

ÓE

KANDÓ KÁLMÁN VILLAMOSMÉRNÖKI KAR

Dr. Apor Péter

## **AUTOMATIKA**

Előadásanyag levelező hallgatóknak

Elektronikus jegyzet

BMF-KVK-2056

Budapest, 2014

3. átdolgozott kiadás

Lektorok:

Badacsonyi Ferenc

Dr. Semperger Sándor

## Tartalomjegyzék

1. AZ AUTOMATIKA (IRÁNYÍTÁSTECHNIKA) ALAPFOGALMAI .....	4
1.1 Az Irányítástechnika tárgyköre, az irányítás fogalma .....	4
1.2 Az irányítás jelei .....	6
1.3 Az irányítási rendszer ábrázolása, a rendszer részei .....	8
1.3.1 A szerkezeti (technológiai) vázlat .....	8
1.3.2 Funkcionális vázlat, funkcionális részek .....	9
1.3.3 A hatásvázlat, az átviteli tag fogalma .....	11
1.4 A vezérlés és a szabályozás összehasonlítása .....	11
1.5 A vezérlések felosztása .....	12
1.6 A szabályozások felosztása .....	13
2. FOLYTONOS IDEJŰ SZABÁLYOZÁSOK .....	15
2.1 Az átviteli tag jellemzése .....	15
2.2 Átviteli tagok vizsgálati módjai .....	15
2.2.1 Állandósult állapotbeli vizsgálat .....	15
2.2.2 Differenciálegyenlet-módszer .....	16
2.2.3 Vizsgálat az operátortartományban .....	19
2.2.4 Vizsgálat a frekvenciatartományban .....	21
2.2.4.1 A frekvenciafüggvény bevezetése .....	21
2.2.4.2 A frekvenciafüggvény ábrázolási módjai .....	22
2.3 Átviteli tagok összekapcsolása .....	23
2.4 Hatásvázlatok átalakítása .....	24
2.5 Az átviteli tagok csoportosítása .....	25
2.6 Egyszerű átviteli tagok .....	26
2.6.1 Arányos tagok .....	26
2.6.1.1 Ideális arányos tag (P tag) .....	26
2.6.1.2 Egytárolós tag (T1 tag) .....	27
2.6.1.3 Kéttárolós tag (T2 tag) .....	30
2.6.1.4 Egytárolós és kéttárolós arányos tag (PT1 és PT2 tag) .....	35
2.6.2 Ideális integráló tag (I tag) .....	35
2.6.3 Ideális differenciáló tag (D tag) .....	36
2.6.4 Holtidős arányos tag (H és HP tag) .....	38
2.6.5 Az összefüggések áttekintő táblázata .....	40
2.7 Összetett átviteli tagok .....	41
2.7.1 Arányos-differenciáló tag (PD tag) .....	41
2.7.2 Arányos-integráló tag (PI tag) .....	42
2.8 A szabályozásokkal szemben támasztott követelmények .....	43
2.8.1 Szabályozások stabilitásának vizsgálata .....	43
2.8.1.1 Matematikai stabilitási kritérium .....	44
2.8.1.2 Nyquist stabilitási kritérium .....	45
2.8.1.3 Stabilitási kritérium a felnyitott kör Bode-diagramján .....	47
2.8.2 A szabályozások minőségi jellemzői .....	49
2.9 A szabályozások típusszám szerinti csoportosítása .....	51
2.10 Szabályozások alapjelkövetési és zavarelhárítási tulajdonságai .....	52
2.10.1 A szabályozások alapjelkövetési tulajdonságai .....	53
2.10.2 A szabályozások zavarelhárítási tulajdonságai .....	55
2.10.3 Az értéktartó és a követő szabályozások hibái .....	57
2.11 Szabályozások kompenzálása .....	57
2.11.1 P kompenzálás .....	58
2.11.2 PI kompenzálás .....	58
2.11.3 Integráló típusú szabályozás PI kompenzálása .....	60
2.11.4 PD kompenzálás .....	61
2.11.5 PID kompenzálás .....	62
2.11.6 A szabályozók beállítási adatai .....	63
2.11.7 Kompenzálás a szabályozott szakasz átmeneti függvénye alapján .....	66
3. FOLYTONOS IDEJŰ SZABÁLYOZÁSI KÖRÖK VIZSGÁLATA	
GYÖK-HELYGÖRBE MÓDSZERREL .....	70

3.1 A gyök-helygörbe fogalma és a módszer alapösszefüggései .....	70
3.2 Stabilitás- és minőségvizsgálat a gyök-helygörbe alapján .....	72
4. STATIKUS NEMLINEARITÁSOK ÉS KEZELÉSÜK .....	76
4.1 Bevezetés .....	76
4.2 A szakaszonkénti linearizálás módszere .....	77
4.3 A leírófüggvény-módszer .....	78
4.3.1 A leíró függvény fogalma, alkalmazhatósága .....	78
4.3.2 A leíró függvény meghatározásának szemléltetése .....	79
4.3.3 Stabilitás-vizsgálat a leíró függvény segítségével .....	80
4.3.4 A stabilitási viszonyok értékelése két fontos nemlinearitás esetére .....	82
5. DISZKRÉT IDEJŰ RENDSZEREK .....	84
5.1 Mintavételezés, a mintavételezett jel fogalma és matematikai leírása .....	84
5.2 A fontosabb mintavételezett függvények z-transzformáltja .....	86
5.3 Az inverz z-transzformáció .....	88
5.4 Az eltolási operátor .....	89
5.5 A z-transzformáció tételei .....	90
5.6 Kódolás, dekódolás .....	91
5.7 Tartás, a zérusrendű tartószerv átviteli függvénye .....	91
5.8 Átviteli tagok z-átviteli függvénye .....	92
5.8.1 A z-átviteli vagy impulzusátviteli függvény értelmezése .....	92
5.8.2 Tartószerv és vele sorba kapcsolt folytonos idejű tag .....	93
5.9 Digitális szabályozási körök modellje .....	94
5.10 Zárt és felnyitott szabályozási körök jellemző z-átviteli függvényei .....	96
5.11 A frekvenciafüggvény mintavételes rendszerekben .....	97
5.12 Mintavételes szabályozási körök stabilitási kritériumai .....	98
5.13 A w-transzformáció .....	100
5.14 Kompenzálás diszkrét idejű rendszerekben .....	101
5.14.1 A mintavételezési idő megválasztása .....	102
5.14.2 A kompenzálás számítási módjai .....	103
5.14.3 A kompenzáló algoritmus meghatározása a z-átviteli függvényből. PI, PD és PID kompenzáló algoritmus .....	105
5.14.4 PID algoritmus meghatározása a differenciaegyenletről .....	108
5.14.5 Kompenzálás a szabályozott szakasz átmeneti függvénye alapján .....	109
5.15 Tervezés előírt viselkedésre .....	111
5.15.1 Az előírt szabályozott jellemzőre történő tervezés elve .....	112
5.15.2 Tervezés előírt átmeneti függvényre .....	112
5.15.3 A mintavételek közötti lengések kiküszöbölése .....	115
6. FOLYTONOS IDEJŰ ÁLLAPOTEGYENLETEK .....	117
6.1 Az állapotegyenlet fogalma .....	117
6.2 Az állapotegyenletek irányítható kanonikus alakja .....	119
6.3 Az állapotegyenletek tömbvázlatos ábrázolása .....	122
6.4 Példa az irányítható kanonikus alak felírására .....	123
6.5 Az átviteli függvény meghatározása az állapotegyenletekből .....	124
6.6 Az irányíthatóság és a megfigyelhetőség fogalma .....	125
6.7 Példa az irányíthatósági és a megfigyelhetőségi mátrixok kiértékelésére .....	126
6.8 Az irányíthatósági és megfigyelhetőségi viszonyok szemléltetése .....	127
6.9 Az állapot-visszacsatolás .....	128
6.10 Pólusáthelyezés állapot-visszacsatolással .....	130
7. PLC-S VEZÉRLÉSEK ALAPJAI .....	133
7.1 A PLC-s vezérlési rendszer felépítése .....	133
7.2 A PLC-k felépítése .....	134
7.3 A PLC működése .....	139
7.4 A felhasználói program szervezése .....	140
7.5 A PLC programozása .....	142
7.5.1 Néhány, a programozással kapcsolatos alapismeret .....	143
7.5.2 PLC felhasználói programnyelvek .....	147

7.5.2.1 Utasításlistás programozási nyelv .....	147
7.5.2.2 Létradiagramos programozási nyelv .....	149
7.5.2.3 Funkcióterves programozási nyelv .....	152
7.5.2.4 Sorrendi folyamatábra nyelv .....	155
A FELHASZNÁLT IRODALOM JEGYZÉKE .....	160
<b>Függelék:</b>	
F1. A LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ ALAPISMERETEI SZABÁLYOZÁSTECHNIKAI SZÁMÍTÁSOKHOZ .....	163
F2. A LEGFONTOSABB EGYSZERŰ ÁTVITELI TAGOK ÖSSZEHASONLÍTÓ TÁBLÁZATAI .....	170
F3. A STEP 7 PROGRAMNYELVBEN ALKALMAZOTT DEKLARÁCIÓRÓL .....	174

## 1. AZ AUTOMATIKA (IRÁNYÍTÁSTECHNIKA) ALAPFOGALMAI

### 1.1 Az Irányítástechnika tárgyköre, az irányítás fogalma

Az Irányítástechnika (Automatika) az a tudományág, amely a folyamatok irányításának, azaz a folyamatok elindításának, kívánt módon való fenntartásának és leállításának a kérdéseivel foglalkozik.

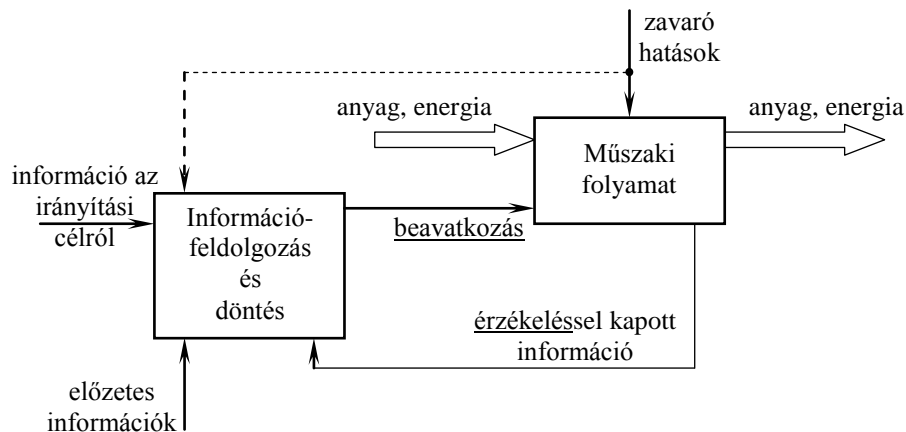
A meghatározásban szereplő folyamat tágabb értelemben bármilyen folyamat (fizikai, kémiai, biológiai, gazdasági stb.) lehet, mi azonban természetesen a műszaki folyamatokkal fogunk foglalkozni. A műszaki folyamatok az ember által anyag, energia, ill. információ átalakítására, szállítására létrehozott folyamatok, amelyekben közös, hogy anyag és energia mindig részt vesz bennük. Műszaki folyamat pl. egy gyártmány előállításának és szállításának, az energia termelésének, átalakításának és felhasználásának a folyamata stb. A műszaki folyamatok közül a gyártmány-előállítási, termelési folyamatok irányításának ma már meghatározó vonása, hogy – a folyamat kézi vagy önműködő elindítása után – az irányítás emberi beavatkozás nélkül megy végbe. Az ilyen irányítást *önműködőnek* (automatikusnak) mondjuk, míg az olyat, amelynél az irányítást ember végzi, *kézi irányításnak* nevezzük. Az emberi felügyeletre, ellenőrzésre természetesen önműködő irányításkor is szükség van. A folyamatok önműködővé tétele az *automatizálás*, az az eljárás, amely korunk technikájában olyan nagy szerepet játszik.

Az irányítás, ha az *irányítási cél* már ismert, mindig tartalmazza a következő alapl műveleteket:

- a) *érzékelés*: irányítás közbeni információszerzés az irányított folyamatról;
- b) *ítéletalkotás*: döntés a rendelkezésre álló információk feldolgozásával arról, hogy az irányítási cél elérésének érdekében milyen beavatkozás szükséges;
- c) *beavatkozás*: az irányított folyamat valamely befolyásolható jellemzőjének a megváltoztatása úgy, hogy a folyamat kívánt állapotát elérjük.

Az a)-ról és a b)-ről bővebben: *Érzékeléskor* az irányított folyamat állapotát jellemző, kívülről hozzáférhető fizikai mennyiségeket az információ-feldolgozás számára irányítás közben mérjük, érzékeljük. Az irányított folyamatról azonban mindig van információnk előzetes tájékozódás alapján is, ezt elméleti úton vagy előzetes kísérletek alapján szerezhethetjük. Az *ítéletalkotáshoz* rendelkezésre álló információk közé ezek az előzetes információk is beleértendők, a döntésekhez ezeket is figyelembe vesszük.

Az irányítás folyamatát az előzőek ismeretében az 1-1. ábra szemlélteti. Az irányított folyamatot mindig érik az irányítástól független, külső hatások is, ezeket zavaró hatásoknak



1-1. ábra

nevezzük. A zavaró hatások közül az ismertek bevonhatók az információfeldolgozás-döntés folyamatába; ezt az ábrán szaggatott vonal jelzi.

Az irányítás, aszerint, hogy az időbeli lefolyás szempontjából milyen a kapcsolat a beavatkozás és a folyamatból történő érzékelés között, lehet *vezérlés* és *szabályozás*.

*Szabályozáskor* a beavatkozás és az érzékelés egyidőben zajlik, a folyamat érzékelt mennyisége a beavatkozással egyidejűleg hat a beavatkozásra, a beavatkozással egyidejűleg részt vesz a beavatkozás kialakításában. Beavatkozáskor így a hatások tekintetében zárt hurok (láncolat) áll fenn, ezért a szabályozást zárt láncú irányításnak is szokás nevezni. Az érzékelt mennyiség ily módon történő visszavezetését *visszacsatolásnak* nevezzük; a szabályozás tehát visszacsatolással működik.

*Vezérléskor* a beavatkozás és az érzékelés nem egy időben megy végbe, a beavatkozás megtörténtekor az érzékelt mennyiség nem hat a beavatkozásra. Beavatkozáskor így a hatás nyitott hurokban terjed, ezért a vezérlést nyílt láncú irányításnak is nevezik. Vezérléskor a beavatkozás művelete a beavatkozás előtt rendelkezésre álló információk alapján valósul meg. Ebben lehet, hogy beavatkozás előtti érzékelésnek nincs is szerepe, de ha van, az érzékelés a beavatkozás közben már akkor sem hat a beavatkozásra, s így visszacsatolás nincs.

Ha zavaró hatást vonunk be az információ-feldolgozásba, akkor ennek hatására is létrejöhét beavatkozás, amely ha éppen másik beavatkozás van, ahhoz hozzáadódik, annak hatását módosítja. Ez a vezérlésről írtakat nem érinti, a hatáslánc továbbra is nyitott. Szabályozásnál ezt az esetet zavarkompenzációnak, csatlakozási útvonalát (1-1. ábra, szaggatott vonal) előrecsatolásnak nevezik. Szabályozásnál az így létrejövő beavatkozás

hatáslánca nyitott, mert más mennyiség hatására avatkozunk be, mint amelyet a folyamatból érzékelünk.

Az irányított folyamat és az irányítást megvalósító berendezések, eszközök összessége az *irányítási rendszer*.

Az Irányítástechnika, ami a tárgykörét illeti, az irányítási rendszer minden elemével foglalkozik, de az elemeket az irányításra vonatkozó tulajdonságok szempontjából vizsgálja. Kiemelten fontos e tekintetben maguknak az irányított folyamatoknak az ismerete, ami sokféle technológiában való jártasságot kíván, sőt esetenként gazdasági, környezeti kérdéseket is felvet. De az Irányítástechnika tárgykörébe beletartoznak pl. a közvetlenül az irányításhoz felhasznált eszközök működésének a kérdései is, ami gyakran kíván elektronikai, digitális technikai, programozási és mérés technikai ismereteket. Az egyes elemekre vonatkozó ismereteket az irányítási rendszerek elmélete fogja össze, amely megalkotja a rendszer modelljét, a modell alapján foglalkozik a rendszerre vonatkozó törvényszerűségekkel, és eljárásokat dolgoz ki a rendszer megtervezésére. Mint az elmondottakból is érzékelhető, az Irányítástechnika széleskörű ismereteket felölelő tudományág.

Az Irányítástechnika két nagy ága az irányítás két fő fajtájának megfelelően a *vezérléstechnika* és a *szabályozástechnika*, de ma már a mérés technikának az itt alkalmazott részterületét, a *méréssel történő adatgyűjtést* is gyakran az Irányítástechnika külön ágának tekintik.

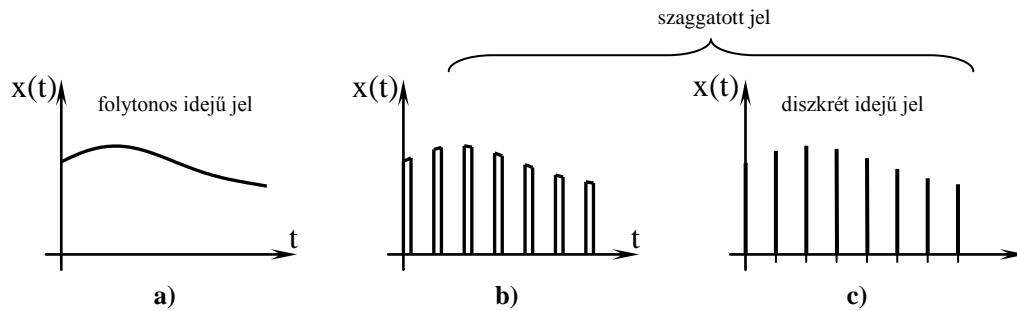
## 1.2 Az irányítás jelei

Az irányítási rendszer működése az irányítási folyamat szempontjából hatások terjedéséből áll. A hatásokat fizikai mennyiségek (villamos feszültség, villamos áram, hőmérséklet, nyomás stb.) közvetítik, a közvetített hatásról azonban ezeknek a mennyiségeknek nem a mennyiség-jellege, hanem az információ-tartalma tudósít. Az olyan fizikai mennyiségeket, amelyekhez információ van hozzárendelve, *jeleknek* nevezzük. A hatások terjedését ezzel úgy is fogalmazhatjuk, hogy azok jelek útján terjednek.

A jelek az információ-hozzárendelés módja szerint *analóg* és *digitális* jelekre oszthatók. Az analóg jeleknél az információt a jelhordozó értéke vagy értékváltozása közvetlenül képviseli, a digitális jeleknél az információ a jelhordozó számjegyeket képviselő értékeiben kódoltan van jelen.

Az *analóg* jeleket az időbeli viselkedésük alapján, az értelmezési tartományuk és az értékkészletük szerint csoportosíthatjuk.

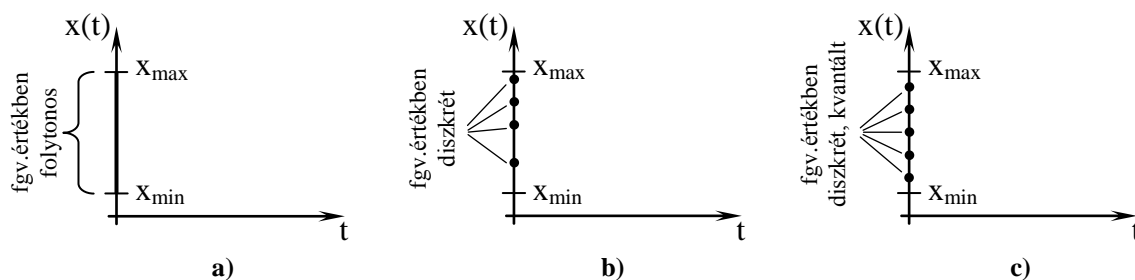
Értelmezési tartományuk szerint az analóg jeleket *időben folytonos* és *időben szaggatott* jelekre oszthatjuk föl. A *folytonos (folytonos idejű)* jelek értelmezési tartománya



1-2. ábra

időben megszakítatlan (1-2.a ábra), ezért ezek a jelhordozó mennyiség (pl. áram) pillanatértékei által képviselt információt időben folytonosan közvetítik. A *szaggatott* jelek (1-2.b és c ábra) értelmezési tartománya időben elkülönülő tartományokból áll. A szaggatott jelek egyik fajtája a *diszkrét idejű* jel (1-2.c ábra); ennek az értelmezési tartományát időben diszkrét (elkülönülő) időpontok alkotják, ezért az ilyen jel a képviselt információt csak a diszkrét időpontokban közvetíti.

Értékkészletük szerint az analóg jelek lehetnek *függvényértékben folytonos* és *függvényértékben diszkrét* jelek. A *függvényértékben folytonos* jel értékkészlete a jel változási tartományában folytonos eloszlású, a függvényértékben folytonos jel az értékkészlet legnagyobb és legkisebb értéke közötti tartományban bármilyen értéket felvehet (1-3.a ábra). A *függvényértékben diszkrét* jelek értékkészlete a jel változási tartományában diszkrét eloszlású, az ilyen jel csak meghatározott értékeket vehet föl (1-3.b ábra). A *függvényértékben diszkrét* jel lehet kvantált (1-3.c ábra), ekkor az értékkészlet egyenlő távolságú szintekre van osztva; a szintek távolsága a kvantum.



1-3. ábra

A jel mellett használjuk a „jellemző” fogalmát is. A jellemző olyan jel, amely az irányított rendszerben az irányítástól függetlenül is megvan.

Az irányítást megvalósító berendezések: vezérlők, szabályozók, érzékelők stb. a leggyakrabban villamos berendezések, tehát villamos jelekkel működnek, de alkalmaznak (pl.



robbanásveszélyes környezetben) pneumatikus és hidraulikus berendezéseket is. Azért, hogy ezek a berendezések egymáshoz illeszthetők, ill. több helyen is felhasználhatók legyenek, a jelek tartományait szabványosították. A szabványos jeltartományok:

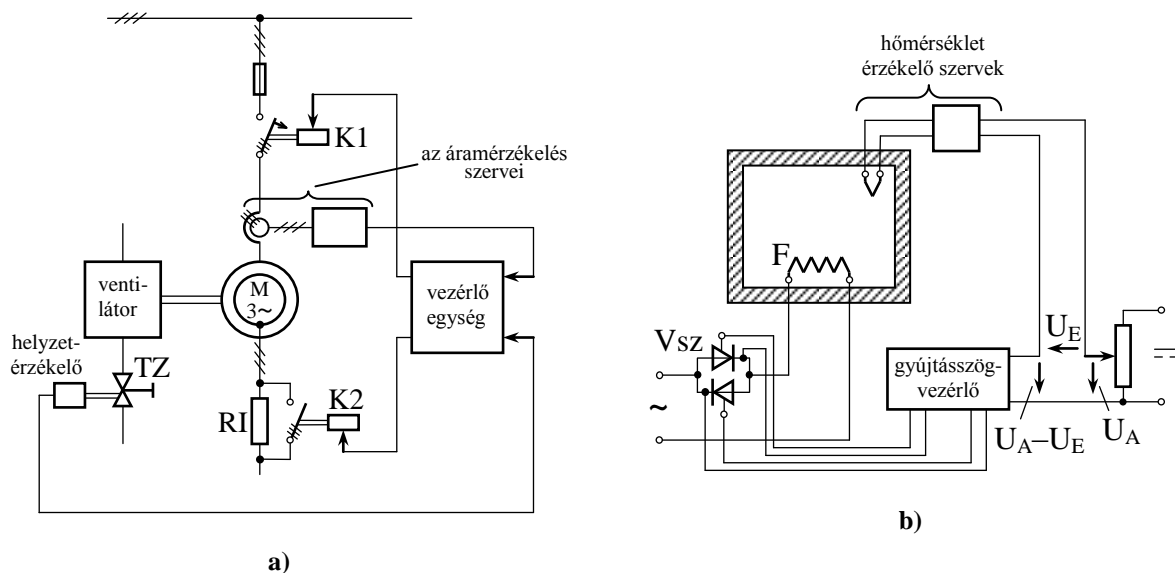
villamos jelekre:                    0 vagy 4 ... 20 mA egyenáram,  
    0 ... 10 V egyenfeszültség,  
    -10 ... 10 V feszültség,  
pneumatikus jelekre:                0 ... 1 (1,2) bar túlnyomás.

### 1.3 Az irányítási rendszer ábrázolása, a rendszer részei

Az irányítási rendszert háromféleképpen szemlélhetjük: tekinthetjük berendezések vagy irányítási feladatot ellátó részek vagy jeleket átvivő tagok összességének. Ennek megfelelően az irányítási rendszer ábrázolására háromféle ábrázolási formát használunk, ezek: a *szerkezeti (technológiai) vázlat*, a *funkcionális vázlat* és a *hatásvázlat*.

#### 1.3.1 A szerkezeti (technológiai) vázlat

A *szerkezeti (technológiai) vázlat* az irányítási rendszert valóságos berendezéseivel ábrázolja, azoknak a szerkezeti összefüggéseknek a feltüntetésével, amelyek a berendezések között az irányítás szempontjából fennállnak. A berendezések ábrázolása itt csak olyan mélységű, amely az irányítás megértéséhez szükséges, ez rendszerint vázlatos vagy jelképes ábrázolást jelent.



1-4. ábra

Az 1-4. ábra szerkezeti vázlatokat mutat, az a) ábra egy vezérlési, a b) ábra egy szabályozási rendszerét. Az a) ábra szerinti vezérlésnél az irányított folyamat háromfázisú

csúszógyűrűs indukciós motorral hajtott ventilátor indítása. A b) ábra szerinti szabályozásnál az irányított folyamat villamos fűtésű kemence fűtése.

Az a) ábra szerinti vezérlésnél a ventilátort hajtó M motor a K1 mágneskapcsoló zárásakor, a TZ tolózár lezárt állapotában, a K2 mágneskapcsoló nyitott állása mellett a forgórész körbe beiktatott RI indító-ellenállással indul. Indulás után a fordulatszám nő, és a motor árama csökken. Amikor a motor árama már elegendően kicsi ahhoz, hogy RI kiiktatása után ne legyen túl nagy áramlökés, RI-t a K2 mágneskapcsoló zárásával kiiktatjuk (rövidre zárjuk). A tolózár lezárt állapotát helyzetérzékelővel, a kiiktatási áramot áramérzékelővel érzékeljük. A K1 és K2 mágneskapcsoló működtetését a motor állapotától, valamint az érzékelők jelétől függően a vezérlő egység végzi. A TZ tolózárnak azért kell indítás előtt zárva lennie, hogy a ventilátor ne szállítson levegőt, vagyis hogy a motor terhelés nélkül induljon. Az irányítás zavaró hatása pl. a motort tápláló hálózat feszültségének az ingadozása lehet.

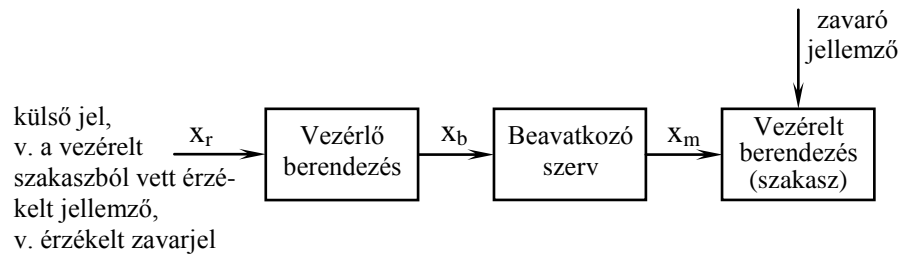
A b) ábra szerinti szabályozásnál a hőmérsékletet hőelemmel érzékeljük, amely a hőmérséklet növekedése esetén növekvő, csökkenése esetén csökkenő feszültséget szolgáltat. A kapott ellenőrző feszültséget a kívánt hőmérsékletre jellemző alapfeszültséggel hasonlítjuk össze, s ha az ellenőrző feszültség az alapfeszültségnél kisebb, akkor a Vsz váltakozó áramú szaggató gyújtásszögét megváltoztatva az F fűtőtest áramát (teljesítményét) növeljük, hogy a hőmérséklet nőjön, ha pedig az ellenőrző feszültség az alapfeszültségnél nagyobb, a gyújtásszögön keresztül az áramot (teljesítményt) csökkentjük, hogy a hőmérséklet csökkenjen. Az összehasonlítás, mint az ábra is mutatja, különbségképzést jelent. Zavaró hatás pl. a külső hőmérséklet megváltozása lehet.

### 1.3.2 Funkcionális vázlat, funkcionális részek

A *funkcionális vázlat* az irányítási rendszert a meghatározott irányítási feladatokat ellátó részeivel, a részek között terjedő hatások szempontjából ábrázolja. Az irányítási feladatokat ellátó részeket itt négyszögek jelölik, benne az illető rész megnevezésével, míg a hatások terjedését nyíllal ellátott hatásvonalakkal adjuk meg. Mivel a hatások jelek útján terjednek, a hatás ábrázolása csak úgy teljes, ha a hatásvonalakon feltüntetjük az oda tartozó jelet is.

Egy általános *vezérlés beavatkozásra* (nem a teljes irányítási folyamatra) vonatkozó funkcionális (működési) vázlatát az 1-5. ábra mutatja. A feltüntetett jelek neve a következő:  $x_r$ : *rendelkező jel*;  $x_b$ : *beavatkozó jel*;  $x_m$ : *módosított jellemző*. A vezérlő berendezés és a beavatkozó szerv között lehet még ún. *erősítő szerv* és *végrehajtó szerv* is. Erősítő szerv akkor

szükséges, amikor a vezérlő berendezés kimenőjelének a teljesítményszintje – amely célszerűen a szabványos érték – nem elégséges a további szervek működtetéséhez, ekkor e

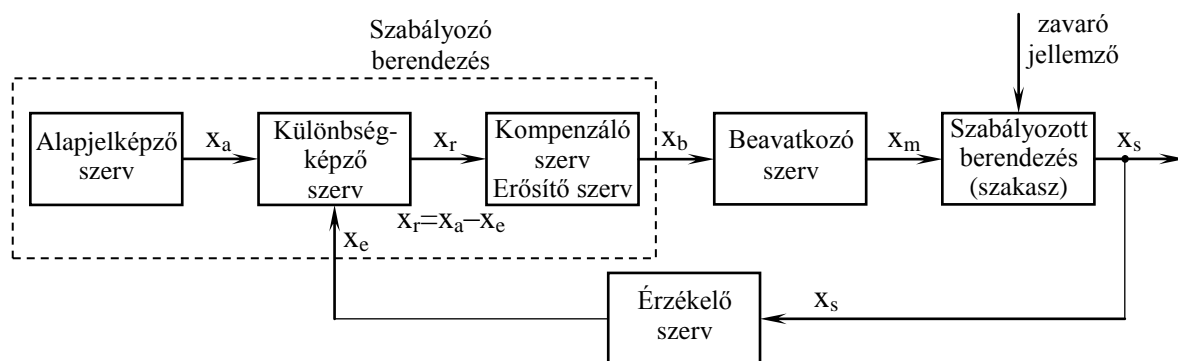


1-5. ábra

szintet erősítővel növeljük meg. Végrehajtó szervre azért lehet szükség, mert a vezérlő berendezés kimenőjele a legtöbbször villamos mennyiség, a beavatkozó szerv bemenőjele pedig nemvillamos mennyiség is lehet, s ilyenkor átalakítót kell a kettő közé beiktatnunk. Végrehajtó szervnek ezt az átalakítót nevezzük, bemenőjele az  $x_v$  *végrehajtó jel*, kimenőjele az  $x_b$  *beavatkozó jel*.

Az 1-4.a ábrán a vezérelt szakasz a motor-ventilátor-légcsatorna együttes, a beavatkozó szerv a K2 mágneskapcsoló, az  $x_r$  rendelkező jel az áramérzékelő kimenőjele, az  $x_b$  beavatkozó jel a K2 mágneskapcsoló behúzótekerésének árama, az  $x_m$  módosított jellemző a forgórész-ellenállás értéke.

Egy általános *szabályozás* funkcionális (működési) vázlatát (előreccsatolás nélkül) az 1-6. ábra mutatja. A feltüntetett jelek közül azok, amelyek az előző ábrán még nem



1-6. ábra

szerepeltek:  $x_a$ : *alapjel*;  $x_e$ : *ellenőrző jel*;  $x_s$ : *szabályozott jellemző*. A *kompenzáló (jelformáló) szerv* szerepéről később lesz szó, a feltüntetett *erősítő szerv* feladata ugyanaz, mint ahogy a vezérlésnél megadtuk. *Végrehajtó szervre* a szabályozó berendezés és a beavatkozó szerv között itt is szükség lehet. Az *érzékelő szerv* lehet csupán maga az érzékelő eszköz, de e mellett tartalmazhat távadót is, amely a jelet a szabványos jeltartományban továbbítja. A szabályozás ítéletalkotásának fő szerve a különbségképző, ez a szabályozott jellemző előírt és

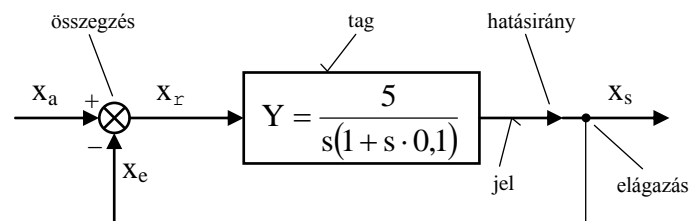
érzékelte értékére jellemző jeleket hasonlítja össze, s mindaddig van beavatkozás, ameddig a kettő egyenlő nem lesz egymással.

A 1-4.b ábrán a szabályozott szakasz a kemence a fűtőtesttel, a beavatkozó szerv a  $V_{sz}$  váltakozó áramú szaggató a gyújtásszögvezérlővel, az  $x_s$  szabályozott jellemző a kemence hőmérséklete, az  $x_b$  beavatkozó jel a tiriszorok gyújtásszögét állító  $U_A-U_E$  jel, az  $x_m$  módosított jellemző a fűtőtest árama, az  $x_r$  rendelkező jel az  $U_A-U_E$  különbség, a különbségképzés pedig a feszültségek soros szembekapcsolásával valósul meg. Kompenzáló és erősítő szerv a b) ábra szerinti kapcsolásban nincs.

### 1.3.3 A hatásvázlat, az átviteli tag fogalma

A *hatásvázlat* az irányítási rendszer számítására, matematikai vizsgálatára alkalmas modell. Legfontosabb eleme a jelátviteli v. átviteli tag, röviden tag, amely a rendszer olyan elkülöníthető része, melynek az egy vagy több bemenőjelét ismerve az egy vagy több kimenőjele egyértelműen meghatározható [7]. A vizsgálatokhoz a rendszert ilyen tagokra bontjuk, és a *hatásvázlat* az irányítási rendszert tagokból felépítve, a tagok és a jelek kapcsolatának a szempontjából ábrázolja.

A hatásvázlatot a legtöbbször ún. tömbvázlatként ábrázoljuk, ennek hagyományos változatában a tagokat *tömbök*, a jeleket *vonalak*, a hatás terjedési irányát *nyilak*, a jelek



1-7. ábra

elágazását *pontok*, a jelösszegzést *negyedekre osztott körök* jelképezik (1-7. ábra). Hatásvázlat a vezérlési rendszerekre is rajzolható, de elsősorban a szabályozási rendszereknél használatos, az 1-7. ábra is ilyet mutat. Fontos tudatosítani, hogy a hatásvázlat nem kapcsolási rajz, a pontokban a jelek nem osztódnak részekre, hanem a ponthoz csatlakozó összes leágazáson ugyanaz a jel van.

### 1.4 A vezérlés és a szabályozás összehasonlítása

A két irányítási mód legfőbb jellemvonását az 1.1 pontban már megadtuk. Az ottaniakon túl a két irányítási módról a következőket mondhatjuk:

A *vezérlés* esetében – mint láttuk – visszacsatolás nincs, ezért a vezérlés az érzékelésen keresztül nem tud a zavaró hatásokra beavatkozással reagálni. Beavatkozás valamely zavarás hatására csak akkor jöhet létre, ha előre betervezzük, hogy az illető zavarás beavatkozást hozzon létre. Ezzel kapcsolatos a vezérlés legfőbb hátránya: a vezérlés csak azoknak a zavaró hatásoknak a kiküszöbölésére képes, amelyekre előre beavatkozást terveztünk, a többi zavarás teljes egészében érvényre jut. A nem várt zavarás esetleg olyan mérvű is lehet, hogy a kívánt vezérlési eredmény nem is következik be. A visszacsatolás hiánya tehát ebből a szempontból hátrány, más szempontból azonban előny: mivel visszacsatolás nincs, a vezérlés mindig stabilis működésű.

Ehhez kapcsolódva említjük meg, hogy a *vezérlés tervezése* során beavatkozást két okból kell beterveznünk, az egyik ok az előbbi, hogy ti. valamilyen zavaró hatás következményét elhárítsuk, a másik ok pedig az, hogy a folyamat állapotát a technológia által megkívánt irányban módosítsuk.

A *szabályozás* a vezérléssel szemben (legalábbis elvileg) valamennyi zavaró hatás kiküszöbölésére képes, ami előnyt jelent. Hátránya viszont a szabályozásnak, hogy a visszacsatolás miatt önmagukban stabilis működésű folyamatokat is labilissá tehet.

Az elmondottak alapján vezérlést akkor alkalmazunk, amikor elegendő, ha bizonyos számú, előre számításba vehető zavaró hatást küszöbölünk ki, és szabályozást, ha az előre nem látható zavarások kiküszöbölésére is szükség van. Lehet azonban olyan is, hogy a zavaró hatások figyelembevétele bonyolultabb, mint a szabályozás megvalósítása, s ilyenkor szabályozást valósítunk meg.

### 1.5 A vezérlések felosztása

A vezérlések a vezérlés módja szerint feloszthatók *kombinációs*, *követő* és *programvezérlésekre*, a programvezérlések pedig *időterv-* és *lefutó vezérlésekre*.

*Kombinációs* vezérléskor a beavatkozások időtől független logikai feltételekhez vannak kötve, a feltételek adott kombinációjához mindig ugyanaz a beavatkozás tartozik.

*Követő vezérlés* esetén a rendelkező jel olyan külső vezető jel, amelytől a vezérelt jellemző egyfajta, előre meghatározott törvény szerint függ, és a beavatkozó szerv a külső jeltől olyan parancsot kap, amely a vezérelt jellemzőt mindig e szerint a törvény szerint alakítja. (Pl. követővezérlést alkalmazhatunk egy csévélőhajtásnál, ahol a dobra felcsévélte huzal miatt a dob átmérője folyamatosan növekszik, s ezért, ha állandó szögsebességet alkalmazunk, a kerületi sebesség is folyamatosan nő. A kerületi sebesség növekedését kiküszöbölhetjük, ha a sugár növekedését érzékelve, a szögsebességet a sugártól függően

csökkentjük. Itt a vezető jel a sugártól függő jellemző, pl. egy ellenállás csúszkájának a helyzete, amely adott sugár esetén mindig ugyanolyan értékű.)

*Programvezérléseknél* a vezérlés menete lépésekre tagolódik, amelyek egymás után elvégzendő beavatkozásokat tartalmaznak, és a vezérlő berendezés a vezérlést lépésenként hajtja végre. *Időtervvezérlés* esetén az egyik lépésről a másikra történő áttérés előre megtervezett, előírt időfüggés szerint megy végbe, függetlenül a vezérelt szakasz folyamataitól. *Lefutó vezérlés* esetén az egyes lépések csak akkor indulhatnak, ha az előző már eredményesen lejátszódott. Az eredményességet a vezérelt szakasz (folyamat) előírt állapotának a beállta jelenti, ami bizonyos, érzékeléssel megállapítható feltételek fennállása esetén mondható ki.

Megjegyezzük, hogy a gyakorlatban a fenti vezérlési módok gyakran együtt, vegyesen fordulnak elő.

## 1.6 A szabályozások felosztása

Az alapjel jellege (vagy az azt meghatározó szabályozási cél) szerint megkülönböztetünk *értéktartó* és *követő szabályozásokat*. *Értéktartó szabályozás* esetében a cél a szabályozott jellemző állandó értéken tartása, ezért ilyenkor az alapjel állandó. *Követő szabályozás* esetén a cél az, hogy a szabályozott jellemző minél pontosabban kövessen egy változó (idő, térbeli koordináta stb.) függvényében megadott változást, ilyenkor az alapjel ennek a változónak a függvénye (vezetőjel). Ha a szabályozott jellemzőnek előírt időfüggvény szerinti változást kell követnie, akkor az alapjel is előírt időbeli változású, és a követő szabályozást *program-* (v. *időterv-*) *szabályozásnak* nevezik.

Működési mód szerint a szabályozások lehetnek  *folytonos* és *diszkrét idejű szabályozások* (rendszerek). Megjegyezzük, hogy az elterjedt szakmai szóhasználat az előbbit „analóg”, az utóbbit a legfontosabb fajtájáról „digitális” szabályozásnak nevezi.

A *folytonos idejű szabályozásokban* minden jel folytonos idejű, de lehet folytonos és diszkrét értékészletű. Ha minden jel folytonos értékészletű, *közönséges folytonos szabályozásról* beszélünk, ha a beavatkozó jel diszkrét értékészletű, akkor a szabályozás *állásos*. Az állásos szabályozás lehet két-, három- vagy többállásos, aszerint hogy a diszkrét értékészlet hány értéket tartalmaz.

A *diszkrét idejű szabályozásokban* egyes jelek időben szaggatott jelek, amelyek lehetnek függvényértékben folytonos jelek és függvényértékben diszkrét, kvantált jelek. Az előbbi esetben a szabályozást *mintavételesnek*, az utóbbi esetben *digitálisnak* mondjuk.

A *mintavételes* szabályozást arra az esetre fejlesztették ki, amikor több hasonló rendszert kell egyidejűleg szabályozni. Ez esetben, egy rendszert tekintve, a rendszer folytonos idejű rendelkező jelét a mintavételező szerv időben szaggatott (de nem diszkrét), függvényértékben folytonos jellé (l. 1-2.b ábra) alakítja, és a rendszerre vonatkozó szabályozási műveletek az impulzusidők alatt mennek végbe. Az impulzusok szünetében viszont a szabályozó a többi rendszer – szintén mintavételes – szabályozására használható.

*Digitális* szabályozáskor a folytonos idejű rendelkező jelet (vagy már az ellenőrző jelet) diszkrét idejű, függvényértékben diszkrét, kvantált jellé alakítjuk, amelyet számjegysorral kódolva a szabályozóként alkalmazott digitális számítógép dolgoz fel. Ezt diszkrét idejű, függvényértékben diszkrét, kvantált jellé kódoljuk vissza, s ebből az ún. tartószerv hoz létre a továbbiak számára folytonos idejű jelet.

A mintavételes és a digitális szabályozások tárgyalásmódja közös, ezért korábban mintavételes rendszerek címen tárgyalták őket. Ez még ma is szokásos, de ma már egyre inkább a diszkrét idejű rendszerek elnevezést használják.

## 2. FOLYTONOS IDEJŰ SZABÁLYOZÁSOK

### 2.1 Az átviteli tag jellemzése

A szabályozási rendszert a matematikai vizsgálatokhoz tagokra bontjuk. A *tag* – mint ahogy az 1.3.3 pontban már láttuk – a rendszer olyan része, amelynek az egy vagy több bemenőjelét ismerve az egy vagy több kimenőjele egyértelműen meghatározható. Ezzel kapcsolatban a vizsgálatoknál lesz egy megkötésünk: csak olyan tagokkal fogunk foglalkozni, amelyeknek egy bemenőjele és egy kimenőjele van.

A tag fogalmából következik, hogy a tagot akkor jellemeztük, ha a bemenőjel ismeretében meg tudjuk adni a kimenőjelet. Ez viszont akkor lehetséges, ha ismerjük a be- és a kimenőjel kapcsolatát. A tagot tehát a be- és a kimenőjele közötti kapcsolattal jellemezzük. Ez a kapcsolat

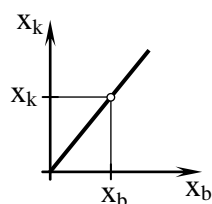
- 1./ megadható *matematikai kifejezéssel*: differenciálegyenlettel vagy ún. átviteli függvénnyel;
- 2./ megadható *grafikusan*: az ún. átviteli jelleggörbével; és
- 3./ megadható *táblázatosan* is.

### 2.2 Átviteli tagok vizsgálati módjai

#### 2.2.1 Állandósult állapotbeli vizsgálat

Állandósult állapotú az átviteli tag, ha mind a bemenő-, mind a kimenőjel időben állandósult. Az állandósult jel lehet pl. időben állandó vagy periodikus. Ha a tagra állandósult bemenőjelet kapcsolunk, az állandósult állapot akkor áll be, amikor elegendő hosszú idő telt el ahhoz, hogy a kimenőjel is állandósult legyen.

Az állandósult (ún. *statikus*, valójában stacionárius) állapot vizsgálata abból áll, hogy kapcsolatot keresünk az állandósult be- és kimenőjel között. Ennek a kapcsolatnak a megjelenítésére a leggyakrabban használt eszköz a *statikus jelleggörbe*, amely az állandósult be-, ill. kimenőjelet jellemző érték közötti kapcsolatot ábrázolja.



2-1. ábra

A legegyszerűbb statikus viselkedésűek azok a tagok, amelyeknél az állandósult kimenőjel pillanatnyi értéke az állandósult bemenőjel pillanatnyi értékének állandószorosa. Ezek a *lineáris arányos* tagok, amelyekre tehát:  $x_k = A_P x_b$ , ahol  $x_k$  jelöli a kimenőjelet,  $x_b$  a bemenőjelet,  $A_P$  pedig az állandót.  $A_P$  a tag ún. átviteli tényezője. A két állandósult jel pillanatértékének a kapcsolatát origón átmenő egyenes

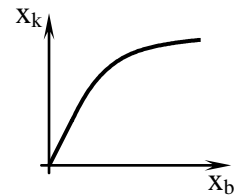


ábrázolja (2-1. ábra). Az egyenes meredeksége az átviteli tényező:

$$A_P = \frac{x_k}{x_b} \quad (1)$$

$A_P$  mértékegysége  $x_k$  és  $x_b$  mértékegységétől függ. Ha pl.  $x_k$  és  $x_b$  is feszültség, akkor  $A_P$  mértékegység nélküli. A lineáris jelleggörbe önmagában az átviteli tényezővel is jellemezhető, mert a meredekség állandó.

