dx.$$

Предположим, что F имеет непрерывные первые производные. Достаточно и более слабых условий, но доказательство для общего случая более сложно.

Если f даёт экстремум функционалу и удовлетворяет граничным условиям, то любое слабое возмущение f, которое сохраняет граничные условия, должно увеличивать значение J (если f минимизирует его) или уменьшать J (если f максимизирует).

Пусть $\eta(x)$ — любая дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Определим

$$J(\varepsilon) = \int\limits_a^b F(x, f(x) + \varepsilon\eta(x), f'(x) + \varepsilon\eta'(x))\, dx.$$

где ε — произвольный параметр.

Поскольку f даёт экстремум для $J(0)$, то $J'(0) = 0$, то есть

$$J'(0) = \int\limits_a^b \left[\eta(x)\frac{\partial F}{\partial f} + \eta'(x)\frac{\partial F}{\partial f'}\right]\, dx = 0.$$

Интегрируя по частям второе слагаемое, находим, что

$$0 = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right]\eta(x)\, dx + \left[\eta(x)\frac{\partial F}{\partial f'}\right]_a^b.$$

Используя граничные условия на η, получим

$$0 = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'}\right]\eta(x)\, dx.$$

Отсюда, так как $\eta(x)$ — любая, следует уравнение Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} = 0.$$

Если не вводить граничные условия на $f(x)$, то также требуются условия трансверсальности:

$$\frac{\partial F}{\partial f'}(a, f(a), f'(a)) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial f'}(b, f(b), f'(b)) = 0$$

Обобщение на случай с высшими производными

Лагранжиан может также зависеть и от производных f порядка выше, чем первый.

Пусть функционал, экстремум которого нужно найти, задан в виде:

$$J = \int\limits_a^b F(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x))\, dx.$$

Если наложить граничные условия на f и на её производные до порядка $n-1$ включительно, а также предположить, что F имеет непрерывные частные производные порядка $2n$ [1], то можно, применяя интегрирование по частям несколько раз, вывести аналог уравнения Эйлера — Лагранжа и для этого случая:

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial f''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial f^{(n)}} = 0.$$

Это уравнение часто называют **уравнением Эйлера — Пуассона**.

Два лагранжиана, отличающееся на полную производную, дадут одни и те же дифференциальные уравнения, однако максимальный порядок производных в этих лагранжианах может быть различный. Например, $L_1 = (f'(x))^2$, $L_2 = -f(x)f''(x)$, $L_1 - L_2 = \frac{d}{dx}(f(x)f'(x))$. Чтобы получить дифференциальное уравнение на экстремум, к L_1 достаточно применить «обычное» уравнение Эйлера — Лагранжа, а для L_2, поскольку он зависит от второй производной, нужно использовать **уравнение Эйлера — Пуассона** с соответствующим слагаемым:

$$\frac{\partial L_1}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L_1}{\partial f'} = -2f''(x),$$
$$\frac{\partial L_2}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L_2}{\partial f'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L_2}{\partial f''} = -2f''(x),$$

и в обоих случаях получится одно и то же дифференциальное уравнение $-2f''(x) = 0$.

Примечания

1. *А. М. Денисов, А. В. Разгулин.* Обыкновенные дифференциальные уравнения (http://mph.cs.msu.ru/stud/2009_ODU-1-RazgulinDenisov.pdf). Дата обращения: 11 июня 2021. Архивировано (https://web.archive.org/web/20210611155612/http://mph.cs.msu.ru/stud/2009_ODU-1-RazgulinDenisov.pdf) 11 июня 2021 года.

Литература

- *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. — М.: Наука, 1979
- *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия: Методы и приложения. — М.: Наука, 1979
- *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.
- *Зеликин М. И.* Однородные пространства и уравнение Риккати в вариационном исчислении, — Факториал, Москва, 1998.
- *Зеликин М. И.* Оптимальное управление и вариационное исчисление, — УРСС, Москва, 2004.

Ссылки

- *Weisstein, Eric W.* Euler-Lagrange (https://mathworld.wolfram.com/Euler-LagrangeDifferentialEquation.html) (англ.) на сайте Wolfram MathWorld.
- *Calculus of Variations (https://planetmath.org/CalculusOfVariations)* (англ.) на сайте PlanetMath.
- Summary with some historical information (http://www.bookrags.com/sciences/mathematics/euler-lagrange-equation-wom.html)
- Examples (https://web.archive.org/web/20170609215523/http://www.exampleproblems.com/wiki/index.php/Calculus_of_Variations) — задачи из вариационного исчисления.