A gyakorlatban az arányos tagok statikus jelleggörbéje általában *nemlineáris*: az  $x_k$  és  $x_b$  közötti szorzó – az átviteli tényező – nem állandó, hanem az  $x_b$  függvényében változik. Nemlineáris statikus jelleggörbe látható pl. a 2-2. ábrán. A nemlineáris arányos tagok, az ún. *statikus nemlinearitások* vizsgálati módszereivel a 4. fejezetben foglalkozunk.



2-2. ábra

Állandósult bemenőjel hatására az állandósult kimenőjel kialakulhat rögtön a bemenőjel rákapcsolásakor, de kialakulhat fokozatosan is. Ez utóbbi esetben a jelenségek felbontásával külön szokás figyelembe venni a nemlinearitást, amelynél a kimenőjel a jelleggörbe által meghatározott függvénnyel rögtön kialakul, és külön a tároló hatást, amely a fokozatos kialakulást okozza.

### 2.2.2 Differenciálegyenlet-módszer

Az irányítási folyamat közben a tagok nemcsak állandósult, hanem átmeneti állapotban is lehetnek, ezért az idő szerinti vizsgálatokhoz alapvetően a bemenőjel és a kimenőjel kapcsolatát leíró legáltalánosabb összefüggésre, a differenciálegyenletre van szükségünk. A tagok sokfélesége, ill. a vizsgálati nehézségek miatt azonban korlátozást kell tennünk. Egy kikötésünk már volt: csak olyan tagokkal foglalkozunk, amelyeknek egy be- és egy kimenete van; most ezt kiegészítjük a linearitás és az invariancia feltételével, azaz *lineáris, invariáns, egy be- és egy kimenetű* tagokat fogunk vizsgálni. A lineáris rendszerek jellegzetessége, hogy érvényes rájuk a szuperpozíció elve: a jelek összegének a hatása megegyezik az egyes jelek által létrehozott hatások összegével. Az invariancia azt jelenti, hogy a rendszer paraméterei (villamos esetben pl.  $C$  kapacitás, mechanikai esetben pl.  $m$  tömeg) időben állandók. A lineáris, invariáns, egy be- és egy kimenetű tagok viselkedését *közönséges, állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenlet* jellemzi. Az egyenlet, amely az időtől függő  $x_b(t)$  bemenőjel és  $x_k(t)$  kimenőjel kapcsolatát írja le, általános alakban a következő:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x_k(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_k(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx_k(t)}{dt} + a_0 x_k(t) = \\ = b_m \frac{d^m x_b(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x_b(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx_b(t)}{dt} + b_0 x_b(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Az egyenletben az  $a_i$ ,  $b_i$  együtthatók tehát időben állandók. (A feltételektől való eltérésekről: Variáns esetben az együtthatók időben változnak. Statikus nemlinearitásnál  $a_0$ , esetleg  $b_0$  az  $x_b$  függvénye. Nemlineáris a tag akkor is, ha a differenciálegyenletben a változók, ill. deriváltjaik szorzata, hatványa vagy más függvényalakja (pl.  $\sin x_k$ ) szerepel.)

Mint ismert, a (2) alakú állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenlet megoldásának, esetünkben az  $x_k(t)$  függvénynek, van egy időben állandósult és van egy átmeneti, tranziens összetevője. Az állandósult összetevő jellemzi a korábban tárgyalt *statikus* viselkedést. A tranziens (átmeneti) állapotot, viselkedést, az állapotjellemzők változása miatt szokás *dinamikusnak* is nevezni.

A közvetlenül a differenciálegyenletek alapján végzett vizsgálat az átviteli tagok vizsgálatának az egyik módszere. Mivel a differenciálegyenletekben a független változó az idő, a módszert időtartománybeli vizsgálatnak is nevezik.

A szabályozástechnikai vizsgálatokhoz a differenciálegyenleteket célszerű kissé átalakítani. Emeljünk ki ehhez (2) bal oldalán  $a_0$ -t, a jobb oldalán  $b_0$ -t, és osszuk  $a_0$ -val:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_0} \frac{d^n x_k(t)}{dt^n} + \frac{a_{n-1}}{a_0} \frac{d^{n-1} x_k(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \frac{a_1}{a_0} \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = \\ = \frac{b_0}{a_0} \left( \frac{b_m}{b_0} \frac{d^m x_b(t)}{dt^m} + \frac{b_{m-1}}{b_0} \frac{d^{m-1} x_b(t)}{dt^{m-1}} + \dots + \frac{b_1}{b_0} \frac{dx_b(t)}{dt} + x_b(t) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

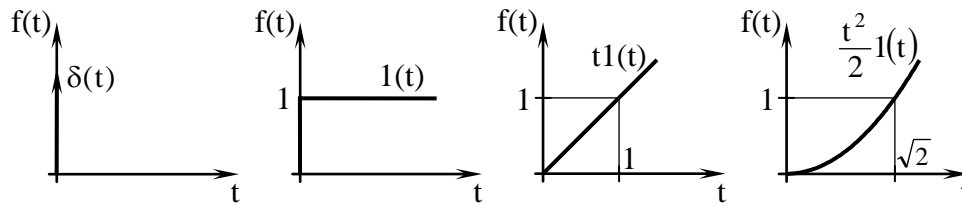
A (3) alak vezet az ún. időállandós alakhoz: az időállandók az együttható-hányadosok annyiadik gyökei, ahányadik differenciálhányados előtt az illető hányados áll. Itt az egyszerűség kedvéért az együttható-hányadosokra vezetve be új jelölést, a következő alakhoz jutunk:

$$\begin{aligned} a'_n \frac{d^n x_k(t)}{dt^n} + a'_{n-1} \frac{d^{n-1} x_k(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a'_1 \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = \\ = A \left( b'_n \frac{d^m x_b(t)}{dt^m} + b'_{n-1} \frac{d^{m-1} x_b(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b'_1 \frac{dx_b(t)}{dt} + x_b(t) \right) \end{aligned} \quad (4)$$

A képletben  $A = b_0/a_0$  az (időállandós) átviteli tényező, ez az (1) szerinti lesz, ha az összes differenciálhányados nulla, ekkor az (1)-gyel kapcsolatban tárgyalt taghoz jutunk. A differenciálegyenlet rendszáma annyi, ahány energiatároló van a rendszerben. Energiatároló

pl. a kondenzátor, a tekercs. Fizikailag megvalósítható rendszerekben (2)-ben (s így a származtatott változataiban is)  $m \leq n$ . Arra az esetre, ha  $b_0$  v.  $a_0$ , esetleg mindkettő zérus: „A” mindig a (2) egyenlet legkisebb indexű, zérustól különböző együtthatóiból számolandó  $b_i/a_i$  hányados.

Az idő függvényében történő vizsgálatokhoz a tag bemenetére ún. tipikus



2-3. ábra

vizsgálójeleket adunk. A tipikus vizsgálójelek a következők: a *Dirac-impulzus*:  $\delta(t)$ , az *egységugrás*:  $1(t)$ , az *egységsebesség-ugrás*:  $t \cdot 1(t)$  és az *egységgyorsulás-ugrás*:  $\frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$  (2-3. ábra). A  $\delta(t)$  Dirac-impulzus a  $t = 0$ -tól kezdődő, végtelenül keskeny, végtelenül nagy amplitúdójú, egységnyi területű impulzus; egyszerűsített függvényutasítása:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } t = 0, \\ 0, & \text{ha } t \neq 0; \end{cases} \quad \text{Ter.} = 1.$$

Az  $1(t)$  egységugrást leíró függvényutasítás:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ 1, & \text{ha } t \geq 0. \end{cases}$$

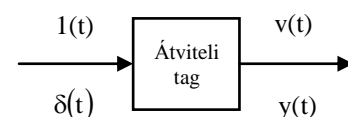
Az egységsebesség- és az egységgyorsulás-ugrás függvényutasítását nem írjuk föl, de az ábráról leolvasható.

A  $\delta(t)$  és az  $1(t)$  jel időfüggvénye között kapcsolat van:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t) \quad . \quad (5)$$

A  $\delta(t)$  bemenőjel hatására fellépő kimenőjel neve *súlyfüggvény*, jele:  $y(t)$ ; az  $1(t)$  bemenőjel hatására fellépő kimenőjel neve *átmeneti függvény*, jele:  $v(t)$  (2-4. ábra). Az  $y(t)$  és a  $v(t)$  függvény között az (5) képlet mintájára megjegyezhető kapcsolat van:

$$y(t) = \frac{d}{dt} v(t) \quad .$$



2-4. ábra

A tipikus vizsgálójelek helyett gyakran ezek állandószorosát alkalmazzuk. Ezeket *ugrásjelnek*, *sebességugrás-jelnek*, ill. *gyorsulásugrás-jelnek* fogjuk nevezni.

### 2.2.3 Vizsgálat az operátortartományban

Az idő szerinti vizsgálatok végezhetőek a differenciálegyenlet-módszerrel is, de ez csak egyszerű esetekben célravezető, bonyolultabb esetekben komoly nehézségekbe ütközhet. A nehézségek kiküszöbölésére a Laplace-transzformációt alkalmazzuk. A transzformáció legfőbb előnye, hogy vele a differenciálegyenletek algebrai egyenletekké alakíthatók. Az egyenletek változója az „s” Laplace-változó (operátor). A megoldások megkeresése így egyszerűbb, mert csak algebrai egyenleteket kell rendezni. Az eredmények ekkor ugyan s-változós alakban adódnak, de a keresett időfüggvényeket is megkaphatjuk, ha a kapott eredményeket visszatranszformáljuk az időtartományba. Gyakran azonban a visszatranszformálás sem szükséges, mert az operátortartományban való vizsgálatból is tudunk következtetni a rendszer időbeli viselkedésére. A Laplace-transzformáció szabályozástechnikai alkalmazására vonatkozó fontosabb ismereteket a Függelék F1. fejezete tartalmazza, ezeket a továbbiakban ismertnek tételezzük föl.

Alkalmazzuk a Laplace-transzformációt a (2) egyenletre, feltételezve, hogy minden kiindulási érték (kezdeti feltétel) zérus:

$$a_n s^n X_k(s) + \dots + a_1 s X_k(s) + a_0 X_k(s) = b_m s^m X_b(s) + \dots + b_1 s X_b(s) + b_0 X_b(s) \quad .$$

Emeljük itt ki a bal oldalon  $X_k(s)$ -t, a jobb oldalon  $X_b(s)$ -t, és képezzük ezek hányadosát:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad . \quad (6)$$

A kapott  $Y(s)$  neve *átviteli függvény*. Ez, mint a taghoz tartozó kimenőjel és bemenőjel Laplace-transzformáltjának a hányadosa, kapcsolatot teremt a két Laplace-transzformált között.  $Y(s)$  ismeretében bármilyen bemenőjelre meg tudjuk adni a kimenőjel Laplace-transzformáltját. Átrendezéssel ugyanis:

$$X_k(s) = Y(s) \cdot X_b(s) \quad . \quad (7)$$

Fizikailag megvalósítható rendszerekben (6)-ban (mivel ezt (2)-ből származtattuk)  $m \leq n$ .

(6)-ban  $Y(s)$  *polinomok hányadosaként* van felírva, de a tag átviteli függvényének más alakjait is használjuk. A *gyöktényezős alakban* a polinomokat gyöktényezős kifejezéssé írjuk át:

$$Y(s) = A \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad , \quad (8)$$

ahol  $z_1 \dots z_m$  a számláló gyökei (zérushelyek) és  $p_1 \dots p_n$  a nevező gyökei (pólusok). A zérusok és a pólusok valós gyökök vagy konjugált komplex gyökpárok lehetnek.

A másik használatos alak az *időállandós alak*. Ennek az a formája, amelyet a gyakorlatban a leginkább használnak, a következő:

$$Y(s) = \frac{A}{s^r} \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2) \dots (1 + e_1s + e_2s^2) \dots (1 + f_1s + f_2s^2) \dots}{(1 + sT_1)(1 + sT_2) \dots (1 + c_1s + c_2s^2) \dots (1 + d_1s + d_2s^2) \dots} \quad (9)$$

Bizonyos v. az összes zárójeles tagok hiányozhatnak, ekkor a helyükön 1 áll. A képletben „A” az (időállandós) átviteli tényező, amely általában nem egyenlő a (8)-ban szereplő A’ (gyöktényezős) állandóval. Az r kitevő a legtöbbször pozitív, de lehet negatív is. Ahhoz, hogy (8)-ból a (9) alakot megkapjuk, egyrészt a 0-val egyenlő zérusokból, ill. pólusokból adódó  $(s - 0) = s$  szorzókat kell összevonnunk ( $1/s^r$  tag); másrészt a valós zérusokat és pólusokat, illetőleg a konjugált komplex gyökpárok összeszorzásával kapott másodfokú kifejezések  $s^0$  tagjainak együttthatóit kell kiemelni („A” állandó).

A következő bekezdésben foglaltakat a teljesség kedvéért itt mondjuk el, de előfordulnak benne olyan fogalmak is, amelyekkel csak később találkozunk:

A (9) képlet  $A/s^r$ -en kívüli része a tárolókból adódik, s mivel ezek hatása idővel eltűnik, az  $A/s^r$  kifejezés az átviteli tag állandósult viselkedésére jellemző. Az r kitevő a tag típusát határozza meg:  $r = 0$  esetén az arányos átviteli tagokat,  $r > 0$  esetén az integráló tagokat,  $r < 0$  esetén a differenciáló tagokat kapjuk. Ha tárolók nincsenek, akkor  $Y(s) = \frac{A}{s^r}$ , és az  $r = 0$ ,  $r = 1$  és  $r = -1$  esetek rendre az alaptagként tárgyalt P, I és D tagot adják:

$$Y(s) = A, \quad Y(s) = \frac{A}{s} \quad \text{és} \quad Y(s) = A \cdot s.$$

A (7) képletet igen gyakran a tipikus vizsgálójelekkel mint bemenőjelekkel alkalmazzuk. A  $\delta(t)$  jelet tekintve, az ennek hatására a kimeneten fellépő jel az  $y(t)$  súlyfüggvény. Mivel a  $\delta(t)$  függvény Laplace-transzformáltja 1, a súlyfüggvény Laplace-transzformáltja a (7) képlet értelmében felírható az  $Y(s) \cdot 1$  alakban. A súlyfüggvény Laplace-transzformáltja tehát az átviteli függvény:

$$L[y(t)] = Y(s),$$

ez jut kifejezésre a súlyfüggvény  $y(t)$ -vel való jelölésében. Az  $1(t)$  függvény Laplace-transzformáltja  $1/s$ , az  $1(t)$  hatására fellépő kimenőjelnek, az átmeneti függvénynek a Laplace-transzformáltja tehát:

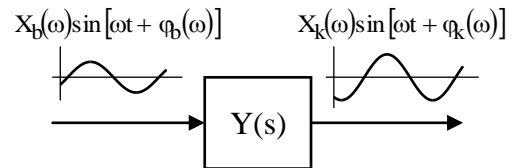
$$V(s) = Y(s) \cdot \frac{1}{s}. \quad (10)$$

## 2.2.4 Vizsgálat a frekvenciatartományban

Az átviteli tag jellemezhető az ún. frekvenciafüggvényével (amplitúdó-fázis függvényével) is. Ha ismerjük ezt a függvényt, akkor az időtartományba (az idő-változóhoz) való áttérés nélkül is következtethetünk a tag viselkedésére. A vizsgálatokat ezzel jelentősen megkönnyíthetjük.

### 2.2.4.1 A frekvenciafüggvény bevezetése

Ha egy lineáris tag bemenetére állandó amplitúdójú és körfrekvenciájú szinuszos jelet adunk (2-5. ábra), a kimeneten az állandósult állapot beállta után ugyanolyan körfrekvenciájú szinuszos jel jelenik meg, amelynek az amplitúdója



2-5. ábra

és a fázisa általában eltér a bemenőjeletől. (Az ábrán alkalmazott jelölésekben figyelembe vettük, hogy az amplitúdók és a fázisok általában az  $\omega$  körfrekvencia függvényei.) Az amplitúdóeltérést kifejezi az amplitúdók hányadosa:

$$\frac{X_k(\omega)}{X_b(\omega)},$$

a fáziseltérést kifejezi a kimenőjel és a bemenőjel közötti fáziseltolás:

$$\varphi(\omega) = \varphi_k(\omega) - \varphi_b(\omega),$$

a két eltérést együtt pedig egy olyan komplex mennyiség, amelynek az abszolút értéke az amplitúdók hányadosa, szöge pedig a fáziseltolás. A mennyiség neve frekvenciafüggvény:

$$\bar{Y}(j\omega) = \frac{X_k(\omega)}{X_b(\omega)} e^{j\varphi(\omega)}. \quad (11)$$

Bebizonyítható, hogy a frekvenciafüggvény előállítható az  $Y(s)$  átviteli függvényből úgy, hogy abban elvégezzük az  $s = j\omega$  helyettesítést.

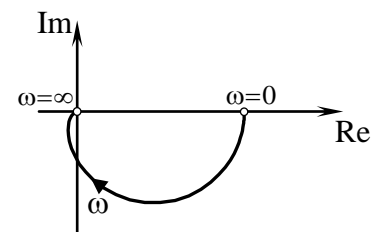
Fizikailag az  $\bar{Y}(j\omega)$  mennyiség a szinuszos bemenőjel és az annak hatására a kimeneten állandósult állapotban fellépő szinuszos kimenőjel kapcsolatára jellemző. Abszolút értéke megadja, hogy állandósult állapotban az illető átviteli tag az egyes frekvenciákon milyen erősítésű, fázisa pedig, hogy a tag az egyes frekvenciákon milyen fáziseltolást okoz.

Matematikailag az  $\bar{Y}(j\omega)$  mennyiség az  $\omega$  valós paramétertől függő komplex szám.

### 2.2.4.2 A frekvenciafüggvény ábrázolási módjai

#### a/ Nyquist-diagram:

A Nyquist-diagram az  $\bar{Y}(j\omega)$  frekvenciafüggvény helygörbéje a komplex számsíkon, miközben az  $\omega$  körfrekvencia 0 és  $\infty$  között változik. A görbe egy pontját úgy kapjuk, hogy az illető  $\omega$ -nál érvényes  $\bar{Y}(j\omega)$  komplex számot a komplex számsíkon pontként ábrázoljuk, és az összes  $\omega$ -hoz tartozó pontok összessége alkotja a görbét. Az ún. teljes Nyquist-diagramon  $\omega$  értéke  $-\infty$ -tól  $+\infty$ -ig változik, de fizikai jelentése akkor is csak a 0-tól  $+\infty$ -ig terjedő körfrekvenciáknak van. A 2-6. ábra példaként egy Nyquist-diagramot mutat; a görbén  $\omega$  növekedésének irányát mindig nyíllal jelöljük meg.



2-6. ábra

#### b/ Bode-diagram:

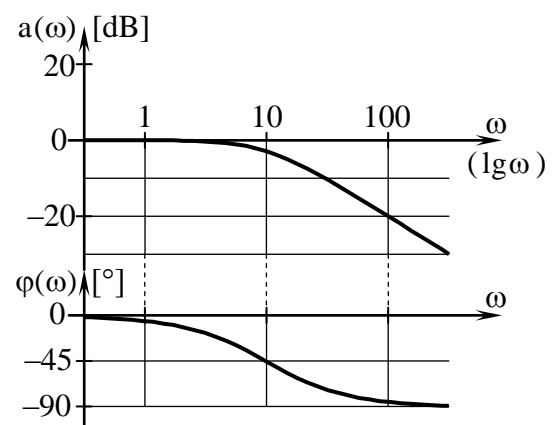
Ennél az ábrázolásmódnál külön ábrázoljuk az  $\bar{Y}(j\omega)$  függvény  $|\bar{Y}(j\omega)|$  abszolút értékének és  $\varphi$  fázisának az  $\omega$ -tól való függését oly módon, hogy a két koordináta-rendszer függőleges tengelye egybeesik, az egymás alá eső  $\omega$ -tengelyek pedig ugyanolyan beosztásúak. Így minden  $\omega$ -hoz egyszerűen meg tudjuk adni az abszolút értéket és a fázist, és együtt látjuk, hogy a két mennyiség az  $\omega$  függvényében hogyan változik. A vízszintes tengelyen az  $\omega$  léptéke logaritmikus, hogy minél szélesebb körfrekvenciasávot foghassunk át (de  $\lg\omega$  helyett csak  $\omega$ -t szoktunk a tengelyre írni). Az abszolút érték itt amplitúdóviszonyt fejez ki, ezért ennek a léptékét – szintén a szélesebb átfogás céljából – dB-ben adjuk meg.

Abszolútérték-függésként tehát az

$$a(\omega) = 20 \cdot \lg |\bar{Y}(j\omega)|$$

függést ábrázoljuk.

Az  $a(\omega)$  abszolútérték-függés ábrázolásával kapott jelleggörbe neve amplitúdó-körfrekvencia-jelleggörbe v. röviden amplitúdó-jelleggörbe. A  $\varphi(\omega)$  függvény képeinek neve fázis-körfrekvencia-jelleggörbe v. röviden fázisjelleggörbe. Az  $a(\omega)$  és  $\varphi(\omega)$  jelleggörbét együttesen Bode-diagramnak nevezzük.



2-7. ábra

Mivel az  $|\bar{Y}(j\omega)|$  és az  $a(\omega)$  mennyiség is amplitúdóviszonyt fejez ki, erősítésnek szokás nevezni őket. A 2-7. ábrán példaként egy Bode-diagram látható.

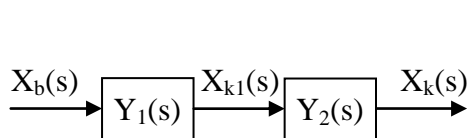
Sorosan kapcsolt átviteli tagok (l. a következő pont) esetében az eredő jelleggörbét mind az amplitúdó-, mind a fázisjelleggörbe esetén úgy kapjuk, hogy a tagok jelleggörbéit összeadjuk. Ennek oka az, hogy szorzatok esetében a logaritmusok összegződnek, és szorzatok esetén az eredő fázis is az egyes fázisok összege.

### 2.3 Átviteli tagok összekapcsolása

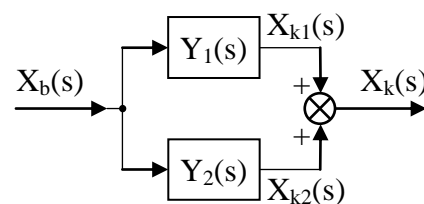
A hatásvázlatban az átviteli tagok valamilyen módon kapcsolódnak egymáshoz. Három fő kapcsolási mód van:

- a/ a soros kapcsolás (2-8. ábra),
- b/ a párhuzamos kapcsolás (2-9. ábra) és
- c/ a visszacsatolás (2-10. ábra).

Ezek azért „fő” kapcsolási módok, mert az ezen a három módon összekapcsolt tagokra eredő átviteli függvény adható meg.



2-8. ábra



2-9. ábra

*Soros kapcsoláskor* az első tag kimenőjele a második tag bemenőjele. Felírhatók az alábbi összefüggések:

$$X_{k1}(s) = Y_1(s)X_b(s), \quad X_k(s) = Y_2(s)X_{k1}(s) \quad .$$

Behelyettesítve  $X_{k1}$ -et  $X_k$  kifejezésébe:

$$X_k(s) = Y_1(s)Y_2(s)X_b(s) \quad .$$

Az eredő átviteli függvény tehát:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = Y_1(s)Y_2(s) \quad .$$

*Párhuzamos kapcsoláskor* a két tag bemenőjele közös, a kimenőjel pedig a két tag kimenőjének összege. Felírható, hogy

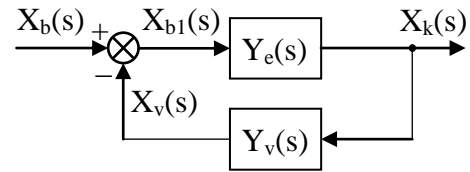
$$X_k(s) = X_{k1}(s) + X_{k2}(s) = Y_1(s)X_b(s) + Y_2(s)X_b(s) = [Y_1(s) + Y_2(s)]X_b(s) \quad .$$

Az eredő átviteli függvény tehát:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) \quad .$$



*Visszacsatoláskor* valamely tag kimenőjelét egy másik tagon keresztül a bemenőjéhez hozzáadjuk, vagy abból kivonjuk. Hozzáadáskor a visszacsatolás pozitív, kivonáskor negatív. A szabályozástechnikában főleg negatív visszacsatolást



2-10. ábra

alkalmazunk, ezért az ábrán ilyen esetet rajzoltunk föl. A felső ág neve előrevezető ág, az alsóé visszavezető ág. Felírhatók a következő összefüggések:

$$X_{b1} = X_b - X_v, \quad X_k = Y_e X_{b1}, \quad X_v = Y_v X_k.$$

Helyettesítsük be az 1.-t a 2.-ba:  $X_k = Y_e(X_b - X_v)$ , ide pedig a 3.-at, akkor:

$$X_k = Y_e(X_b - Y_v X_k) = Y_e X_b - Y_e Y_v X_k.$$

Átrendezve:

$$X_k + Y_e Y_v X_k = Y_e X_b, \quad \text{ill.} \quad X_k(1 + Y_e Y_v) = Y_e X_b,$$

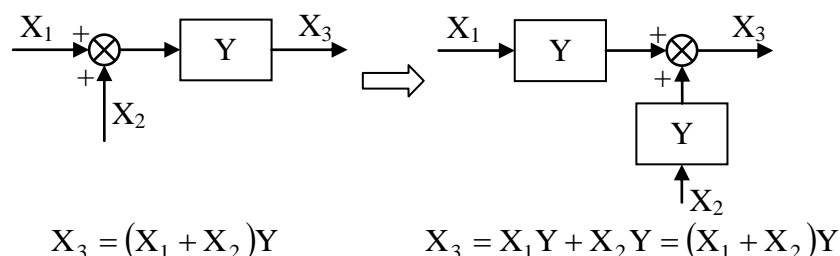
és innen az eredő átviteli függvény:

$$Y(s) = \frac{Y_e(s)}{1 + Y_e(s)Y_v(s)}. \quad (12)$$

Pozitív visszacsatoláskor a nevezőben negatív előjel van.

## 2.4 Hatásvázlatok átalakítása

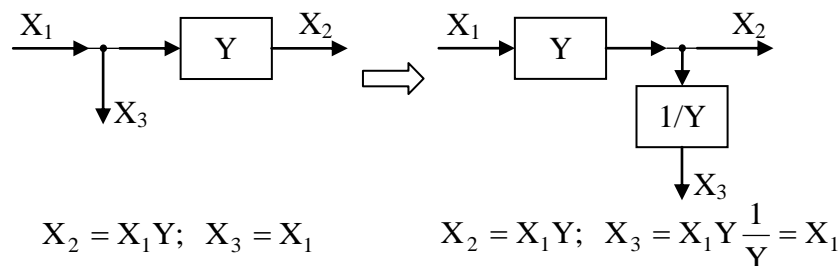
Gyakori igény, hogy egy hatásvázlatot valamely okból át kell alakítani. Ilyen ok pl., hogy eredő átviteli függvényt akarunk meghatározni, de ok lehet pl. az is, hogy a hatásvázlatot a vizsgálatokhoz célszerű más alakra hozni stb. Az átalakításnak egyenértékűnek kell lenni, ami azt jelenti, hogy a ki- és a bemenőjel (v. jelek) kapcsolata az átalakítással nem változhat. Már a soros, párhuzamos és visszacsatolásos eredő-képzés is tkp. egyenértékű átalakítás, de vannak esetek (az ún. keresztcsatolásos kapcsolások), amikor a



2-11. ábra

nevezett három eredő-képzés nem elegendő, hanem egyéb átalakításokra is szükség van. Ezek közül az egyéb átalakítások közül a legfontosabbak és alkalmazási szabályaik a következők:

- 1./ Összegzési hely áthelyezése tag utánra. Ez esetben az átkerülő hatásvonalba be kell iktatni a tag átviteli függvényét. Az átalakítást a szabály bizonyításával együtt a 2-11. ábra mutatja.
- 2./ „Összegzési hely áthelyezése tag előttre” esetben az átkerülő hatásvonalba – hasonló okokból – az  $1/Y$  tagot kell beiktatni.
- 3./ Elágazási hely áthelyezése tag utánra. Ez esetben az átkerülő hatásvonalba be kell iktatni a tag átviteli függvényének a reciprokát. Az átalakítást a szabály bizonyításával együtt a 2-12. ábra mutatja.



2-12. ábra

- 4./ „Elágazási hely áthelyezése tag előttre” esetben az átkerülő hatásvonalba – hasonló okokból –  $Y$ -t kell beiktatni.
- 5./ Az egymás mellett lévő összegzési helyek egymással felcserélhetők.
- 6./ Az egymás mellett lévő elágazási helyek egymással felcserélhetők.

## 2.5 Az átviteli tagok csoportosítása

Az átviteli tagok jellemzőinek tárgyalása előtt meg kell ismerkednünk a tagok csoportosításával. A csoportosítás egyik szempontja, hogy állandósult állapotban milyen összefüggés van a tagok bemenőjele és kimenőjele között. Ennek alapján a tagok lehetnek

- a/ *arányos tagok*: az állandósult kimenőjel a bemenőjellel arányos,
- b/ *integráló tagok*: az állandósult kimenőjel a bemenőjel integráljával arányos,
- c/ *differentiáló tagok*: az állandósult kimenőjel a bemenőjel differenciálhányadosával arányos.

Mindhárom csoport tagjai lehetnek energiatároló nélküli v. energiatárolós tagok. Ha egy tag energiatárolótól mentes, akkor *ideálisnak* szokás nevezni.

Az *arányos* tagoknak a következő, legfontosabb fajtáit tárgyaljuk:

ideális arányos tag (P tag),

egy-energiatárolós arányos tag egységnyi erősítéssel, röviden egytárolós tag (T1 tag),

két-energiatárolós arányos tag egységnyi erősítéssel, röviden kéttárolós tag (T2 tag),

egy-energiatárolós arányos tag 1-től eltérő erősítéssel, röviden egytárolós arányos tag (PT1 tag),

két-energiatárolós arányos tag 1-től eltérő erősítéssel, röviden kéttárolós arányos tag (PT2 tag).

Az *integráló* és a *differentiáló* tagok közül csak a tárolómentesekkel foglalkozunk: ideális integráló tag (I tag), ideális differentiáló tag (D tag).

A legtöbbször csak az itt aláhúzott elnevezéseket használják, így pl. ideális arányos helyett rendszerint csak arányosat szokás mondani.

Az energiatárolók a jelenségekben késleltetést okoznak, de van egy másik késleltető jelenség is, az ún. holtidő. A *holtidős* tagokat külön csoportba szokás sorolni. Fajtaikat tekintve lehetnek arányosak (jelük HP), tárolósak (pl. HT1), integrálók (HI) és differentiálók (HD). Közülük csak kettőt tárgyalunk:

a holtidős arányos tag egységnyi erősítésű változatát, amelyet röviden csak holtidős tagnak (H tag) neveznek,

és magát a holtidős arányos tagot (HP tag).

Az arányos, integráló, differentiáló és holtidős tagokat *egyszerű* tagoknak hívják.

Az egyszerű tagok soros és párhuzamos kapcsolásával *összetett* tagokat kapunk, ezekkel külön fejezetben foglalkozunk.

(Használatos az „alaptagok” elnevezés is, ennek alkalmazása ingadozó, leghelyesebb alaptagnak a P, T1, T2, I, D és H tagokat nevezni.)

## 2.6 Egyszerű átviteli tagok

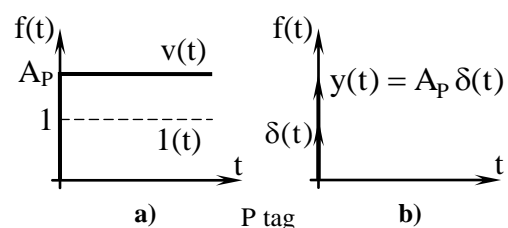
### 2.6.1 Arányos tagok

#### 2.6.1.1 Ideális arányos tag (P tag)

Az ideális arányos tag v. egyszerűen arányos tag (P tag) differenciálegyenlete a (4) szerinti alakban:

$$x_k(t) = A_P x_b(t) ,$$

ahol  $A_P$  az átviteli tényező. Ennél a tagnál a kimenőjel arányos a bemenőjellel, vagyis az átmeneti függvény és a súlyfüggvény a 2-13.a, ill. b ábra szerint alakul. A gyakorlatban jó közelítéssel ilyen tulajdonságúak a



2-13. ábra

potenciométerek, a fogaskerék-áttételek, a műveleti erősítő stb.

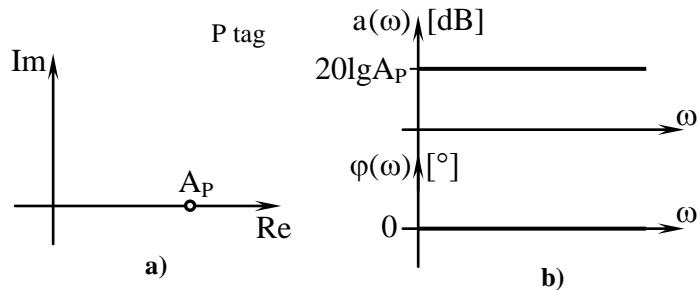
A P tag differenciálegyenletének Laplace-transzformáltja:

$$X_k(s) = A_P X_b(s) \quad .$$

Az átviteli függvény tehát:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = A_P \quad .$$

A P tag frekvencia-függvénye  $Y(s)$ -ből  $s = j\omega$  helyettesítésével:  $\bar{Y}(j\omega) = A_P$ . Ez minden  $\omega$ -nál  $A_P$  valós részű komplex szám, abszolút értéke tehát  $A_P$ , szöge pedig zérus. A tag Nyquist-diagramja így a valós



2-14. ábra

tengely  $A_P$  helyén lévő pont (2-14.a ábra), Bode-diagramjának jelleggörbéi pedig egyenesek: az amplitúdó-jelleggörbe a  $20\lg A_P$  értéknél ( $A_P$  [dB]) lévő, vízszintes tengellyel párhuzamos egyenes, a fázisjelleggörbe pedig a  $\varphi = 0$  tengelyben van (2-14.b ábra).

### 2.6.1.2 Egytárolós tag (T1 tag)

A T1 tag differenciálegyenlete a (4) szerinti alakban a megfelelő együttható helyére  $T_1$  időállandót írva:

$$T_1 \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = x_b(t) \quad .$$

Végezzük el az egyenlet Laplace-transzformálását:

$$T_1 s X_k(s) + X_k(s) = X_b(s) \quad .$$

Kiemelve itt  $X_k(s)$ -t:

$$X_k(s)(1 + sT_1) = X_b(s) \quad ,$$

átrendezés után a T1 tag átviteli függvénye:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{1}{1 + sT_1} \quad .$$

Átmeneti függvény, súlyfüggvény:

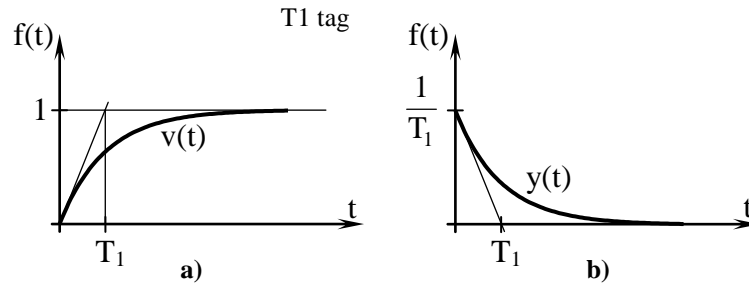
Az átmeneti függvény Laplace-transzformáltja (10) értelmében:

$$V(s) = \frac{1}{s(1 + sT_1)} \quad .$$

Ebből visszatranszformálással az átmeneti függvény:

$$v(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T_1}}, \quad t \geq 0.$$

A kapott függvény képe a 2-15.a ábrán látható. A 2-15.b ábrán, mellőzve az összefüggések felírását, a súlyfüggvényt mutatjuk be.



2-15. ábra

### Nyquist- és Bode-diagram:

A T1 tag frekvenciafüggvénye a tag átviteli függvényéből  $s = j\omega$  helyettesítéssel:

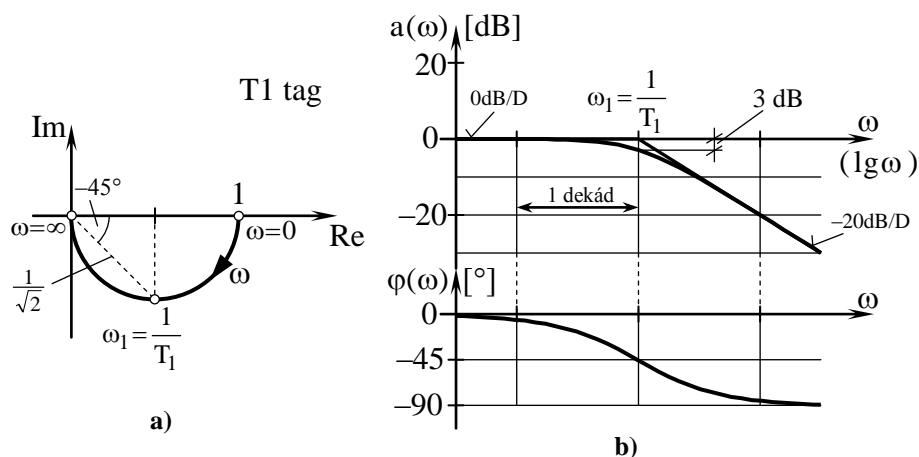
$$\bar{Y}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_1}. \quad (13)$$

Innen a frekvenciafüggvény abszolút értéke és a szöge:

$$|\bar{Y}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega T_1. \quad (14a,b)$$

Az abszolút értéket a számláló és a nevező abszolút értékének a hányadosaként kaptuk, a szöget pedig a számláló szögének (0) és a nevező szögének ( $\arctg(\omega T_1 / 1)$ ) a különbségéeként.

A (14a és b) képlet szerint a Nyquist-diagramon  $\omega = 0$ -nál az abszolút érték 1, a szög 0;  $\omega = \infty$ -nél az abszolút érték 0; és megadható még egy nevezetes pont, ti.  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$  esetére, itt az abszolút érték  $1/\sqrt{2}$ , a szög pedig  $-45^\circ$ . Ennek a három pontnak a helyzete a komplex



2-16. ábra

számsíkon a 2-16.a ábra szerinti; a harmadik pont esetében a felrajzolható négyzetből megállapíthatóan az  $1/\sqrt{2}$ -es átló miatt a valós rész és a képzetes rész abszolút értéke is  $1/2$ . A három pontból a diagram már megrajzolható, mert a matematikából ismert, hogy a (13) alakú kifejezés a komplex számsíkon kört ábrázol. Figyelembe véve a pontok helyzetét, a kör csak a 2-16.a ábra szerinti félkör lehet. Az ábrán berajzoltuk  $\omega$  növekedési irányát is.

A Bode-diagram amplitúdó-jelleggörbéjéhez szükséges  $a(\omega)$  függvény (14a)-ból:

$$a(\omega) = 20 \cdot \lg |\bar{Y}(j\omega)| = -20 \cdot \lg \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \quad (15)$$

A jelleggörbe alakulását vizsgálva a következők állapíthatók meg:

Ha  $\omega T_1 \ll 1$ , azaz  $\omega \ll 1/T_1$ , a gyökjel alatt  $\approx 1$  van, így a függvény  $a(\omega) = 0$ -val közelíthető, ami az ábrázolásban az  $a(\omega) = 0$  egyenest jelenti (2-16.b ábra, 0 dB/D jelölés).

Ha viszont  $\omega T_1 \gg 1$ , azaz  $\omega \gg 1/T_1$ , a függvény az  $a(\omega) = -20 \cdot \lg \omega T_1$  függvénnyel közelíthető. Írjuk át ezt az

$$a(\omega) = -20 \cdot \lg \omega - 20 \cdot \lg T_1$$

alakba, akkor látható, hogy a kifejezés a  $\lg \omega$  mint változó függvényében egyenest ábrázol. Az egyenes meredeksége  $-20$  dB/dekád. Azért ennyi, mert a meredekséget felírhatjuk az

$$-20 = \frac{-20}{1} = \frac{\Delta a}{\Delta \lg \omega}$$

alakban, és a  $\Delta \lg \omega = 1$ , azaz a  $\lg \omega$ -ban mért egységnyi változás  $\omega$ -ban

10-szeres, vagyis egy dekádost jelent. Az egyenes a  $\lg \omega$  tengelyt az  $a(\omega) = -20 \cdot \lg \omega T_1 = 0$  egyenlőségből következő  $\omega = \frac{1}{T_1}$  helyen metszi (2-16.b ábra).

Mivel a pontos függvényérték a kapott két közelítő egyenes értékét minden határon túl megközelíti, a kapott egyenesek a függvény aszimptotái. A két aszimptota metszéspontja nyilvánvalóan  $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ -nél van, ezért  $\omega_1$ -et *sarok-körfrekvenciának* nevezik (2-16.b ábra).

A 2-16.b ábrán a pontos  $a(\omega)$ -jelleggörbét is ábrázoltuk. A sarok-körfrekvenciánál a közelítő  $a(\omega)$  értéknek, amely 0, és a (15)-tel számolható pontos  $a(\omega)$  értéknek a különbsége 3 dB, ez egyben a két érték közötti legnagyobb eltérés. A sarok-körfrekvenciától mindkét irányban egy dekádra a közelítő és a pontos érték eltérése már elhanyagolható.

Az ábrán felrajzoltuk a Bode-diagram fázisjelleggörbét is, ez (14b) alapján ábrázolható;  $\varphi(\omega)$  értéke rendre:  $\omega_1$ -nél  $-45^\circ$ ,  $\omega = 0$ -nál  $0^\circ$ ,  $\omega = \infty$ -nél pedig  $-90^\circ$ .

### 2.6.1.3 Kéttárolós tag (T2 tag)

A T2 tag differenciálegyenlete a (4) szerinti alakban:

$$a_2' \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + a_1' \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = x_b(t) \quad .$$

Az átviteli függvény:

Elvégezve a differenciálegyenlet Laplace-transzformálását:

$$a_2' s^2 X_k(s) + a_1' s X_k(s) + X_k(s) = X_b(s) \quad ,$$

kiemelve  $X_k(s)$ -t: 
$$X_k(s)(a_2' s^2 + a_1' s + 1) = X_b(s) \quad ,$$

átrendezés után a T2 tag átviteli függvénye:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{1}{a_2' s^2 + a_1' s + 1} \quad . \quad (16)$$

A vizsgálatokhoz az átviteli függvényt célszerű ún. normál alakra hozni:

$$Y(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_0^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1} \quad . \quad (17)$$

A képletben  $\omega_0$  az ún. sarok-körfrekvencia,  $\zeta$  (zeta) az ún. csillapítási tényező.

Összehasonlítással:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{a_2'}} \quad , \quad \zeta = \frac{a_1' \omega_0}{2} \quad .$$

A későbbi Laplace-transzformációs műveletekhez az átviteli függvény gyöktényezős alakjára van szükség, ahhoz viszont meg kell határoznunk a másodfokú kifejezés gyökeit. A gyökök tekintetében a diszkriminánstól függően három eset lehetséges:

1.  $\zeta > 1$  (a  $\frac{4\zeta^2}{\omega_0^2} > 4 \frac{1}{\omega_0^2}$  feltételből), ún. *aperiodikus* eset. Ilyenkor két különböző negatív

valós gyök van. Felírva ezeket az

$$s_1 = -\frac{1}{T_1} \quad \text{és} \quad s_2 = -\frac{1}{T_2}$$

alakban, és felírva velük a nevező gyöktényezős alakját, levezethető, hogy az átviteli függvény megadható a következő alakban:

$$Y(s) = \frac{1}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)} \quad . \quad (18)$$

$\zeta > 1$  esetén tehát a kéttárolós tag két sorba kapcsolt, különböző időállandójú egytárolós tagnak tekinthető; emiatt a  $\zeta > 1$  esetet a szoftverek nem is kéttárolós, hanem két egytárolós tagként kezelik.

2.  $\zeta = 1$  (a  $\frac{4\zeta^2}{\omega_0^2} = 4 \frac{1}{\omega_0^2}$  feltételből), ún. *aperiodikus határeset*. Ez esetben két egyforma negatív valós gyök van. Vezessük be ezekre az

$$s_1 = s_2 = -\frac{1}{T}$$

jelölést, akkor levezethető, hogy:

$$Y(s) = \frac{1}{(1+sT)^2} \quad (19)$$

$\zeta = 1$  esetén tehát a kéttárolós tag két sorba kapcsolt, egyforma egytárolós tagnak tekinthető; emiatt a szoftverek a  $\zeta = 1$  esetet sem kéttárolós, hanem két egytárolós tagként kezelik.

3.  $\zeta < 1$  (a  $\frac{4\zeta^2}{\omega_0^2} < 4 \frac{1}{\omega_0^2}$  feltételből), ún. *lengő* eset. Ekkor két komplex gyök van, amelyek egymás konjugáltjai. Ezeket az

$$s_{1,2} = -\frac{1}{T} \pm j\nu$$

alakban szokás felírni, ahol:

$$\frac{1}{T} = \zeta\omega_0 \text{ az ún. csillapítás} \quad \text{és} \quad \nu = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \text{ a lengési körfrekvencia.}$$

Igaz még, hogy  $|s_1| = |s_2| = \omega_0$ , és fontos mennyiség a gyökök negatív valós tengellyel bezárt szögének az abszolút értéke, amely:  $\varphi = \arccos\zeta$ .

Ebben a lengő esetben az átviteli függvényt a (16) vagy a (17) alakban használhatjuk.

### Átmeneti függvény:

1. A  $\zeta > 1$  aperiodikus esetben az átmeneti függvény Laplace-transzformáltja (10) alapján,  $Y(s)$ -t (18)-ből véve:

$$V(s) = \frac{1}{s(1+sT_1)(1+sT_2)} \quad .$$

Visszatranszformálás után az átmeneti függvény:

$$v(t) = 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-\frac{t}{T_2}} \quad , \quad t \geq 0 \quad .$$



2. A  $\zeta = 1$  aperiodikus határesetben az átmeneti függvény Laplace-transzformáltja szintén (10) alapján,  $Y(s)$ -t (19)-ből véve :

$$V(s) = \frac{1}{s(1+sT)^2} .$$

Visszatranszformálás után az átmeneti függvény:

$$v(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} - \frac{1}{T} t e^{-\frac{t}{T}} , \quad t \geq 0 .$$

3. A  $\zeta < 1$  lengő esetben az átmeneti függvény Laplace-transzformáltja ismét csak (10) alapján,  $Y(s)$ -t pedig (17)-ből véve, de gyöktényezőss alakban felírva:

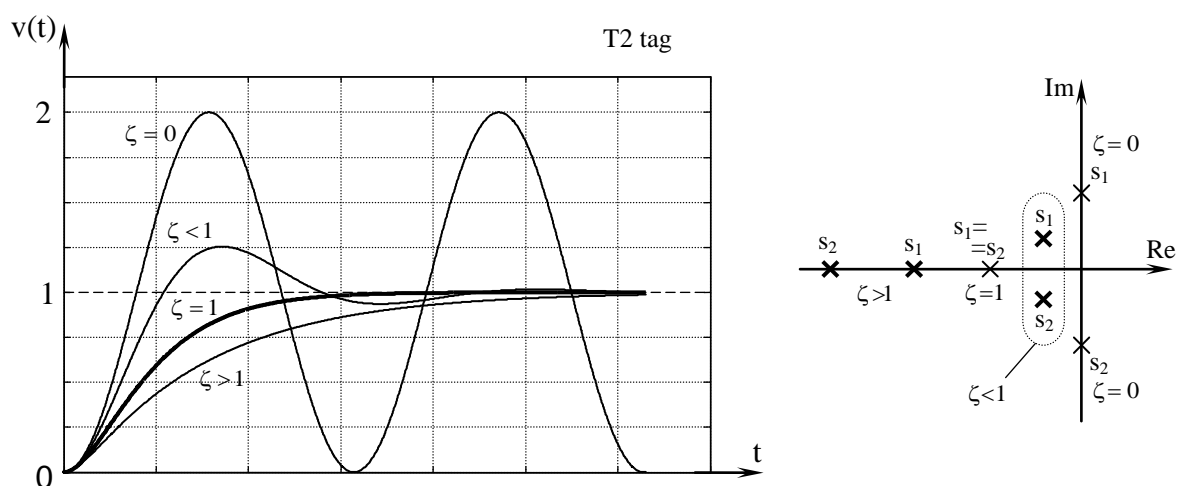
$$V(s) = \frac{1}{s \frac{1}{\omega_0^2} (s - s_1)(s - s_2)} .$$

Ebből levezetés után az átmeneti függvény:

$$v(t) = 1 - \frac{\omega_0}{v} e^{-\frac{t}{T}} \sin(vt + \varphi) , \quad t \geq 0 , \quad (20)$$

ahol  $\varphi$  a fent megadott  $\varphi = \arccos \zeta$  mennyiség.

Az átmeneti függvény időbeli lefolyását különböző  $\zeta$  értékek esetére, a gyököknek a komplex koordináta-rendszerben való elhelyezkedésével együtt a 2-17. ábra mutatja.  $\zeta > 1$  esetén a függvény aperiodikus, a  $\zeta = 1$  eset az aperiodikus határeset,  $\zeta < 1$  esetén pedig a függvénygörbe lengést mutat; innen van az aperiodikus, az aperiodikus határeset és a lengő elnevezés. A  $\zeta = 0$  eset a lengések határeset, a teljes ingadozás ekkor 2, az állandósult érték



2-17. ábra

kétszerese. A  $\zeta$  csillapítási tényező az aperiodikus esettől a lengő határeset felé csökken. A lengés, a határesetet leszámítva csillapodó lengést jelent, a csillapodást, mint a (20) képletből

leolvasható, az  $\frac{1}{T}$  mennyiség határozza meg, míg a lengés körfrekvenciája a  $\omega$ -vel egyenlő, innen van ezen mennyiségek elnevezése.

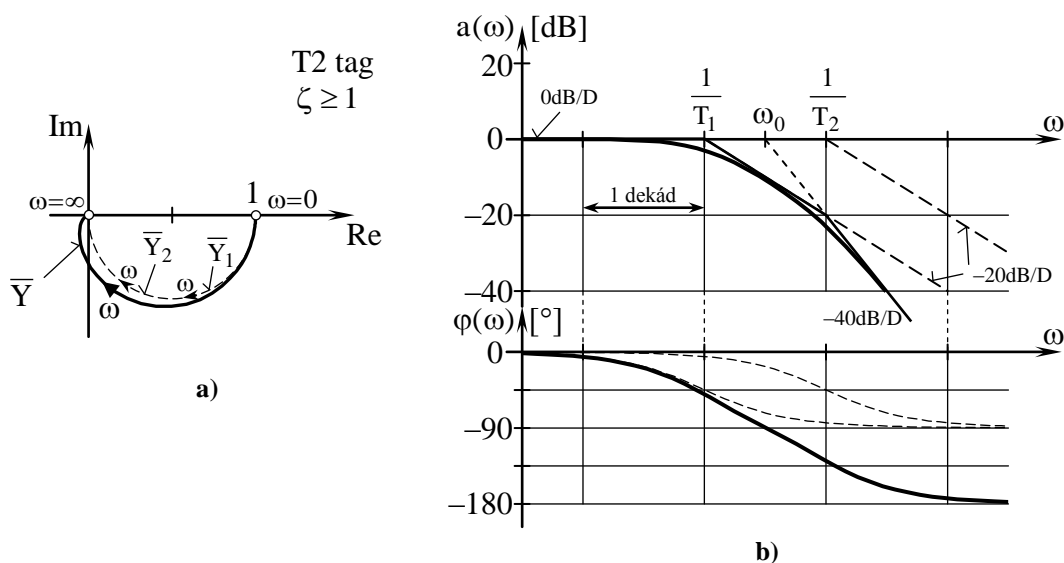
### Nyquist- és Bode-diagram:

1. A  $\zeta \geq 1$  eset. A vizsgálat során felhasználjuk, hogy  $\zeta \geq 1$ -nél a  $T_2$  tag két sorba kapcsolt  $T_1$  tagnak tekinthető. A  $T_2$  tag átviteli függvényeként  $\zeta \geq 1$ -re alkalmazhatjuk (18)-at, mert (18) alkalmazhatósága kiterjeszthető  $\zeta = 1$ -re is, ha benne  $T_1 = T_2 = T$ -t veszünk figyelembe. A  $T_2$  tag frekvenciafüggvénye tehát  $\zeta \geq 1$ -re (18)-ból  $s = j\omega$  helyettesítéssel:

$$\bar{Y}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)} \cdot \frac{1}{(1 + j\omega T_2)} = \bar{Y}_1(j\omega) \cdot \bar{Y}_2(j\omega) \quad .$$

A Nyquist-diagramot a 2-18.a ábra mutatja. A diagramot leíró  $\bar{Y}(j\omega)$  függvényt, mint a fenti képlet mutatja, úgy kapjuk, hogy az egytárolós tagok  $\bar{Y}_1(j\omega)$  és  $\bar{Y}_2(j\omega)$  függvényét egymással összeszorozzuk. A szorzás során (mivel komplex számokról van szó) az abszolút értékek összeszorozódnak, a szögek pedig összeadódnak. A szögek összeadásának eredményeként  $\omega = \infty$ -nél az eredő szög  $-180^\circ$  lesz, ezért a helygörbe  $-180^\circ$  felől fut be az origóba, azaz két síknegyedet jár be. Az abszolút érték  $\omega$  növelésével csökken.

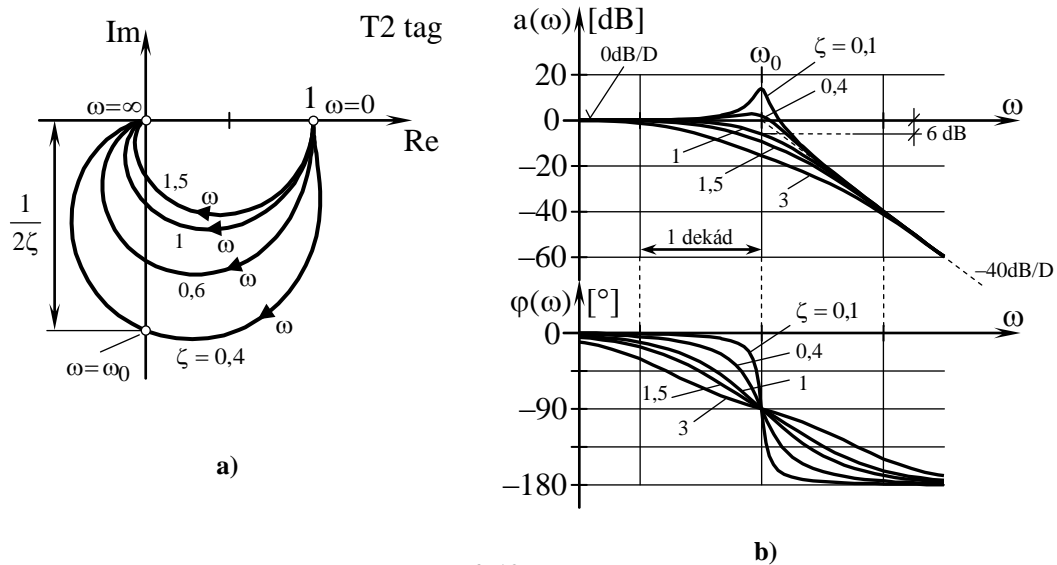
A Bode-diagram a 2-18.b ábrán látható. A diagramon a két egytárolós tag jelleggörbéi az átviteli függvények összeszorozása miatt összeadódnak. Az amplitúdó-jelleggörbét tekintve, itt a két tag külön-külön érvényes jelleggörbéit csak az aszimptotikus közelítésben rajzoltuk föl ( $1/T_1$  és  $1/T_2$  sarok-körfrekvenciájú aszimptotikus jelleggörbék). Az eredő aszimptotikus jelleggörbén (vékony folytonos vonal, két törésponttal) a meredekség  $\omega \ll \omega_0$  esetén



2-18. ábra

0 dB/dekád,  $\omega \gg \omega_0$  esetén  $-40$  dB/dekád. Az ábrán a pontos amplitúdó-jelleggörbét vastag vonallal ábrázoltuk, ennek az aszimptotái ugyanezek. A 0 és a  $-40$  dB/dekád-os aszimptotának a metszéspontja (mint bebizonyítható) a normál alakból adódó  $\omega_0$  sarok-körfrekvenciánál van. A fázisjelleggörbét tekintve, ezen a két tag külön-külön érvényes jelleggörbéi a pontos görbék, az eredőt itt is vastag vonal mutatja. A jelleggörbén  $\varphi(\omega)$  értéke  $\omega_0$ -nál  $-90^\circ$ ;  $\omega = 0$ -nál a görbe  $0^\circ$ -hoz,  $\omega = \infty$ -nél  $-180^\circ$ -hoz tart.  $\zeta = 1$  esetén (ez mind  $a(\omega)$ -ra, mind  $\varphi(\omega)$ -ra érvényes) a két egytárolós tag sarok-körfrekvenciája egybeesik, s egyben megegyezik  $\omega_0$ -val.

2. Minden  $\zeta$ -ra érvényesen, amibe beletartozik a  $\zeta < 1$  (lengő) eset is, a (17) átviteli függvényből célszerű kiindulni. A vizsgálattal kapott Nyquist-diagramot a 2-19.a ábra, a Bode-diagramot a 2-19.b ábra mutatja.



2-19. ábra

Ami a 2-19. ábrát illeti, a Nyquist-diagram  $\zeta \geq 1$ -re vonatkozó részének a származtatását már láttuk.  $\zeta < 1$ -nél az az eltérés, hogy az abszolút érték a kezdeti szakaszon  $\omega$  növelésével nőhet is. A Bode-diagram alakulása az ábráról leolvasható. Az amplitúdó-jelleggörbe aszimptotái minden esetben 0 dB/dekád, ill.  $-40$  dB/dekád meredekségűek, az aszimptoták metszéspontja minden esetben  $\omega_0$ -nál van.  $\zeta = 1$  esetén, amikor a két egytárolós tag külön-külön vett sarok-körfrekvenciája egybeesik, a közelítő amplitúdó-érték és a pontos érték különbsége  $2 \cdot 3 = 6$  dB. A Bode-diagram fázisjelleggörbájén  $\varphi(\omega)$  értéke  $\omega_0$ -nál  $-90^\circ$ ; míg  $\omega \rightarrow 0$ -nál a görbe  $0^\circ$ -hoz,  $\omega \rightarrow \infty$ -nél  $-180^\circ$ -hoz tart.

#### 2.6.1.4 Egytárolós és kéttárolós arányos tag (PT1 és PT2 tag)

A T1, ill. T2 tárolós tagokon tisztán az egy-, ill. kéttárolós hatás tanulmányozható. Ha a tárolós tagokkal (ideális) arányos tagot kapcsolunk sorba, tárolós arányos tagokat kapunk: a PT1 tagot egy P és egy T1 tag, a PT2 tagot egy P és egy T2 tag soros kapcsolása alkotja.

PT1 tag pl. egy soros RC tag, ha a bemenőjel a teljes feszültség, a kimenőjel pedig a kondenzátor feszültsége, de PT1 tag a soros RL tag is, ha a bemenőjel a teljes feszültség, a kimenőjel pedig az RL tag árama. PT2 tag például az állandó mágneses egyenáramú motor (szervomotor), ha a bemenőjele a kapocsfeszültség, a kimenőjele pedig a szögsebesség.

A PT1 és a PT2 tag jellemző összefüggéseit, függvényeit egyszerűen megkaphatjuk a T1, ill. a T2 tagéiból:  $A_P$ -vel jelölve az arányos résztag átviteli tényezőjét, a differenciálegyenletek jobb oldala  $A_P$ -vel szorozódik, és ennek megfelelően  $A_P$ -vel szorozni kell az átviteli függvényeket is. Emiatt az átmeneti függvények állandósult állapotban 1 helyett  $A_P$ -hez tartanak; így pl. a 2-17. ábrán az 1 helyére  $A_P$  kerül, a 2 helyére pedig  $2A_P$ . A Nyquist-diagramok alakja változatlan marad, de az abszolút érték minden pontban  $A_P$ -vel szorozódik, így a diagramok nem 1-ből indulnak ki ( $\omega = 0$  pont), hanem a valós tengely  $A_P$  pontjából, s pl. a 2-19.a ábrán az  $\omega = \omega_0$ -nál érvényes metszéknel  $1/2\zeta$  helyére  $A_P/2\zeta$  lép. A Bode-diagramokon az arányos és a tárolós tagok jelleggörbéinek összegét kapjuk, ezért az amplitúdó-jelleggörbe  $20\lg A_P$  értékkel ( $A_P$  [dB]) függőlegesen eltolódik, a fázisjelleggörbe azonban nem változik, mert az arányos tagok fázisa nulla.

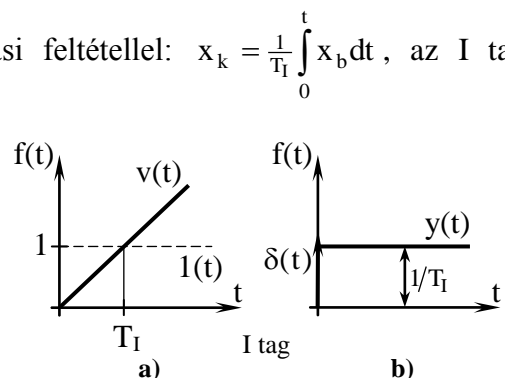
#### 2.6.2 Ideális integráló tag (I tag)

Az ideális integráló tag v. egyszerűen integráló tag (I tag) differenciálegyenlete a (4) szerinti alakban, a megfelelő együttható helyére  $T_I$  időállandót írva:

$$T_I \frac{dx_k(t)}{dt} = x_b(t) \quad .$$

$T_I$  neve: integrálási időállandó.

A differenciálegyenletből  $x_{k0} = 0$  kiindulási feltétellel:  $x_k = \frac{1}{T_I} \int_0^t x_b dt$ , az I tag kimenőjele tehát a bemenőjel integráljával arányos. Az átmeneti függvény esetében az  $x_b$  jel 1, s mivel az 1 állandó integrálja:  $t$ , az átmeneti függvény kifejezése:  $\frac{1}{T_I} t$  (2-20.a ábra). A



2-20. ábra

kifejezésből következik, hogy a kimenőjel  $t = T_I$ -nél éri el a bemenőjel értékét, ezért  $T_I$ -t ismétlési időnek is nevezik. A súlyfüggvény mint a Dirac-delta  $T_I$ -vel osztott integrálja a 2-20.b ábra szerint alakul. Integráló tag pl. az egyenáramú szervomotor, ha a kimenőjele nem a szögsebesség, hanem a szögelfordulás.

Az I tag differenciálegyenletének Laplace-transzformáltja:

$$T_I s X_k(s) = X_b(s) \quad .$$

Az átviteli függvény így:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{1}{s T_I} = \frac{A_I}{s} \quad ,$$

ahol  $A_I$  az átviteli tényező.

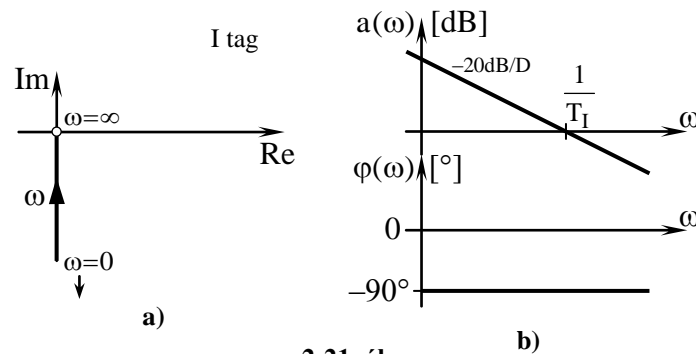
Az I tag frekvenciafüggvénye az átviteli függvényből  $s = j\omega$  helyettesítéssel:

$$\bar{Y}(j\omega) = \frac{1}{j\omega T_I} = -j \frac{1}{\omega T_I} \quad .$$

Ez negatív képzetes szám,  $\omega = 0$ -nál értéke  $-j\infty$ ,  $\omega = \infty$ -nél 0. Nyquist-diagramja ennek megfelelően a 2-21.a ábra szerinti. A Bode-diagramhoz szükséges  $a(\omega)$  függvény:

$$a(\omega) = 20 \cdot \lg |\bar{Y}(j\omega)| = 20 \cdot \lg \frac{1}{\omega T_I} = -20 \cdot \lg \omega T_I \quad .$$

Ezt a függvényt a  $T_I$  tagnál  $-T_I$  helyett  $T_I$ -gyel – már vizsgáltuk. Az ottaniak alapján a



2-21. ábra

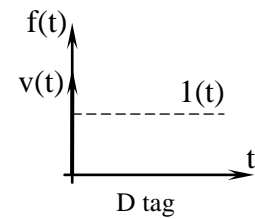
függvény olyan egyenest ábrázol, amelynek a meredeksége  $-20 \text{ dB/dekád}$ , és amely a  $0 \text{ dB}$ -es tengelyt  $\omega = 1/T_I$ -nél metszi (2-21.b ábra). Az  $\omega = 1/T_I$  körfrekvencia neve: integrálási körfrekvencia. Mivel  $\bar{Y}(j\omega)$  negatív képzetes, a  $\phi(\omega)$  függvény értéke minden  $\omega$ -nál  $-90^\circ$  (2-21.b ábra).

### 2.6.3 Ideális differenciáló tag (D tag)

Az ideális differenciáló tag v. egyszerűen differenciáló tag (D tag) differenciálegyenlete a (4) szerinti alakban, a megfelelő együttható helyére  $T_D$  időállandót írva:

$$x_k(t) = T_D \frac{dx_b(t)}{dt} .$$

A D tag kimenőjele tehát a bemenőjel deriváltjával arányos. Az átmeneti függvény ennek megfelelően:  $v(t) = T_D \delta(t)$  (2-22. ábra). A képlet szerint az ideális tag kimenetén az egységugrás hatására végtelen nagy amplitúdójú impulzus jelenik meg. Tároló nélküli differenciáló tag csak elvben létezik, a differenciáló hatás a gyakorlatban mindig tároló hatással együtt jelentkezik (legfeljebb a tároló hatás elhanyagolható mértékű). Kéttárolós differenciáló tag pl. az egyenáramú szervomotor, ha bemenőjele a kapocsfeszültség, kimenőjele pedig az armatúraáram. A súlyfüggvénnyel nem foglalkozunk.



2-22. ábra

A D tag differenciálegyenletének Laplace-transzformáltja:

$$X_k(s) = T_D s X_b(s) .$$

A tag átviteli függvénye tehát:

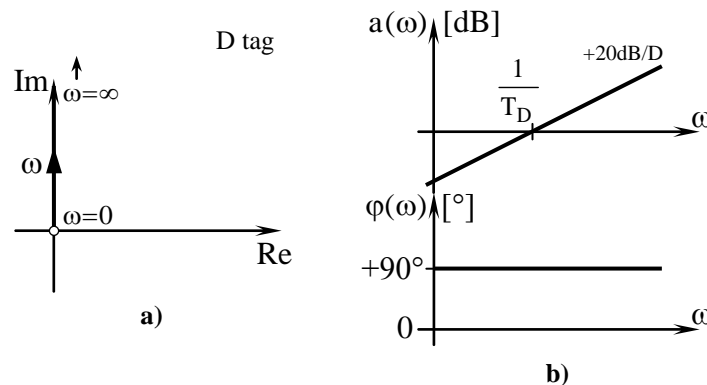
$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = s T_D = A_D s ,$$

ahol  $A_D$  az átviteli tényező.

A D tag frekvenciafüggvénye az átviteli függvényéből  $s = j\omega$  helyettesítéssel:  $\bar{Y}(j\omega) = j\omega T_D$ . Ez pozitív képzetes szám,  $\omega = 0$ -nál értéke 0,  $\omega = \infty$ -nél  $j\infty$ . Nyquist-diagramja ennek értelmében a 2-23.a ábra szerinti. A Bode-diagramhoz szükséges  $a(\omega)$  függvény:

$$a(\omega) = 20 \cdot \lg |\bar{Y}(j\omega)| = 20 \cdot \lg \omega T_D .$$

Ez a függvény – hasonló alapon, mint az I tagnál – a  $\lg \omega$  függvényében  $+20 \text{ dB/dekád}$



2-23. ábra

meredekségű egyenest ábrázol, amely a  $\lg \omega$  tengelyt  $\omega = \frac{1}{T_D}$  helyen metszi. Ami a  $\varphi(\omega)$  függvényt illeti,  $\bar{Y}(j\omega)$  pozitív képzetes, ezért  $\varphi(\omega)$  értéke minden  $\omega$ -nál  $+90^\circ$  (2-23.b ábra).

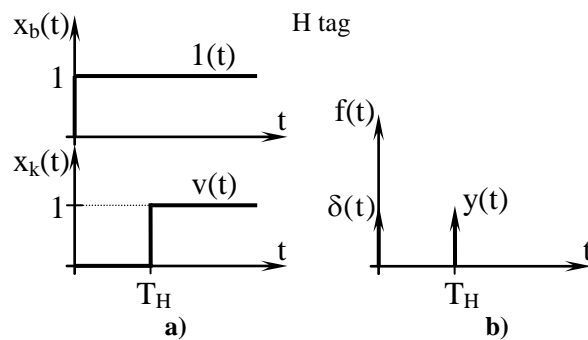
#### 2.6.4 Holtidős arányos tag (H és HP tag)

A holtidős tagok olyan tagok, amelyeknek a kimenőjele a bemenőjel megjelenése után csak egy bizonyos idő, az ún. holtidő eltelte után kezd el kialakulni. A holtidőt az (1) általános differenciálegyenletben és származtatott változataiban közvetlenül nem vettük figyelembe, de erre még később visszatérünk.

A holtidős tagokkal az energia, ill. az anyag véges terjedési sebességét képezzük le. Holtidős tag pl. egy szállítószalag, amelynek az elejére felvitt anyag a szalag végén csak a szállítási idő múlva jelentkezik.

A holtidős tagok legegyszerűbb típusa a tiszta holtidős tag vagy egyszerűen holtidős tag (H tag). Jelöljük a holtidőt  $T_H$ -val, akkor a H tag differenciálegyenlete, a bemenőjel és a kimenőjel kapcsolatát leíró egyenlet:

$$x_k(t) = x_b(t - T_H) \quad .$$



2-24. ábra

Az egyenletből az átmeneti függvény

(amelynél  $x_b(t) = 1(t)$ ) és a súlyfüggvény (amelynél  $x_b(t) = \delta(t)$ ) közvetlenül felírható:

$$v(t) = 1(t - T_H) \quad ,$$

$$y(t) = \delta(t - T_H) \quad .$$

A függvények képét a 2-24.a, ill. b ábra mutatja.

A H tag differenciálegyenletének Laplace-transzformáltja az eltolási tétel felhasználásával:

$$X_k(s) = X_b(s) e^{-sT_H} \quad ,$$

Átviteli függvénye így:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = e^{-sT_H} \quad .$$

A H tag frekvenciafüggvénye az átviteli függvényből  $s = j\omega$  helyettesítéssel:

$$\bar{Y}(j\omega) = e^{-j\omega T_H} \quad . \quad (21a)$$

A frekvenciafüggvény abszolút értéke és szöge az  $\bar{Y}(j\omega) = |\bar{Y}(j\omega)| e^{j\varphi}$  kifejezéssel való összehasonlítás alapján:

$$|\bar{Y}(j\omega)| = 1, \quad \varphi(\omega) = -\omega T_H. \quad (21b,c)$$

A (21a) kifejezés olyan komplex mennyiséget jellemez, amely a komplex számsíkon kört ír le. A mennyiség szöge ugyanis  $\omega$  növekedésekor csökken (abszolút értékben nő), a mennyiség abszolút értéke azonban mindig 1 marad (l. (21b,c)-t is). A  $H$  tag Nyquist-diagramja tehát kör, amelynek a sugara az abszolút érték, azaz 1 (2-25.a ábra). A körön, mint (21c)-ből látszik,  $\omega$  a negatív szögek irányában növekszik.  $\omega = 0$ -nál, mint (21c)-ből ugyancsak látszik, a szög  $\varphi = 0$ , ezért az ehhez tartozó körpont: +1. Az  $\omega$  körfrekvencia növekedésével a szög  $-\pi$  lesz a  $-\omega T_H = -\pi$  egyenlőségből kifejezhető

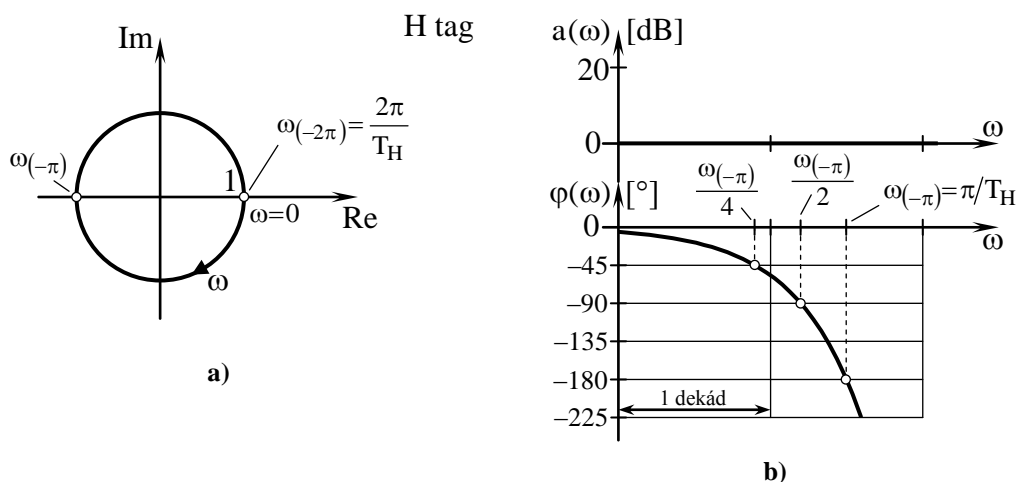
$$\omega_{(-\pi)} = \frac{\pi}{T_H}$$

körfrekvenciaértéknél, és  $-2\pi$  értékű lesz a  $-\omega T_H = -2\pi$ -ből kifejezhető

$$\omega_{(-2\pi)} = \frac{2\pi}{T_H}$$

körfrekvenciánál. Ez utóbbi esetben ismét a +1-es pontba jutunk. Az  $\omega$ -paraméterek a szögismétlődés figyelembevételével is felírhatók: a +1 pontban pl. általában  $\omega = k2\pi/T_H$ , ahol  $k = 1, 2 \dots$  stb.

A Bode-diagram amplitúdó-jelleggörbéje  $a(\omega) = 20\lg|\bar{Y}(j\omega)| = 20\lg 1 = 0$  miatt a 0 dB-es egyenes (2-25.b ábra). A fázisjelleggörbén az  $\omega_{(-\pi)}$  körfrekvencián a szög  $-\pi = -180^\circ$ , s ha ehhez képest a szög pl. feleződik, akkor  $\omega$  is feleződik, mert a  $\varphi$  és az  $\omega$  egymással egyenesen arányos. A fázisjelleggörbét a 2-25.b ábrán rajzoltuk föl.



2-25. ábra



A H tagon tisztán a holtidős hatás tanulmányozható. Ha a H taggal (ideális) arányos tagot kapcsolunk sorba, holtidős arányos tagot kapunk (HP tag).

A HP tag esetében a H taghoz képest az eltérések a következők:  $A_H$ -val jelölve az arányos összetevő átviteli tényezőjét, a differenciálegyenlet jobb oldalát  $A_H$ -val szorozni kell, emiatt  $A_H$ -val szorozódik az átviteli függvény is. A  $v(t)$  átmeneti függvény állandó értéke ebből következően nem 1, hanem  $A_H$ . A Nyquist-diagram kör marad, de a sugara ennek sem 1 lesz, hanem  $A_H$ . A Bode-diagramon az arányos és a holtidős tag(rész) jelleggörbéjének összegét kapjuk, ezért az amplitúdó-jelleggörbe  $20\lg A_H$  értékkel ( $A_H$  [dB]) függőlegesen eltolódik, a fázisjelleggörbe pedig nem változik, mert az arányos tag fázisa nulla.

A holtidős tagot a (2) általános differenciálegyenletben közvetlenül nem vettük figyelembe. Bebizonyítható azonban, hogy a H tag átviteli függvénye megközelíthető igen nagyszámú tárolás tag átviteli függvényének a szorzatával, így a (6) általános átviteli függvényt, s így visszafelé a (2) differenciálegyenletet úgy tekinthetjük, hogy abban a holtidős tag is benne foglaltatik.

## 2.6.5 Az összefüggések áttekintő táblázata

2-1. táblázat

A tag jele	Differenciálegyenlet	Átviteli függvény
P	$x_k(t) = A_P x_b(t)$	$A_P$
I	$T_I \frac{dx_k(t)}{dt} = x_b(t)$	$\frac{1}{sT_I}$
D	$x_k(t) = T_D \frac{dx_b(t)}{dt}$	$sT_D$
PT1	$T_I \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = A_P x_b(t)$	$\frac{A_P}{1 + sT_I}$
PT2	$a_2 \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = A_P x_b(t)$	$\begin{matrix} \zeta < 1 & \frac{A_P}{\omega_0^2 s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_0} s + 1} \\ \zeta = 1 & \\ \zeta > 1 & \end{matrix}$
		$\zeta > 1 \quad \frac{A_P}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$
		$\zeta = 1 \quad \frac{A_P}{(1 + sT)^2}$
HP	$x_k(t) = A_H x_b(t - T_H)$	$A_H e^{-sT_H}$

Az előzőekben vizsgált tagok differenciálegyenleteit és átviteli függvényeit, célszerű csoportosításban a 2-1. táblázatban foglaltuk össze. A táblázatban már nem szerepelnek külön az  $A_P = 1$ , ill.  $A_H = 1$  jellemzőjű tagok.

Az itt záruló 2.6 fejezetben az egyszerű tagok közül csak a legelemibbeket tárgyaltuk. További egyszerű tagokról – az itt tárgyaltakkal együtt – táblázatos formájú áttekintés található a Függelék F2. fejezetében. Ott összehasonlító táblázatok mutatják be a legfontosabb arányos, integráló, differenciáló és holtidős egyszerű tagok jellemzőit. Ezek közül az arányos, integráló és differenciáló tagokra vonatkozó táblázatok Dr. Bausz Imre nyomán készültek [1], az általa alkalmazott táblázati elrendezést követve.

## 2.7 Összetett átviteli tagok

Az egyszerű tagok soros és párhuzamos kapcsolásával összetett tagokat kapunk. Az összetett tagok jelölésmódjánál a megállapodás a következő: az egymás mellé írt P, I, D jelek párhuzamos, a más jelek mellé írt H és T jelek soros kapcsolást jelentenek. Ezt tulajdonképpen már az egyszerű tagok jelölésekor is alkalmaztuk, de ott csak soros kapcsolat fordult elő. Az összetett tagok közül a számunkra a legfontosabb a PD és a PI tag.

### 2.7.1 Arányos-differenciáló tag (PD tag)

A PD tag párhuzamosan kapcsolt P és D tagból áll (2-26. ábra). A tag eredő átviteli függvénye a két résztag átviteli függvényének az összege. Az ábrázoláshoz ezt az összeget szorzatokra kell bontanunk, abban pedig célszerű az időállandós felírást érvényesíteni:

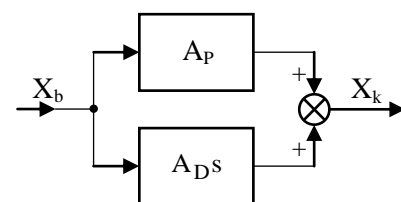
$$Y_{PD}(s) = A_P + A_D s = A_P \left( 1 + \frac{A_D}{A_P} s \right) = A_P (1 + s T_D) ,$$

ahol 
$$T_D = \frac{A_D}{A_P} .$$

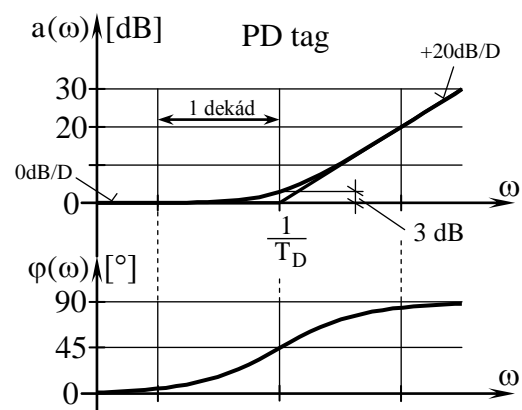
A tag frekvenciafüggvénye az átviteli függvényből  $s = j\omega$  helyettesítéssel:

$$\bar{Y}_{PD}(j\omega) = A_P (1 + j\omega T_D) .$$

A Bode-diagramhoz szükséges összefüggések hasonló módon vezethetők le, mint a T1 tagnál.



2-26. ábra



2-27. ábra

Eredményül azt kapjuk, hogy az aszimptoták meredeksége most 0 dB/dekád, ill. +20 dB/dekád; a fázisjelleggörbe pedig +90°-hoz tart. A Bode-diagramot  $A_P = 1$ -re a 2-27. ábra mutatja.

### 2.7.2 Arányos-integráló tag (PI tag)

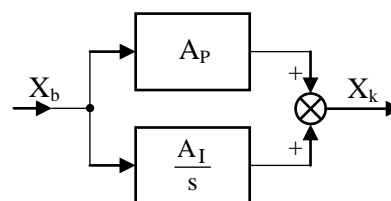
A PI tag párhuzamosan kapcsolt P és I tagból áll (2-28. ábra). Felírva az eredő átviteli függvényt, és az ábrázoláshoz szorzatokra bontva, ill. célszerű alakra hozva:

$$Y_{PI}(s) = A_P + \frac{A_I}{s} = A_P \left( 1 + \frac{1}{\frac{A_P}{A_I} s} \right) = A_P \left( 1 + \frac{1}{s T_I} \right) = A_P \frac{1 + s T_I}{s T_I}, \text{ ahol } T_I = \frac{A_P}{A_I}.$$

A frekvenciafüggvényt  $s = j\omega$  helyettesítéssel kapjuk. A Bode-diagram amplitúdó-jelleggörbéje

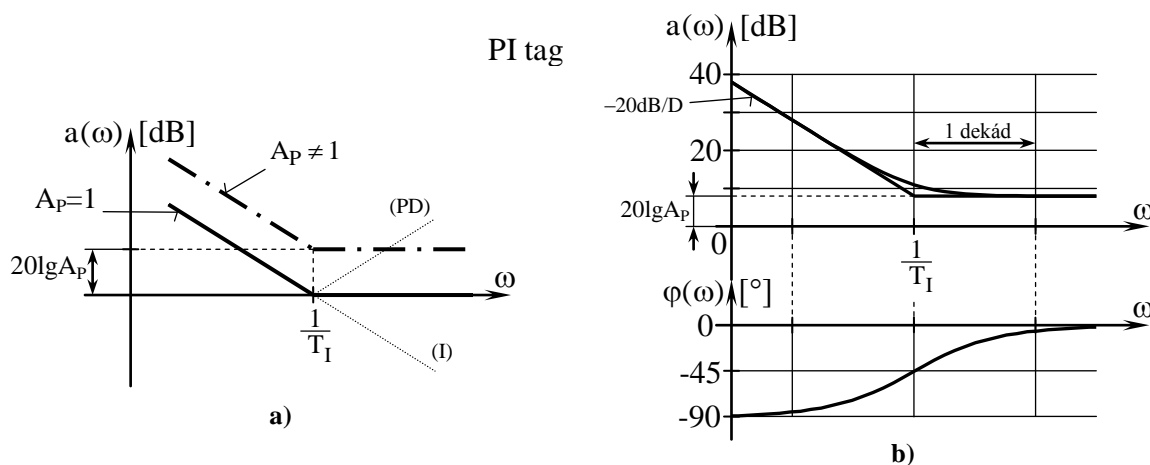
$$Y_{PI}(s) = A_P \frac{1 + s T_I}{s T_I} \quad (22)$$

alapján egy  $1/T_I$  integrálási körfrekvenciájú integráló, egy ugyanolyan sarok-körfrekvenciájú PD és egy  $A_P$  erősítésű arányos tag jelleggörbéjének az összege. Az ábrázoláshoz célszerű először  $A_P = 1$ -et feltételezni (2-29.a ábra), ahonnan az  $A_P \neq 1$ -nél érvényes eredőt úgy kapjuk, hogy



2-28. ábra

az  $A_P = 1$ -gyel kapott görbét  $20 \lg A_P$ -vel ( $A_P$  [dB]) függőlegesen eltoljuk. A teljes Bode-diagram a 2-29.b ábrán látható. A fázisjelleggörbe egy  $-90^\circ$ -os egyenes és egy PD tag fázisjelleggörbéjének az összegeként  $-90^\circ$ -ról 0-hoz tart.



2-29. ábra

A PI tag átviteli függvényének (22) alakja tkp. csak egy közbenső alak az időállandós alakhoz. Az időállandós alak (22)-ből további egyszerű átalakítással:

$$Y_{PI}(s) = \frac{A_P}{T_I} \frac{1 + sT_I}{s},$$

vagy  $T_I$  fent megadott kifejezését figyelembe véve:

$$Y_{PI}(s) = A_I \frac{1 + sT_I}{s}.$$

Az átviteli függvényt gyakran ebben az utóbbi két alakban használják.

## 2.8 A szabályozásokkal szemben támasztott követelmények

Ahhoz, hogy a szabályozás be tudja tölteni a feladatát, bizonyos követelményeknek eleget kell tennie:

1. Stabilis működésűnek kell lennie.
2. Meg kell felelnie meghatározott minőségi igényeknek.

A *stabilitás* igénye onnan merül fel, hogy szükséges, hogy a szabályozás egyáltalán beálljon egy állandósult működési állapotba, és ha az alapjel megváltozik, új állandósult állapotot vegyen fel, ill. ha zavarójel lép fel, a szabályozás működésének következtében álljon vissza ismét egy állandósult állapot. Ezeket az igényeket a szabályozás akkor teljesíti, ha minden állapotváltozás után egyensúlyi állapot felé tart, más szóval, ha stabilis.

Ha a rendszer stabilis, akkor sem mindegy, hogy milyen viselkedést, milyen tulajdonságokat mutatva működik. Meg kell tehát felelnie bizonyos *minőségi igényeknek*.

### 2.8.1 Szabályozások stabilitásának vizsgálata

A *szabályozási rendszert* akkor nevezzük stabilisnak, ha a rendszert egyensúlyi állapotából kitérítve, és utána magára hagyva (a kitérítő hatást megszüntetve), a rendszer visszatér eredeti egyensúlyi állapotába.

A stabilitás elméleti vizsgálatához azt feltételezzük, hogy a kitérítő, majd megszűnő hatás  $\delta(t)$  időfüggvényű, mert ez jelenti a legnagyobb, ilyen jellegű igénybevételt. Ez esetben akkor áll fenn a stabilitás, ha a rendszer  $\delta(t)$  bemenőjel hatására fellépő kimenőjele, vagyis a rendszer súlyfüggvénye zérushoz tart. A kiindulási állapotban ugyanis a kimenőjel zérus volt, és ebbe az állapotba kell a rendszernek visszatérnie. Az elméleti vizsgálat vezet a stabilitás matematikai feltételéhez, a matematikai kritériumhoz, ebből pedig levezethető a többi stabilitási kritérium.

A  $\delta(t)$  időfüggvény gyakorlati megvalósítása nehézségekbe ütközik, de a fent definiált stabilitásra igaz, hogy korlátos bemenőjel esetén a rendszer kimenőjele szintén korlátos. Ezért a gyakorlatban a stabilitást ugrás alakú ( $C_a \cdot 1(t)$ ) bemenőjellel vizsgáljuk: ha az ennek hatására fellépő kimenőjel, vagyis az átmeneti függvény állandósul, a szabályozás stabilis.

Ha a szabályozás nem stabilis, akkor (a határesetet leszámítva) labilis. A labilitás létrejöttében döntő szerepük van a szabályozókörü tagok energiatárolóinak, mert ezek miatt a tagok kimenőjele csak késleltetve követi a bemenőjelük változását [7], s így a körben minden hatás csak késve ér el a szükséges helyre. Amikor pl. az  $x_r$  rendelkező jel az  $x_s$  szabályozott jellemzőt növeli, és e közben  $x_s$  eléri a előírt értéket,  $x_s$  még egy ideig tovább nő, mert annak hatása, hogy  $x_s$  az előírt értékű lett, csak késve jelentkezik  $x_s$ -ben. És a másik irányban is: amikor  $x_s$  csökken, és e közben eléri az előírt értéket,  $x_s$  még egy ideig tovább csökken. Az  $x_s$  szabályozott jellemző így rendre a kívánt érték fölé nő, majd az alá csökken stb., tehát lengés lép fel benne. Ha a lengések lecsillapodnak, a rendszer stabilis, ha azonban amplitúdójuk egyre nő, a rendszer labilis.

#### 2.8.1.1 Matematikai stabilitási kritérium

A fentiek értelmében a teljes, vagyis a zárt szabályozási rendszer akkor stabilis, ha a  $\delta(t)$  bemenőjel hatására fellépő kimenőjele, azaz súlyfüggvénye zérushoz tart. A súlyfüggvény Laplace-transzformáltja az átviteli függvény (2.2.3 pont), ezért feltételünk azt jelenti, hogy a rendszer  $W(s)$  átviteli függvényéből visszatranszformált  $w(t)$  időfüggvénynek kell zérushoz tartania. A  $W(s)$  átviteli függvény a legáltalánosabban polinomok hányadosaként van adva:

$$W(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n} \quad .$$

Kiszámítva ennek a pólusait (nevezőjének gyökeit), áttérhetünk gyöktényezős alakra, amelyből részlettörtekre bontás és visszatranszformálás után a  $w(t)$  függvény  $e^{p_i t}$  alakú exponenciális összegeként adódik, ahol  $p_i$  a  $W(s)$   $i$ -edik pólusa. A pólusok meghatározásához  $W(s)$  nevezőjét kell nullával egyenlővé tenni, és az így kapott ún. *karakterisztikus egyenlet* gyökeit kell meghatározni. A kapott gyökök valósak vagy konjugált komplex gyökpárok lehetnek. A valós kitevőjű exponenciális összetevő akkor tart zérushoz, ha a kitevő negatív, a komplex kitevőjű pedig akkor, ha a kitevő valós része negatív. Végeredményben tehát a matematikai kritérium:

A szabályozási rendszer stabilis, ha a zárt rendszer átviteli függvényének minden valós pólusa negatív, és minden komplex pólusa negatív valós részű. Szemléletesen: minden

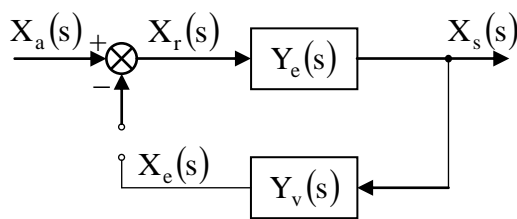
pólusnak a komplex számsíkon a képzetes tengelytől balra kell elhelyezkednie.

A fenti képletből leolvasható, hogy a pólusok meghatározásához  $n$ -edfokú polinomot kell nullával egyenlővé tenni, és az így kapott egyenletet kell megoldani. Ez a megoldási munka nagyobb fokszámok esetén számítógép nélkül hosszadalmas, ezért és szemléletbeli előnyökért számos más módszert is kidolgoztak a stabilitás eldöntésére.

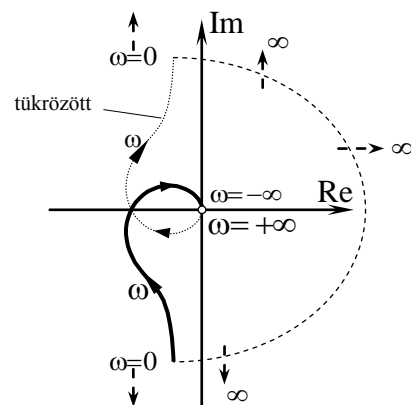
(Megj.: a  $\delta(t)$  jel megszűnése után a rendszer magára hagyott rendszer, kimenőjelét így a homogén differenciálegyenlet megoldása, a rendszer tranziensei adják. A vizsgálat ezek zérushoz tartására szintén a karakterisztikus egyenlethez, s a fenti eredményre vezet.)

### 2.8.1.2 Nyquist stabilitási kritérium

A matematikai kritériumból levezethető a Nyquist-kritérium, amely a felnyitott szabályozási kör eredő átviteli függvényének a Nyquist-diagramjára mondható ki. A felnyitott kört úgy kapjuk, hogy az ellenőrző jel útját megszakítjuk (2-30. ábra). A felnyitott kör eredő átviteli függvénye az ábra alapján:  $Y_f(s) = Y_e(s)Y_v(s)$ , a Nyquist-diagramhoz szükséges



2-30. ábra



2-31. ábra

frekvenciafüggvényt ebből  $s = j\omega$  helyettesítéssel kapjuk ( $\bar{Y}_f(j\omega)$ ). A kritériumhoz azonban nem az eredeti,  $\omega = 0 \dots +\infty$  tartományra rajzolt Nyquist-diagramot, hanem az ún. teljes Nyquist-diagramot használjuk. Ezt úgy kapjuk, hogy az eredeti Nyquist-diagramot a valós tengelyre tükrözzük, és az eredeti diagramot kiegészítjük a tükrözéssel kapott diagrammal (2-31. ábra). A tükrözött szakaszon  $\omega$  növekedése az eredeti nyílirányban folytatódik  $\omega = -\infty$ -től  $\omega = 0$ -ig. Ha az  $\omega = 0$  pontok a végtelenben vannak, akkor ezeket a képzetes tengelytől jobbra eső sík végtelenjébe eső vonallal összekötjük (2-31. ábra). Ezzel a kiegészítéssel a teljes Nyquist-diagramra minden esetben zárt görbét kapunk.

A Nyquist-kritériumot a legtöbbször az ún. egyszerűsített alakban alkalmazzuk. Ez az alak csak akkor igaz, amikor a felnyitott körnek nincsenek a jobb oldali félsíkon (azaz pozitív valós részű) pólusai, de a gyakorlatban ez az eset a legfontosabb.

Az egyszerűsített Nyquist-kritérium a következő:

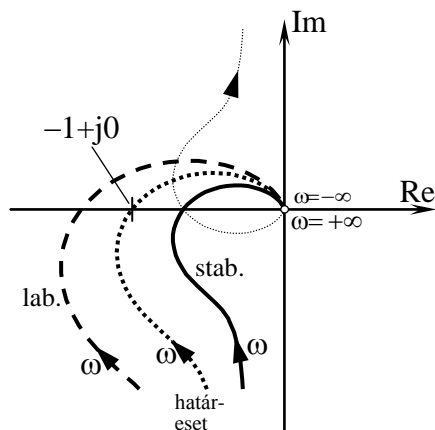
- a) ha a felnyitott kör teljes Nyquist-diagramja nem veszi körül a  $(-1 + j0)$  pontot, a rendszer stabilis;
- b) ha a felnyitott kör teljes Nyquist-diagramja éppen áthalad a  $(-1 + j0)$  ponton, a rendszer a stabilitás és a labilitás határán van;
- c) ha a felnyitott kör teljes Nyquist-diagramja körülveszi a  $(-1 + j0)$  pontot, a rendszer labilis.

A három esetet a 2-32. ábra szemlélteti. Az ábrán a diagram tükrözött szakaszát csak a stabilis esetre vonatkozóan tüntettük föl, és ott sem ábrázoltuk a végtelenben való záródást.

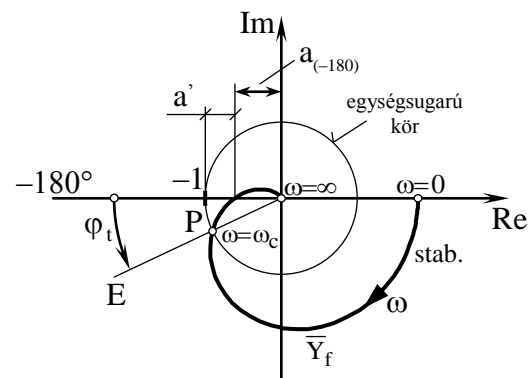
A kritérium alapján a kritikus pont a  $(-1 + j0)$ , azaz a  $-1$  pont. Annak, hogy ez kitüntetett hely, matematikai jele is van. A 2-30. ábra jelöléseivel ugyanis (az ábrán ekkor a megszakítás helyén rövidzár van) a visszacsatolt tagok eredőjére vonatkozó képlet értelmében,  $s = j\omega$  helyettesítés után a zárt kör eredő frekvenciafüggvénye:

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{Y}_e(j\omega)}{1 + \bar{Y}_e(j\omega)\bar{Y}_v(j\omega)} = \frac{\bar{Y}_e(j\omega)}{1 + \bar{Y}_f(j\omega)},$$

s itt  $\bar{Y}_f(j\omega) = -1$  esetén 0-val kellene osztani, ami értelmetlen.



2-32. ábra



2-33. ábra

Az eddigiek a stabilitás tényére vonatkoztak, de nyilván szükségünk van a stabilitás mértékét jellemző mennyiségekre is. Ezek közül a legfontosabb az ún. fázistartalék, amelyet a következőképpen értelmezünk: A komplex koordináta-rendszerben egységsugarú kört rajzolunk (2-33. ábra), és vesszük a felnyitott kör Nyquist-diagramjának és az egységsugarú körnek a metszéspontját (P). A  $\phi_t$  fázistartalék az origót és a metszéspontot összekötő „E”

egyenesnek a negatív valós tengelyhez viszonyított szöge (2-33. ábra, a viszonyítás talppontját kis kör jelzi).

$\varphi_t > 0$  esetén a fázistartalékot *fázistöbbletnek* nevezzük, ez jelenti a stabilis esetet (a 2-33. ábra ilyen esetet mutat); a  $\varphi_t = 0$  eset jelenti a határesetet; míg  $\varphi_t < 0$  esetén *fázishiány* van, ekkor a kör labilis (ilyenkor  $\varphi_t$  talppontja helyben marad, és a nyíl átfordul a másik irányba). A Nyquist-diagram P metszéspontához tartozó  $\omega = \omega_c$  körfrekvenciájának neve *vágási körfrekvencia*. A szabályozás kielégítő működéséhez a fázistöbbletnek elegendően nagyoknak kell lenni, általában  $\varphi_t > 30^\circ$  szükséges. Számértékét tekintve  $\varphi_t$ -t a

$$\varphi_t = \varphi - \pi$$

képlettel számolhatjuk, ahol  $\varphi$  az „E” egyenesnek a pozitív valós tengelytől mért szöge.

A fázistartalék mellett használatos az  $a_t$  *erősítési tartalék* is, amely az a szorzószám, amellyel a felnyitott kör erősítését, az ún. körerősítést megszorozva, a rendszer a stabilitás és a labilitás határára kerül (körerősítés = a felnyitott kör időállandós átviteli tényezője, l. 2.9 pont). A K körerősítéssel ugyanis az abszolút érték a Nyquist-diagram minden pontjában arányos, ezért a görbe K növelésével „kitágul”, és elérheti a kritikus, határeseti pontot. Jelöljük a mindenkori körerősítést K-val, a határesethez tartozót  $K_{krit}$ -sal, akkor az erősítési tartalék  $K_{krit}/K$ . Értéke a diagram alapján számolható: mivel K-val a görbén mérhető abszolút érték minden szögérték esetén arányos,  $K_{krit}$  úgy aránylik K-hoz, mint a kritikus 1 távolság (abszolút érték) az ábrán bejelölt  $a_{(-180)}$  távolsághoz. Az erősítési tartalék tehát :

$$a_t = \frac{K_{krit}}{K} = \frac{1}{a_{(-180)}} .$$

Stabilis esetben  $a_{(-180)} < 1$  miatt  $a_t > 1$ . A megfelelő működéshez kb.  $a_{(-180)} < 0,5$ , azaz  $a_t > 2$  szükséges. Az  $a_t$  mennyiség kifejezhető az ábra szerinti  $a'$  távolsággal is (nem egyenlő vele), szemléltetésére ezt a távolságot szokás az ábrákon bejelölni.

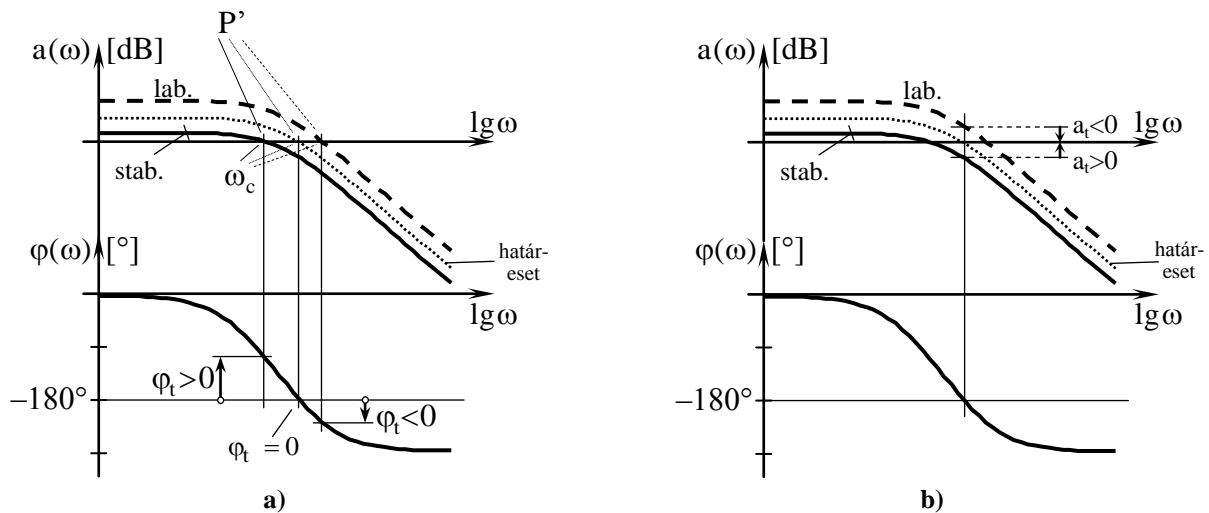
### 2.8.1.3 Stabilitási kritérium a felnyitott kör Bode-diagramján

A Nyquist- és a Bode-diagram között egyértelmű kapcsolat van (hiszen ugyanazt a mennyiséget ábrázolják), ezért a Nyquist-kritérium, a kapcsolódó fogalmaival együtt, értelmezhető a felnyitott kör Bode-diagramján is. A stabilitás-vizsgálat, a stabilitás mértékének a beállítása itt sokszor kényelmesebben végezhető el.

A kritérium szempontjából a legcélszerűbb kapcsolatot úgy találjuk meg, ha megkeressük a 2-33. ábra-beli P metszéspontnak a Bode-amplitúdódiagram-beli megfelelőjét.



Ehhez azt kell figyelembe vennünk, hogy a P pontban  $|\bar{Y}_f(j\omega)| = 1$  (mert az egységsugarú körön vagyunk), az  $a_f(\omega)$  tehát ugyanott  $a_f(\omega) = 20\lg|\bar{Y}_f(j\omega)| = 20\lg 1 = 0$  dB, ami azt jelenti, hogy a nevezett P pontnak a Bode-amplitúdódiagramon az  $a_f(\omega) = 0$  hely, azaz a felnyitott kör  $a_f(\omega)$  amplitúdó-jelleggörbéjének és a 0 dB-es tengelynek a metszéspontja felel meg (2-34.a ábra, P' pont). A P' metszéspontnál van ezért az  $\omega_c$  vágási körfrekvencia, és P'-nél,



2-34. ábra

azaz  $\omega_c$ -nél olvasható le, most már a  $\varphi(\omega)$  görbéről, a  $\varphi_t$  fázistartalék, természetesen most is  $-180^\circ$ -hoz viszonyított  $\varphi$  szöggént (2-34.a ábra). Leolvasáskor a 2-33. ábrával összehangban az abszolút értékben  $180^\circ$ -nál kisebb szög jelenti a pozitív  $\varphi_t$ -t, az abszolút értékben  $180^\circ$ -nál nagyobb pedig a negatívát. A stabilitási kritérium egyébként matematikailag ugyanaz, csak ezt most a  $\varphi_t$ -re fogalmazott alakban használjuk:  $\varphi_t > 0$  jelenti a stabilis esetet,  $\varphi_t = 0$  a stabilitás és a labilitás határesetét,  $\varphi_t < 0$  pedig a labilisat. (A kritériumot ebben a megfogalmazásban szokás Bode-kritériumnak is nevezni.)

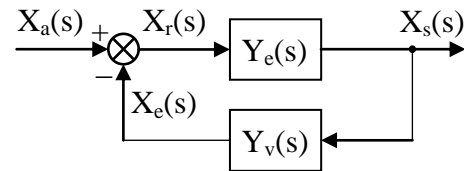
$$\text{Az erősítési tartalék felírható az } a_t [\text{dB}] = 20\lg \frac{1}{a_{(-180)}} = 20\lg 1 - 20\lg a_{(-180)} = -a_{(-180)} [\text{dB}]$$

alakban, így az  $a_t$  [dB] érték a Bode-diagramról a  $\varphi = -180^\circ$ -hoz tartozó  $a_{(-180)}$  [dB] érték  $-1$ -szereseként olvasható le. Mivel, mint a 2-34.b ábrából látszik, stabilis esetben az  $a_{(-180)}$  [dB] érték negatív előjelű, az  $a_t$  [dB] erősítési tartalék stabilis esetben lesz pozitív, ahogy ezt az ábrán szintén bejelöltük. Az  $a_t$  [dB] erősítési tartalék megadja, hogy hány dB-lel lehet az erősítést növelni a határesetig.

## 2.8.2 A szabályozások minőségi jellemzői

A szabályozással szemben támasztott minőségi igényeket *minőségi jellemzőkön* keresztül határozzuk meg, amelyeket a zárt szabályozási kör átmeneti függvénye alapján definiálunk. Mivel a zárt körrel van szó, a bemenőjel az  $x_a$  alapjel, a kimenőjel pedig az  $x_s$  szabályozott jellemző (2-35. ábra), s mivel az átmeneti függvényről van szó, az alapjel ugrásjel. A zárt kör eredő átviteli függvénye az ábra alapján:

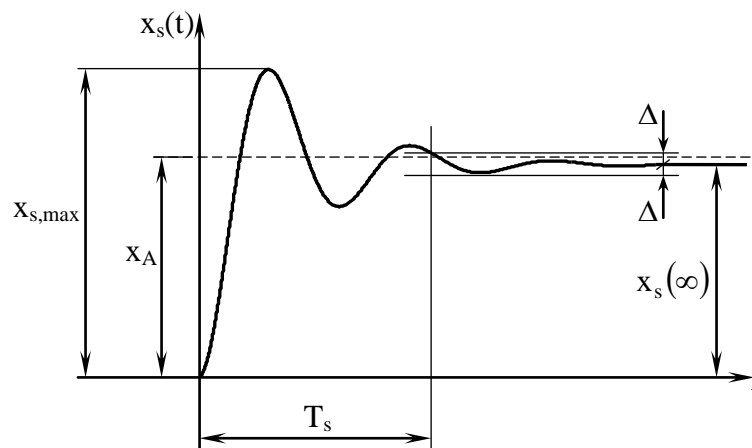
$$W(s) = \frac{X_s(s)}{X_a(s)} = \frac{Y_e(s)}{1 + Y_e(s)Y_v(s)} = \frac{Y_e(s)}{1 + Y_f(s)} .$$



2-35. ábra

Az átmeneti függvénynek a minőségi jellemzők definiálására alkalmas képe a 2-36. ábrán látható. Az ábrán:

- $x_s$ : a szabályozott jellemző,
- $x_A$ : a szabályozott jellemző előírt állandósult értéke, az ún. alapérték,
- $x_s(\infty)$ : a szabályozott jellemző valóságos állandósult értéke,
- $x_{s,max}$ : a szabályozott jellemző maximális értéke.



2-36. ábra

A legfontosabb, alapvetőnek számító minőségi jellemzők:

a/ „Statikus” v. maradó hiba:

$$\varepsilon[\%] = \frac{x_A - x_s(\infty)}{x_A} \cdot 100 .$$

A későbbiek miatt hangsúlyos, hogy  $\varepsilon$ -t az átmeneti függvényre, tehát ugrás alakú bemenőjelre, az állandósult állapotra és viszonylagos mennyiségként definiáltuk.

Bebizonyítható, hogy ha a szabályozási kör ún. 0 típusú (arányos típusú) kör (l. a 2.9 pontban), akkor az itt definiált  $\varepsilon$  hiba:

$$\varepsilon[\%] = \frac{1}{1+K} \cdot 100 \quad , \quad \text{ahol}$$

K: a körerősítés (l. a 2.9 pontban).

Integráló jellegű (1 típusú) szabályozáskor az  $\varepsilon$  hiba nulla.

b/ Szabályozási idő:

Ez az a  $T_s$  idő, amely az ugrás-alapjel bekapcsolásától addig az időpontig eltelik, amelynél a szabályozott jellemző értéke úgy lép be az  $x_s(\infty) \pm \Delta$  sávba, hogy többé már nem lép ki onnan.

„ $\Delta$ ” az ún. dinamikus pontosság, amelynek a szokásos értéke az  $x_s(\infty)$  százalékában: 5 %, 2 %, 1 %.

c/ Viszonylagos túllendülés:

Ez az  $x_{s,\max} - x_s(\infty)$  túllendülésnek az  $x_s(\infty)$ -hez viszonyított %-os értéke:

$$\sigma[\%] = \frac{x_{s,\max} - x_s(\infty)}{x_s(\infty)} \cdot 100 \quad .$$

d/ Lengésszám:

A  $T_s$  idő alatt megtett teljes lengések száma:  $\nu$ . Az ábrán  $\nu = 1,5$ .

A fentiekén kívül tkp. közvetve minőségi jellemzőnek tekinthetjük a stabilitás vizsgálatával kapcsolatban bevezetett  $\varphi_t$  *fázistartalékot*,  $\omega_c$  *vágási körfrekvenciát* és a *erősítési tartalékot* is.

A *fázistartalék* összefügg a  $\sigma$  túllendüléssel: minél nagyobb a fázistartalék, annál kisebb a túllendülés. Nulla fázistartaléknál a stabilitás és a labilitás határán vagyunk. Abból kiindulva, hogy lengéssel lépünk át a labilitásba, a határeset a 2-17. ábra  $\zeta = 0$  esetét jelenti, amikor a túllendülés 100 %, ez tartozik tehát nulla fázistartalékhoz. Folytonos idejű (analóg) szabályozásokban a tapasztalat szerint kb.  $60^\circ$  fázistartaléknál számíthatunk 10 %-nál kisebb túllendülésre. A fázistartalékot tehát 0-ról növelve, a túllendülés 100 %-ról csökken, és kb.  $60^\circ$  fázistartaléknál „fogy el”.

A *vágási körfrekvencia* értékéből következtetni lehet a  $T_s$  szabályozási időre. A tapasztalat szerint:

$$\frac{\pi}{\omega_c} < T_s < \frac{3\pi}{\omega_c} \quad .$$

(Az azonban, hogy  $\omega_c$  a  $T_s$ -sel fordítottan arányos, nem mondható ki, legfeljebb bizonyos összehasonlításokra, mint pl. egy adott szabályozott szakasz különböző típusú, de egyforma fázistartalékú kompenzálásainál; l. 2.11 fejezet).

Az  $\varepsilon$  statikus hiba definiálásával már a szabályozási hiba kérdését érintettük, de a kérdéskört bővebben is ki kell fejtenünk. Ezt a „Szabályozások követési és zavarelhárítási tulajdonságai” c. részben tesszük meg, de előtte meg kell ismerkednünk a szabályozások típusszám szerinti csoportosításával.

## 2.9 A szabályozások típusszám szerinti csoportosítása

Ennek a csoportosításnak az alapja a felnyitott kör eredő átviteli függvényének az időállandós alakja. (A felnyitott körnek kiemelt jelentősége van a stabilitás, de a tárgyalandó követési és zavarelhárítási tulajdonságok szempontjából is.) A nevezett időállandós alak (9) alapján, de a felnyitott körre szokásos jelölésekkel, és az egyszerűség kedvéért a részpolinomokat összeszorozottan figyelembe véve, megadható a következőképpen:

$$Y_f(s) = \frac{K}{s^i} \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + 1}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + 1} ,$$

vagy rövidebben:

$$Y_f(s) = \frac{K}{s^i} Z_f(s) . \quad (23)$$

A képletben:

$K$  a felnyitott kör erősítése, az ún. körerősítés (hurokerősítés), amely nem más, mint a felnyitott körben szereplő soros tagok (időállandós) átviteli tényezőinek a szorzata;

$i$  a (23) szerinti alak  $s^i$  tagjának kitevője;

$Z_f(s)$  pedig „s” két polinomjának a hányadosa, s igaz rá, hogy  $\lim_{s \rightarrow 0} Z_f(s) = 1$ .

Az  $i$  hatványkitevőt a szabályozás *típuszámának* nevezzük:

$i = 0$  esetén a szabályozás 0 típusú,

$i = 1$  esetén 1 típusú stb.

$i = 0$  esetén a szabályozást arányos típusúnak is mondjuk, a felnyitott kör Bode-diagramjának  $a_f(\omega)$  jelleggörbéje ilyenkor vízszintesen indul (mivel  $Z_f(j\omega)$  az  $\omega = 0$ -nál 1).  
 $i = 1$  esetén a szabályozás (egyszeresen) integráló típusú, az  $a_f(\omega)$  jelleggörbe ekkor  $-20\text{dB/dekád}$  meredekséggel indul;  $i = -1$  esetén a szabályozás (egyszeresen) differenciáló típusú, az  $a_f(\omega)$  jelleggörbe ekkor  $+20\text{dB/dekád}$  meredekséggel indul.

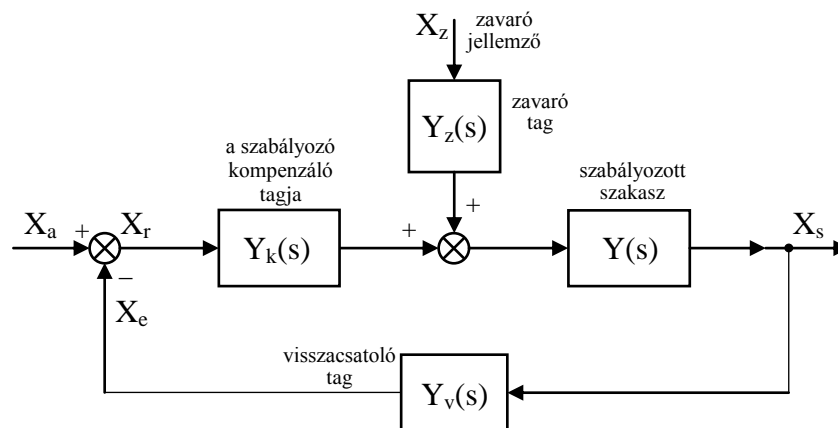
2-nél nagyobb típusszámú szabályozások a gyakorlatban nem fordulnak elő.

A  $K$  körerősítés hangsúlyozottan az időállandós alakból származó mennyiség, nem egyenlő a gyöktényezős alakban szereplő  $k$  állandóval.  $K$  értéke szükségképpen a felnyitott kör Bode-diagramjában is megjelenik:  $i = 0$  esetén egyenlő a  $K/s^0 = K$  tag amplitúdó-

értékével,  $i = 1$  esetén a  $K/s$  tag 0 dB-nél érvényes körfrekvenciájával,  $i = -1$  esetén pedig egyenlő a  $K \cdot s$  tag 0 dB-nél érvényes körfrekvenciájának reciprokával.

## 2.10 Szabályozások alapjelkövetési és zavarelhárítási tulajdonságai

A szabályozási tulajdonságokat vizsgálva azt is vizsgálnunk kell, hogy az alapjellel elérni kívánt hatás és a zavarás által okozott hatás (a zavaró hatást az 1-4.b és az 1-6. ábrával



2-37. ábra

kapcsolatban már érintettük) miként jut érvényre a szabályozott jellemzőben. Ehhez figyelembe kell vennünk a hatásvázlatban a zavaró jellemzőt is, ezt a 2-37. ábra szerint tesszük meg. A zavaró jellemzők ugyan általában a szabályozott szakasz különböző helyein hatnak, de az ezt figyelembe vevő hatásvázlat egyenértékű átalakításokkal – legalábbis elvben – a 2-37. ábra szerinti alakra hozható. Az alapjel és a zavaró jellemző érvényre jutásának a mértékét a *szabályozási hiba* nevű mennyiségen keresztül ítéljük meg. A szabályozási hiba ( $x_h$ ) megadja, hogy a szabályozott jellemző ( $x_s$ ) mennyire tér el az előírt értékétől, az ún. alapértéktől ( $x_A$ ). Kifejezése:

$$x_h = x_A - x_s .$$

A 2.8.2 pontban definiált  $\varepsilon$  statikus hiba definíciós képletének a számlálójában ennek az  $x_h$ -nak egy sajátos esetre vonatkozó értéke szerepel: az  $x_h$  szabályozási hibának az ugrásjel alapjelre, nulla zavarójelre és állandósult állapotra vonatkozó értéke.

A *szabályozás*  $x_A$  *alapértéke* az  $x_s$  szabályozott jellemző általunk előírt, parancsolt értékét jelenti, tehát voltaképpen egy tervezett érték. Megadni az alapjelen keresztül adjuk meg. Összefüggését az alapjellel, a 2-37. ábrát is felhasználva a következőképpen határozhatjuk meg: Az  $x_s = x_A$  alapértéket akkor kapjuk, amikor  $x_r = 0$ , mert ekkor szűnik az  $x_A$  elérését célzó beavatkozás.  $x_r = 0$  esetén viszont a különbségképzőnél (ℓ. hatásvázlat)

$x_e = x_a$  adódik ( $x_r$  irányában szakadás). Erre az állapotra tételezzük föl először, hogy  $Y_v(s) = 1$  (merev visszacsatolás); ez esetben  $Y_v(s) = 1$  miatt igaz, hogy  $x_e = x_s$ , ami  $x_e = x_a$ -val együtt azt jelenti, hogy  $x_s = x_a$ . Ez az  $x_s$  azonban éppen az *alapérték*, amely tehát

$$Y_v(s) = 1 \text{ esetén: } x_A = x_a.$$

Hasonlóan látható be, hogy

$$Y_v(s) = A_v \text{ esetén: } x_A = \frac{x_a}{A_v}.$$

Az  $x_h$ -val kapcsolatos számításokhoz térjünk vissza a 2-37. ábra szerinti hatásvázlatához. A szabályozásra két bemenőjel hat: az  $x_a$  alapjel és az  $x_z$  zavaró jellemző, az  $x_s$  szabályozott jellemzőt e két jel határozza meg – ezért van, hogy épp e két jel hatásának érvényre jutását vizsgáljuk. Az  $x_a$  jel hatása az általunk elérni kívánt hatás,  $x_z$  hatása pedig ehhez képest eltérést okozhat. Az ábra szerint az  $x_h$  mennyiséget olyan állapotra kell felírunk, amikor a körre mind  $x_a$ , mind  $x_z$  hat. Vegyük ehhez figyelembe, hogy lineáris rendszerekben érvényes a szuperpozíció elv:  $x_a$  és  $x_z$  együttes hatása egyenlő a külön-külön vett hatásaik összegével. Ez azt jelenti, hogy a hibát két hibaösszetevő összegeként számolhatjuk: az egyik összetevő számításakor a hatásvázlatban az  $X_a$  bemenőjel működik, és  $X_z = 0$ , a másik összetevő számításakor pedig  $X_z$  működik, és  $X_a = 0$ . Az első állapot, amikor csak  $X_a$  van, a valóságos működéskor is előfordulhat, ebben az állapotban tkp. azt vizsgáljuk, hogy a szabályozás milyen hibával *követi az alapjelet*. A második állapotban csak  $X_z$ -átvitel van, ez elméleti állapot, amelyben azt vizsgáljuk, hogy a szabályozás milyen hibával képes a *zavaró jeleket elhárítani*.

Megismételjük, hogy amikor  $x_a$  és  $x_z$  egyaránt különbözik zérustól, az eredő hibát a két összetevő összege adja.

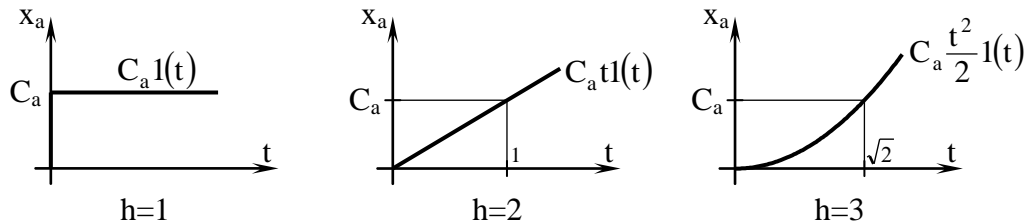
### 2.10.1 A szabályozások alapjelkövetési tulajdonságai

A kérdés vizsgálatához, mint szó volt róla, a 2-37. ábra szerinti hatásvázlatot használjuk, és a vizsgálathoz feltételezzük, hogy csak alapjel van, és a zavaró jellemző zérus:  $X_z = 0$ . Az elvégzett vizsgálat azt mutatja, hogy az alapjelre fellépő, követési szabályozási hiba függ az alapjel típusától és a szabályozás  $i$  típusszámától. A szabályozás  $i$  típusszámának értelmezését a 2.9 pontban már megadtuk. Itt annyit teszünk hozzá, hogy a típusszám tkp. nem más, mint a felnyitott körben lévő soros integrátorok száma. Ami az alapjel típusszámát illeti, vizsgáló alapjelként a tipikus vizsgálójeleket, ill. ezek állandósorozót alkalmazzuk (2-38. ábra), ezeket szintén típuszámmal szokás jellemezni. A jellemzés alapja a jelek

Laplace-transzformáltja, amely felírható az

$$X_a(s) = \frac{C_a}{s^h}$$

alakban. Az itt szereplő  $h$  kitevő értékének alapján az ugrásjel 1 típusú, a sebességugrás-jel 2 típusú, a gyorsulásugrás-jel pedig 3 típusú vizsgálójel.



2-38. ábra

Magát a vizsgálatot itt nem végezzük el, csak az eredményt mutatjuk be. Eredményként azt kapjuk, hogy  $Y_v = 1$  esetén az alapjelre fellépő (követési)  $x_h$  szabályozási hiba állandósult állapotban  $i = 0, 1, 2$  és  $h = 1, 2, 3$  értékekre a 2-2. táblázat szerint alakul.  $Y_v \neq 1 = A_v$  esetén a táblázat szerinti értékek a hibával csak arányosak, minden értéket  $A_v$ -vel osztani kell.

2-2. táblázat

$i \backslash h$	1	2	3
0	$\frac{C_a}{1+K}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{C_a}{K}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{C_a}{K}$

A kapott eredményt úgy szokás fogalmazni, hogy egy szabályozás a típuszámával megegyező vagy annál kisebb típuszámú alapjeleket hiba nélkül követi, a típuszámánál eggyel magasabb típuszámú alapjeleket csak hibával tudja követni, az ennél magasabb típuszámú alapjelek követésére pedig nem képes (mindez a táblázat sorai szerint olvasva könnyen belátható). Kimondható az is, hogy 0 típusú szabályozással hiba nélküli követő szabályozást nem lehet megvalósítani.

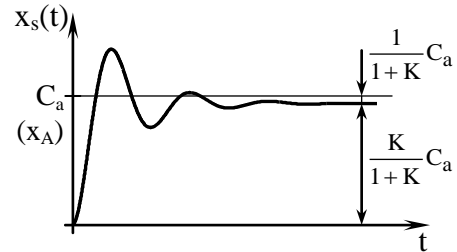
Az eredmény megadható képletszerűen is:

- $h \leq i$  : hiba nélkül követi,  
 $h = i + 1$  : véges hibával követi,

$h > i + 1$  : nem képes követni.

(A  $h = i + 1$  a táblázat átlóját jelenti. A hiba nélküli követés feltétele  $h < i + 1$ -ként is megadható.)

A minőségi jellemzők között definiált  $\varepsilon$  statikus hiba a  $h = 1$ -nél érvényes állandósult követési viselkedésre jellemző. Az összefüggések megvilágításához vizsgáljuk meg, hogy ennél a  $h = 1$ -nél  $i = 0$  esetére, tehát 0 típusú körre a táblázat szerinti szabályozási hiba mellett mekkora az  $x_s$



2-39. ábra

jellemző alapértéke és állandósult értéke. Az alapjel ilyenkor  $h = 1$  miatt  $C_a$  értékű konstans, s mivel az alapérték  $Y_v = 1$  miatt  $x_a$ , az alapérték is éppen  $C_a$ . Bebizonyítható, hogy  $x_s$  időben állandósult értéke:

$$x_s(\infty) = \frac{K}{1+K} C_a ,$$

míg az  $x_h$  hiba a táblázat szerint  $\frac{1}{1+K} C_a$ . Az állandósult értéket és a hibát összeadva éppen  $C_a$ -t, tehát az alapértéket kapjuk. A viszonyokat lengő átmeneti függvény esetére a 2-39. ábra szemlélteti. Az  $\varepsilon$  hibát viszonylagos mennyiségként definiáltuk, ennek kifejezése most, mivel a viszonyítási alap, azaz az alapérték  $C_a$ :

$$\varepsilon = \frac{x_h}{C_a} = \frac{C_a}{1+K} \frac{1}{C_a} = \frac{1}{1+K} ,$$

mint ahogy a 2.8.2 pontban is felírtuk. (Általában is igaz, hogy az  $x_h$  hibából viszonylagos hibát úgy kapunk, hogy az  $x_A$  alapértékkel osztunk.)

### 2.10.2 A szabályozások zavarelhárítási tulajdonságai

A kérdés vizsgálatához ezúttal is a 2-37. ábra szerinti hatásvázlatot használjuk, de most azt tételezzük fel, hogy csak zavaró jellemző van, és az alapjel zérus:  $X_a = 0$ . Az elvégzett vizsgálat azt mutatja, hogy a hiba a szabályozás  $i$  típusszámától, az  $Y_{zs} = Y_z Y$  átviteli függvény típusszámától (l. a 2-37. ábra jelöléseit) és a zavaró jellemző típusától függ. Az  $Y_{zs}$  függvény a zavaró jellemzőre vonatkozó átvitel előrevezető ágának az átviteli függvénye, típusszámát hasonlóan értelmezzük, mint a szabályozását:  $Y_{zs}$  szintén felírható a (23)-nak megfelelő alakban:

$$Y_{zs}(s) = \frac{A_{zs}}{s^j} Z_{zs}(s) ,$$



ahol  $Z_{zs}(s)$  olyan tag, amelyre igaz, hogy  $\lim_{s \rightarrow 0} Z_{zs}(s) = 1$ , s ahol  $j$  az  $Y_{zs}(s)$  kifejezésből kiemelhető  $1/s^j$  szorzó hatványkitevője. A függvény típusszámának ezt a  $j$  kitevőt nevezzük. A típuszám itt sem más, mint az illető körben lévő soros integrátorok száma; esetünkben a kör az  $Y_z$  és  $Y$  tagokból álló soros kört jelenti.

A vizsgálatot  $x_z = C_z 1(t)$  kifejezésű, ugrás alakú zavarójellel végezve (ahol  $C_z$  állandó), a vizsgálat eredménye, közelebbről a zavaró jellemző által okozott  $x_h$  szabályozási hiba állandósult állapotban  $i = 0, 1, 2$  és  $j = 0, 1, 2$  értékekre a 2-3. táblázat szerinti.

2-3. táblázat

$i \backslash j$	0	1	2
0	$-\frac{A_{zs}C_z}{1+K}$	$-\infty$	$-\infty$
1	0	$-\frac{A_{zs}C_z}{K}$	$-\infty$
2	0	0	$-\frac{A_{zs}C_z}{K}$

Az eredmény a következőket mutatja: Nulla hibát, vagyis teljes zavarelhárítást csak akkor kaphatunk, ha  $i > j$ . Amennyiben  $i < j$ , a zavarás  $x_s$ -ben  $-\infty$  hibát okoz, vagyis a szabályozás nem tudja betölteni a feladatát. Amennyiben  $i = j$  (átló), véges értékű hiba lép fel. Ennek kifejezésében – mint bebizonyítható – az  $A_{zs}C_z$  szorzat megadja, hogy  $i = j = 0$  esetén  $x_z$  az  $x_s$  jellemzőt szabályozás nélkül mennyire változtatná meg. Ezt az értéket a szabályozás  $i = 0$  esetén  $(1+K)$ -ad,  $i > 0$  esetén  $K$ -ad részére csökkenti.

Az eredmény képletszerűen:

- $i > j$  : nulla hiba,
- $i = j$  : véges hiba,
- $i < j$  : nem képes kiküszöbölni.

Ezen az eredményen kívül megfigyelhetők még a következők is: Tételezzük fel, hogy a zavaró tagban nincs integrátor, és hogy  $i = 1$ , azaz a felnyitott körben egyetlen integrátor van. Tegyük most föl, hogy az egyetlen integrátor a szabályozóban helyezkedik el, akkor  $j = 0$  (l. a hatásvázlatot is), és nulla hibát kapunk, vagyis a szabályozás a zavarás hatását teljesen kiküszöböli. Ha azonban az egyetlen integrátor a szabályozott szakaszban van, akkor  $i = 1$  mellett  $j = 1$ , és a szabályozás a zavarás hatását már csak csökkenteni tudja. Az

előnyösebb tehát az, ha az integrátor a szabályozóban van. Ugyanez a megállapítás tehető akkor is, ha a zavaró tagban pl. egy integrátor van és  $i$  értéke emellett 1. Ekkor a szabályozóban lévő integrátor esetére  $i = 1$  és  $j = 1$ , a szabályozott szakaszban lévőre pedig  $i = 1$  és már  $j = 2$  adódik.

Érdemes megfigyelni azt is, hogy véges értékű hiba esetén, tehát az  $i = j$  (átlós) esetben  $K$ -nak az  $A_{zs} = \text{áll.}$  melletti növelése mindig hasznos, mert a hibát csökkenti. Az  $A_{zs}$  tényező a zavaró tag  $A_z$  és a szabályozott szakasz  $A$  átviteli tényezőjének a szorzata. Tételezzük föl, hogy  $A_z$  nem változik, akkor az  $A_{zs} = \text{áll.}$  feltétel az  $A$  állandóságát jelenti.  $K$  növelésére ekkor csak a szabályozó átviteli tényezőjének a növelése marad, a véges értékű hiba tehát csak a szabályozó átviteli tényezőjének a növelésével csökkenthető.

### 2.10.3 Az értéktartó és a követő szabályozások hibái

A szabályozások két legfontosabb csoportja az *értéktartó* és a *követő* szabályozások.

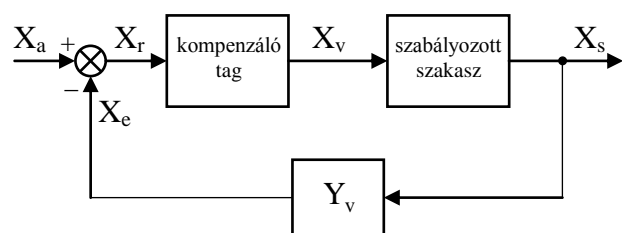
Az *értéktartó* szabályozások feladata, hogy a szabályozott jellemző értékét a különböző zavarások ellenére minél kisebb hibával az előírt állandó értéken tartsák. Ez alapjelkövetési tulajdonság, amely ugrás-alapjelre vonatkozik. Az értéktartó szabályozásokra tehát a 2-2. táblázat 1. oszlopa érvényes, de a zavarások tekintetében érvényes rá a teljes 2-3. táblázat is.

A *követő* szabályozásoknak azt kell biztosítaniuk, hogy a változó alapjelet, a vezetőjelet a szabályozott jellemző minél kisebb hibával kövesse. Ezekre tehát a 2-2. táblázat 2. és 3. oszlopa érvényes, de a zavarások tekintetében ezekre is érvényes a teljes 2-3. táblázat is.

Megemlítjük, hogy az időben állandó alapjelet különleges változásúnak tekintve, ezt az esetet felfoghatjuk a követő szabályozás szélső esetének is.

### 2.11 Szabályozások kompenzálása

A szabályozások stabilissá tételére, ill. minőségi jellemzőinek a beállítására a leggyakrabban alkalmazott módszer az, hogy alkalmasan választott járulékos elemeket iktatunk be a szabályozási körbe. Az eljárás neve *kompenzálás* (régebbi nevén *jelformálás*). A járulékos elem, a kompenzáló tag beiktatható a



2-40. ábra

szabályozott szakasszal sorosan, visszacsatolva vagy párhuzamosan.

A gyakorlatban a soros kompenzálás a leggyakoribb. Ez esetben a kompenzáló tag a szabályozási kör hatásvázlatában a 2-40. ábra szerint helyezkedik el. A kompenzáló tagot szokás *szabályozónak* is nevezni (amint eddig is tettük), tudva azt, hogy általában ez a szabályozó berendezésnek csak egy része. A gyakorlatban a soros PID kompenzáció a leggyakrabban alkalmazott kompenzálási mód, fajtái a P, PI, PD és PID kompenzálás.

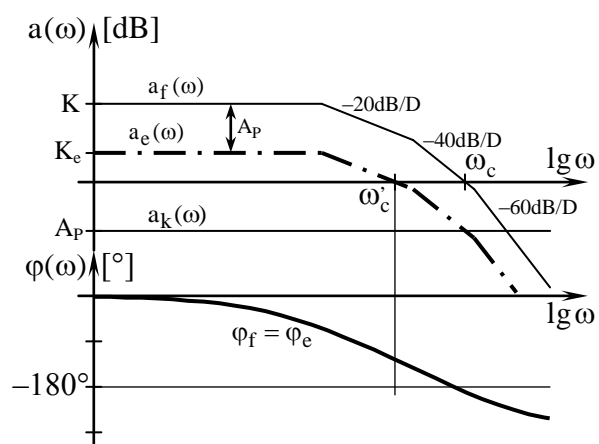
### 2.11.1 P kompenzálás

A kompenzáló tag ez esetben tároló nélküli arányos tag (P tag). Ennek átviteli függvénye, mint láttuk:

$$Y_k(s) = A_P \quad ,$$

ezért  $a(\omega)$  jelleggörbéje vízszintes egyenes, fázisa pedig nulla (a „k” index a kompenzáló szóra utal). A P taggal történő kompenzálás hatását a 2-41. ábra szemlélteti. Az ábrán  $a_f$  a kompenzálatlan felnyitott kör amplitúdó-jelleggörbéje,  $a_k$  a kompenzáló tagé,  $a_e$  pedig az eredő görbe, amelyet a soros kapcsolás miatt  $a_f$  és  $a_k$  összeadásával kapunk. Az összeadás eredményeként a P tag az eredeti  $a_f(\omega)$  jelleggörbét  $A_P$  állandóval függőlegesen eltolja; a fázist nem befolyásolja. A stabilitás megvalósításához, mint az ábrán is, az szükséges, hogy  $A_P[\text{dB}] < 0$  legyen, P kompenzáláskor tehát a körerősítés csökken (az ábrán K-ról  $K_e$ -re).

P kompenzáláskor az  $\omega_c$  vágási körfrekvencia csökken, nem érhető el tehát túl jó  $T_s$  szabályozási idő. Ugyanakkor a körerősítés csökkenése miatt az  $\varepsilon$  statikus hiba – a bemutatott 0 típusú esetben – nő.



2-41. ábra

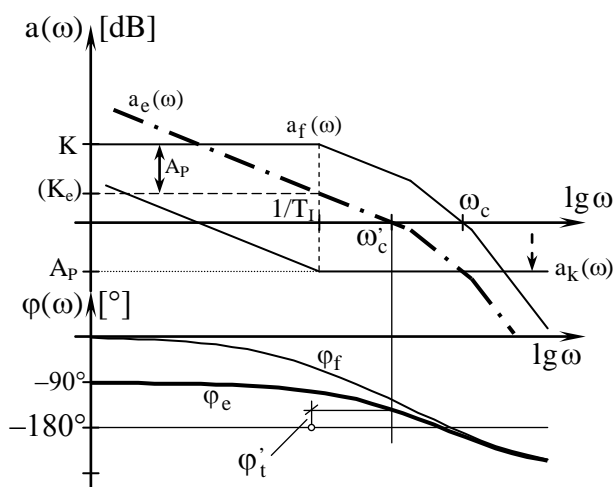
### 2.11.2 PI kompenzálás

A kompenzáló tag ez esetben PI tag. A tag átviteli függvénye az illesztéshez legcélszerűbb alakban felírva a (22) képlet szerinti (a „k” index a kompenzáló szóra utal):

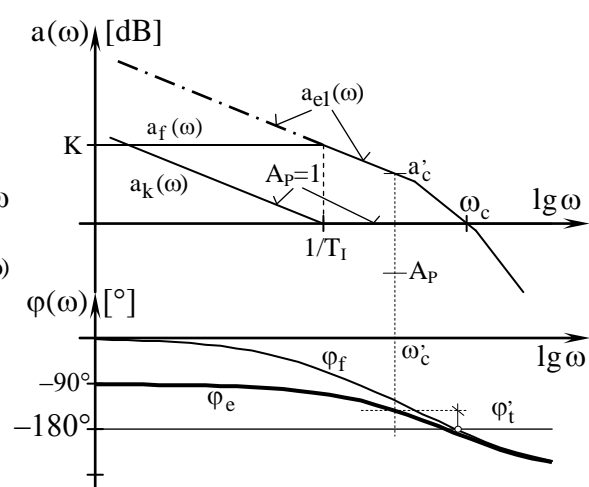
$$Y_k(s) = A_P \frac{1 + sT_I}{sT_I} \quad .$$

A PI kompenzálás kiinduló gondolata 0 típusú szabályozásnál az, hogy a 2-41. ábrán bemutatott P kompenzálási esethez képest a statikus hibát nullára csökkenthetjük, ha az ottani  $a_e(\omega)$  eredő görbét a legkisebb sarok-körfrekvencia alatt kiegészítjük egy  $-20\text{dB/dekád}$ -os induló szakasszal. Ezt úgy érhetjük el, hogy az ottani  $a_k(\omega)$  kompenzáló jelleggörbét a legkisebb sarok-körfrekvencia fölötti körfrekvenciákon megtartjuk, alatta viszont  $a_k(\omega)$ -ként  $-20\text{dB/dekád}$  meredekségű jelleggörbét alkalmazunk. Végeredményben így a 2-42. ábra szerinti  $a_k(\omega)$  kompenzáló jelleggörbét kapjuk, amely egy PI tag jelleggörbéje.

A kompenzáló jelleggörbe ilyen beillesztésével a PI tag  $1/T_I$  sarok-körfrekvenciáját egyenlő értékűre választottuk a felnyitott kör legkisebb  $\omega_{\min}$  sarok-körfrekvenciájával, ami azt



2-42. ábra



2-43. ábra

jelenti, hogy a PI tag *zérusát* egyenlő értékűre választottuk a felnyitott kör legkisebb abszolút értékű *pólusával*. Ezt az eljárást pólus-zérus kiejtéses illesztésnek nevezik. Ez egy egytárolós tagot a felnyitott körből semlegesít. Arányos és differenciáló típusú szabályozás PI kompenzálására ez a legcélravezetőbb eljárás.

Az illesztés elvégzésekor úgy célszerű eljárni, hogy először  $A_P$ -t 1-nek (0 dB) tekintjük (2-43. ábra, l. a 2-29.a ábrát is). Ekkor egy közbenső eredő amplitúdó-jelleggörbét ( $a_{e1}(\omega)$ ) kapunk, de a fázisjelleggörbe már a végleges lesz, mert az arányos tag a fázist nem befolyásolja. A lépés végrehajtása után, mivel felhasználtuk az  $\frac{1}{T_I} = \omega_{\min}$  egyenlőséget,  $T_I$ -t már ismerjük:

$$T_I = \frac{1}{\omega_{\min}} \quad .$$

Ez után  $a_k(\omega)$ -t, s vele együtt az eredő amplitúdógörbét olyan  $A_P$ -vel toljuk el (esetünkben lefelé), hogy az új  $\omega'_c$  vágási körfrekvencián a fázistartalék a kívánt  $\phi'_t$  értékű legyen

(2-42. ábra). Ehhez  $\varphi_t'$ -nek ismertnek kell lennie. A szükséges  $A_P$ -t abból a feltételből számolhatjuk, hogy a  $\varphi_t'$  által meghatározott  $\omega_c'$ -nél az eredő  $a_e(\omega)$  amplitúdó-görbének nullának kell lennie. A 2-43. ábra alapján megállapíthatjuk, hogy ehhez  $A_P$ -t az  $\omega_c'$ -nél érvényes  $a_{e1}$  érték  $-1$ -szeresére kell választanunk:

$$A_P = -a_c'$$

Az  $\omega_c'$ -nél érvényes  $a_e$  amplitúdó ugyanis:  $A_P + a_c'$ , és ez a fenti választással lesz zérus.

Az illesztés eredményeként kapott adatok:  $T_I$ ,  $A_P$ .

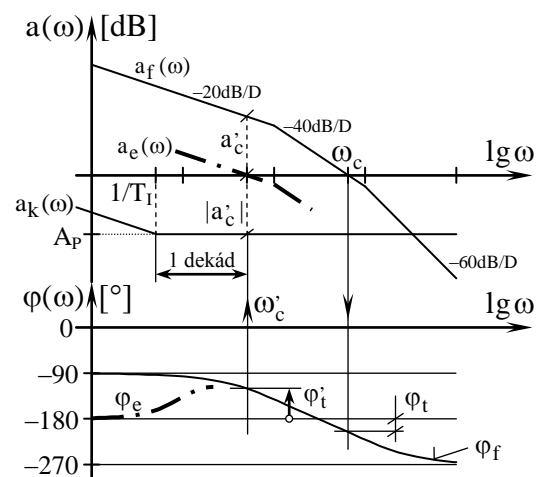
0 típusú szabályozás PI kompenzálásakor az  $\omega_c$  vágási körfrekvencia csökkenése miatt a P kompenzáláséhoz hasonló  $T_s$  szabályozási idő érhető csak el, az integráló szakasz beiktatása miatt azonban az  $\varepsilon$  statikus hiba nullára csökken.

Differenciáló típusú szabályozás PI kompenzálásakor az eredő kör természetesen 0 típusú lesz, s így az eredő kör statikus hibával működik.

### 2.11.3 Integráló típusú szabályozás PI kompenzálása

Az 1 típusú követő szabályozás a sebességugrás vezetőjelet csak hibával tudja követni. Ilyenkor kompenzálásra PI szabályozót alkalmazhatunk, amellyel a szabályozás 2 típusúvá válik, és a követési statikus hiba nulla lesz.

Az 1 típusú szabályozás fázisjelleggörbéje  $-90^\circ$ -ról indul, s mivel pólus-zérus kiejtéses PI kompenzáláskor a PI tagnak a  $-90^\circ$ -ról 0-ra történő fázisnövelő hatását kiejtjük, de megmarad a tag fázisából  $-90^\circ$ , a kompenzált kör fázisa  $-180^\circ$ -ról fog indulni. Ha az eredeti fázis  $-90^\circ$ -ról növekvően indult, akkor a kompenzált kör fázisa  $-180^\circ$ -ról szintén növekedni fog. Ha ez a növekedés megfelelő mértékű – ez akkor áll elő, ha van a körben megfelelő PD tag – akkor a pólus-zérus kiejtéses technika alkalmazható. Lehetséges azonban, hogy a növekedés nem elegendő, vagy hogy az eredeti fázis  $-90^\circ$ -ról csökkenően indul, ami miatt a kompenzált kör fázisa  $-180^\circ$ -ról szintén csökkenne. Ez utóbbi esetekben a pólus-zérus kiejtéses módszer helyett a következő eljárást használhatjuk [7]:



2-44. ábra

Megkeressük a kompenzálatlan kör  $\varphi_f(\omega)$  görbéjén az előírt  $\varphi_i$  fázistartaléknak megfelelő helyet (2-44. ábra), itt jelöljük ki az  $\omega_c$  új vágási körfrekvenciát, és a PI tag  $1/T_1$  sarok-körfrekvenciáját úgy választjuk meg, hogy legalább 1 dekáddal kisebb legyen  $\omega_c$ -nél (ábra). Ez esetben a tag eredőben  $\varphi$  értékét  $\omega_c$ -nél lényegében nem befolyásolja, mert a PI tag fázisa  $1/T_1$  fölött 1 dekáddal már közel nulla. Ez után már csak  $A_P$  értékét kell beállítanunk az  $\omega_c$ -nél érvényes  $a_c$  érték  $-1$ -szeresére (az ábrát így rajzoltuk), s ekkor az új vágási körfrekvencia valóban erre a helyre kerül.

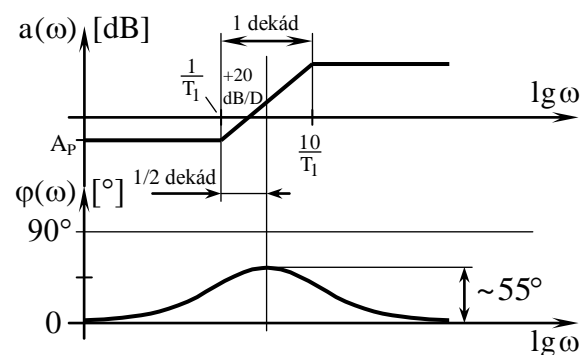
A PI tagot különleges esetben  $\omega_c$  növelésére is alkalmazhatjuk, ha az új fázistartalék  $\omega_c$  fölött jelölhető ki. Ez akkor szokott előfordulni, amikor kompenzáció nélkül túl nagy a fázistartalék, és ezt kompenzációval csökkenteni akarjuk. Ebben az esetben szintén az itt leírt (kijelölt  $\omega_c$ -hez történő) illesztési módszert alkalmazhatjuk.

#### 2.11.4 PD kompenzáció

A PD tag fázisa pozitív, a tag tehát a fázis növelésére alkalmas, ezért kiküszöbölhető vele az  $\omega_c$  csökkenése, azaz a  $T_s$  szabályozási idő megnövekedése. Az ideális differenciáló hatás a gyakorlatban nem érhető el, ezért a D résztag helyén differenciáló egytárolós résztagot veszünk figyelembe. Ezzel közelítő v. másképpen reális PD tagot (fázissiettető tagot) kapunk. A közelítő PD tag átviteli függvénye megadható szorzat alakban, ahol a nevezőbeli időállandó értékét célszerű hozzárendelni a számlálóbelihez:

$$Y_k(s) = A_P \frac{1 + sT_1}{1 + s \frac{T_1}{n}}$$

(A „k” index a kompenzáló szóra utal; a  $T_1$  jelölést a hosszabb  $T_{Dk}$  helyett használtuk.) „n” szokásos értéke 5–10, de a legtöbbször 10, és a továbbiakban mi is 10-nek tekintjük. A tag Bode-diagramját a 2-45. ábra mutatja. A két sarok-körfrekvencia (az  $n = 10$  miatt) egy dekádra van egymástól, ez esetben a dekád közepén a tag fázisa:  $\varphi \cong 55^\circ$ .



2-45. ábra

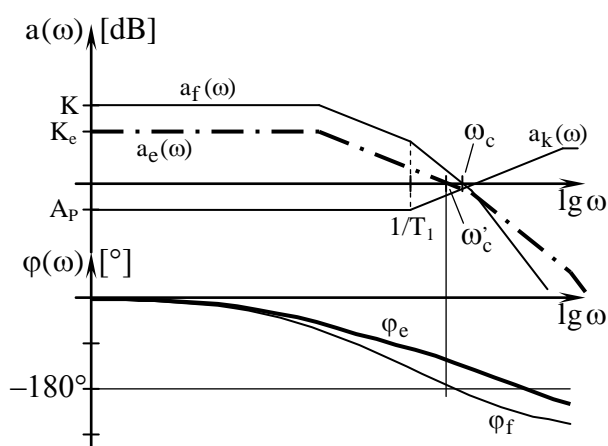
Arányos típusú szabályozás kompenzálásakor pólus-zérus kiejtéssel szokás illeszteni, ami itt abból áll, hogy az  $1/T_1$  sarok-körfrekvenciát a felnyitott kör második legkisebb sarok-

körfrekvenciájával vesszük egyenlőnek (ezzel eredőben a  $-20$  dB/D-os szakaszt meghosszabbítjuk, és  $\omega_c$  környezetében fázist növelünk). Arányos típusú kör így megvalósított PD kompenzálására látható példa a 2-46. ábrán.

Az illesztés elvégzésekor ezúttal is úgy célszerű eljárni, hogy először  $A_P$ -t 1-nek (0 dB) tekintjük. Ekkor ismét egy közbenső eredő amplitúdó-jelleggörbét kapunk, de a fázisjelleggörbe már a végleges lesz. Ez után  $a_k(\omega)$ -t, s vele együtt az eredő amplitúdógörbét olyan  $A_P$ -vel toljuk el, hogy a kívánt fázistartalék megvalósuljon.

Az illesztés eredményeként kapott adatok:  $T_1$ ,  $A_P$ .

0 típusú szabályozás PD kompenzálásakor  $\omega_c$  az eredeti értékének a környezetében tartható, így  $\omega_c$  a PI kompenzáláséhoz képest nő, a  $T_s$  szabályozási idő tehát a PI-éhez képest csökken. Hátrány, hogy statikus hiba mindig marad, de ha az eredő körerősítés csökken (mint a 2-46. ábrán is), akkor a PD kompenzálás a statikus hibát még növeli is.

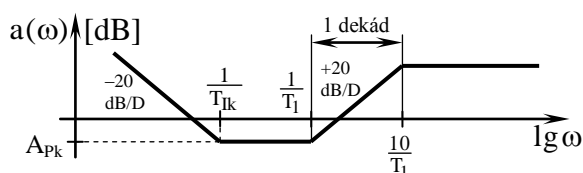


2-46. ábra

### 2.11.5 PID kompenzálás

A PID jelű összetett tag párhuzamosan kapcsolt P, I és D tagból áll, de a D résztag helyett itt is differenciáló egytárolós résztagot veszünk figyelembe. Ezzel közelítő v. reális PID tagot kapunk. Ennek az átviteli függvénye felírható egy PI tag és egy közelítő PD tag átviteli függvényének a szorzataként:

$$Y_k(s) = A_{Pk} \frac{1 + sT_{Ik}}{sT_{Ik}} \frac{1 + sT_1}{1 + s\frac{T_1}{n}} \quad (24)$$



2-47. ábra

(A „k” index a kompenzáló szóra utal.) A közelítő PID tag Bode-diagramjának amplitúdó-jelleggörbét a 2-47. ábra mutatja (feltételeztük, hogy „n” itt is 10). Ha az  $1/T_{Ik}$  sarok-körfrekvencia több mint egy dekáddal kisebb az  $1/T_1$ -nél, a PI résztag a közelítő PD résztag fázisát gyakorlatilag már nem befolyásolja, így a PD résztagra most is igaz, hogy fázisa a dekád közepén kb.  $55^\circ$ .

Ami az illesztést illeti, arányos típusú szabályozás PID kompenzálásakor a legjobb eredményt úgy kapjuk, ha először  $A_{pk} = 1$ -re (tehát a 0 dB-es vonalra) illesztjük a tagot, a PI résztagot a legkisebb, a közelítő PD résztagot a második legkisebb sarok-körfrekvenciára; utána pedig megkeressük azt az  $A_{pk-t}$ , amellyel a kívánt fázistartalék megvalósítható.

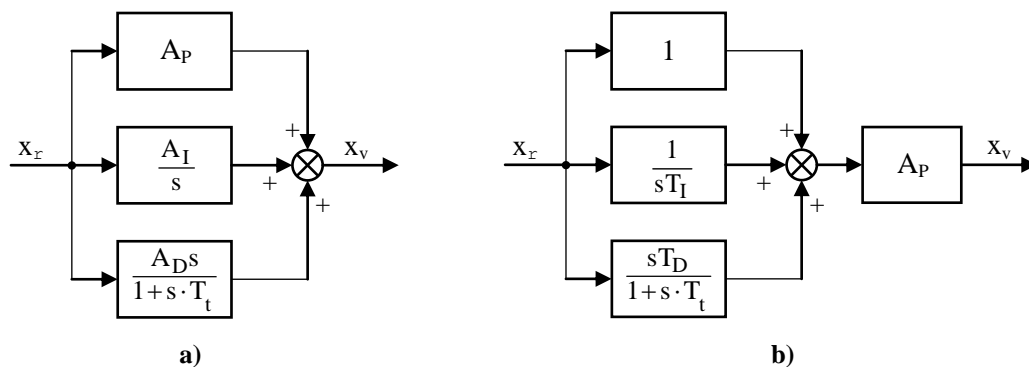
Az illesztés eredményeként kapott adatok:  $T_{Ik}$ ,  $T_1$ ,  $T_1/n$  és  $A_{pk}$ .

A közelítő PID kompenzáló tag a közelítő PD szakaszon fázist növel, ezért  $\omega_c$  növelésére, azaz a szabályozási idő csökkentésére alkalmas. Ugyanakkor az integráló szakasz miatt a statikus hibát is nullára csökkenti.

### 2.11.6 A szabályozók beállítási adatai

Az előzőekben a kompenzáló tagok átviteli függvényét az illesztéshez legcélszerűbb szorzat alakban írtuk föl. A szorzat alak a részttagok soros kapcsolását tételezi föl, és az elvégzett illesztés is az ehhez szükséges adatokat szolgáltatja. Amennyiben kompenzáló tagként külön kapcsolást építünk, a kapcsolás méretezéséhez ezek az adatok rendszerint elégségesek. A PI, közelítő PD és közelítő PID tagok azonban eredetileg párhuzamos kapcsolásban definiált tagok, és ha szabályozóként a kereskedelembe kapható egységsszabályozót alkalmazunk, vagy szabályozóval egybeépített rendszerrel van dolgunk, a szabályozók beállításához a párhuzamos felépítésre jellemző adatokra lehet szükség. Meg kell tehát tudnunk adni a kompenzáló tagok párhuzamos felépítésre jellemző adatait is.

Kiindulásunk ehhez maga a párhuzamos felépítés lehet. A közelítő PID tag szélső esetként magában foglalja a másik két, sőt a P tagot is, ezért a párhuzamos felépítésű hatásvázlatot csak a közelítő PID tagra rajzoljuk föl. A hatásvázlatot kiindulási formájában a 2-48.a ábra mutatja, az ábrán  $x_r$  a rendelkező-,  $x_v$  a végrehajtó jel ( $T_t$  a tárolós időállandó);  $x_r$  a szabályozó bemenő-,  $x_v$  a kimenőjele. A hatásvázlat egy másik alakja a 2-48.b ábrán látható,



2-48. ábra



ezt az előzőből úgy kapjuk, hogy minden tagból  $A_P$ -t kiemelünk. Ezt a kiemelést a PI és az ideális PD tagra nézve korábban, a 2.7.2, ill. a 2.7.1 pontban matematikailag is elvégeztük.

A szabályozó beállításához a 2-48.b ábra  $A_P$ ,  $T_I$ ,  $T_D$  és  $T_t$  mennyiségeit, esetleg a 2-48.a ábra  $A_P$ ,  $A_I$ ,  $A_D$  és  $T_t$  mennyiségeit kell megadni; az illesztés eredményeként kapott adatokból ezeket kell meghatároznunk.

Az egyes kompenzáló tagokat (szabályozó típusokat) sorra véve:

#### PI szabályozó:

A PI szabályozó esetében a differenciáló tag (csatorna) ki van kapcsolva ( $T_D = 0$ ), és az illesztés eredményeként a **2-48.b ábra** felépítésének megfelelő  $A_P$  és  $T_I$  adatokat ismerjük. A **2-48.a ábra** szerinti felépítéshez szükséges adatok a két ábra összehasonlításával (az  $x_r$  és az  $x_v$  közötti erősítéseknek minden ágon egyenlőknek kell lenni):

$$A_P, \quad \text{ill.} \quad A_I = \frac{A_P}{T_I} \quad .$$

#### PD szabályozó:

A PD szabályozó esetében az integráló csatorna van kikapcsolva ( $T_I = \infty$ ). A 2-48.b ábra szerint adódó átviteli függvény ekkor, az utolsó egyenlőségijelnél egyenlővé téve az illesztésnél használt (a 2.11.4 pontból vett) alakkal:

$$Y_{PD}(s) = A_P \left( 1 + \frac{sT_D}{1 + sT_t} \right) = A_P \frac{1 + s(T_t + T_D)}{1 + sT_t} = A_P \frac{1 + sT_1}{1 + s\frac{T_1}{n}} \quad .$$

Az illesztés eredményeként kapott adatok:  $T_1$  és  $A_P$ . A második egyenlőségijel utáni és a képlet végi kifejezés összehasonlításából következik, hogy a 2-48.b ábra szerinti  $A_P$  megegyezik az illesztésből kapott  $A_P$ -vel,  $T_D$ -re és  $T_t$ -re viszont írható, hogy

$$T_t + T_D = T_1 \quad \text{és} \quad T_t = \frac{T_1}{n} \quad .$$

A **2-48.b ábra** szerinti felépítéshez szükséges mennyiségek tehát:

$$A_P, \quad T_t = \frac{T_1}{n} \quad \text{és} \quad T_D = T_1 - T_t \quad .$$

A **2-48.a ábra** szerinti felépítéshez szükséges adatok a két ábra összehasonlításával:

$$A_P \quad \text{és} \quad A_D = A_P T_D \quad .$$

#### PID szabályozó:

A PID szabályozó esetében mindhárom csatorna működik, és a 2-48.b ábrából adódó eredő átviteli függvény :

$$Y_{PID}(s) = A_P \left( 1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1+sT_t} \right) . \quad (25)$$

Meghatározandók ennek az átviteli függvénynek az adatai a kompenzálás eredményeként kapott  $T_{Ik}$ ,  $T_I$ ,  $T_I/n$  és  $A_{Pk}$  mennyiségekből. Ehhez (25)-öt a (24)-nek megfelelő alakra kell hozni. Közös nevezőre hozás és rendezés után az

$$A_P \frac{1 + s(T_I + T_t) + s^2 T_I (T_D + T_t)}{sT_I (1 + sT_t)}$$

kifejezést kapjuk. A számláló itt másodfokú polinom, amelyet tovább lehetne ugyan bontani a gyökeinek a felírásával, de ez túlságosan bonyolult. Egyszerűbb, ha a fenti kifejezést (24) olyan alakjával tesszük egyenlővé, amelyben a (24)-ben szereplő két számlálót összeszorozzuk. Előbb (24)-gyel egyenlővé téve, majd abban elvégezve az összeszorozást:

$$A_P \frac{1 + s(T_I + T_t) + s^2 T_I (T_D + T_t)}{sT_I (1 + sT_t)} = A_{Pk} \frac{1 + sT_{Ik}}{sT_{Ik}} \frac{1 + sT_I}{1 + s\frac{T_I}{n}} = A_{Pk} \frac{1 + s(T_{Ik} + T_I) + s^2 T_{Ik} T_I}{sT_{Ik} \cdot \left( 1 + s\frac{T_I}{n} \right)} .$$

Az összeszorozással kapott, utolsó kifejezés és a kiinduló, bal oldali alak összehasonlításával írható, hogy:

$$\begin{aligned} T_I + T_t &= T_{Ik} + T_I , \\ T_D + T_t &= T_{Ik} T_I , \\ T_t &= \frac{T_I}{n} \quad \text{és} \quad \frac{A_P}{T_I} = \frac{A_{Pk}}{T_{Ik}} . \end{aligned}$$

Ezekből az összefüggésekből a **2-48.b ábra** szerinti felépítéshez szükséges mennyiségek:

$$T_t = \frac{T_I}{n} , \quad T_I = T_{Ik} + T_I - T_t , \quad T_D = T_{Ik} T_I - T_t \quad \text{és} \quad A_P = A_{Pk} \frac{T_I}{T_{Ik}} .$$

A **2-48.a ábra** szerinti felépítéshez szükséges adatok a két ábra összehasonlításával:

$$A_P , \quad A_I = \frac{A_P}{T_I} , \quad A_D = A_P T_D , \quad T_t .$$

Megemlítjük még, hogy a P szabályozónál az  $A_P$  arányos átviteli tényező helyett gyakran az  $X_P = 100/A_P$  ún. arányossági tartományt kell beállítani. Ha ezt az

$$X_P = \frac{100}{\frac{x_v}{x_r}} = \frac{x_r}{x_v} 100 \quad \text{alakban írjuk fel, akkor látszik, hogy } X_P \text{ azt jellemzi, hogy a rendelkező}$$

jelnek a tartománya hány százaléka a végrehajtó jel tartományának.

### 2.11.7 Kompenzálás a szabályozott szakasz átmeneti függvénye alapján

A 2.11.1–2.11.6 pontban a kompenzációs fajtákat és a kompenzáló tagok adatainak a meghatározási módját a Bode-diagramok alapján mutattuk be. Az elvek megértéséhez ez a módszer volt a legcélszerűbb. A gyakorlatban a szabályozási kör tagjainak a Bode-diagramját vagy úgy kaphatjuk meg, hogy ismerjük a tagok pontos átviteli függvényét, vagy úgy, hogy a tagok frekvenciafüggvényét mérésrel felvesszük. A gyakorlatban sokszor az egyikre sincs lehetőség, vagyis nem áll rendelkezésre a szabályozási kör tagjainak a Bode-diagramja. Amennyiben ez a helyzet, akkor az egyik megoldás a *szabályozott szakasz* átmeneti függvénye alapján történő kompenzálás lehet. Ehhez természetesen ismernünk kell a szabályozott szakasz átmeneti függvényét, amelyhez ismét csak mérésrel juthatunk hozzá. Az átmeneti függvény alapján történő kompenzálásnak tkp. két lépése van: a szabályozó típusának a kiválasztása és a szabályozó paramétereinek a beállítása.

A módszer alkalmazásához a szakaszokat az átmeneti függvény alapján két csoportra osztjuk: *arányos* jellegű (ún. önbeálló) és *integráló* jellegű szakaszokra. *Arányos* jellegűnek tekintjük a szakaszt, ha az átmeneti függvénye meghatározott értéken állandósul, és lengés nincs benne (2-49. ábra), míg az *integráló* jellegű szakasz átmeneti függvénye kezdeti késleltetés után lineárisan növekszik (2-50. ábra). A szakaszt mindkét esetben egy feltételezett taggal helyettesítjük, és a helyettesítő tag átmeneti függvényének a jellemzőit használjuk föl a kiválasztáshoz. Az ajánlott szabályozó típust, ill. az ajánlott beállítási paramétereket modellkísérletekkel állapították meg. Megjegyezzük, hogy a szabályozott szakaszt ennél a módszernél a körnek a szabályozó utáni pontjától értelmezzük, tehát a szakaszba beleértjük a beavatkozó szervet is.

#### Arányos jellegű szakasz:

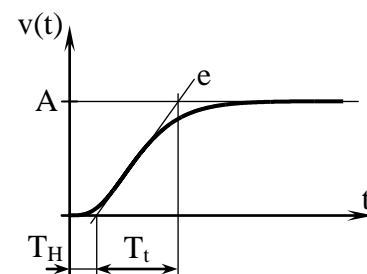
*Arányos* jellegű szakaszoknál (2-49. ábra) az egyik, a leggyakrabban alkalmazott helyettesítő tag a HPT1 tag. A szakasz feltételezett átviteli függvénye ekkor:

$$Y(s) = \frac{A}{1 + sT_t} e^{-sT_H} \quad .$$

Az  $A$  átviteli tényezőt, a  $T_H$  holtidőt és a  $T_t$  időállandót az átmeneti függvényből a 2-49. ábra szerint határozzuk meg.

Az időállandók meghatározásához szükséges „e” egyenes a függvény inflexiós pontjához húzott érintő.

A szabályozó típusa arányos szakasznál az F. Piwinger-féle ajánlás szerint a következőképpen választható ki:



2-49. ábra

Feltétel:	A szabályozó típusa:
$\frac{T_t}{T_H} \geq 50$	P
$50 > \frac{T_t}{T_H} \geq 7,4$	PI
$7,4 > \frac{T_t}{T_H} \geq 3,3$	PID
$3,3 > \frac{T_t}{T_H}$	I

A szabályozó paramétereit arányos szakasznál a Chien–Hrones–Reswick (CHR) ajánlás szerint értéktartó szabályozásra a 2-4. táblázatnak megfelelően állíthatók be. A táblázatban foglalttól–ig értékek közül az első szám az aperiodikus határesetre, a második szám 20 %-os túllendülésre vonatkozik.

A 2-4. táblázat nem tér ki az I szabályozó esetére, amely a fenti típuskiválasztó ajánlás utolsó feltétele alapján  $T_t \approx 0$ , azaz tiszta holtidős tagnál alkalmazandó. A szabályozó beállításához ekkor az I tag  $T_I$  időállandóját ( $A_I$  átviteli tényezőjét) kell meghatározni, amivel kapcsolatban a szakirodalomra ([2], [5]) utalunk.

2-4. táblázat

Típus	Értéktartó szabályozás		
	$A_P$	$T_I$	$T_D$
P	$(0,3 \dots 0,7) \frac{T_t}{T_H} \frac{1}{A}$	$\infty$	0
PI	$(0,6 \dots 0,7) \frac{T_t}{T_H} \frac{1}{A}$	$(4 \dots 2,3) T_H$	0
PID	$(0,95 \dots 1,2) \frac{T_t}{T_H} \frac{1}{A}$	$(2,4 \dots 2) T_H$	$0,42 T_H$

2-5. táblázat

Típus	Követő szabályozás		
	$A_P$	$T_I$	$T_D$
P	$(0,3 \dots 0,7) \frac{T_t}{T_H} \frac{1}{A}$	$\infty$	0
PI	$(0,35 \dots 0,6) \frac{T_t}{T_H} \frac{1}{A}$	$(1,2 \dots 1) T_H$	0
PID	$(0,6 \dots 0,95) \frac{T_t}{T_H} \frac{1}{A}$	$(1 \dots 1,35) T_H$	$(0,5 \dots 0,47) T_H$

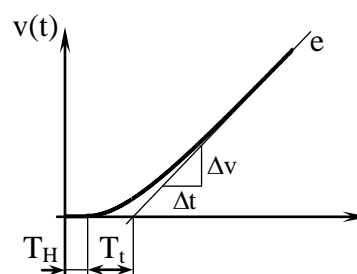
A CHR ajánlás követő szabályozásra a 2-5. táblázat szerinti. A táblázatban lévő tól-ig értékek közül az első szám itt is az aperiodikus határesetre, a második szám pedig 20 %-os túllendülésre vonatkozik.

#### Integráló jellegű szakasz:

*Integráló jellegű szakaszoknál* (2-50. ábra) az alkalmazott helyettesítő tag a HIT1 tag. A szakasz feltételezett átviteli függvénye ekkor:

$$Y(s) = \frac{A_I}{s(1 + sT_t)} e^{-sT_H} .$$

Az  $A_I$  átviteli tényezőt, a  $T_H$  holtidőt és a  $T_t$  időállandót az átmeneti függvényből a 2-50. ábra szerint határozhatjuk meg. Az „e” segédegyenes a függvény állandósult szakaszának a meghosszabbítása. Levezetve  $Y(s)$  alapján a  $v(t)$  átmeneti függvény kifejezését, abból belátható, hogy az állandósult szakasz meredeksége az  $A_I$  átviteli tényezővel egyenlő. A bejelölt háromszög adataival:  $A_I = \Delta v / \Delta t$ .



2-50. ábra

2-6. táblázat

Típus	$A_P$	$T_I$	$T_D$
P	$\frac{0,5}{A_I T}$	$\infty$	0
PD	$\frac{0,5}{A_I T}$	$\infty$	T
PI	$\frac{0,42}{A_I T}$	5,8 T	0
PID	$\frac{0,4}{A_I T}$	3,2 T	0,8 T

A szabályozó típusa integráló szakasznál, tehát 1 típusú körnél, a szabályozási hibával kapcsolatos eredményeink figyelembevételével az alábbiak szerint választható meg:

A szabályozás fajtája:

Értéktartó szabályozás, szakasz előtti zavarás.

Értéktartó szabályozás, szakasz utáni zavarás.

Követő szabályozás, egységsebesség-ugrás alapjel.

A szabályozó típusa:

PI

P vagy PD

PI

A szakasz utáni zavarást korábban nem tárgyaltuk, de ezt felfoghatjuk úgy, hogy a 2-37. ábra szerinti hatásvázlatban  $Y(s)$  helyén 1, és a zavarás előtt  $Y_k(s)Y(s)$  tag van. Ekkor  $i = 1$  és  $j = 0$ , és így a szabályozóba nem szükséges integrátor.

A szabályozó paraméterei integráló szakasznál a Friedrich-féle ajánlás szerint állíthatók be (2-6. táblázat). A táblázatban szereplő  $T$  a  $T = T_t + T_H$  összeget jelenti.

### 3. FOLYTONOS IDEJŰ SZABÁLYOZÁSI KÖRÖK VIZSGÁLATA GYÖK-HELYGÖRBE MÓDSZERREL

#### 3.1 A gyök-helygörbe fogalma és a módszer alapösszefüggései

A szabályozási kör stabilis, ill. labilis volta eldönthető a zárt rendszer pólusainak a komplex számsíkon való elhelyezkedéséből, de a pólusok helyzetéből következtetni tudunk a kör minőségi jellemzőire is. Ha a rendszer valamelyik paramétere (körerősítés, időállandó) megváltozik, megváltozik a pólusok helyzete, és ezzel megváltozik a rendszer viselkedése is. A változás nyomon követhető, ha ismerjük azt a görbét, amelyet a pólusok az illető paraméter változásakor a komplex számsíkon leírnak. Ezt a görbét gyök-helygörbének nevezzük. A paramétert célszerű 0 és  $\infty$  között változtatni, hogy a hatásokat teljes egészében láthassuk.

A gyök-helygörbe tehát a zárt rendszer pólusainak mértani helye, miközben a rendszer valamelyik paramétere 0 és  $\infty$  között változik. A változó paraméter a legtöbbször a K körerősítés, amelynek valamilyen feltételt kielégítő értékét keressük, ezért a továbbiakban változó paraméternek ezt tekintjük. A görbét gyök-helygörbének azért nevezzük, mert a zárt rendszer  $W(s)$  átviteli függvényének pólusai az átviteli függvény nevezőjének a gyökeivel egyenlők.

A K körerősítésnek az összefüggésekbe való beviteléhez, mivel K felnyitott körű jellemző, írjuk föl a felnyitott kör  $Y_f(s)$  átviteli függvényét az

$$Y_f(s) = K \frac{N(s)}{D(s)} \quad (1)$$

alakban, ahol  $N(s)$  és  $D(s)$  az  $s$  változó polinomjai, majd helyettesítsük ezt be a zárt kör átviteli függvényének a kifejezésébe (Dr. Tverdota M., [4]):

$$W(s) = \frac{Y_e(s)}{1 + Y_f(s)} = \frac{Y_e(s)}{1 + K \frac{N(s)}{D(s)}} = \frac{Y_e(s)D(s)}{D(s) + KN(s)} \quad .$$

A képletben  $Y_e(s)$  az előrevezető ág eredő átviteli függvénye. A képlet azt mutatja, hogy  $W(s)$  pólusai a

$$D(s) + KN(s) = 0 \quad (2)$$

egyenlet gyökei. Itt máris megállapítást tehetünk a gyökök számát illetően. Jelöljük ugyanis  $P$ -vel  $D(s)$ ,  $Z$ -vel  $N(s)$  foksámát, és szorítkozzunk fizikailag megvalósítható esetekre, akkor  $P$ -re és  $Z$ -re igaz, hogy  $P \geq Z$ , mert (1)-ben  $D(s)$  fokszáma nagyobb  $N(s)$ -énél, legfeljebb egyenlő vele. Ezzel (2) fokszáma  $P$ , s így (2) gyökeinek száma, azaz  $W(s)$  pólusainak a száma

is  $P$ . Mivel azonban  $P$  az (1) képlet alapján egyben az  $Y_f(s)$  pólusainak a számát is jelenti, ez azt mutatja, hogy  $W(s)$  pólusainak a száma megegyezik a felnyitott kör pólusainak a  $P$  számával.

A fentiek alapján, továbbá előző ismeretek felhasználásával, és még újabb megfontolásokat is téve, a gyök-helygörbe menetére a következő megállapításokat tehetjük:

1. A (2) egyenlet gyökei vagy valósak, vagy konjugált komplex párokat alkotnak, ezért a helygörbe szimmetrikus a valós tengelyre nézve.

2. Mivel a (2) egyenletnek  $P$  számú gyöke van, s mivel minden gyökből a helygörbe egy ág indul ki, a görbének  $P$  számú ága van.

3.  $K = 0$  esetén (2) gyökei megegyeznek  $D(s)$  gyökeivel, azaz  $Y_f(s)$  pólusaival. Ez azt jelenti, hogy a helygörbe ágai a felnyitott kör pólusaiból indulnak ki. A zárt rendszer pólusainak helygörbét alkotó ágak tehát a felnyitott kör pólusaiból indulnak ki.

4. A (2) egyenletet a  $\frac{D(s)}{K} + N(s) = 0$  alakra rendezve, a kapott alak azt mutatja, hogy

$K = \infty$  esetén a (2) egyenlet gyökei megegyeznek  $N(s)$  gyökeivel, azaz  $Y_f(s)$  zérusaival. A felnyitott kör zérushelyeiben (az összes zérushelyben) tehát a görbe ágainak végpontja van. Ha  $P = Z$ , akkor minden ág szükségképpen a felnyitott kör zérushelyeiben végződik; míg ha  $P > Z$ , akkor csak  $Z$  számú ág végződhet a zérushelyekben,  $P - Z$  számú ág a végtelenbe fut.

A gyök-helygörbe kézzel való megszerkesztéséhez még további ismeretek is szükségesek, de ezekkel nem foglalkozunk, mert a számítógépes ábrázolás ezek nélkül is lehetséges. A gyök-helygörbe ábrázolásakor, így a számítógépes ábrák is, a felnyitott kör pólushelyeit „x” jellel, a felnyitott kör zérushelyeit üres körökkel szokás ábrázolni. A számítógépes ábrák a  $K$  paraméter változási irányát nem szokás feltüntetni, de a fentiekből következik, hogy a paraméter értéke a pólushelyeken nulla, és az oda csatlakozó görbeágakon a pólushelyektől távolodva nő. Ha a pólushelyről kiinduló görbeág zérushelyen végződik, ott a  $K$  végtelen, egyébként  $K$  a végtelenben lesz végtelen értékű.

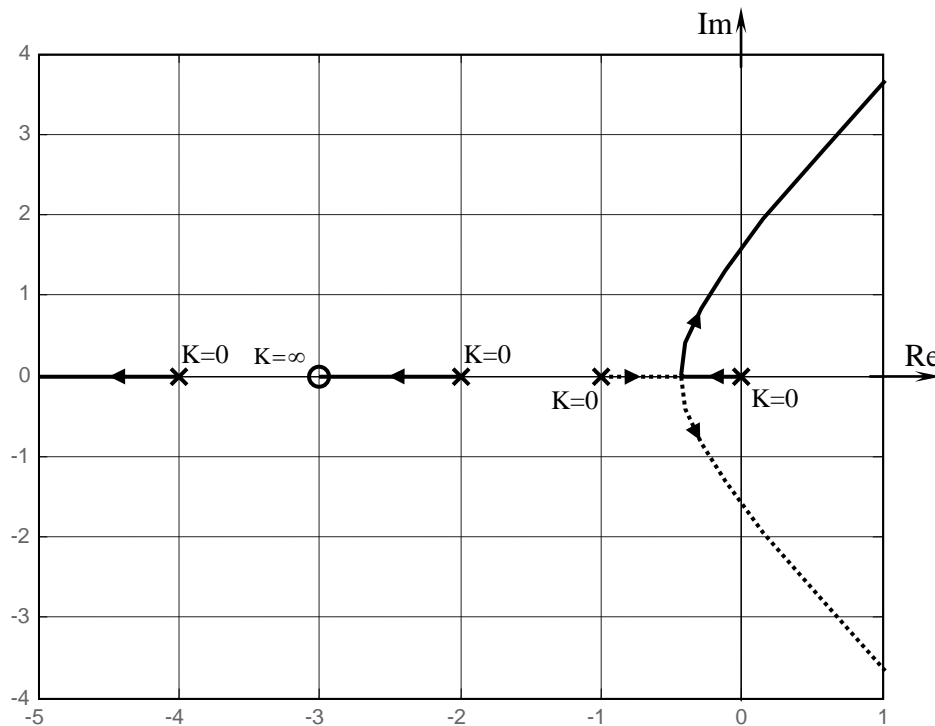
Legyen példaként egy szabályozás felnyitott körének átviteli függvénye időállandós és gyöktényezős alakban:

$$Y_f(s) = \frac{7,5 \cdot (1 + s \cdot 0,33)}{\underbrace{s \cdot (1 + s) \cdot (1 + s \cdot 0,5) \cdot (1 + s \cdot 0,25)}_{\text{i. áll.}}} = \frac{20 \cdot (s + 3)}{\underbrace{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 2) \cdot (s + 4)}_{\text{gyökt.}}} .$$

A képletben  $K = 7,5$  a körerősítés, a  $k = 20$ -as szám pedig a gyöktényezős erősítés. A gyöktényezős alakból leolvasható, hogy négy pólus van: 0, -1, -2 és -4, és hogy van egy zérus is: -3. A gyök-helygörbét a 3-1. ábra mutatja; a berajzolt nyilak  $K$  változásának irányát



jelzik. Azok a gyökök, amelyek  $K=0$ -nál 0-val és  $-1$ -gyel egyenlők,  $K$  növekedésével konjugált komplex gyökké válnak; a másik két gyök mindig valós.



3-1. ábra

Fontos tudatosítani, hogy a gyök-helygörbét – bár a görbe a zárt kör pólusainak a mértani helye – mindig a felnyitott kör átviteli függvényéből rajzoljuk.

### 3.2 Stabilitás- és minőségvizsgálat a gyök-helygörbe alapján

#### Stabilitás-vizsgálat:

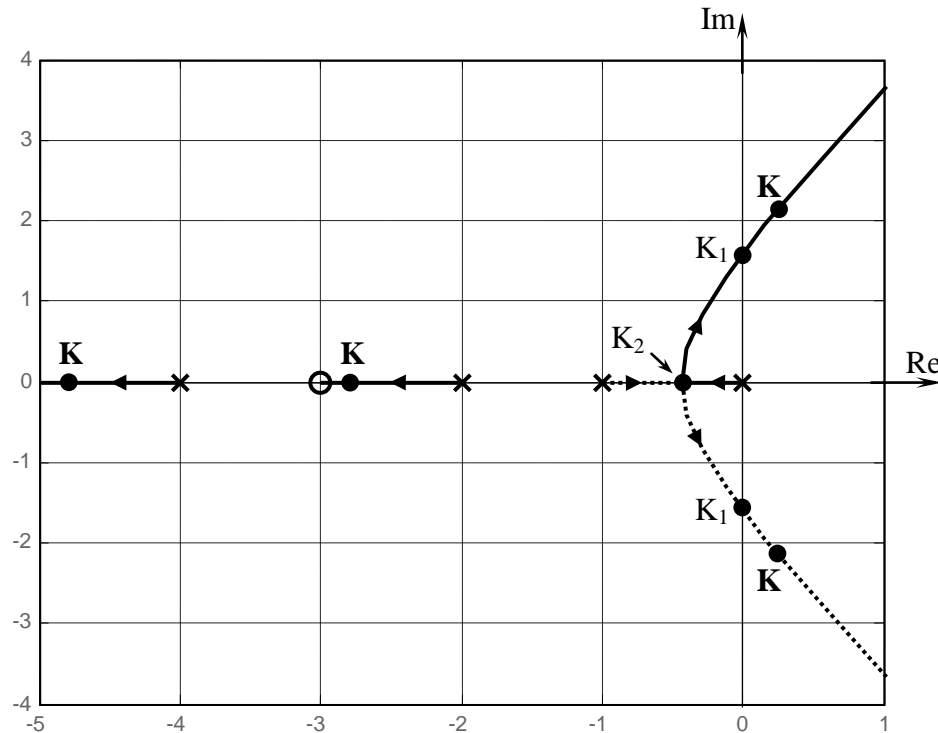
A stabilitáshoz, mint ismert, az szükséges, hogy a zárt rendszer  $W(s)$  átviteli függvényének pólusai negatív valós számok vagy negatív valós részű komplex számok legyenek. Ebből kiindulva, a gyök-helygörbe alapján a rendszer akkor stabilis, ha a  $K$  körerősítéssel számolt összes gyökhelygörbepont a képzetes tengelytől balra esik.

Amennyiben a rendszer stabilis, s azon belül minden  $K$ -val számolt gyökhelygörbepont a negatív valós tengelyen van, a stabilitás aperiodikus. Amennyiben a rendszer stabilis, de a  $K$ -val számolt görbepontok között konjugált komplexek is vannak, lengő stabilitásról beszélünk.

A képzetes tengelytől jobbra eső gyök esetén a rendszer labilis, és ha valamelyik gyök a képzetes tengelyre esik, a rendszer a stabilitás és a labilitás határán van.

Az előző pontban példaként vizsgált esetben pl., ahol  $K = 7,5$ ; a kör labilis, mert a négy gyök közül kettő az Im tengelytől jobbra esik (3-2. ábra,  $K$ -val jelölt görbepontok). A

stabilitás határához tartozó körerősítés (kritikus körerősítés) ebben az esetben  $K_1 = 3,54$ .  $K_2 = 0,2$  körerősítésnél lépnek ki a gyökhelygörbeágak a valós tengelyből, itt van az aperiodikus viselkedés határa.  $K_2$ -nél nagyobb  $K$ -nál már lengés lép föl.



3-2. ábra

### Minőségi jellemzők:

A zárt rendszer pólusaival kifejezhető a zárt rendszer  $W(s)$  átviteli függvénye, s így a zárt rendszer  $V(s) = \frac{1}{s} W(s)$  átmeneti függvénye is. Ezt felhasználva a gyök-helygörbéből a szabályozás minőségi jellemzőinek az alakulására is következtethetünk. Írjuk föl ennek kifejtéséhez az átmeneti függvényt az alábbiak szerint:

$$V(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{k \cdot Q(s)}{s(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} .$$

A képletben az egyes pólusokat, amelyek lehetnek komplexek is,  $p_1, p_2 \dots p_n$ -nel jelöltük, és feltételeztük, hogy csak egyszeres pólusok fordulnak elő. A képlet  $W(s)$ -t gyöktényezős alakban adja. A képletben szereplő  $Q(s)$   $s$ -nek a polinomja. Átírva  $V(s)$ -t részlet törtes alakra:

$$V(s) = \frac{C_0}{s} + \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n} ,$$

látható, hogy az átmeneti függvény a

$$v(t) = C_0 + \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}$$

alakú. Stabilis esetre szorítkozva – minőségvizsgálatnak csak ekkor van értelme – a képletben szereplő  $p_k$  pólusok mind negatív valós részűek, és valós részük abszolút értéke megadja az időállandó reciprokát. Ha az előforduló legnagyobb időállandótól a többi időállandó elegendően kisebb, akkor  $v(t)$  lefolyását a legnagyobb időállandójú pólus határozza meg, akár aperiodikus, akár lengő összetevőt jellemez; ennek alapján becslést adhatunk egyes szabályozási jellemzőkre vonatkozólag. A legnagyobb időállandójú pólust domináns pólusnak nevezik; ez az a pólus, amelynek a valós része abszolút értékben a legkisebb, azaz amelyik a képzetes tengelyhez a legközelebb esik.

Jelöljük a  $p_d$  domináns pólus valós részének abszolút értékét  $|\operatorname{Re}(p_d)| = \frac{1}{T_d}$ -vel, akkor a levezetést mellőzve a  $T_s$  szabályozási idő [4]:

$$T_s \cong \frac{\ln \frac{\Delta}{100}}{-\frac{1}{T_d}},$$

ahol  $\Delta$  a megengedett dinamikus pontosság százalékban, amelynek a szokásos értékei 5 %; 2 %; 1 %. A képlettel megadott közelítés annál jobb, minél kisebb  $\frac{1}{T_d}$  értéke a többi valós rész abszolút értékéhez képest.

Amennyiben a domináns pólus – tkp. póluspár – lengő összetevőt jellemez, a pólusvektor (gyökvektor) jellemzőinek a felhasználásával további szabályozási jellemzők értékére következtethetünk. Írjuk fel ehhez először a póluspárt mint komplex számot:

$$p_{d1,2} = -\frac{1}{T_d} \pm jv.$$

A képzetes rész itt szereplő  $v$  abszolút értéke egyenlő a *lengési körfrekvenciával*:

$$\omega_\ell = v.$$

A  $p_{d1,2}$ -ben szereplő mennyiségekkel fölírva az illető póluspárhoz tartozó átmenetifüggvény-összetevőt, a *viszonylagos túllendülésre* vonatkozó kifejezést alkothatunk. A levezetés mellőzésével:

$$\sigma \cong e^{-\frac{1}{T_d} - \frac{v}{\omega_\ell} \pi}.$$

A képlettel megadott közelítés annál jobb, minél kisebb  $\frac{1}{T_d}$  értéke a többi pólus valós részének abszolút értékéhez képest.

A  $p_{d_{1,2}}$  póluspár (gyökpár) kifejezését szokás megadni a normál alak mennyiségeivel  $(\omega_0, \zeta)$  is, ekkor a  $\sigma$ -ra vonatkozó összefüggés:

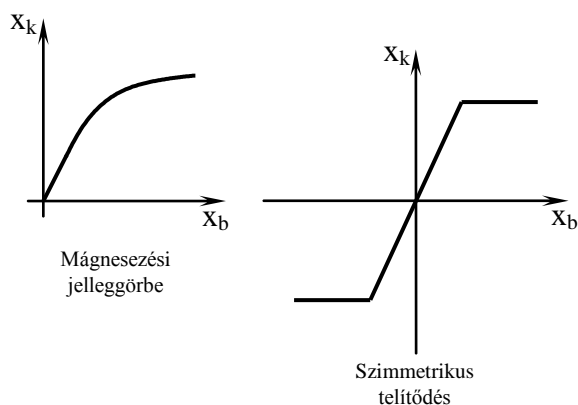
$$\sigma \cong e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \pi}.$$

## 4. STATIKUS NEMLINEARITÁSOK ÉS KEZELÉSÜK

### 4.1 Bevezetés

Az eddigiekben lineáris rendszereket vizsgáltunk, olyan rendszereket tehát, amelyek viselkedését közönséges, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletek írják le. Ha a rendszer akár egy nemlineáris differenciálegyenletű tagot is tartalmaz, már nemlineárisává válik. A nemlineáris rendszerek sok tekintetben másképp viselkednek, mint a lineárisok. A legfontosabb különbség, hogy a nemlineáris rendszerekben nem érvényes a szuperpozíció elve, a jelek összegének a hatása tehát nem egyezik meg az egyes jelek által létrehozott hatások összegével. Ezenkívül lineáris rendszerekben a kimenőjel alakja független a bemenőjel nagyságától, míg a nemlineáris rendszerekben attól erősen függ.

A gyakorlatban alapvető fontosságúak a statikus nemlinearitások (nemlineáris arányos tagok), amelyek egy részét a szabályozási körben szándékosan alkalmazzuk, s amelyekről a 2.2.1 pontban már szó volt. Statikus nemlinearitások statikus jelleggörbéi láthatók példaként a 4-1. ábrán. A statikus jelleggörbék időben állandósult (időben állandó, időben periodikus) jelek esetére adják meg az összetartozó  $x_b$ - $x_k$  értékpárokat, de gyakran élünk azzal a feltételezéssel, hogy más időbeli változás esetére is ez a jelleggörbe adja  $x_b$  és  $x_t$  összetartozó értékeit.

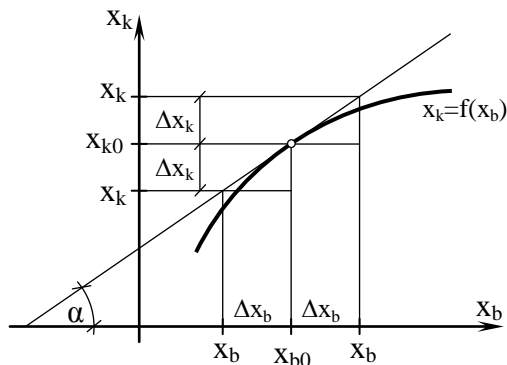


4-1. ábra

Matematikai kezelhetőségük szempontjából a statikus nemlinearitásokat *linearizálható* és *nem linearizálható* csoportokra oszthatjuk. Az előbbi csoportban a statikus jelleggörbe folytonos, differenciálható, az utóbbiban pedig töréses vagy szakadásos függvény. A folytonos, differenciálható jelleggörbéjű nemlinearitások a szakaszonkénti

linearizálás módszerével tárgyalhatók, míg a töréses vagy szakadásos jelleggörbéjük tárgyalásának egyik módja a leíró függvények módszere. A továbbiakban ezt a két módszert mutatjuk be. Megjegyezzük, hogy a nemlineáris rendszerek vizsgálatára elterjedten alkalmaznak különféle szoftveres szimulációs módszereket is.

## 4.2 A szakaszonkénti linearizálás módszere



4-2. ábra

Ha a nemlinearitás  $x_k=f(x_b)$  jelleggörbéje folytonos és egyúttal differenciálható (mint a 4-2. ábrán), a jelleggörbét egyes pontok, az ún. munkapontok környezetében, azaz kis változásokra linearizálhatjuk. Ennek alapja, hogy a jelleggörbe a munkapont környezetében az érintőjével helyettesíthető, és a függvény  $\Delta x_b$  hatására történő megváltozását közelítőleg a  $\Delta x_k \cong \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x_b$  összefüggéssel számolhatjuk,

ahol  $\operatorname{tg} \alpha$  a munkapontbeli érintő iránytangense (4-2. ábra, a munkapont koordinátáit 0 index jelöli). Az eljárás előnye, hogy a munkapontbeli értéktől való  $\Delta x_b = x_b - x_{b0}$  és  $\Delta x_k = x_k - x_{k0}$  eltéréseket tekintve változónak a munkapont környezetében a

$$\Delta x_k = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x_b = A_0 \cdot \Delta x_b \quad (1)$$

összefüggéssel dolgozhatunk, amely  $\Delta x_b$  bemenőjellel és  $\Delta x_k$  kimenőjellel lineáris arányos tagot jellemez. Az eljárás alkalmazhatóságának a feltétele az, hogy működés közben az  $x_b$  és  $x_k$  jelek a munkapont körül olyan sávban maradjanak, amelyben az (1)-gyel számolt megváltozás és a görbe valódi megváltozásának az eltérése még megengedhető. A munkapontbeli érintő iránytangense a függvény ottani differenciálhányadosával egyenlő, így az  $x_k=f(x_b)$  függvény ismeretében

$$A_0 = \left. \frac{dx_k}{dx_b} \right|_{x_b=x_{b0}}.$$

A lineáris tag  $\Delta x_b$  bemenőjelét  $x_b$ -ből a  $\Delta x_b = x_b - x_{b0}$  összefüggéssel számolhatjuk, míg a  $\Delta x_k$  kimenőjelből  $x_k$ -t a  $\Delta x_k = x_k - x_{k0}$  átrendezésével kapott  $x_k = \Delta x_k + x_{k0}$  összefüggéssel állíthatjuk elő.

Ha más munkapontra térünk át, a  $\operatorname{tg} \alpha$  érték, azaz  $A_0$  értéke megváltozik, az  $A_0$  átviteli tényező tehát az  $x_{b0}$  érték függvénye:  $A_0(x_{b0})$ . Ha tehát a szabályozási tartományt a linearizáláshoz több szakaszra osztjuk föl, azaz több különböző munkaponttal dolgozunk, a szabályozónak ezt a lineáris arányos tagot más-más  $A_0$  átviteli tényezővel (erősítéssel) kell figyelembe vennie.

### 4.3 A leírófüggvény-módszer

#### 4.3.1 A leíró függvény fogalma, alkalmazhatósága

Ha egy nemlineáris tagra  $\omega$  körfrekvenciájú szinuszos bemenőjelet kapcsolunk, időben állandósult állapotban a kimenőjel periodikus lesz, de általában nem szinuszos. A kimenőjelnek ekkor van egy  $\omega$  körfrekvenciájú alapharmonikus összetevője, de ezen kívül vannak felharmonikus összetevői is. Ha egyenösszetevő nincs, és a felharmonikusoktól valamilyen ok miatt eltekinthetünk, akkor a kimenőjelet az alapharmonikusával közelíthetjük. Ez esetben a tagot az alapharmonikus, tehát szinuszos kimenőjel-összetevő és a szinuszos bemenőjel közötti kapcsolat jellemzi. Az ezt a kapcsolatot leíró összefüggést nevezzük leíró függvénynek.

A leíró függvény kifejezésének a felírásához legyen a bemenőjel

$$x_b(t) = B \sin \omega t$$

időfüggvényű, akkor a kimenőjel alapharmonikusa ugyanilyen körfrekvenciájú szinuszos jel, de általában más amplitúdójú, és fázisban is el van tolva:

$$x_{k1}(t) = C_1 (\sin \omega t + \varphi_1) \quad .$$

Itt az 1 index az alapharmonikusra utal. A fáziseltolás:  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_b = \varphi_1 - 0 = \varphi_1$ , ahol  $\varphi_b = 0$  az  $x_b$  fázisa.  $C_1$  és  $\varphi_1$  függ a bemenőjel  $B$  amplitúdójától (ez a 4-1. ábra alapján is belátható, de később szemléletessé is válik), de függhet az  $\omega$  körfrekvenciától is (mint pl. a vasanyagoknál, ha hiszterézist is figyelembe veszünk). Az  $\omega$ -tól való függést kizárva, a továbbiakban csak a  $B$ -től való függést vesszük figyelembe, jelölésben kifejezve:  $C_1(B)$  és  $\varphi_1(B)$ . A leíró függvényt – hasonló elven, mint a frekvenciafüggvényénél – úgy kapjuk, hogy képezzük az  $x_{k1}$  és  $x_b$  jel amplitúdóviszonyából és fáziseltolásából felírható komplex mennyiséget, így esetünkben a leíró függvény:

$$\bar{Y}_N(B) = \frac{C_1(B)}{B} e^{j\varphi_1(B)} \quad . \quad (2)$$

A képlet értelmében  $\bar{Y}_N(B)$  olyan „frekvenciafüggvény”-ként fogható föl, amelynek a változója a  $B$  amplitúdó.

A leíró függvényt tehát akkor használjuk, amikor a nemlinearitás jelleggörbéje szakadásos vagy töréses. Alkalmazásának részben az elvből következően, részben később belátható okból a következő feltételei vannak:

- a) a nemlinearitás az időben nem változik;
- b) a kimenőjelben egyenösszetevő nincs, ez akkor teljesül, amikor a statikus jelleggörbe az origóra szimmetrikus;

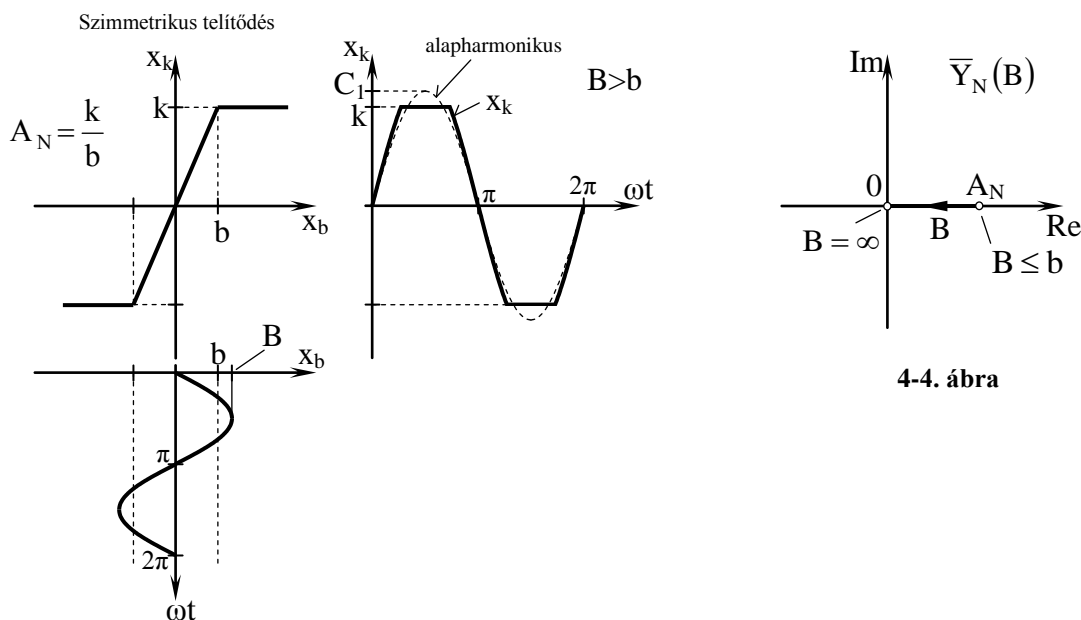
c) a kimenőjel felharmonikusaitól eltekinthetünk, ami két esetben állhat elő, vagy eleve kicsi a kimenőjel felharmonikus tartalma, vagy a szabályozási kör a felharmonikusokat erősen csillapítja;

d) a szabályozási kör csak egy nemlinearitást tartalmaz, vagy az esetleg több nemlinearitás egygyé vonható össze.

Az a) feltételhez: ha a nemlinearitás minden pillanatban más-más,  $C_1$  és  $\varphi_1$  a  $t$  időtől is függne. A b) feltételhez: ha a kimenőjelenek egyenösszetevője is volna, nem lehetne egyedül az alapharmonikussal jellemezni. A c) feltételhez: a szabályozási kör a felharmonikusokat többé-kevésbé mindig csillapítja, mert a szabályozási körök a Bode-diagramjuk szerint a felső frekvenciákon mindig 1-nél kisebb erősítésűek. A d) feltétel a stabilitás-vizsgálattal kapcsolatos.

#### 4.3.2 A leíró függvény meghatározásának szemléltetése

A leíró függvény meghatározásának a szemléltetésére tekintsük példaként a 4-1. ábrán már látott szimmetrikus telítődést v. korlátozást (4-3. ábra, [4]). Ennek a jelleggörbéjébe a 4-3. ábrán bejelöltük a görbe jellemző adatait is. Feladatunk a kimenőjel alapharmonikusához tartozó  $C_1$  amplitúdó és  $\varphi_1$  fázis meghatározása  $x_b(\omega t) = B \sin \omega t$  bemenőjel esetére. Ehhez először ismernünk kell a teljes kimenőjelenek az  $x_k(\omega t)$  időfüggvényét. Ezt, mint a 4-3. ábra



mutatja, az  $x_k = f(x_b)$  jelleggörbe és  $x_b(\omega t)$  függvény ismeretében szerkesztéssel meghatározhatjuk.  $B \leq b$  esetén a tag egyszerű arányos tag, a kimenőjel a bemenőjelenek  $A_N$ -szerese.  $B > b$  esetén lesz csak a tag nemlineáris, ekkor az  $x_k$  kimenőjel az ábra szerinti alakú,



tehát nem szinuszos, de periodikus, s mert periodikus, elegendő egy periódusra ábrázolni. A továbbiakban a Fourier-sorfejtés összefüggéseit alkalmazva kell meghatároznunk az  $x_k(\omega t)$  jel alapharmonikusának  $C_1$  amplitúdóját és  $\varphi_1$  fázisát. Ezt itt mellőzzük, de az ábrába berajzoltuk az alapharmonikus időfüggvényét. A  $C_1$  amplitúdó, mint  $B$  elképzelt változtatásával belátható, függ a bemenőjel  $B$  amplitúdójától. A vizsgált esetben a nemlinearitás egyértékű, ezért az alapharmonikus  $\varphi_1$  fázisa, mint látható is, nulla, de általában  $\varphi_1$ -et is  $B$  függvényeként kapjuk.  $C_1(B)$ ,  $\varphi_1(B)$ , valamint  $B$  ismeretében a leíró függvény (2) alapján felírható. A 4-3. ábra szerinti nemlinearitásra az ábra jelöléseivel a következő leíró függvényt kapjuk:

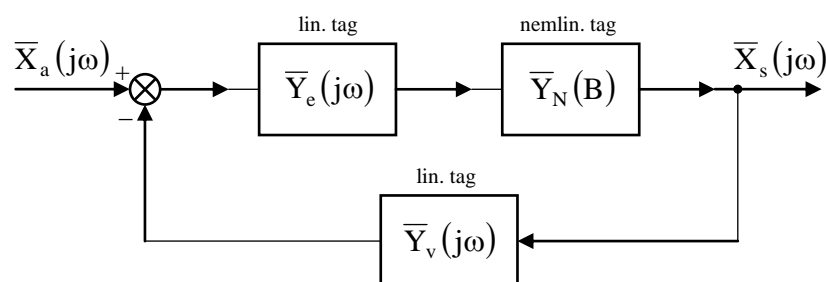
$$\bar{Y}_N(B) = \frac{2}{\pi} A_N \left[ \arcsin \frac{b}{B} + \frac{b}{B} \sqrt{1 - \left( \frac{b}{B} \right)^2} \right], \quad \text{ha } B \geq b. \quad (3)$$

A képlet érvényessége nemcsak  $B > b$ -re, hanem mint szélső esetre,  $B = b$  esetére is kiterjed. Mint láttuk, amiatt hogy ez a nemlinearitás egyértékű, a  $\varphi_1$  fázis nulla, s így  $\bar{Y}_N(B)$  tiszta valós. A tag  $\bar{Y}_N(B)$  leíró függvényének képét ( $\bar{Y}_N(B)$  Nyquist-diagramját) a 4-4. ábra mutatja.

A gyakorlatban a leíró függvény meghatározását általában már nem kell elvégezni, mert a leggyakoribb, leíró függvénnyel kezelhető nemlinearitásokra a leíró függvények táblázatokban megtalálhatók.

#### 4.3.3 Stabilitás-vizsgálat a leíró függvény segítségével

Abban az esetben, amikor a szabályozási kör csak egy nemlinearitást tartalmaz – vagy többet, de ezek egyébe összevonhatók – a stabilitás-vizsgálat elvégezhető a leíró függvény



4-5. ábra

segítségével [4]. A vizsgált szabályozási kör hatásvázlata, a lineáris tagokat a frekvenciafüggvényekkel, a nemlineáris tagot a leíró függvényével jellemezve, a 4-5. ábrán látható.  $\bar{Y}_e$  az előrevezető ágba lévő lineáris tagok frekvenciafüggvényének,  $\bar{Y}_v$  a visszacsatoló ágba

lévő lineáris tagok frekvenciafüggvényének az eredője. A nemlineáris tag energiatárolókat is tartalmazhat, ezeket a tagról leválasztva az  $\bar{Y}_e$  lineáris tagba értjük bele. A zárt kör eredő frekvenciafüggvénye:

$$\bar{W}(j\omega) = \frac{\bar{Y}_e(j\omega)\bar{Y}_N(B)}{1 + \bar{Y}_e(j\omega)\bar{Y}_v(j\omega) \cdot \bar{Y}_N(B)} = \frac{\bar{Y}_e(j\omega)\bar{Y}_N(B)}{1 + \bar{Y}_f(j\omega) \cdot \bar{Y}_N(B)},$$

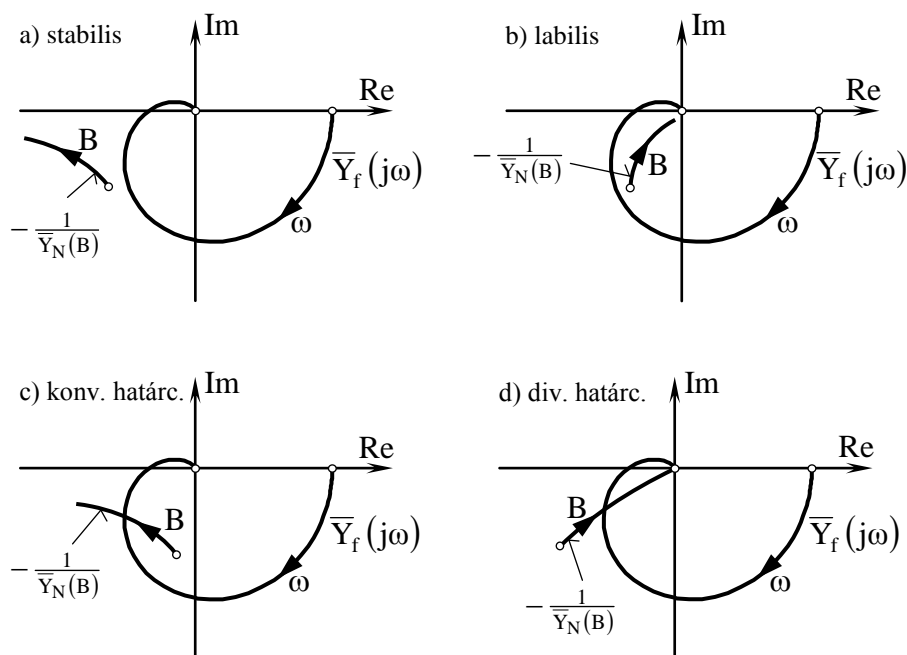
ahol  $\bar{Y}_f(j\omega)$  a felnyitott kör lineáris részének a frekvenciafüggvénye. A rendszer a stabilitás határára kerül, ha  $1 + \bar{Y}_f(j\omega) \cdot \bar{Y}_N(B) = 0$ , azaz, ha

$$\bar{Y}_f(j\omega) = -\frac{1}{\bar{Y}_N(B)}.$$

A Nyquist stabilitási kritérium tehát most a felnyitott kör lineáris részének a frekvenciafüggvényével érvényes, úgy hogy a kritériumban a  $-1 + j0$  pont szerepét a

$$-\frac{1}{\bar{Y}_N(B)}$$

helygörbe veszi át. A helygörbének és az  $\bar{Y}_f(j\omega)$  függvény Nyquist-diagramjának az



4-6. ábra

egymáshoz viszonyított helyzete alapján a stabilitási viszonyok négy esetét különböztetjük meg (4-6. ábra):

- a) ha a felnyitott kör lineáris részének teljes Nyquist-diagramja nem veszi körül a  $-1/\bar{Y}_N(B)$  helygörbét, a rendszer stabilis;

- b) ha a felnyitott kör lineáris részének teljes Nyquist-diagramja körülveszi a  $-1/\overline{Y}_N(B)$  helygörbét, a rendszer labilis.
- c) Ha a felnyitott kör lineáris részének Nyquist-diagramja a  $-1/\overline{Y}_N(B)$  helygörbét metszi, és  $B$  növekedésével a  $-1/\overline{Y}_N(B)$  helygörbe olyan szakaszára jutunk, amelyet a teljes Nyquist-diagram nem vesz körül, ún. konvergens határciklus lép fel, amely stabilis viselkedésnek tekinthető.
- d) Ha a felnyitott kör lineáris részének Nyquist-diagramja a  $-1/\overline{Y}_N(B)$  helygörbét metszi, és  $B$  növekedésével a  $-1/\overline{Y}_N(B)$  helygörbe olyan szakaszára jutunk, amelyet a teljes Nyquist-diagram körülvesz, ún. divergens határciklus lép fel, amely labilis viselkedést jelent.

A c) és a d) esetben, tehát amikor a két görbe egymást metszi, határciklus keletkezik. Bebizonyítható, hogy ez a kimenőjelben önfenntartó lengési összetevőt jelent, amely a bemenőjelnek a metszéspontban érvényes  $B$  amplitúdójánál lép fel, s amelynek körfrekvenciája az  $\omega$  paraméter metszéspontbeli értéke. Ha a metszéspontbeli állapotból a rendszert kimozdítjuk, és utána a kimozdító hatás megszűnik, akkor konvergens esetben visszaáll az eredeti lengési összetevő, míg divergens esetben nem áll vissza, hanem a lengések amplitúdója tovább nő.

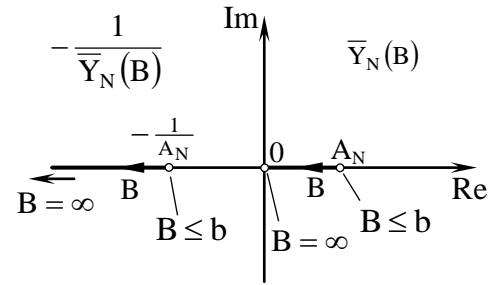
A konvergens határciklus tehát fizikailag stabilis állapot, de a szabályozott jellemzőben állandósult lengést jelent, s így az irányított folyamat, az alkalmazott technológia jellegétől függ, hogy megengedhető-e. A hőmérséklet-, szint- és nyomásszabályozások esetén pl. szinte mindig megengedhető, hogy a szabályozott jellemző egy adott érték körül állandósult lengéseket végezzen. A lengések amplitúdóját és körfrekvenciáját méretezéssel befolyásolni tudjuk.

#### 4.3.4 A stabilitási viszonyok értékelése két fontos nemlinearitás esetére

a./ Szimmetrikus telítődés v. korlátozás (pl. műveleti erősítő, áramkorlát):

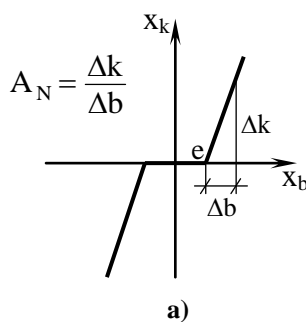
Ezt a nemlinearitást korábban már részben tárgyaltuk. A  $-1/\overline{Y}_N(B)$  helygörbét, amely a (3)-as képlettel bemutatott  $\overline{Y}_N(B)$  segítségével rajzolható föl, a 4-7. ábra mutatja.  $A_N = 1$  esetén a  $-1/A_N$  pont éppen a  $-1 + j0$  ponttal esik egybe,  $A_N < 1$  esetén pedig attól balra esik, ami azt jelenti, hogy  $A_N \leq 1$ -nél a  $-1/\overline{Y}_N(B)$  görbe a  $-1 + j0$  pontban v. attól balra kezdődik. Ha tehát a lineáris rész önmagában stabil, azaz az  $\overline{Y}_f$ -görbe a  $-1 + j0$  ponttól

jobbra esik, akkor nem lehet metszés, s így  $A_N \leq 1$  esetén ez a nemlinearitás a stabilitási viszonyokat nem befolyásolja. Ha azonban  $A_N$  értéke 1 fölé nő, akkor a  $-1/A_N$  pont a valós tengelyen a  $-1 + j0$  ponttól jobbra tolódik, és felléphet a két görbe metszése, ami jelen esetben konvergens határciklust jelent.  $A_N$  kritikus értéke tehát:  $A_N > 1$ .

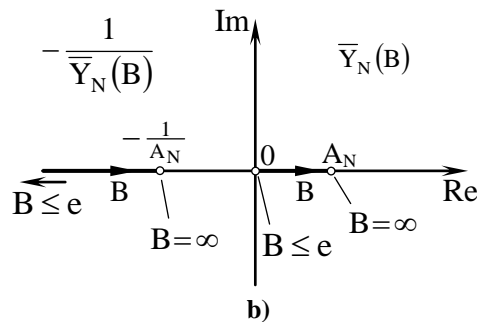


4-7. ábra

b./ Érzéketlenségi sáv (pl. diódás határoló, szeleptolattyú):



a)



b)

4-8. ábra

Az érzéketlenségi sáv v. holtjáték statikus jelleggörbéje a 4-8.a ábrán látható. A leíró függvény az ábra jelöléseivel az alábbi:

$$\bar{Y}_N(B) = \frac{2}{\pi} A_N \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{e}{B} - \frac{e}{B} \sqrt{1 - \left( \frac{e}{B} \right)^2} \right], \quad \text{ha } B > e.$$

Az  $\bar{Y}_N(B)$  és a  $-1/\bar{Y}_N(B)$  helygörbét a 4-8.b ábra mutatja. Hasonlóan az előbbi esethez megállapítható, hogy ha a lineáris rész önmagában stabil, akkor  $A_N \leq 1$  esetén a stabilitási viszonyokat ez a nemlinearitás sem befolyásolja. Ha azonban  $A_N > 1$ , és fellép a két görbe metszése, az most divergens határciklust, tehát labilis állapotot jelent.  $A_N$  kritikus értéke tehát itt is  $A_N > 1$ , a labilitás veszélyével.

A leíró függvényvel végzett stabilitás-vizsgálatkor sohasem szabad megfeledkezni arról, hogy a leírófüggvény-módszer közelítő eljárás, és csak akkor ad helyes eredményt, ha a felharmonikusoktól eltekinthetünk (feltéve, hogy az alkalmazhatóság többi feltétele teljesül).

## 5. DISZKRÉT IDEJŰ RENDSZEREK

A mai szabályozások a legtöbbször digitális szabályozások, amelyek diszkrét idejű rendszerek. A digitális szabályozáson belül a szabályozóra háruló különbségképzési és kompenzációs műveleteket digitális számítógép (mikroszámítógép) végzi. A számítógép számára a folytonos idejű, analóg jeleket át kell alakítani digitális jellé, majd a számítógépes feldolgozással kapott digitális jelet vissza is kell alakítani folytonos idejű, analóg jellé. Az előbbi átalakítás úgy történik, hogy a folytonos idejű jelet mintavételezéssel impulzussorozattá alakítjuk, az impulzussorozatot pedig kódolással alakítjuk tovább digitális

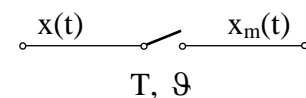


5-1. ábra

jellé (5-1. ábra), míg a visszaalakítás ennek a fordítottja: a digitális jelből előbb dekódolással impulzussorozatot állítunk elő, majd ebből a mintavételezés ellentett műveletével, az ún. tartással hozunk létre folytonos idejű jelet (5-2. ábra). A szabályozási rendszerben, mint látható, impulzussorozatokkal, *diszkrét idejű* jelekkel is dolgozunk, ezért szükségünk van arra, hogy ezeket matematikailag kezelni tudjuk.

### 5.1 Mintavételezés, a mintavételezett jel fogalma és matematikai leírása

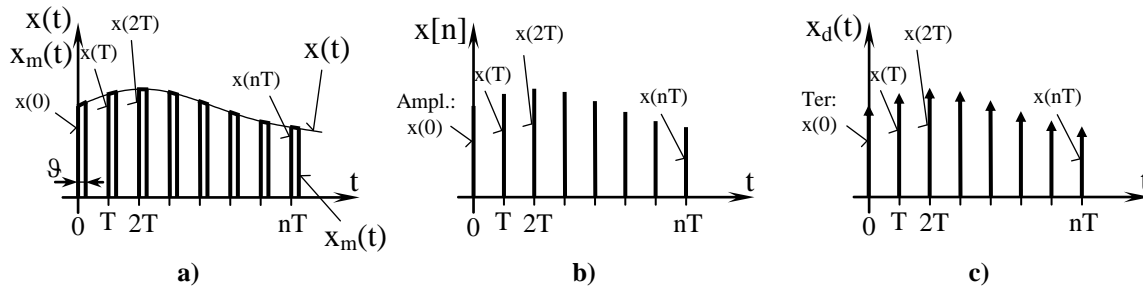
Mintavételezéskor a folytonos idejű jelet időben szaggatott jellé alakítjuk át: a jelnek meghatározott időtartományokban érvényes értékeit mintaként megtartjuk, a többi 0-val helyettesítjük. A megvalósítás elvét, a mintavételezőt érintkezővel



5-2. ábra

jelképezve, az 5-2. ábra szemlélteti. Az érintkezőt  $T$  periódussal  $\theta \ll T$  időtartamra zárjuk; a  $T$  ( $T_s$ ,  $T_0$ ) periódusidő az ún. mintavételezési idő. A mintavételezéssel az  $x(t)$  folytonos idejű jelből az 5-3.a ábra szerinti  $x_m(t)$  mintavételezett jel adódik, amelyből az  $x(nT)$  függvényértékeket megtartva az 5-3.b ábra szerinti  $x[n]$  mintavételezett sort kapjuk. Az  $x[n]$  mintavételezett sor az  $x(nT)$  amplitúdójú impulzusok sorozatából áll, ahol  $n = 0, 1, 2, \dots$  stb.:

$$x[n] = \{x(0), x(T), x(2T) \dots x(nT)\} \quad (1)$$



5-3. ábra

A folytonos idejű jelle vonatkozó információt az  $x(nT)$  függvényértékek hordozzák. Matematikailag könnyen kezelhető leírási módot akkor kapunk, ha az impulzusokat az  $x(nT)$  függvényérték és Dirac-impulzus szorzatából előállított impulzusokkal helyettesítjük. A helyettesítő impulzusok végtelenül kicsiny időtartamúak, végtelenül nagy amplitúdójúak, területük viszont  $x(nT)$ -vel egyenlő, az információt tehát az impulzusok területe hordozza (5-3.c ábra; ún. matematikai mintavételezés). Ennek az 5-3.c ábra szerinti Dirac-impulzussornak, az ún. *diszkrét időfüggvénynek* a kifejezése:

$$x_d(t) = x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \dots + x(nT)\delta(t-nT) \quad (2)$$

A vizsgálatokhoz az  $x_d(t)$  diszkrét időfüggvénynek is a Laplace-transzformáltjára van szükségünk. Ennek a neve *diszkrét Laplace-transzformált*, és az alábbi alakú:

$$L\{x_d(t)\} = X_d(s) = x(0) + x(T)e^{-sT} + x(2T)e^{-s2T} + \dots + x(nT)e^{-snT} \quad (3)$$

Az  $x_d(t)$  első tagjában szereplő  $\delta(t)$  Laplace-transzformáltja ugyanis 1; a második tagban pedig  $x(T)$  állandó, és ugyanott  $\delta(t-T)$  felírható az  $1(t-T)\delta(t-T)$  alakban, ahonnan az eltolási tétel értelmében  $L\{1(t-T)\delta(t-T)\} = 1 \cdot e^{-sT}$ ; stb. Vezessük be (3)-ban az

$$e^{sT} = z$$

jelölést, akkor az  $x_d(t)$  diszkrét időfüggvény ún. *z-transzformáltjához* jutunk:

$$Z\{x_d(t)\} = X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots + x(nT)z^{-n} \quad (4a)$$

A képletből látható, hogy  $X(z)$  az  $x[n]$  sorral is egyértelműen felírható, ezért  $X(z)$ -t az  $x[n]$  mintavételezett sor  $z$ -transzformáltjának is tekinthetjük:

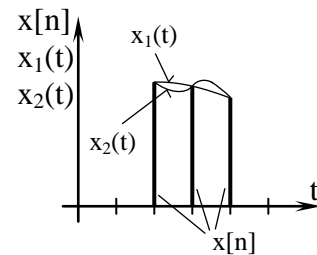
$$Z\{x[n]\} = X(z) = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots + x(nT)z^{-n} \quad (4b)$$

A (2)-es, (3)-as, valamint (4)-es képleteket  $\sum$ -jeles alakban is felírhatjuk. (4a)-ra és (4b)-re:

$$Z\{x_d(t)\} = Z\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} \quad (5)$$

Az  $X(z)$  z-transzformálttal bíró  $x_d(t)$  és  $x[n]$  mennyiségek közül  $x[n]$  mint impulzus-amplitúdók sorozata a szemlélet számára egyszerűbb, és a technikai megvalósításhoz is közelebb áll, mint az  $x_d(t)$  diszkrét időfüggvény. Ezért a számítási modellekben (hatásvázlatokban) gyakran  $x[n]$ -t tüntetik föl. Ugyanakkor, ha technikailag  $x[n]$  van is, matematikailag a jel mindig  $x_d(t)$ , az időtartományban pl. csak ezzel dolgozhatunk.

A mintavételezés információvesztéssel jár, mert az  $x[n]$  jel az  $x(t)$  jelről csak a mintavételi időpontokban ad információt, a közbenső pillanatokban nem. Ami az  $x(t)$  és az  $x[n]$  közötti kapcsolatot illeti:  $x(t)$ -ből az 5-3.a és b ábra szerint egyértelműen képezhető  $x[n]$ ,  $x[n]$ -hez viszont végtelen sok olyan  $x(t)$  rendelhető, amely vele a mintavételi időpontokban egyezik (5-4. ábra). Az  $x(t) \rightarrow x[n]$  képzés egyértelműsége miatt a közvetlenül az  $x(t)$ -ről az  $X(z)$ -re történő áttérés is egyértelmű; a fordítottja azonban már nem,  $X(z)$ -ről egyértelműen csak  $x[n]$ -ig térhetünk vissza (ez az inverz z-transzformációt érinti).



5-4. ábra

Mivel  $x(t)$ -ből egyértelműen képezhető  $x[n]$  és így  $x_d(t)$  is, az  $X(z)$ -re való áttérés lehetséges már az  $x(t)$  időfüggvényről, sőt annak  $X(s)$  Laplace-transzformáltjáról is; ezt a z-transzformáltak táblázatai és a szoftverek ki is használják.

## 5.2 A fontosabb mintavételezett függvények z-transzformáltja

A fontosabb mintavételezett függvények  $f[n]$  sorainak z-transzformáltja táblázatokban megtalálható. A számunkra legfontosabb mintavételezett függvények z-transzformáltját az  $f[n]$ -hez tartozó  $f(t)$ , ill.  $F(s)$  függvényekhez rendeltén az 5-1. táblázatban foglaltuk össze. A táblázatban szereplő  $\delta_e(t)$  *egységimpulzus*, mint a függvényutasításából is látszik, nem azonos a  $\delta(t)$  Dirac-impulzussal. A  $\delta_e(t)$  mintavételezett sora:  $\delta[n] = \{1\}$ , diszkrét időfüggvénye tehát:  $1 \cdot \delta(t)$ , s így diszkrét Laplace-transzformáltja  $1 \cdot 1 = 1$ , és z-transzformáltja is 1.

Azok a táblázatok, amelyek  $F(z)$ -t az  $f[n]$ -hez rendeltén adják meg,  $f[n]$ -t az általános  $f(nT)$  tagjával vagy az  $\{f(nT)\}$  jelöléssel szerepeltetik. (Gyakori „n” helyett a „k” jelölés.)

A továbbiakban példaképpen két mintavételezett időfüggvény (impulzussorozat) z-transzformáltját meg is határozzuk.

### a) Mintavételezett egységugrás z-transzformáltja:

Ez a z-transzformált meghatározható a (4a,b), ill. (5) definíciós összefüggés alapján. Tekintve, hogy az  $1(t)$  függvény  $t \geq 0$  esetén mindenhol 1, a mintavételezett sor:

$$1[n] = \{1, 1, 1, \dots, 1\}$$

5-1. táblázat

$f(t)$ amelynek mintavételezéséből az $f[n]$ sor származik	$F(s)$	$F(z)$
$\delta_e(t) = \begin{cases} 1, & \text{ha } t = 0 \\ 0, & \text{ha } t \neq 0 \end{cases}$	–	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$T \frac{z}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T^2}{2} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$T \frac{ze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$

amelynek a z-transzformáltja (4b) értelmében:

$$F(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-n} \quad .$$

$F(z)$ -t tehát végtelen sor alakjában kaptuk meg, de a végtelen mértani sor összegképletének felhasználásával zárt alakban is megadható. A tagok hányadosa:  $q = \frac{1}{z}$ , s ezzel:

$$F(z) = S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-\frac{1}{z^n}}{1-\frac{1}{z}} \quad ,$$

ahonnan  $|z| > 1$ -re (bebizonyítható, hogy ez fennáll)  $n \rightarrow \infty$  esetén:

$$F(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} \quad .$$

b) Mintavételezett  $f(t) = e^{\pm at}$  exponenciális függvény z-transzformáltja:

A mintavételezett sor kifejezése ez esetben:



$$f[n] = \{1, e^{\pm aT}, e^{\pm a2T}, \dots, e^{\pm anT}\} \quad , \quad (6)$$

amelyet megadhatunk az  $f[n] = e^{\pm anT}$ ,  $n = 0, 1, 2$  stb. alakban is.

Alkalmazzuk itt a z-transzformált meghatározásának egy másik módját [7]! E szerint, ha  $f(t)$  Laplace-transzformáltja olyan

$$F(s) = \frac{G(s)}{H(s)}$$

alakú racionális törtfüggvényként írható föl, ahol  $H(s)$  gyökei egyszeresek és nincs közöttük nulla, akkor

$$F(z) = \sum_{i=1}^n \frac{G(s_i)}{H'(s_i)} \frac{1}{1 - \frac{e^{s_i T}}{z}} \quad ,$$

ahol  $s_i$  jelöli  $H(s)$  gyökeit, a vessző pedig differenciálást jelent.

Tekintve, hogy esetünkben

$$F(s) = \frac{1}{s \mp a} \quad ,$$

az  $F(z)$  felírásához szükséges mennyiségek:

$$G(s) = 1; \quad H(s) = s \mp a; \quad H'(s) = 1; \quad s_1 = \pm a.$$

A keresett z-transzformált így:

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{e^{\pm aT}}{z}} = \frac{z}{z - e^{\pm aT}} \quad . \quad (7)$$

Az  $F(z)$  z-transzformált szoftveresen is meghatározható. Az erre szolgáló utasításokkal az  $f[n]$  sor (esetleg az  $F(s)$  Laplace-transzformált és  $T$ ) ismeretében határozhatjuk meg  $F(z)$ -t.

### 5.3 Az inverz z-transzformáció

Az inverz z-transzformáció – a korábban írtaknak megfelelően – csak az  $F(z)$ -től  $f[n]$ -ig egyértelmű. Így pl. (7) alapján egyértelmű megoldásként csak a (6) sort írhatjuk föl, az  $f(t) = e^{\pm at}$  függvényt csak mint egy lehetséges megoldást adhatjuk meg. Az 5-1. táblázatot is csak akkor használhatjuk  $F(z)$ -től visszafelé egészen  $f(t)$ -ig, ha a táblázat szerinti  $f(t)$ -t úgy adjuk meg, mint a feladat egy lehetséges megoldását.

Az inverz z-transzformáció végrehajtásának két gyakorlati módját ismertetjük:

#### a) Részlettörtekre bontással végzett inverz z-transzformáció:

Ennél a módszernél az  $F(z)$  függvényt két polinom hányadosára rendezzük:

$$F(z) = \frac{G(z)}{H(z)},$$

majd képezzük az  $\frac{F(z)}{z}$  alakot, amelyet gyöktényezős alakra hozunk, és részlettörtekre bontunk. Ez után visszaszorozunk  $z$ -vel, ami által  $F(z)$ -re tagok összegéből álló kifejezést kapunk. A kifejezés tagjait sorra véve megállapíthatjuk, hogy azok – egy lehetséges megoldásként – mely időfüggvények mintavételezéséből származnak, és az  $f(t)$  függvényt e rész-időfüggvények összegeként írjuk föl. Ennek során gyakran fordulnak elő

$$F(z) = \frac{z}{z - b}$$

alakú tagok. Ezek az 5-1. táblázat alapján visszatranszformálhatók, mert felírhatók a

$$\frac{z}{z - b} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

alakban, és a táblázat alapján  $f(t) = e^{-at}$  függvényből származó  $z$ -transzformáltaknak tekinthetők. Az „ $a$ ” állandó értéke  $b = e^{-aT}$ -ből következően  $a = -\frac{\ln b}{T}$ .

b) Hatványsorba fejtéssel végzett inverz  $z$ -transzformáció:

Ez esetben a két polinom hányadosára rendezett  $F(z)$  függvényt a számlálónak a nevezővel történő elosztásával a  $z^{-1}$  változó hatványsorába fejtjük:

$$F(z) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}.$$

Ezt összehasonlítva a (4b) alapján felírható

$$F(z) = f(0)z^0 + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \dots + f(nT)z^{-n}$$

kifejezéssel, látható, hogy az „ $a$ ” együtthatók rendre megegyeznek a mintavételezett  $f(t)$  függvénynek a mintavételezési időpontokban felvett értékeivel. Ebből már az (1) sor föl is írható, de általában következtetni lehet magára az  $f(t)$  függvényre is.

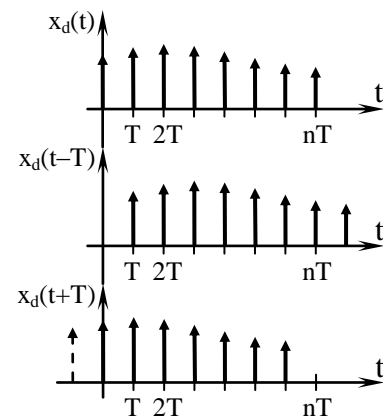
Az inverz  $z$ -transzformáció szintén végrehajtható szoftveresen is. Az erre szolgáló utasításokkal  $F(z)$  ismeretében az  $f[n]$  sor határozható meg.

#### 5.4 Az eltolási operátor

A (4b) képletre tekintve észrevehetjük, hogy a  $z^{-n}$  ( $n = 0, 1, 2$  stb.) szorzótényezők kitevőjében szereplő  $n$  kijelöli az illető impulzus időbeli helyzetét:  $z^0$  esetén az impulzus a  $t = 0$ -ban van,  $z^{-1}$  esetén  $T$ -ben,  $z^{-2}$  esetén  $2T$ -ben stb. Ha tehát egy számot  $z^{-n}$ -nel szorzunk, az az  $nT$ -ben fellépő impulzust eredményez. Ha pedig egy  $I \cdot z^{-i}$  alakban adott

impulzust  $z^{-n}$ -nel szorzunk, a kitevők összeadódnak, és az eredetileg az  $iT$ -nél lévő impulzus az  $(i+n)T$  helyre kerül. Ez  $nT$ -vel történő pozitív irányú eltolást,  $nT$ -vel történő késleltetést jelent. Hasonlóan, ha az impulzust  $z^n$ -nel ( $n=0, 1, 2$  stb.) szorozzuk, az az impulzus  $nT$ -vel történő siettetését jelenti. A  $z^k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2$  stb.) szorzó tehát eltolási operátorként fogható föl.

Az eltolás természetesen nemcsak egyetlen impulzusra, hanem impulzussorozatokra is igaz. Ha például az operátor  $z^{-1}$  alakú, és az  $x_d(t)$  Dirac-impulzussor  $z$ -transzformáltja  $X(z)$ , akkor a  $z^{-1}X(z)$  szorzat olyan impulzussort jellemez, amelyet az eredetiből  $T$ -vel történő késleltetéssel kapunk; az új sor kifejezése ekkor  $x_d(t-T)$  (5-5. ábra). Hasonlóan, a  $zX(z)$  szorzat olyan impulzussort jellemez, amelyet az eredetiből  $T$ -vel történő siettetéssel kapunk, s amelynek a kifejezése így  $x_d(t+T)$  (5-5. ábra). Ez esetben a  $t < 0$ -ra eső impulzus elvész.



5-5. ábra

### 5.5 A $z$ -transzformáció tételei

Összeg  $z$ -transzformáltja:

$$Z\{x_{d1}(t) \pm x_{d2}(t)\} = X_1(z) \pm X_2(z) \quad .$$

Állandóval szorzott függvény  $z$ -transzformáltja:

$$Z\{ax_d(t)\} = aX(z) \quad .$$

Eltolási tétel:

$$Z\{x_d(t - kT)\} = z^{-k}X(z) \quad .$$

Csillapítási tétel:

$$Z\{e^{-at}x_d(t)\} = X(ze^{aT}) \quad .$$

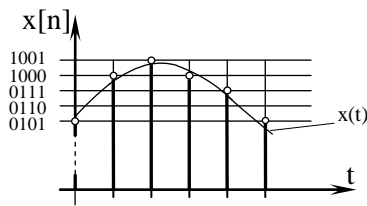
Határértéktételek:

$$x(t=0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad .$$

$$x(t \rightarrow \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} \right) X(z) \quad .$$

A képletekben  $x_d(t)$  helyett mindenhol  $x[n]$ -t is írhatunk.

## 5.6 Kódolás, dekódolás



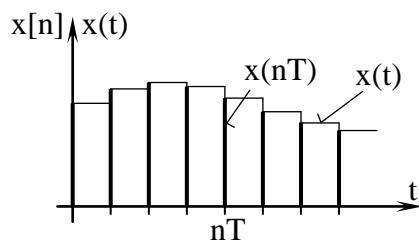
5-6. ábra

A mintavételezést az 5-1. ábra szerint kódolás követi. Ezzel kapcsolatban az  $x[n]$  mintavételezett impulzussorozat egy részletén (5-6. ábra) bemutatjuk ennek az elvét: az impulzus-amplitúdók (csúcsértékek) értékészletét diszkrété tesszük, és a diszkrét amplitúdóknak feleltetünk meg számjegyes értékeket.

Ezeket a számjegyes értékeket továbbítjuk aztán digitális jelek formájában a számítógépnek.

A feldolgozott digitális jelek dekódolásakor a fordított folyamat játszódik le, a kapott számjegyes értékeknek feleltetünk meg impulzus-amplitúdókat.

## 5.7 Tartás, a zérusrendű tartószerv átviteli függvénye

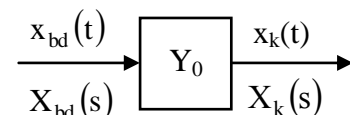


5-7. ábra

Az 5-1. ábra szerinti jelfolyam utolsó műveletére, az ún. tartásra térve, ez azért szükséges, mert a számítógépes feldolgozással és dekódolással kapott,  $x(nT)$  értékű impulzusokból álló  $x[n]$  impulzussort a folytonos működésű tagok számára  $x(t)$  folytonos idejű jellé kell alakítani. Ennek az átalakításnak az eszköze az ún. tartószerv. Az átalakítás

nem hajtható végre egyértelműen, hiszen  $x(t)$ -nek a két mintavételi időpont közötti alakja tetszőlegesen választható (l. 5-4. ábra); a tartást illetően tehát több megoldás lehetséges. A legegyszerűbb tartószerv a *zérusrendű tartószerv*, ez az  $nT$  pillanatban a bemenetére érkező impulzus  $x(nT)$  amplitúdójának értékét tartja a következő impulzus megjelenéséig (5-7. ábra). A kimeneten tehát ekkor az  $x(nT)$  értékekre támaszkodó lépcsős görbe jelenik meg.

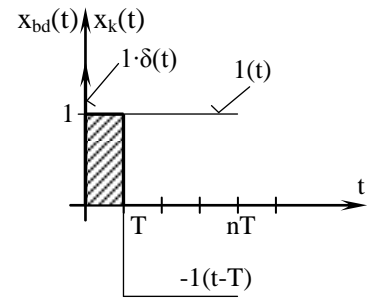
A zérusrendű tartószerv bemenetén (5-8. ábra)  $x_{bd}(t)$  impulzussor van, amely  $X_{bd}(s)$  diszkrét Laplace-transzformálttal, kimenetén  $x_k(t)$  folytonos idejű jel van, amely  $X_k(s)$  Laplace-transzformálttal jellemezhető. (Mivel a kimenőjelet  $X_k(s)$ -sel jellemezzük, a bemeneten is Laplace-transzformáltat kell használnunk.) A zérusrendű tartószerv átviteli függvényének értelmezése:



5-8. ábra

$$Y_0(s) = \frac{X_k(s)}{X_{bd}(s)} \quad .$$

A zérusrendű tartószerző bemenetere  $x_{bd}(t)=1\cdot\delta(t)$  impulzust juttatva, a tartószerzőnek a kimeneten az 1 amplitúdóértéket kell tartania a következő impulzus megjelenéséig, vagyis a  $T$  pillanatig. A kimeneti jelnek tehát az  $x_k(t)=1(t)-1(t-T)$  alakúnak kell lennie (5-9. ábra). A bemenőjel diszkrét Laplace-transzformáltja:  $X_{bd}(s)=1$ , a kimenőjel Laplace-transzformáltja pedig, az  $1(t-T)$  tagét az eltolási tétellel fölírva:



5-9. ábra

$X_k(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\cdot e^{-sT}=\frac{1-e^{-sT}}{s}$ . Osztva ezt  $X_{bd}(s)=1$ -gyel, a zérusrendű tartószerző átviteli függvénye:

$$Y_0(s)=\frac{1-e^{-sT}}{s}.$$

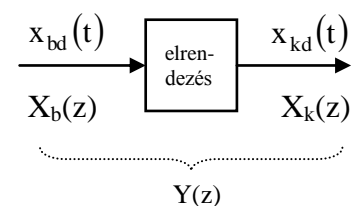
A képlet az  $nT$  pillanatban érkező impulzus esetén is igaz, mert ekkor az eltolási tétel értelmében mind  $X_{bd}(s)$ , mind  $X_k(s)$   $e^{-snT}$ -vel szorzódik, de ezzel a képletben egyszerűsítenünk lehet.

## 5.8 Átviteli tagok z-átviteli függvénye

A z-transzformáció kérdéseit után figyelmünket a szabályozási kör különálló részeire, az átviteli tagokra összpontosíthatjuk. Azt vizsgáljuk, hogy az impulzusok átvitelének a szempontjából a tag milyen átviteli függvénnyel jellemezhető.

### 5.8.1 A z-átviteli vagy impulzusátviteli függvény értelmezése

A diszkrét idejű rendszerek olyan elrendezéseinél, amelyeknél a be- és a kimeneten impulzussorozat van, a bemenőjelet  $X_b(z)$ , a kimenőjelet pedig  $X_k(z)$  z-transzformálttal jellemezhetjük (5-10. ábra). Ez esetben ugyanolyan elven, ahogy a Laplace-transzformáltaknál is láttuk,  $X_k(z)$  és  $X_b(z)$  hányadosaként értelmezhető a tag z-átviteli vagy impulzusátviteli függvénye:



5-10. ábra

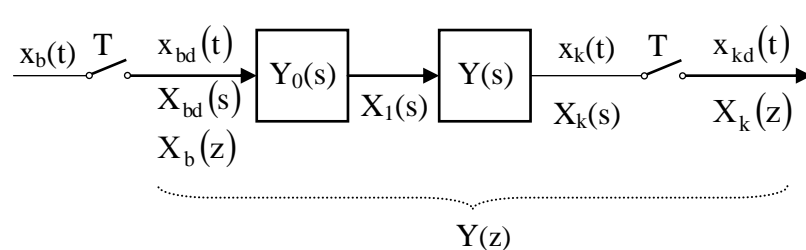
$$Y(z)=\frac{X_k(z)}{X_b(z)}.$$

Fizikailag  $Y(z)$  a bemeneti és a kimeneti mintavételezett jel kapcsolatára jellemző.

$Y(z)$  és  $X_b(z)$  ismeretében a kimenőjel z-transzformáltja:  $X_k(z)=X_b(z)\cdot Y(z)$ .

### 5.8.2 Tartószerv és vele sorba kapcsolt folytonos idejű tag

A számítógépes feldolgozást követő tartószerv és a hozzá csatlakozó folytonos működésű tag impulzusátvitel szempontjából a szabályozási kör alapvető része. Az elrendezést az 5-11. ábra mutatja. A folytonos működésű tagot az  $Y(s)$  átviteli függvény képviseli. Az első mintavételező azt modellezi, hogy a számítógépes feldolgozás és a



5-11. ábra

dekódolás eredményeként impulzussorozatot kapunk, a második pedig szükséges ahhoz, hogy a kimeneten is impulzussorozatunk legyen. A tag  $z$ -átviteli (impulzus-

átviteli) függvénye:

$$Y(z) = \frac{X_k(z)}{X_b(z)} .$$

Az esetünkre érvényes  $z$ -átviteli függvény meghatározásának a legegyszerűbb módja, hogy  $x_b(t)$ -ként  $1(t)$  időfüggvényt működtetünk, és az erre az esetre kapott  $X_k(z)$  és  $X_b(z)$  függvények hányadosát képezzük [7]. Az  $x_b(t)$  jel tehát:

$$x_b(t) = 1(t) ,$$

az  $x_{bd}(t)$  diszkrét időfüggvény pedig mintavételezett egységugrás, amelynek a  $z$ -transzformáltja:

$$X_b(z) = \frac{z}{z-1} .$$

Innen folytathatnánk úgy, hogy  $X_b(z)$ -ben alkalmazzuk a  $z = e^{sT}$  helyettesítést, és az így kapott  $X_{bd}(s)$  diszkrét Laplace-transzformáltat  $Y_0(s)$ -sel szorozva előállítjuk  $X_1(s)$ -t. Az  $X_1(s)$  függvényt azonban meggondolással is meghatározhatjuk, mert a mintavételezett egységugrás tartásával egységugrást kell kapnunk:

$$X_1(s) = \frac{1}{s} .$$

$X_1(s)$  ismeretében az  $X_k(s)$  Laplace-transzformált:

$$X_k(s) = X_1(s)Y(s) = \frac{1}{s} Y(s) ,$$

$X_k(s)$  ismeretében viszont az  $x_k(t)$  időfüggvény  $L^{-1}\left[\frac{1}{s} Y(s)\right]$ , az  $x_{kd}(t)$  diszkrét időfüggvény

$L_d^{-1}\left[\frac{1}{s} Y(s)\right]$ , az  $X_k(z)$   $z$ -transzformált pedig:

$$X_k(z) = Z \left\{ L_d^{-1} \left[ \frac{1}{s} Y(s) \right] \right\} .$$

Ezzel az elrendezés z-átviteli függvénye:

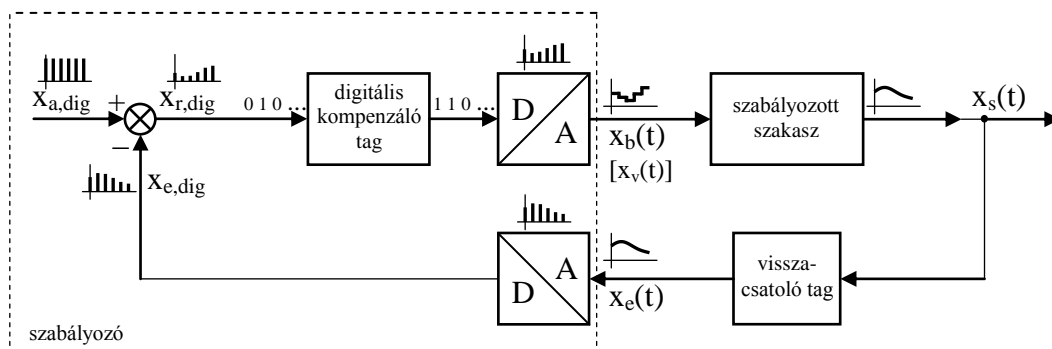
$$Y(z) = \frac{X_k(z)}{X_b(z)} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L_d^{-1} \left[ \frac{1}{s} Y(s) \right] \right\} . \quad (8)$$

Kihasználva, hogy az  $s$  változóról a  $z$ -re való áttérés egyértelmű (5.1 pont), a (8)-as összefüggést egyszerűsíthetjük oly módon, hogy a  $L_d^{-1}$  jelölést elhagyjuk. A fennmaradó  $Z \left\{ \frac{1}{s} Y(s) \right\}$  mint transzformáció nem létezik, csak áttérést jelent  $s$ -ről  $z$ -re, de a transzformációs értelmezést is fenntarthatjuk, ha alkalmazzuk pl. a  $Z_d$  jelölést. Az egyszerűsített alak ezzel:  $Y(z) = \frac{z-1}{z} Z_d \left\{ \frac{Y(s)}{s} \right\}$  vagy a szakirodalomban sokszor:  $Y(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{Y(s)}{s} \right\}$ .

### 5.9 Digitális szabályozási körök modellje

Az eddig megismert összefüggésekkel átviteli tagokat már tudunk impulzusátvitelre számolni, de digitális szabályozási köröket még nem. Ez utóbbiak számításához először is a digitális szabályozási kör felépítését kell ismernünk, és ennek alapján tudunk a körre modellt felállítani.

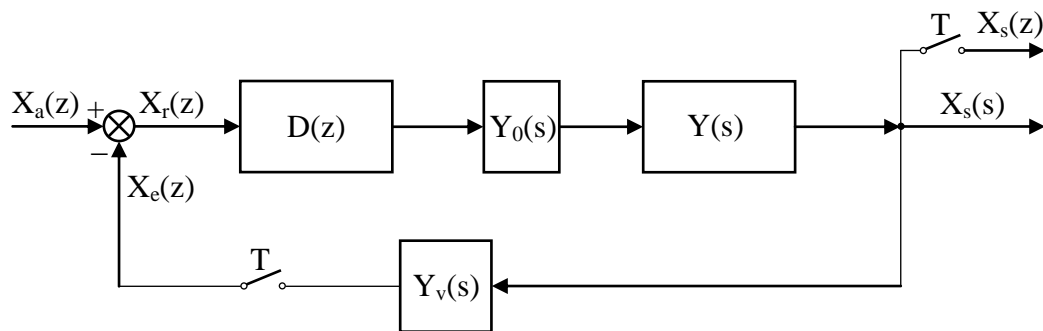
A felépítést illetően abból indulhatunk ki, hogy hogyan valósíthatók meg azok a jel-átalakítások, amelyeket az 5-1. ábrán foglaltunk össze. Az ábra szerinti mintavételezés és az azt követő kódolás a valóságban egyetlen művelet, amelyet az A/D (analóg-digitális) átalakító végez el, és ugyanígy, a dekódolás és az azt követő tartás szintén egyetlen művelet, amelyet a D/A átalakító hajt végre. A kör megfelelő helyein tehát ilyen átalakítók találunk. Az egyhurkos digitális szabályozási körök felépítése ennek alapján az 5-12. ábra szerinti. A körben a szabályozó az alapjelképzéssel és a negatív visszacsatolás különbségképzésével



5-12. ábra

együtt digitális, és A/D átalakító szükséges az ellenőrző jelnek a szabályozóba való beviteléhez, D/A átalakító pedig a beavatkozó (végrehajtó) jelnek a szabályozóból való kiviteléhez. Az ábra szerinti körben a szabályozott jellemzőt analóg, folytonos idejű eszközzel érzékeljük.

A modell felállításához az 5-12. ábrán bejelöltük, hogy a rendszer melyik helyén milyen jel van; a különbségképzésnél a digitális jeleknek megfeleltethető impulzusokat tüntettük föl. A jeleket megszemlélve azt mondhatjuk, hogy a kompenzáló tag impulzustól impulzusig z-átviteli függvényű taggal jellemezhető, az A/D átalakítót pedig mintavételezővel, a D/A átalakítót viszont tartószervvel vehetjük figyelembe. A szabályozón kívüli tagok folytonos idejűek, ezeket s-átviteli függvényű taggal jellemezve az 5-13. ábra szerinti modellt kapjuk; az ábrán a kompenzáló tag z-átviteli függvényét  $D(z)$ -vel jelöltük. A

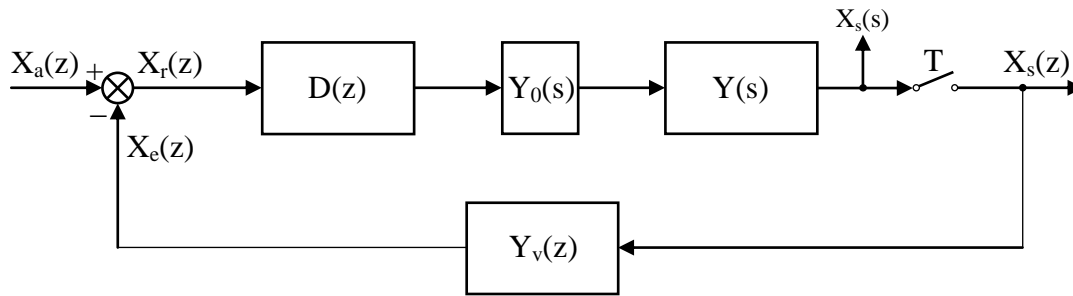


5-13. ábra

kapott modell vegyes (hibrid), mert diszkrét és folytonos tagokat egyaránt tartalmaz, a számításokhoz azonban az egész rendszernek vagy diszkrétnek, vagy folytonosnak kell lennie. A kettő közül a diszkrét rendszert célszerű választani, ezért a számításokhoz a folytonos tagokat diszkrét idejűvé fogjuk alakítani, vagyis a z-átviteli függvényükkel fogjuk figyelembe venni. Ehhez a modell kimenetére mintavételezőt képzelünk (ezt megtehetjük, mert a mintavételező kimenete szabadon van), és így a szabályozott szakasz z-átviteli függvénye is értelmezhető lesz. A kapott modell akkor is alkalmazható, ha az alapjel külső, folytonos jel (ez előfordul pl. PLC-s szabályozó moduloknál), mert ezt a szabályozó digitális jellé alakítva veszi figyelembe.

A szabályozott jellemzőt érzékelhetjük digitális (impulzusadó) eszközzel is, ekkor a modell az 5-14. ábra szerinti lesz. A valóságos kimenőjel az  $X_s(s)$  folytonos idejű jel,  $X_s(z)$  az érzékelő által érzékelt, diszkrét idejű kimenőjel. Ebben a modellben csak a közvetlenül az  $Y(s)$  tag előtti és utáni jelek folytonosak, a többi jel mintavételezett.





5-14. ábra

### 5.10 Zárt és felnyitott szabályozási körök jellemző z-átviteli függvényei

A modellek ismeretében már felírhatjuk a szabályozási körök jellemző átviteli függvényeit.

#### a./ Digitális érzékelés:

A hatásvázlat az 5-14. ábrán látható.

A szabályozott szakasz z-átviteli függvénye a (8)-as összefüggéssel számolható:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L_d^{-1} \left[ \frac{1}{s} Y(s) \right] \right\} .$$

A felnyitott körben a kompenzáló tagon és a szabályozott szakaszon kívül a visszacsatoló tagnak is külön z-átviteli függvénye van:  $Y_v(z)$ .

A felnyitott kör eredő z-átviteli függvénye tehát:

$$Y_f(z) = D(z)G(z)Y_v(z) .$$

Az előrevezető ág eredő z-átviteli függvénye:

$$Y_e(z) = D(z)G(z) .$$

A zárt kör eredő átviteli függvénye, hasonló levezetés alapján, mint a folytonos idejű szabályozásoknál:

$$W(z) = \frac{Y_e(z)}{1 + Y_f(z)} = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)Y_v(z)} .$$

Az összefüggések tehát értelemszerű helyettesítésekkel megegyeznek a folytonos idejű rendszerek összefüggéseivel.

#### b./ Analóg érzékelés:

A hatásvázlat az 5-13. ábrán látható.

A szabályozott szakasz z-átviteli függvénye:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L_d^{-1} \left[ \frac{1}{s} Y(s) \right] \right\} .$$

A felnyitott körben a kompenzáló tagon kívül csak a szabályozott szakaszból és a visszacsatoló tagból álló eredőnek (!) van z-átviteli függvénye:

$$GY_v(z) = \frac{z-1}{z} Z \left\{ L_d^{-1} \left[ \frac{1}{s} Y(s) Y_v(s) \right] \right\} . \quad (9)$$

A felnyitott kör eredő z-átviteli függvénye ezzel:

$$Y_f(z) = D(z) GY_v(z) .$$

Az előrevezető ág eredő z-átviteli függvénye most is:

$$Y_e(z) = D(z) G(z) .$$

A zárt kör eredő átviteli függvénye, hasonló levezetés alapján, mint a folytonos idejű szabályozásoknál:

$$W(z) = \frac{Y_e(z)}{1 + Y_f(z)} = \frac{D(z) G(z)}{1 + D(z) GY_v(z)} .$$

Ha a visszacsatolás (ideális) arányos:  $Y_v(s) = A_v$ , akkor ezt behelyettesítve (9)-be, onnan  $A_v$ -t, azaz  $Y_v(z)$ -t kiemelhetünk:

$$GY_v(z) = A_v \frac{z-1}{z} Z \left\{ L_d^{-1} \left[ \frac{1}{s} Y(s) \right] \right\} = Y_v(z) G(z) .$$

Ez azt jelenti, hogy arányos visszacsatolás esetén (de csak akkor!) az analóg érzékelésre is használhatók a digitális érzékelésre levezetett összefüggések. Meg kell jegyezni, hogy a gyakorlatban a visszacsatolást a legtöbbször tisztán arányosnak tekinthetjük, amikor tehát  $GY_v(z) = G(z) Y_v(z)$  fennáll.

### 5.11 A frekvenciafüggvény mintavételes rendszerekben

Az átviteli tagok frekvenciafüggvényét a folytonos idejű rendszerekben az  $Y(s)$  átviteli függvényből kaptuk  $s = j\omega$  helyettesítéssel. Ugyanezt a helyettesítést alkalmazhatjuk a diszkrét idejű rendszerekben is, mivel azonban itt az  $Y(z)$  z-átviteli függvényből indulunk ki, előbb a  $z$  változót kell felírnunk az  $s$  változóval:  $z = e^{sT}$ . Beírva itt az  $s$  helyébe a  $j\omega$ -t,  $z = e^{j\omega T}$  adódik; a diszkrét idejű rendszerekben tehát a frekvenciafüggvény:

$$\bar{Y}(j\omega) = Y(z) \Big|_{z=e^{j\omega T}} .$$

Legyen a vizsgált átviteli függvény az:

$$Y(z) = \frac{k \cdot (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

gyöktényezős alakban adott, akkor végrehajtva itt a  $z = e^{j\omega T}$  helyettesítést, az alábbi adódik:

$$\bar{Y}(j\omega) = \frac{k \cdot (e^{j\omega T} - z_1)(e^{j\omega T} - z_2) \dots (e^{j\omega T} - z_m)}{(e^{j\omega T} - p_1)(e^{j\omega T} - p_2) \dots (e^{j\omega T} - p_n)}.$$

Az összefüggésben a változó az  $\omega$ , amely 0-tól  $\infty$ -ig terjedő értékeket vehet föl. Az  $\omega$ -val együtt változik az  $e^{j\omega T}$  mennyiség, ez utóbbinak a változása azonban periodikus, ami pl. az  $e^{j\omega T} = \cos \omega T + j \sin \omega T$  felírásból közvetlenül is látszik. Emiatt  $\bar{Y}(j\omega)$  is periodikus függvény. A periódus hossza szögben mérve:  $\omega T = 2\pi$ , vagy  $\omega$ -ban mérve:  $\frac{2\pi}{T} = \omega_T$ .

Az  $\bar{Y}(j\omega)$  függvény ábrázolási módjai ugyanazok, mint a folytonos idejű rendszerekben, de az ábrázolandó mennyiségek  $\omega$ -ra nézve periodikusak. Emiatt periodikus lesz a Nyquist- és a Bode-diagram is, de éppen mert periodikusak, elegendő őket egy periódusra ábrázolni. A periodikus Bode-diagram hátrányos tulajdonsága, hogy amiatt, hogy az  $\omega$  változó exponenciális tag kitevőjében szerepel, a diagram görbéi nem közelíthetők aszimptotikus egyenesekkel.

## 5.12 Mintavételes szabályozási körök stabilitási kritériumai

### a./Matematikai stabilitási kritérium:

A stabilitást elméleti szempontból most is a zárt rendszerre kapcsolt  $\delta(t)$  bemenőjellel (mint mintavételezett egységimpulzussal) vizsgáljuk: a rendszer stabilis, ha a zárt rendszer  $\delta(t)$  alapjel hatására fellépő kimenőjele zérushoz tart. Az  $s$ -t tekintve változónak, ennek feltételül ugyanazt az eredményt kapjuk, mint a folytonos idejű rendszerekben: a rendszer stabilis, ha a zárt rendszer átviteli függvényének pólusai (nevezőjének gyökei) negatív valósak vagy negatív valós részű komplex számok.

Írjuk fel a zárt kör  $z$ -átviteli függvényét két polinom hányadosára rendezett alakban:

$$W(z) = \frac{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}.$$

Végrehajtva itt a  $z = e^{sT}$  helyettesítést, a kifejezés alakja:

$$W(z) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{b_m e^{msT} + \dots + b_1 e^{sT} + b_0}{a_n e^{nsT} + \dots + a_1 e^{sT} + a_0}.$$

Látható, hogy a fenti tételnek az  $s$ -változóval történő alkalmazásához a kitevőkben lévő változóval kellene gyököket meghatároznunk, ami meglehetősen nehézkes. Egyszerűbben alkalmazható a tétel, ha a  $z$ -változóval mondjuk ki, mert akkor csak egyszerű polinom gyökeit kell meghatározni. A feltételben ezért áttérünk  $z$ -változóra. Az áttéréshez azt kell

megvizsgálunk, hogy az „s” sík negatív valós részű gyökeinek a „z” síkon milyen gyökök felelnek meg. Írjuk föl az s-változós, i-edik, stabil (tehát negatív valós részű) gyököt az

$$s_i = -\alpha \pm j\beta$$

alakban, ahol  $\alpha$  és  $\beta$  is pozitív szám, akkor az  $s_i$ -nek megfelelő z-változós gyök:

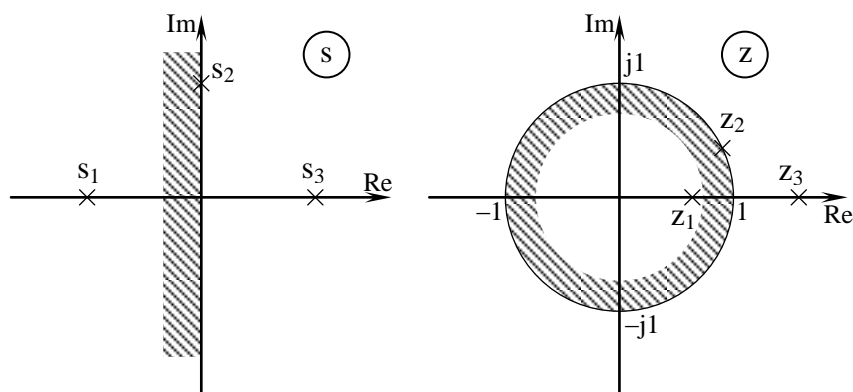
$$z_i = e^{(-\alpha \pm j\beta)T} = e^{-\alpha T} e^{\pm j\beta T} = \underbrace{\frac{1}{e^{\alpha T}}}_{|z_i|} \underbrace{e^{\pm j\beta T}}_{\text{arc}(z_i)}$$

alakú. Ez a  $z_i$  gyök olyan komplex számnak felel meg, amelynek az abszolút értéke 1-nél mindig kisebb, mert  $\alpha$  és  $T$  pozitív, az  $e^x$  függvény pedig pozitív  $x$ -re 1-nél mindig nagyobb.

A stabilitás feltétele tehát a z-tartományban az, hogy a zárt rendszer z-átviteli függvényének pólusai (a nevező gyökei) abszolút értékben 1-nél kisebbek legyenek. Az i-edik gyökre felírva:

$$|z_i| < 1 \quad .$$

Az áttérésről szemléletes képet kapunk, ha figyelembe vesszük, hogy a  $|z_i| < 1$  feltétel olyan komplex számokat jelent, amelyek a komplex számsík egységsugarú körén belül helyezkednek el. Az s-sík negatív felének tehát a z-síkon az egységsugarú kör belseje felel



5-15. ábra

meg (5-15. ábra). Az s-síkon a stabilitás és a labilitás határesetek az, amikor a gyök a képzetes tengelybe esik, ez a z-síkon éppen az egységsugarú körön lévő gyököt jelent.

A  $|z_i| < 1$  feltételen belül

a) a stabilitás aperiodikus, ha  $z_i$  valós szám, és

b) a stabilitás lengő, ha  $z_i$  komplex szám.

b./ Nyquist stabilitási kritérium:

A Nyquist-kritérium ugyanaz, mint a folytonos idejű rendszerekben: a stabilitás

feltétele az, hogy a felnyitott kör  $\bar{Y}_f(j\omega)$  frekvenciafüggvényét ábrázoló Nyquist-diagram ne vegye körül a  $-1 + j0$  pontot.

#### c./ Bode stabilitási feltétel:

A Nyquist-kritériummal összefüggésben a stabilitás a Bode-diagramon is vizsgálható. A Bode-feltétel ugyanúgy fogalmazható meg, mint a folytonos idejű rendszerekben: a szabályozási kör akkor stabilis, ha a felnyitott kör fázis-körfrekvencia jelleggörbéje a vágási körfrekvencián (az amplitúdó-diagram és a 0 dB-es tengely metszéspontjánál)  $-180^\circ$ -nál pozitívabb, azaz a körnek fázistöbblete van. A különbség csak az, mint már szó volt róla, hogy a diszkrét idejű frekvenciafüggvényből felrajzolt Bode-diagram most periodikus, amelynek elég az első periódusra eső ágával dolgozni.

A periodikus Bode-diagram alkalmas annak a megállapítására, hogy a rendszer stabilis-e vagy nem, de – mint láttuk – nem közelíthető aszimptotikus egyenesekkel, ezért pl. kompenzáció-tervezéskor nem használható úgy, mint a folytonos idejű változata. Megoldást jelent erre az ún. w-transzformáció.

#### 5.13 A w-transzformáció

Ez a módszer, amelyet bilineáris transzformációnak v. Tustin közelítésnek is neveznek, a  $z = e^{sT}$  összefüggés helyett a

$$z = \frac{\frac{2}{T} + s}{\frac{2}{T} - s} \quad (10)$$

közelítő összefüggést, transzformációt alkalmazza, ami által az s változó már nem a kitevőben szerepel, és így az átviteli függvények ismét egyszerű polinomok lesznek.

Amennyiben egy feladatban együtt fordul elő folytonos idejű  $Y(s)$  függvény és  $Y(z)$ -ből a (10) összefüggéssel transzformált  $Y(s)$ , akkor ez utóbbinak a változóját s helyett w-vel szokás jelölni, és a transzformált  $Y(s)$  helyett  $Y(w)$ -t szokás írni. Ezen az alapon nevezik a transzformációt w-transzformációnak.

A w-transzformációt az  $Y(z)$  z-átviteli függvényen alkalmazzuk oly módon, hogy a z változóról a w változóra térünk át a

$$z = \frac{\frac{2}{T} + w}{\frac{2}{T} - w} \quad (z \rightarrow w \text{ irány})$$

transzformációs összefüggéssel. Eredményül az  $Y(w)$   $w$ -átviteli függvény adódik, amely ugyanolyan alakban és módokon használható, mint a folytonos idejű  $Y(s)$ -ek. Így pl.  $Y(w)$ -ből a  $w = j\omega$  helyettesítéssel olyan  $\bar{Y}_w(j\omega)$  frekvenciafüggvényt kapunk, amelynek a Bode-diagramja aszimptotikus egyenesekkel közelíthető. A számítások elvégzése után az eredményként kapott átviteli függvények  $w$ -átviteli függvények, amelyekről a

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (w \rightarrow z \text{ irány})$$

összefüggéssel térhetünk vissza  $z$ -átviteli függvényekre.

A  $w$ -transzformáció közelítő jellege abban nyilvánul meg, hogy az  $\bar{Y}_w(j\omega)$  frekvenciafüggvény csak kis körfrekvenciákon egyezik az eredeti  $\bar{Y}(j\omega)$  függvénnyel, de ez a tartomány (helyesen megválasztott mintavételezési idő esetén, l. 5.14.1 pont) mindig magában foglalja a kompenzáló tag illesztéséhez szükséges tartományt. A közelítés alkalmazhatóságának a (szokásosan megadott) feltétele [5]:

$$\omega \leq \frac{\pi}{2T}.$$

Az alkalmazhatóság  $\pi/2T$  határ-körfrekvenciája kifejezhető az  $\omega_T = 2\pi/T$  mintavételezési körfrekvenciával is.  $\pi/2T$ -ben 2-vel bővítve:  $\frac{\pi}{2T} = \frac{2\pi}{2 \cdot 2 \cdot T} = \frac{\omega_T}{4}$ . Ezzel az alkalmazhatóság feltétele:

$$\omega \leq \frac{\omega_T}{4}. \quad (11)$$

A (10)-zel megadott transzformáció a komplex  $z$ -sík és – „ $s$ ” helyett ismét csak a  $w$  jelöléssel élve – a komplex  $w$ -sík között konform leképezést valósít meg; a szakirodalom egy része bilineáris v.  $w$ -transzformáción ezt érti, de ennek a szabályozó-illesztési számítások szempontjából nincs jelentősége.

A szoftverekben a  $w$ -transzformáció „tustin”, „bilinear” v. „convert to wplane” néven szerepel, de az  $s$  változó helyett a  $w$  változót a szoftverek vagy nem, vagy csak a kiíratásban alkalmazzák (megfelelően annak, hogy a „ $w$ ” valójában „ $s$ ”).

#### 5.14 Kompenzálás diszkrét idejű rendszerekben

A feladat összefügg a mintavételezési idő megválasztásának a kérdésével, ezért először röviden ezzel foglalkozunk.

### 5.14.1 A mintavételezési idő megválasztása

A  $T$  mintavételezési időt olyan kicsire kell választanunk, hogy a mintavételezett értékekből az eredeti jel elegendő pontossággal visszaállítható legyen. Ha  $T$  túl nagy, lehetséges, hogy kevés mintavételezett értékünk van ahhoz, hogy a jelet visszaállítsuk. A visszaállíthatóság exakt matematikai feltétele a jel spektrális felbontása alapján adható meg (Shannon-tétel); de a gyakorlatban nem közvetlenül ezt, hanem erre támaszkodó, egyszerűbb ajánlásokat szokás alkalmazni. A domináns holtidő nélküli rendszerekre felállítható legegyszerűbb ajánlás szerint a  $T$  mintavételezési időre teljesülnie kell, hogy:

$$T \leq \frac{T_{\min}}{4}, \quad (12)$$

ahol  $T_{\min}$  a *felnyitott szabályozási kör* folytonos idejű szakaszának a legkisebb nevezőbeli, tárolós időállandója. Ajánlasként szokás még megfogalmazni, hogy a szakasz valóságos  $T_H$  holtidejének és  $T$ -nek az aránya legyen egész szám.

A mintavételezési idő csökkentésével a rendszer viselkedése egyre inkább megközelíti a folytonos idejű viselkedést. A tapasztalat szerint kb.

$$T \leq \frac{T_{\min}}{10}$$

esetén a rendszer viselkedése már olyan, mint a folytonosé, csak épp a kompenzálást számítógépes algoritmus valósítja meg. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a rendszer *kvázifolytonos*. A  $T$  mintavételezési idő csökkenésével az A/D és a D/A átalakítók költsége megnő,  $T$  legkisebb értékének ez szab határt.

A  $T \leq T_{\min}/4$  választással, tekintettel arra, hogy  $T \leq T_{\min}/10$ -nél a rendszer már kvázifolytonos, a diszkrét idejű modell alkalmazására a  $\frac{T_{\min}}{10} < T \leq \frac{T_{\min}}{4}$  tartomány marad.

A megadott feltételek nem szigorú határok, hanem tájékoztató jellegűek.

A (12) feltétel  $T$  helyett megadható az  $\omega_T = 2\pi/T$  mintavételezési körfrekvenciával is, ezt azonban már a felnyitott kör  $\omega_{\text{sarok,max}} = 1/T_{\min}$  legnagyobb sarok-körfrekvenciájával célszerű összehasonlítani. Levezetés után a fenti  $T \leq T_{\min}/4$  feltételből  $\omega_T$ -re:

$$\omega_T \geq 8\pi \cdot \omega_{\text{sarok,max}} \approx 25 \cdot \omega_{\text{sarok,max}} \quad (13)$$

adódik.

(A  $T \leq T_{\min}/4$  feltétel alapja: A fentemlítt exakt matematikai feltétel az  $\omega_T \geq 2\omega_{\max}$  formában tehető át a szabályozási körökre, ahol  $\omega_{\max}$  a felnyitott kör olyan körfrekvenciája, amelynél a jel már elhanyagolható, tehát az amplitúdó-erősítés  $-20$  dB és  $-40$  dB ( $0,1 \dots 0,01$

amplitúdó-arány) közé esik. A (13) feltételből viszont  $\omega_T$ -re (lg  $\omega$ -ban)  $\omega_{\text{sarok,max}} + 1,4$  dekád adódik, s mivel  $\omega_{\text{sarok,max}}$  a legtöbbször  $\omega_c$  közelébe esik, vagy annál nagyobb, az 1,4 dekád a legtöbbször elegendő ahhoz, hogy  $\omega_T$  a kívánt tartományba kerüljön.)

#### 5.14.2 A kompenzálás számítási módjai

A kompenzáló tag jellemzőinek a meghatározására a teljesség igénye nélkül az alább következő módszerek alkalmazhatók.

##### a./ Kvázifolytonos számítás:

Ha  $T \leq \frac{T_{\min}}{10}$ , azaz a kör kvázifolytonos, a kompenzáló tagot folytonos idejű átviteli

függvényével vehetjük figyelembe, és a tag illesztését a folytonos idejű modellen, a folytonos idejű szabályozásoknál tanultak szerint végezhetjük. Eredményül a kompenzáló tag  $Y_k(s)$  folytonos idejű átviteli függvényét kapjuk, amelyből át kell térnünk a tag  $D(z)$  z-átviteli függvényére. Ehhez az áttéréshez az inverz w-transzformációt vagy a zérusrendű tartószerves transzformációt alkalmazhatjuk. Ez után  $D(z)$  ismeretében a minőségi jellemzőket – most már a diszkrét idejű modellen – ellenőrizzük, és ha szükséges, a kompenzáló tag erősítését módosítjuk. A minőségi jellemzőket a valóságos kimenőjelen, a folytonos idejű szabályozott jellemzőn ( $x_s(t)$  függvény) is le kell ellenőriznünk.

A kompenzáló tag  $Y_k(s)$  átviteli függvényéből a 2.11.6. pontban leírt módon az  $A_p$ ,  $T_i$ ,  $T_D$ ,  $T_t$  adatokhoz juthatunk, a tag  $D(z)$  z-átviteli függvényéből pedig a kompenzáló algoritmust tudjuk meghatározni (l. köv. pont).

##### b./ Számítás a w-transzformációval:

A  $\frac{T_{\min}}{10} < T \leq \frac{T_{\min}}{4}$  tartományban, vagyis diszkrét működéskor, a számításokhoz a

diszkrét modellt alkalmazhatjuk a w-transzformációval. A számítás menete: A felnyitott kör  $Y_f(z)$  z-átviteli függvényéről áttérünk az  $Y_f(w)$  w-átviteli függvényre, és ebből képezzük az  $\bar{Y}_{fw}(j\omega)$  frekvenciafüggvényt. Erre aszimptotikus Bode-diagram rajzolható, így ezzel dolgozva a kompenzáló tagok illesztése ugyanúgy történhet, mint ahogy a folytonos esetben megszoktuk. Így eljárva már a stabilitás-vizsgálatot is ezen a Bode-diagramon célszerű elvégezni. Az illesztés elvégzése után eredményül a kompenzáló tag  $Y_k(w)$  w-átviteli függvényét kapjuk, amelyből inverz w-transzformációval, azaz a w változóról a z változóra történő visszatéréssel meg kell határoznunk a  $D(z)$  z-átviteli függvényt.  $D(z)$  ismeretében a minőségi jellemzőket – most már a diszkrét idejű modellen – ismét csak ellenőriznünk kell.



Az ellenőrzésnek ki kell terjednie a folytonos idejű szabályozott jellemzőre is.

Az  $Y_k(w)$  folytonos idejű átviteli függvényből a kompenzáló tag  $A_P$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ ,  $T_t$  adataihoz juthatunk, a  $D(z)$  z-átviteli függvényből pedig a kompenzáló tag algoritmusát tudjuk meghatározni.

A w-transzformáció – mint szó volt róla – közelítés, alkalmazhatóságának felső határa (11) szerint  $\omega_T/4$ . Tételezzük föl, hogy T-t (13) szerint választottuk, azaz (13) fennáll, akkor  $\omega_T$  legkevesebb  $25 \cdot \omega_{\text{sarok,max}}$ -szal egyenlő, amit  $\omega_T/4$ -ben figyelembe véve a felső határ legkevesebb  $25 \cdot \omega_{\text{sarok,max}}/4$ -gyel, azaz legkevesebb  $6,25 \cdot \omega_{\text{sarok,max}}$ -szal egyenlő. Ez  $\omega_{\text{sarok,max}}$  fölött  $\lg 6,25 \approx 0,8$  értelmében még kb. 0,8 dekádot jelent, ami a kompenzáló tagok illesztéséhez bizonyosan elegendő, ha figyelembe vesszük, hogy maga az  $\omega_{\text{sarok,max}}$  önmagában is a legtöbbször a vágási körfrekvencia fölé esik. A (13) szerint választott T esetén tehát a w-transzformáció a számításokhoz mindig alkalmazható.

#### c./ Számítás járulékos holtidős (más néven: kisméretű) közelítéssel:

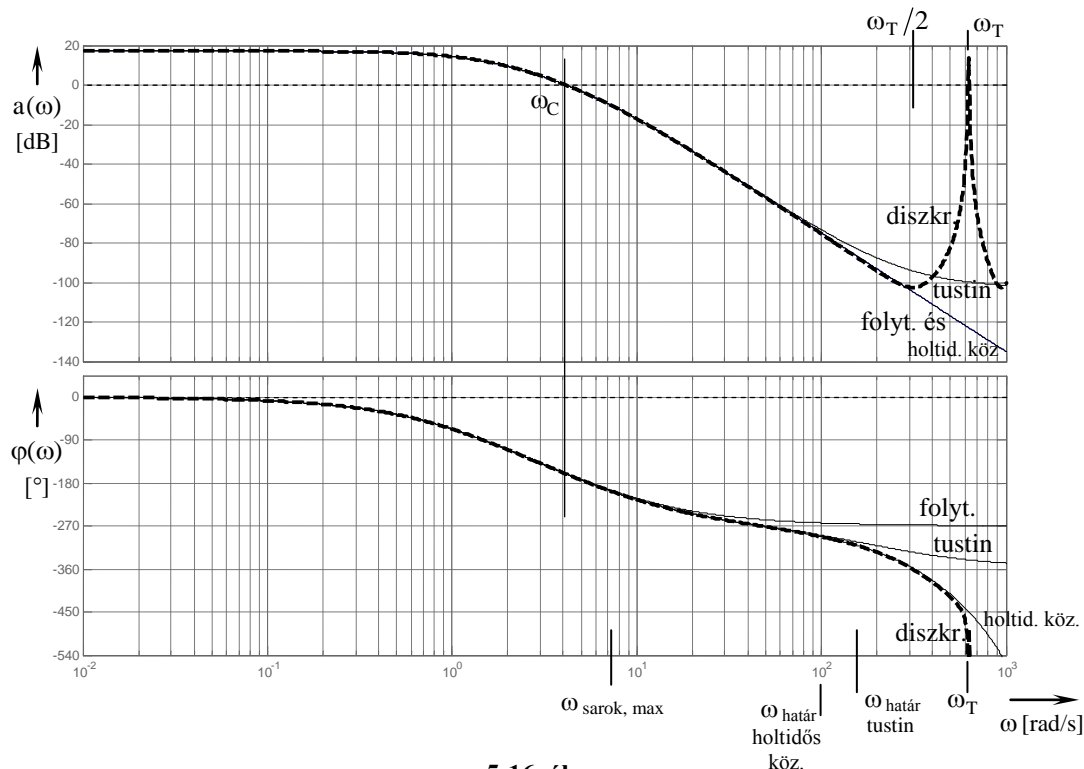
A vizsgálatok szerint a zérusrendű tartószervből és vele sorba kapcsolt folytonos idejű tagból álló rendszer (5-11. ábra) frekvenciafüggvénye a kisméretű tartományban helyettesíthető a tag  $\bar{Y}(j\omega)$  frekvenciafüggvényének és egy olyan holtidős frekvenciafüggvénynek a szorzatával, amelynek az abszolút értéke 1, holtideje pedig a T mintavételezési idő fele [9]. A tagnak ettől függetlenül valóságos holtideje is lehet. A diszkrét működés tehát a folytonoshoz képest (a kisméretű tartományban) az amplitúdógörbét nem változtatja meg (az 1-es abszolút érték miatt), de egy T/2 értékű járulékos holtidővel jár. Az analóg érzékelés esetét alapul véve, ez T/2 járulékos holtidőt jelent a szabályozott szakasz–visszacsatoló tag eredőre (mert ezek sorosan vannak a tartószerv mögött), de további holtidő származtatható a kompenzáló tag z-átviteli függvényéből is, amely T/2 és T közé eső érték [4]. T/2-vel számolva a felnyitott körben tehát a járulékos holtidő összesen T. A számításokat az ebből a helyettesítésből adódó modellen is végezhetjük, ebben a modellen minden tag folytonos idejű, de az előrevezető ágban van egy T holtidejű holtidős tag is. A járulékos holtidős közelítés alkalmazhatóságának határa:  $\omega \leq \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{2\pi T} = \frac{\omega_T}{6,28}$ ; a határ-

körfrekvencia tehát közel egyezik a w-transzformációéval (de ez pontosabb közelítésre vonatkozik, mint (11)). A számítások eredményeként itt is a kompenzáló tag  $Y_k(s)$  folytonos idejű átviteli függvényét kapjuk, amelyből most is meg kell határoznunk a  $D(z)$  z-átviteli függvényt (inverz w-transzformációval vagy a zérusrendű tartószerves transzformációval).

$Y_k(s)$ -ből az  $A_p$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ ,  $T_t$  adatokhoz juthatunk,  $D(z)$  pedig az eredmények ellenőrzéséhez és az algoritmus előállításához szükséges.

#### d./ Összehasonlítás:

Végül tájékozódásul egy arányos típusú, három időállandós szakaszra (arányos visszacsatolással) bemutatjuk a felnyitott kör különféle számítási módszerekkel érvényes Bode-diagramjait (5-16. ábra). Az ábrán a diszkrét idejű (a  $z$  változóval érvényes) görbék vastag szaggatott vonal mutatja. A kör kvázifolytonos, amit jól mutat a diszkrét és a folytonos



5-16. ábra

fázisgörbék nagy tartományban való egyezése; az illesztés tehát itt a folytonos görbék alapján is történhet. A legpontosabbnak a holtidős közelítés bizonyul, de a  $w$ -transzformációs görbék (az ábrán: „tustin”) pontossága is az illesztéshez bőven elegendő. Ha a mintavételi időt növeljük, a folytonos és a diszkrét görbék eltérése, különösen a fázisgörbék közötti eltérés nő.

#### 5.14.3 A kompenzáló algoritmus meghatározása a $z$ -átviteli függvényből. PI, PD és PID kompenzáló algoritmus

A kompenzáló algoritmust a  $D(z)$   $z$ -átviteli függvényből egyszerűen meg tudjuk határozni.  $D(z)$ -t az 5.14.2 pont szerinti számításokban az  $Y_k(w)$  vagy az  $Y_k(s)$  folytonos idejű kifejezésből állítottuk elő, és a számításokban feltételeztük, hogy  $Y_k(w)$ , ill.  $Y_k(s)$  a 2.11.2, 2.11.4, ill. 2.11.5 pontban felírt  $Y_k(s)$ -eknek megfelelő alakú volt.

A következőkben bemutatjuk a PI, PD és PID kompenzáló algoritmust arra az esetre, amikor  $D(z)$  ilyen, a 2.11.2, 2.11.4, ill. 2.11.5 pontban felírt alakú  $Y_k(s)$ -ekből származik. Az algoritmus meghatározási módját csak a PI tag esetére mutatjuk be, a másik két tagnál csak a végeredményt közöljük. A PI tagnál bemutatott algoritmus-meghatározási módszer azonban általános módszer, tehát értelemszerű módosításokkal alkalmazható akkor is, ha más  $z$ -átviteli függvényből kívánunk algoritmust meghatározni.

PI tag:

A 2.11.2 pont szerinti  $Y_k(s)$ -sel adott PI kompenzáló tag  $z$ -átviteli függvényét gyöktényezős alakban a következő kifejezés adja:

$$D(z) = a \frac{z - b}{z - 1} .$$

Az algoritmus meghatározásához az átviteli függvényt  $z$  negatív hatványaival kell felírunk. Írjuk át e célból a kifejezést polinom/polinom alakra, és osszuk minden tagot  $z$ -vel – általában  $z$  legmagasabb fokú hatványával –, akkor az átviteli függvény számlálójában és nevezőjében is  $z$  negatív hatványaival felírt polinomot kapunk:

$$\frac{az - ab}{z - 1} = \frac{a - abz^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{X_v(z)}{X_r(z)} .$$

A képletben figyelembe vettük, hogy a kompenzáló tag bemenőjele az  $X_r$  rendelkező jel, kimenőjele pedig az  $X_v$  végrehajtó jel (feltételezzük, hogy végrehajtó szerv szükséges). A negatív kitevős alakot használva, végezzük el a keresztbeszorzást:

$$aX_r(z) - abz^{-1}X_r(z) = X_v(z) - z^{-1}X_v(z) , \quad (14)$$

majd a kapott egyenlet mindkét oldalán végezzünk inverz  $z$ -transzformációt. A (4a) képletet, ill. a  $z^{-1}$ -gyel szorzott tagokban az eltolási tételt (inverz irányban) alkalmazva:

$$ax_{rd}(t) - abx_{rd}(t - T) = x_{vd}(t) - x_{vd}(t - T) . \quad (15)$$

A képletben impulzussorozatokot vonunk ki egymásból, a jobb oldalon pl. egy nullától kezdődőt, és annak a  $T$ -vel jobbra eltoló változatát (5-17. ábra). Ha azonban az egyenlet Dirac-impulzussorokra igaz, akkor igaz e sorok  $t = nT$  pillanatban érvényes tagjaira is. Fölírva az egyenletet a  $t = nT$ -beli tagokra, abból a  $\delta(t - nT)$  szorzók kiesnek, és a  $t = nT$ -ben érvényes függvényértékek maradnak:

$$ax_r(nT) - abx_r[(n - 1)T] = x_v(nT) - x_v[(n - 1)T] . \quad (16)$$

Rendezzük ezt a végrehajtó jel  $nT$ -ben felvett értékére, és a rövidebb jelölés kedvéért a minden tagban szereplő  $T$ -t a képletből hagyjuk el, akkor:

$$x_v(n) = x_v(n-1) + a \cdot x_r(n) - ab \cdot x_r(n-1) \quad .$$

A képlet a végrehajtó jel  $nT$ -ben felvett értékének a számítására vonatkozó PI-algoritmust ad meg.

A (14) és a (16) egyenletet összehasonlítva megállapítható, hogy közöttük a következő áttéréseket hajtottuk végre:

$$X(z) \rightarrow x(nT) \quad ,$$

$$z^{-1}X(z) \rightarrow x[(n-1)T] \quad .$$

Ezeket az áttéréseket a közbelső, (15)-ös egyenlet nélkül is végrehajthatjuk, sőt „visszafelé” is alkalmazhatjuk.  $z$  magasabb hatványa esetén értelemszerű áttérő képlet érvényes, ennek alakja pl.  $z^{-2}$ -nál:

$$z^{-2}X(z) \rightarrow x[(n-2)T] \quad .$$

Ezeket az áttérő képleteket alkalmazva, a (14)-nek megfelelő egyenletekből az algoritmust más esetekben is közvetlenül felírhatjuk (de algoritmusból is lehetséges a  $z$ -átviteli függvény felírása).

PD tag:

A 2.11.4 pont szerinti  $Y_k(s)$ -sel adott (közelítő) PD tag  $z$ -átviteli függvénye gyöktényezős alakban:

$$D(z) = a \frac{z - c}{z - d} \quad .$$

Az ebből levezethető algoritmus:

$$x_v(n) = d \cdot x_v(n-1) + a \cdot x_r(n) - ac \cdot x_r(n-1) \quad .$$

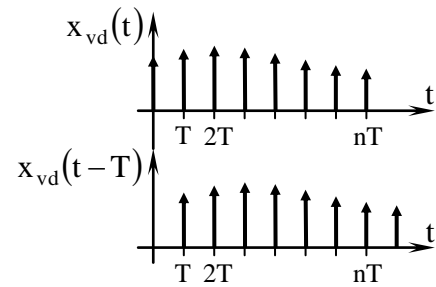
PID tag:

A 2.11.5 pont szerinti  $Y_k(s)$ -sel adott (közelítő) PID tag  $z$ -átviteli függvénye gyöktényezős alakban, ill. az abból levezethető algoritmus:

$$D(z) = a \frac{(z - b)(z - c)}{(z - 1)(z - d)} \quad ,$$

$$x_v(n) = (d + 1) \cdot x_v(n-1) + d \cdot x_v(n-2) + a \cdot x_r(n) - a(b + c) \cdot x_r(n-1) + abc \cdot x_r(n-2) \quad .$$

A bemutatott PI, PD és PID algoritmusok programozásához ismernünk kell az  $a, b, c, d$  adatokat.



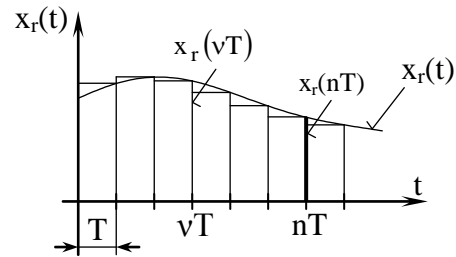
5-17. ábra

#### 5.14.4 PID algoritmus meghatározása a differenciaegyenletből

Az eddigiek során a PI, PD és PID algoritmusokat olyan  $D(z)$ -ből határoztuk meg, amelyet a 2.11.2, 2.11.4, ill. 2.11.5 pont szerinti  $Y_k(s)$ -ekből származtattunk. PID algoritmus azonban előállítható a PID tag differenciaegyenletéből is. A kész PID algoritmust tartalmazó szabályozók általában ez utóbbi algoritmust tartalmazzák, és alkalmazásukkor ezt kell beprogramozni. A diszkrét idejű algoritmusokban az ideális D hatás is megvalósítható [5], ezért a differenciaegyenletes algoritmust az ideális D hatással mutatjuk be.

Az ideális PID tagnak mint kompenzáló tagnak a differenciálegyenlete, mivel a bemenőjel az  $x_r$  rendelkező jel, a kimenőjel pedig az  $x_v$  végrehajtó jel:

$$x_v(t) = A_P x_r(t) + A_I \int_0^t x_r(t) dt + A_D \frac{dx_r}{dt}.$$



5-18. ábra

Az egyenlet  $A_P$  kiemelése után:

$$x_v(t) = A_P \left[ x_r(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t x_r(t) dt + T_D \frac{dx_r}{dt} \right], \quad T_I = \frac{A_P}{A_I}, \quad T_D = \frac{A_D}{A_P}.$$

Osszuk föl a  $t$  időtartamot  $T$  szakaszokra (5-18. ábra), és írjuk át a differenciálegyenletet differenciaegyenletté a  $t = nT$  pillanatra oly módon, hogy az integrált terület-összegzéssel, a differenciálhányadost differenciahányadossal helyettesítsük:

$$x_v(nT) = A_P \left[ x_r(nT) + \frac{1}{T_I} \sum_{v=1}^n x_r(vT) \cdot T + T_D \frac{x_r(nT) - x_r[(n-1)T]}{T} \right].$$

A felírt differenciaegyenletet felfoghatjuk úgy is, hogy az az  $x_v(t)$  és  $x_r(t)$  mintavételezésével kapott  $x_v[n]$  és  $x_r[n]$  diszkrét idejű jel egyes értékei között teremt kapcsolatot. Ilyen alapon már tkp. ez is PID algoritmus, de a számításokhoz még nagyon sok adatot igényel. Írjuk föl ezért a differenciaegyenletet a  $t = (n-1)T$  pillanatra is:

$$x_v[(n-1)T] = A_P \left\{ x_r[(n-1)T] + \frac{1}{T_I} \sum_{v=1}^{n-1} x_r(vT) \cdot T + T_D \frac{x_r[(n-1)T] - x_r[(n-2)T]}{T} \right\},$$

majd vonjuk ki ez utóbbi differenciaegyenletet az elsőből. Rendezés után a kevesebb adatot igénylő algoritmus, az időpontok jelöléséből a  $T$ -t itt is elhagyva:

$$x_v(n) = x_v(n-1) + A_P \left\{ x_r(n) - x_r(n-1) + \frac{T}{T_I} x_r(n) + \frac{T_D}{T} [x_r(n) - 2x_r(n-1) + x_r(n-2)] \right\}.$$

Ez utóbbi egyenlet esetében az  $nT$ -nél korábbi pillanatra érvényes függvényértékek közül csak az  $x_v(n-1)$ -et,  $x_r(n-1)$ -et és  $x_r(n-2)$ -t kell ismernünk, ami azt jelenti, hogy az algoritmus alkalmazásakor sokkal kevesebb korábbi értéket kell megőrizni. Az algoritmust szokás a függvényértékek kiemelésével adódó formában is felírni:

$$x_v(n) = x_v(n-1) + A_P \left[ 1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T} \right] x_r(n) + A_P \left[ -1 - 2 \frac{T_D}{T} \right] x_r(n-1) + A_P \frac{T_D}{T} x_r(n-2) ,$$

vagy még egyszerűbben:

$$x_v(n) = x_v(n-1) + q_0 x_r(n) + q_1 x_r(n-1) + q_2 x_r(n-2) , \quad (17)$$

ahol az állandók jelentése a képletből kiolvasható.

Mivel  $T$ -nek elegendően kicsinek kell lennie, hogy a differenciaegyenlet jó közelítése legyen a differenciálegyenletnek, a (17) szerinti algoritmus *kvázifolytonos* esetre érvényes.

P szabályozó esetén az összefüggésekben  $T_I = \infty$  és  $T_D = 0$ , PI szabályozó esetén  $T_D = 0$ , PD szabályozó esetén  $T_I = \infty$ . Természetesen a (17)-nek megfelelő algoritmusok használatához már illesztéskor is az ideális PD, ill. PID tagokkal kell dolgozni.

A (17) szerinti algoritmus abban az alakjában az ún. helyzet-algoritmus, míg  $[x_v(n) - x_v(n-1)]$ -re, azaz  $\Delta x_v(n)$ -re rendezett alakja az ún. sebesség-algoritmus.

A (17)-es egyenletből az előző pont alapján felírható a PID tag z-átviteli függvénye. Mellőzve a levezetést:

$$Y_{PID}(z) = \frac{X_v(z)}{X_r(z)} = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}} .$$

A differenciaegyenlet felírható olyan változatban is, amelyben az integrálás terület-összegzése  $\frac{1}{T_I} \sum_{v=0}^{n-1} x_r(vT) \cdot T$  alakú. Ekkor az algoritmus végső alakja szintén a (17) szerinti, de  $q_0$ ,  $q_1$  és  $q_2$  kifejezése kissé más.

#### 5.14.5 Kompenzálás a szabályozott szakasz átmeneti függvénye alapján

Az eddigiekben feltételeztük, hogy a kompenzáló tag adatainak a számítását a Bode-diagramok alapján végezzük. A gyakorlatban erre sokszor nincs lehetőség, mert a szabályozási kör tagjainak a Bode-diagramját nem ismerjük. Ilyenkor, akárcsak a folytonos idejű szabályozásokban, a *szabályozott szakasz* átmeneti függvénye alapján kompenzálhatunk. Ennek alapja most is a szakaszoknak az átmeneti függvény alapján történő csoportosítása,

amely ugyanaz, mint a folytonos idejű esetben (2.11.7 pont), tehát a szakaszokat arányos és integráló jellegű szakaszokra osztjuk.

A szabályozó *típusának* a kiválasztása mind az arányos, mind az integráló jellegű szakaszoknál ugyanúgy történhet, mint a folytonos idejű szabályozásoknál.

A szabályozó *paramétereinek a beállításánál* azonban már meg kell különböztetnünk a kvázifolytonos és a nem kvázifolytonos esetet.

*Kvázifolytonos* esetben a paraméterek beállítására a folytonos idejű esetre megadott ajánlásokat alkalmazhatjuk. A kapott eredmények annál inkább megegyeznek a folytonos idejű esetre érvényes eredményekkel, minél kisebb a  $T$  mintavételezési idő. A kvázifolytonos viselkedés ismervét az 5.14.1 pontban  $T_{\min}$ -hez, a szabályozott szakasz legkisebb időállandójához képest adtuk meg. Most a szakasz átmeneti függvényének legkisebb időjellemzőjével, a  $T_H$  holtidővel (l. 2-49. és 2-50. ábra) kell az ismervet megadnunk. A  $T_H$  idővel kifejezve, a viselkedést kb. addig tekinthetjük kvázifolytonosnak, amíg a

$$T < \frac{T_H}{20}$$

feltétel fennáll [5].

Ha a szabályozás *nem kvázifolytonos*, akkor közelítőleg eljárhatunk úgy is, hogy a szakasz  $T_H$  holtidejéhez hozzáadjuk a mintavételezésből adódó járulékos  $T/2$  holtidőt, és a paramétereket így számoljuk. Célravezetőbb azonban a diszkrét idejű szabályozásokra kidolgozott ajánlásokat alkalmazni. Ezek algoritmust adnak meg, és ahhoz közlik az algoritmust meghatározó állandók ajánlott értékeit. Az egyik ilyen legismertebb ajánlás a Takahashi-féle, amely arányos jellegű szakaszokra vonatkozik, és

$$T \leq T_H$$

esetén alkalmazható. Ez tehát használható kvázifolytonos esetben is, de azon túl is, egészen addig, amíg  $T$  el nem éri  $T_H$  értékét. Az ajánlás egy módosított PID algoritmus beállítási adatait adja meg, amely az  $x_v(nT)$  érték meghatározásához az  $x_r$  rendelkező jelen kívül az  $x_e$  ellenőrző jelet használja föl. Az algoritmus a következő [8]:

$$x_v(n) = x_v(n-1) + A_p \left\{ -x_e(n) + x_e(n-1) + \frac{T}{T_I} x_r(n) + \frac{T_D}{T} [-x_e(n) + 2x_e(n-1) - x_e(n-2)] \right\}$$

Az  $A_p$ ,  $T/T_I$  és  $T_D/T$  állandók ajánlott beállítási értékeit az 5-2. táblázat tartalmazza. A táblázat képleteiben „A” a szabályozott szakasz átviteli tényezőjét,  $T_t$  a szakasz időállandóját jelenti (l. 2-49. ábra).

5-2. táblázat

Szabályozó	$A_P$	$T/T_I$	$T_D/T$
P	$\frac{T_t}{A(T_H + T)}$	–	–
PI	$\frac{0,9 \cdot T_t}{A(T_H + T)} - \frac{0,135 \cdot T_t T}{A(T_H + T/2)^2}$	$\frac{0,27 \cdot T_t T}{A(T_H + T/2)^2}$	–
PD	$\frac{1,2 \cdot T_t}{A(T_H + T)} - \frac{0,3 \cdot T_t T}{A(T_H + T/2)^2}$	$\frac{0,6 \cdot T_t T}{A(T_H + T/2)^2}$	$\frac{0,5 T_t}{K T}$

Maradva a *nem kvázifolytonos* esetről, ha a szakasz integráló jellegű, a digitális szabályozó beállításához a Friedrich–Schmidt–Zantis ajánlást alkalmazhatjuk. Ehhez kiindulási mennyiségként a 2-50. ábrán feltüntetett adatok szükségesek, de szükséges a belőlük képzett  $A_I = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  és

$$\beta = \frac{1}{A_I T_H}$$

mennyiség is. Ezek ismeretében a módszer egy mintavételezési időt ajánl:

$$\frac{0,2}{A_I} < T < \frac{0,4}{A_I} ,$$

amelyhez az ajánlott paraméterek az 5-3. táblázat szerintiek.

5-3. táblázat

Szabályozó	$A_P$	$T/T_I$	$T_D/T$
P	$0,5 \cdot \beta$	0	0
PI	$0,42 \cdot \beta$	$\frac{T}{5,8 \cdot T_H}$	0
PD	$0,5 \cdot \beta$	0	$\frac{0,5 \cdot T_H}{T}$
PID	$0,4 \cdot \beta$	$\frac{T}{3,2 \cdot T_H}$	$\frac{0,8 \cdot T_H}{T}$

### 5.15 Tervezés előírt viselkedésre

Digitális szabályozásoknál viszonylag könnyen tervezhető olyan kompenzáló algoritmus, amellyel megvalósítható, hogy valamely jel, pl. a szabályozott jellemző vagy a beavatkozó jel az egyes mintavételi időpontokban pontosan előírt értéket vegyen fel.



Hangsúlyozzuk, hogy az előírások csak a mintavételi időpontokban érvényes függvényértékekre vonatkoznak.

#### 5.15.1 Az előírt szabályozott jellemzőre történő tervezés elve

Szorítkozzunk arra a feladatra, amikor azt akarjuk, hogy az alapjel hatására fellépő szabályozott jellemző értékei előírtak, akkor ehhez a zárt kör

$$W(z) = \frac{X_s(z)}{X_a(z)}$$

z-átviteli függvényének kell előírt alakúnak lennie. Tételezzünk föl digitális érzékelésű vagy analóg érzékelésű, de tisztán arányos visszacsatolású kört, akkor az előírt  $W(z)$  a kör tagjainak z-átviteli függvényével a következőképpen írható föl:

$$W(z) = \frac{D(z) \cdot G(z)}{1 + D(z) \cdot G(z) \cdot Y_v(z)} .$$

Innen az előírt viselkedéshez szükséges kompenzáló tag z-átviteli függvénye kifejezhető:

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{W(z)}{1 - W(z) \cdot Y_v(z)} . \quad (18)$$

A kapott  $D(z)$  nem lehet tetszőleges, mert a kompenzáló algoritmusnak megvalósíthatónak kell lennie, és ez feltételt szab  $D(z)$ -nek is. Tételezzük föl, hogy a  $D(z)$  függvény  $z$  pozitív hatványaival van felírva:

$$D(z) = \frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n} ,$$

akkor bebizonyítható, hogy a megvalósíthatóság feltétele, hogy

$$m \leq n \quad (19)$$

fennálljon. Ellenkező esetben ugyanis az algoritmusban a bemenőjelnek nemcsak a vizsgált pillanatbeli értéknél korábbi, hanem későbbi értékére is szükség van, amely a vizsgált pillanatban még nem ismert.

#### 5.15.2 Tervezés előírt átmeneti függvényre

Szűkítsük tovább a feladatok körét azokra az esetekre, amikor a mintavételes átmeneti függvényt, tehát az  $1(t)$  alapjel hatására fellépő  $x_s[n]$  szabályozott jellemzőt írjuk elő. Ekkor (19)-en kívül az előírt  $W(z)$ -re is kapunk egy feltételt, amely abból adódik, hogy az átmeneti függvénynek (nulla statikus hibával) az  $x_A$  alapértékhez kell tartania. Mivel az  $1(t)$  alapjel z-

transzformáltja  $z/(z-1)$ , s így az átmeneti függvény  $z$ -transzformáltja  $(z/(z-1))W(z)$ , az előbbi feltétel a végértéktételt alkalmazva

$$x_s(t \rightarrow \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} W(z) = x_A$$

alakú, vagy rövidebben:

$$\lim_{z \rightarrow 1} W(z) = x_A$$

Amennyiben  $Y(z) = 1$ , akkor  $x_A = 1$ , és a feltétel:  $\lim_{z \rightarrow 1} W(z) = 1$ .

Magára az átmeneti függvényre is többféle előírást adhatunk, s az előírás fajtájától függően az előírt  $W(z)$  is más-más alakú lesz. A különböző előírási fajták a következők:

#### 1./ Előírt $x_s[n]$ , végtelenben állandósuló időfüggvénnyel

Ez esetben az állandósult értéket az átmeneti függvény (elvileg) végtelen idő alatt veszi fel. Legyen pl. az előírt mintavételes átmeneti függvény a következő alakú:

$$x_s[n] = 1 - e^{-0,2 \cdot n \cdot T} \cos(0,5 \cdot n \cdot T) \quad , \quad n = 0, 1, 2 \text{ stb.} \quad (20)$$

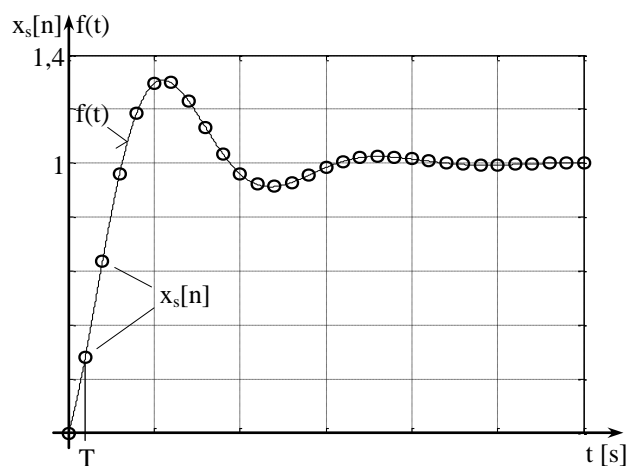
Ezt a példaként adott függvényt az 5-19. ábra  $x_s[n]$  pontjai mutatják. Az ábrán egy olyan  $f(t)$  folytonos idejű jelet is ábrázoltunk, amelyből  $x_s[n]$ -t származtathatjuk; a valódi  $x_s(t)$  a mintavételi pontokban egyezik  $x_s[n]$ -nel, s így  $f(t)$ -vel, de a mintavételek között általában különbözik  $f(t)$ -től. A számítás lépései:

a/ Meghatározzuk az előírt  $x_s[n]$  jel  $X_s(z)$   $z$ -átviteli függvényét.

b/ Az  $1(t)$  alapjel  $X_a(z) = z/(z-1)$   $z$ -transzformáltját felhasználva meghatározzuk a zárt kör előírt átviteli függvényét:  $W(z) = X_s(z)/X_a(z)$ . Ha szükséges,  $W(z)$ -t olyan állandóval szorozzuk, hogy a végértékfeltétel teljesüljön.

c/ A szabályozott szakasz  $G(z)$  és a visszacsatolás  $Y_v(z)$   $z$ -átviteli függvényének ismeretében a (18)-as

képlet alkalmazásával kiszámoljuk a kompenzáló tag  $D(z)$   $z$ -átviteli függvényét, és  $D(z)$ -ből felírjuk a szükséges algoritmust.



5-19. ábra

## 2./ Előírt $x_s[n]$ , végesben állandósuló időfüggvénynyel

Ez esetben az állandósult értéket az átmeneti függvény már véges idő alatt felveszi, de az  $x_b(t)$  beavatkozó jel, a szabályozó kimenőjele még az után is változhat (feltételezzük, hogy végrehajtó szerv nem szükséges). Az előírt mintavételes átmeneti függvény pl. a következő alakú lehet:

$$x_s[n] = \{0; 0,5; 1; 1 \dots 1\}.$$

Látható, hogy ebben a példa szerinti esetben az állandósult értéket már a harmadik mintavételnél, tehát  $2T$  időnél elérjük. A számítás lépései:

a/ Felírjuk az előírt  $x_s[n]$  jel  $X_s(z)$  z-átviteli függvényét. Ez példánkban a (4b) képlet értelmében:

$$X_s(z) = 0 \cdot z^0 + 0,5 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + 1 \cdot z^{-4} + \dots = 0,5 \cdot z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

b/ Meghatározzuk a zárt kör előírt átviteli függvényét. Az osztás reciprokával való szorzás,

$$X_a(z) = z/(z-1) \text{ reciproka pedig } (1-z^{-1}), \text{ az előírt } W(z) \text{ tehát: } W(z) = (1-z^{-1})X_s(z).$$

Példánkban:

$$W(z) = 0,5 \cdot z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots - 0,5 \cdot z^{-2} - z^{-3} - z^{-4} \dots = 0,5 \cdot z^{-1} + 0,5 \cdot z^{-2}.$$

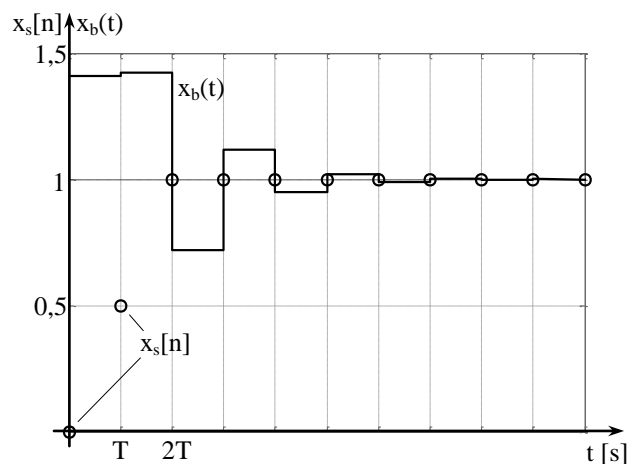
Az állandósulás utáni tagok tehát kiesnek. A képletet  $z$  pozitív hatványaival is felírhatjuk, ha  $z^2/z^2$ -nel szorzunk:

$$W(z) = \frac{0,5z + 0,5}{z^2}.$$

Ha szükséges,  $W(z)$ -t olyan állandóval szorozzuk, hogy a végértékfeltétel teljesüljön; példánkban  $\lim_{z \rightarrow 1} W(z) = 1$ , tehát merev visszacsatolás esetén a feltétel máris teljesül.

c/ A szabályozott szakasz  $G(z)$  és a visszacsatolás  $Y_v(z)$  z-átviteli függvényének ismeretében a (18)-as képlet alkalmazásával kiszámoljuk a kompenzáló tag  $D(z)$  z-átviteli függvényét, majd  $D(z)$ -ből felírjuk a szükséges algoritmust.

Az 5-20. ábrán az ennek az előírási fajtának megfelelő  $x_s[n]$  és  $x_b(t)$  jelek láthatók;  $x_b(t)$ -nél feltételeztük, hogy a szabályozó kimenetén zérusrendű tartás érvényes.



5-20. ábra

## 2./ Előírt $x_s[n]$ , végesben állandósuló $x_s[n]$ és $x_b(t)$ időfüggvénnyel

Ebben az esetben az állandósult értéket nemcsak az átmeneti függvény, hanem a beavatkozó jel is már véges idő alatt felveszi. Az ilyen szabályozást véges beállású (dead-beat) szabályozásnak is szokás nevezni. Az előírás teljesíthető, ha az előírt  $W(z)$ -t a szabályozott szakasz  $G(z)$  z-átviteli függvényében lévő  $N_G(z)$  számláló és az előírt  $n_b$  beállási lépésszám ismeretében a következőképpen adjuk meg:

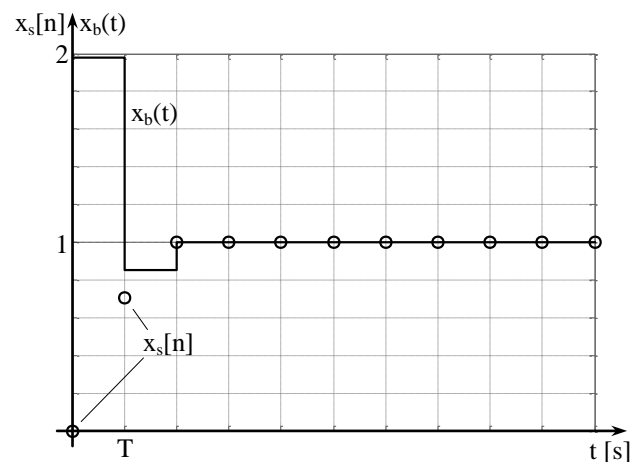
$$W(z) = \frac{N_G(z)}{z^{n_b}} \cdot \frac{x_A}{\lim_{z \rightarrow 1} N_G(z)},$$

ahol a második tört ismét azért szükséges, hogy a végértékfeltétel teljesüljön.

Az előírt  $W(z)$  ismeretében a további számítás úgy történhet, mint az előbb: a  $G(z)$  és az  $Y_v(z)$  z-átviteli függvény felhasználásával a (18)-as képlet alkalmazásával kiszámoljuk a kompenzáló tag  $D(z)$  z-átviteli függvényét, abból pedig felírjuk az algoritmust.

Az 5-21. ábrán az ennek az előírási fajtának megfelelő  $x_s[n]$  és  $x_b(t)$  jelek láthatók; az előírt beállási lépésszám  $n_b = 2$ , és  $x_b(t)$ -nél itt is feltételeztük, hogy a szabályozó kimenetén zérusrendű tartás érvényes.

Véges beállású szabályozókat főleg hierarchikus felépítésű szabályozási rendszerekben alkalmaznak, ahol fontos, hogy az alsóbb szinten lévő szabályozások a felsőbb szinten lévők utasításait minél hamarabb teljesítsék. A véges beálláshoz esetenként viszonylag nagy beavatkozó jel szükséges, amelyet a beavatkozó szervek nem mindig tudnak előállítani. Ilyenkor enyhíteni kell az előírásokon, és kompromisszumot kell találni a beavatkozó jelre és a szabályozott jellemzőre vonatkozó előírások között.



5-21. ábra

### 5.15.3 A mintavételek közötti lengések kiküszöbölése

A tervezés nemkívánatos velejárójaként előfordulhat, hogy a szabályozott jellemzőben a mintavételi időpontok között lengések keletkeznek (ún. „csengetés”). Ezek károsíthatják a szabályozott szakaszt, ezért kiküszöbölendők. Kiküszöbölésüket [8] nyomán és példaként felvett adatokkal mutatjuk be. A (20)-szal megadott, előírt  $x_s[n]$  esetében pl., ha a szakasz

átviteli függvénye  $Y(s) = \frac{1}{10s(1+5s)}$  alakú,  $T = 1$  s mintavételi idő mellett a szakasz folytonos idejű kimenőjele az 5-23. ábrán látható „a” jelű görbe szerinti, vagyis fellépnek a mintavételi idők közötti lengések. A kompenzáló tag átviteli függvénye ekkor az alábbi alakúra adódik:

$$D(z) = \frac{30,06z^2 - 29,76z + 4,214}{z^2 + 0,217z - 0,6722}.$$

Ennek pólusai:  $-0,9355$ , ill.  $0,7185$ . A lengést a  $-0,9355$  értékű negatív valós pólus okozza. Ha a pólust a  $D(z)$  függvény  $z$  negatív hatványaival felírt és alkalmasan rendezett  $D(z^{-1})$  alakjából kiküszöböljük, a lengés megszüntethető.  $D(z)$  számlálóját és nevezőjét is  $z^2$ -nel osztva, majd a nevezőt szorzat alakra hozva:

$$D(z^{-1}) = \frac{4,214z^{-2} - 29,76z^{-1} + 30,06}{-0,6722z^{-2} + 0,217z^{-1} + 1} = \frac{4,214z^{-2} - 29,76z^{-1} + 30,06}{(1 + 0,9355z^{-1})(1 - 0,7185z^{-1})}.$$

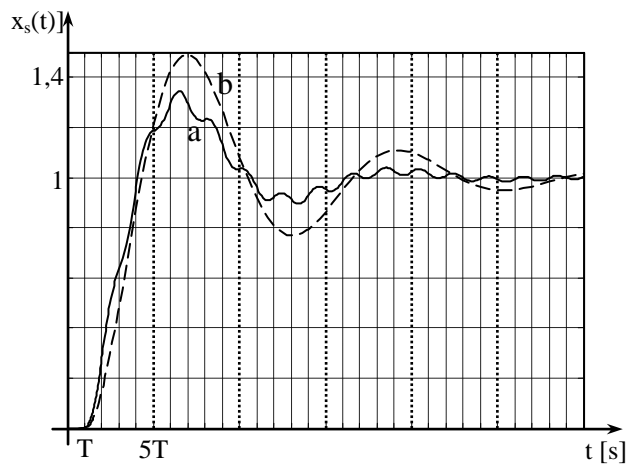
A lengéseket megszüntető  $D'(z^{-1})$  függvényt a pólust hordozó tag elhagyásával kapjuk, de a végértékfeltételnek teljesülnie kell, ezért:

$$D'(z^{-1}) = \frac{4,214z^{-2} - 29,76z^{-1} + 30,06}{(1 - 0,7185z^{-1}) \lim_{z \rightarrow 1} (1 + 0,9355z^{-1})} = \frac{4,214z^{-2} - 29,76z^{-1} + 30,06}{1,9355(1 - 0,7185z^{-1})}.$$

$1,9355$ -tel a számlálót elosztva, és  $z^2$ -nel a számlálót és a nevezőt is szorozva:

$$D'(z) = \frac{15,53z^2 - 15,376z + 2,1772}{z^2 - 0,7185z}.$$

Kompenzálásra  $D'(z)$ -t alkalmazva a mintavételek közötti lengés megszűnik (5-22. ábra, b jelű görbe); de ez együtt jár azzal, hogy a zárt kör viselkedése is – az előírthoz képest – módosul.



5-22. ábra

## 6. FOLYTONOS IDEJŰ ÁLLAPOTEGYENLETEK

### 6.1 Az állapotegyenlet fogalma

Térjünk vissza vizsgálataink kiindulópontjához, a lineáris, invariáns, egy be- és egy kimenetű (LI-SISO) tagok viselkedését leíró  $n$ -edrendű differenciálegyenlethez (2.2.2 pont, (2) egyenlet). Az ezzel az egyenlettel történő leírási módnál a tag állapotát a kimenőjel  $x_k(t)$  időfüggvényével jellemezzük. A tag viselkedése azonban nemcsak a (2.2.2-2) egyenlettel, hanem alkalmas változókkal felírt elsőrendű differenciálegyenlet-rendszerrel is leírható; ez esetben a tag állapotát ezeknek a változóknak az időfüggvénye jellemzi, ezért ezeket a változókat *állapotváltozóknak* nevezik.

Tekintsünk példaként egy másodrendű differenciálegyenletet, amelyben az együtthatókat jelöljük a szokásos „a” helyett  $\alpha$ -val, „b” helyett  $\beta$ -val („a”-t és „b”-t másra tartjuk fenn), a deriváltakat pedig jelöljük pontokkal:

$$\alpha_2 \ddot{x}_k + \alpha_1 \dot{x}_k + \alpha_0 x_k = \beta_0 x_b \quad (1)$$

Válasszunk most állapotváltozókat, akkor ehhez az egyik szempont az lehet, hogy az  $x_k$  kimenőjel állapotváltozó legyen, a másik pedig az, hogy csökkentsük a másodrendű derivált rendszámát, azaz állapotváltozó legyen  $\dot{x}_k$ , mert akkor  $\ddot{x}_k$  helyén ennek a második állapotváltozónak az első deriváltja szerepelhet. A két állapotváltozó tehát

$$x_1 = x_k \quad ,$$

$$x_2 = \dot{x}_k \quad .$$

Ezekkel az (1) egyenlet:

$$\alpha_2 \dot{x}_2 + \alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_1 = \beta_0 x_b \quad (2)$$

Ez már elsőrendű differenciálegyenlet, de hogy megoldható legyen, meg kell adni  $x_1$  és  $x_2$  összefüggését is:  $\dot{x}_1 = x_2$ . Ez utóbbi összefüggéssel és (2)-vel végeredményben (1) helyett két elsőrendű differenciálegyenletet kaptunk, amelyek a deriváltakra rendezve:

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad , \quad (3a)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{\alpha_0}{\alpha_2} x_1(t) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_2(t) + \frac{\beta_0}{\alpha_2} x_b(t) \quad . \quad (3b)$$

A tag teljes jellemzéséhez meg kell adnunk még a kimenőjelet is:

$$x_k(t) = x_1(t) \quad . \quad (4)$$

(3a) és (3b) a vizsgált tag állapotegyenletei, (4) a kimeneti egyenlet. Az egyenleteket az

$\dot{x}_1, \dot{x}_2$  és az  $x_1, x_2$  változók oszlopvektorba rendezésével vektor-differenciálegyenletté (röviden vektoregyenletté) szokás átírni:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\alpha_0}{\alpha_2} & -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta_0}{\alpha_2} \end{bmatrix} \cdot x_b, \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}} \right\} \quad (5)$$

$$x_k = [1; 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

vagy még tömörebben:

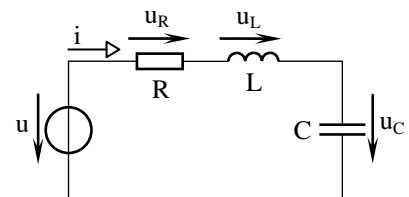
$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_b, \quad (6a)$$

$$x_k = \underline{c}^T \cdot \underline{x}. \quad (6b)$$

Itt a (6a) vektoregyenlet a tag állapotegyenlete, (6b) a kimeneti egyenlet, de a gyakorlati szóhasználatban a rövidség kedvéért a legtöbbször (6a)-t és (6b)-t együtt nevezzük állapotegyenleteknek v. csak állapotegyenletnek.

Az (1) differenciálegyenlettel leírható tagot kapunk pl. a 6-1. ábra szerinti hálózathoz, ha a bemenőjel  $u$ , a kimenőjel  $u_C$ . Levezethető, hogy ekkor a tag differenciálegyenlete:

$$LC\ddot{u}_C + RC\dot{u}_C + u_C = u.$$



6-1. ábra

Ezen egyenlet szerint a tag T2 viselkedésű. Ennél a tagnál az  $x_1$  állapotváltozó  $u_C$  lenne, az  $x_2$  pedig  $\dot{u}_C$ .

Az állapotegyenletes módszer széles körben használt rendszerleírási, számítási mód.

Állapotváltozókon a rendszer időfüggő változóinak azt a legkisebb számú összességét értjük, amellyel a rendszer állapota leírható. Az állapot leírhatóságán itt nemcsak a jelen idejű állapot leírhatóságát értjük, hanem azt is, hogy az állapotváltozók jelen értékéből kiindulva a jövőbeli állapotokat is meg tudjuk határozni.

Az állapotváltozók mindig tárolókhoz kapcsolódó változók (amelyek ugrásjel-bemenetre nem ugranak, hanem fokozatosan változnak), mert ezek értékét a múltbeli hatások alakítják, s így alkalmasak arra is, hogy a jelen értékükből a jelenbeli hatások a jövőbeli értéküket kialakítsák. A 6-1. ábra szerinti tagnál is az  $u_C$  kapacitás-feszültség csak fokozatosan változhat, s ugyanígy az  $\dot{u}_C$  is, amely az induktivitás „ $i$ ” áramával arányos. Lehetne a tagnál állapotváltozó maga az „ $i$ ” áram is, ill. minden tárolóhoz kapcsolódó változó; ez azt mutatja, hogy egy rendszernek több állapotegyenletes leírása lehetséges.

Az állapotváltozók száma megegyezik a rendszert leíró, (2.2.2-2) alakú n-edrendű differenciálegyenlet n rendszámával. Ezért állapotváltozók használatával a rendszert annyi elsőrendű differenciálegyenlet jellemzi, amennyi az n rendszám. A rendszám – mint ismert – egyenlő a rendszer energiatárolóinak számával.

Általános esetben nemcsak az  $\dot{\underline{x}}$  deriváltvektornak, hanem az  $x_k$  kimenőjelnek is lehet közvetlen függése  $x_b$ -től; általában tehát az állapotegyenletek tömörített alakja:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_b, \quad (7a)$$

$$x_k = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_b. \quad (7b)$$

## 6.2 Az állapotegyenletek irányítható kanonikus alakja

Az állapotegyenleteket a gyakorlatban általában a vizsgált esetekre külön-külön írjuk föl, a változókra felállítható differenciálegyenletek alapján. A lineáris, invariáns, egy be- és egy kimenetű rendszereknél azonban az állapotegyenletek az ilyen rendszerek általános differenciálegyenletéből vagy általános átviteli függvényéből kiindulva is megadhatók, ami az állapotegyenletek rendszerezett alakú, különböző rendszerekre is egységes felírását teszi lehetővé. Az így megadott állapotegyenleteket *kanonikus* alakúnak nevezik. Többféle kanonikus alak létezik, itt azt ismertetjük, amelyik talán kiemelhető a többi közül, ez az ún. *irányítható kanonikus* alak.

Kiindulásunk a (2.2.2-2) általános differenciálegyenletből levezethető általános átviteli függvény, amelyet most ismét „a” helyett  $\alpha$ , „b” helyett  $\beta$  jelű együtthatókkal írunk föl:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \alpha_{n-1} s^{n-1} + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0}. \quad (8)$$

Osszuk végig az egyenletet  $\alpha_n$ -nel, és az így kapott együtthatókat jelöljük „a”-val, illetve „b”-vel, de a (8)-belihez képest fordított sorrendű, 1-től kezdődő indexekkel:

$$\frac{\beta_m}{\alpha_n} = b_1; \quad \frac{\beta_{m-1}}{\alpha_n} = b_2; \quad \dots \quad \frac{\beta_1}{\alpha_n} = b_m; \quad \frac{\beta_0}{\alpha_n} = b_{m+1};$$

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_n} = 1; \quad \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = a_1; \quad \dots \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_n} = a_{n-1}; \quad \frac{\alpha_0}{\alpha_n} = a_n.$$

(A számlálóban a végindex  $m+1$  lesz, mert ott eredetileg 0 index is volt, a nevezőben viszont eredetileg  $n+1$  számú index volt, de most csak  $n$  lesz.) A nevezőben a legmagasabb rendű tag együtthatójaként 1-et kapunk, az ilyen polinomot „normalizáltnak” nevezik. A kapott együtthatókkal az átviteli függvény a következő alakot ölti:



$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_m s + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (9)$$

Emlékezzünk itt arra, hogy  $Y(s)$ -ben – mint a 2.2.3 pontban megadtuk –  $m \leq n$ . Attól függően, hogy  $Y(s)$ -ben  $m < n$  ( $Y(s)$  ún. szigorúan szabályos), vagy  $m = n$  ( $Y(s)$  ún. szabályos), kétféle eredményt kapunk.

Az  $m \leq n$  esettel kezdve, ilyenkor  $m$  legfeljebb  $(n-1)$  értékű lehet, ezért (8)-ból – a számlálóban is az  $n$  általános indexet alkalmazva – a következőt kapjuk [1]:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m < n\text{-re}) \quad (10)$$

(A számlálóban a végindex  $n$ , mert  $m = n-1$  esetén  $m+1 = n$ .) Levezethető, hogy megfelelő állapotváltozó-választással az erre az esetre vonatkozó állapotegyenletek, valamint a hozzájuk tartozó kimeneti egyenlet a következő [1]:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{b}}} \cdot x_b, \\ x_k &= \underbrace{[b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_{n-1}, \quad b_n]}_{\underline{\underline{c}}^T} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

vagy tömör írásmódban:

$$\dot{\underline{\underline{x}}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{x}} + \underline{\underline{b}} \cdot x_b, \quad (m < n) \quad (12a)$$

$$x_k = \underline{\underline{c}}^T \underline{\underline{x}}. \quad (m < n) \quad (12b)$$

A (12)-es egyenletek változói a következők:

$\underline{\underline{x}}$  : az állapotváltozók vektora, ez (11)-ből láthatóan  $(n \times 1)$ -es oszlopvektor,

$\dot{\underline{\underline{x}}}$  : az állapotváltozók deriváltjainak vektora, ez is  $(n \times 1)$ -es oszlopvektor,

$x_k$  és  $x_b$  a ki-, ill. bemenőjel, ezek skalárok.

A (12)-es egyenletek  $\underline{\underline{A}}$ ,  $\underline{\underline{b}}$  és  $\underline{\underline{c}}^T$  mennyiségei a rendszer paraméter (együttható) mátrixai:

$\underline{\underline{A}}$  : az állapotmátrix, ez (11)-ből láthatóan  $(n \times n)$ -es négyzetes mátrix,

$\underline{\underline{b}}$  :  $(n \times 1)$ -es oszlopvektor,

$\underline{c}^T : (1 \times n)$ -es sorvektor, jelölésében a T felső index a transzponált szóra utal.

Megismételjük, hogy  $n$  a rendszer  $n$ -edrendű differenciálegyenletének (a rendszernek) a rendszáma.

Hangsúlyozzuk, hogy a (11)-es alakú, (12)-ben összefoglalt egyenletek felírásához az átviteli függvényt a (10) alakra kell hozni (vagy a differenciálegyenletben kell az együttható-osztást elvégezni és az ellenkező indexsorrendet érvényesíteni).

Amennyiben (9)-ben  $m=n$ , akkor ott  $s^m$  tag is van, mivel azonban ez az  $m$  kitevő egyenlő  $n$ -nel, a (10) alak megfelelője most, a számlálóban is az  $n$  indexet alkalmazva:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m=n-re) \quad (13)$$

(A számlálóban  $m+1$  index volt, de  $n$  csak  $m$ -mel egyenlő, ezért szükséges a  $b_0$  kiegészítő index.) Az esetre felírható vektoregyenlet [1], mellőzve a levezetéseket:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_b, \quad (m=n) \quad (14a)$$

$$x_k = \underline{c}^T \cdot \underline{x} + d \cdot x_b \quad (m=n) \quad (14b)$$

A kimeneti egyenletben tehát megjelenik egy  $d$  skalár paraméter (együttható), amelyet az  $x_b$  bemenőjellel kell szorozni. A paraméter mátrixok közül  $\underline{A}$  és  $\underline{b}$  ugyanolyan alakú, mint (11)-ben. A  $\underline{c}^T$  sorvektor elemszáma ugyanaz, mint (11)-ben, de az elemei mások:

$$\underline{c}^T = [(b_1 - b_0 a_1), (b_2 - b_0 a_2), \dots, (b_{n-1} - b_0 a_{n-1}), (b_n - b_0 a_n)]$$

A  $d$  skalár paraméter:

$$d = b_0$$

Fontos, hogy a (14)-ben összefoglalt egyenletek felírásához az átviteli függvényt a (13) alakra kell hozni.

Az irányítható kanonikus alaknak a tárgyalthoz képest a szakirodalomban előfordul egy másik változata is [1]: Amennyiben (8)-ból kiindulva  $Y(s)$ -t úgy írjuk föl, hogy (8)-ban ugyan  $a_n$ -nel osztunk (normalizálunk), és az indexeket 1-től számozzuk, de a sorrendjüket nem fordítjuk meg, akkor az  $m < n$  esetben a (10)-nek megfelelő  $Y(s)$  a következő:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{b_n s^{n-1} + b_{n-1} s^{n-2} + \dots + b_2 s + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1} \quad (m < n-re, \text{ másik változatban})$$

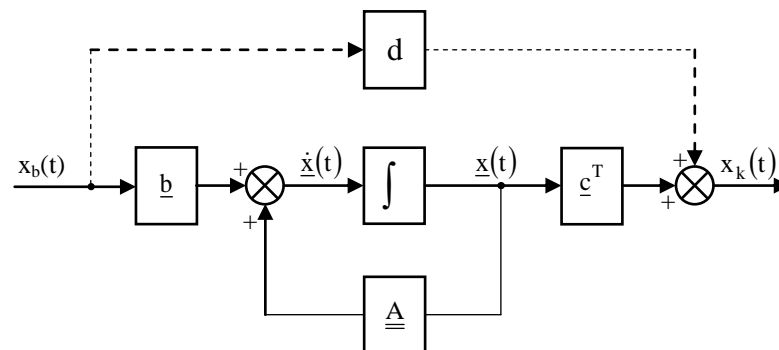
Az együttható mátrixok pedig ugyanekkor az alábbiak:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = [b_n, b_{n-1}, \dots, b_2, b_1].$$

Az állapotváltozók – vektor-koordinátákként felfogva – egy  $n$  dimenziós teret definiálnak, amelyet *állapottérnek* nevezünk. Ebben a térben helyezkedik el az  $\underline{\bar{x}}(t)$  időtől függő állapotvektor. Az állapotvektor végpontjának mozgása jellemző a rendszer viselkedésére. Ennek a szemléletnek az alapján az állapotegyenletes vizsgálati módszert *állapotteres* módszernek, a rendszerek viselkedésének állapotegyenletes leírását *állapottérben* történő leírásnak is nevezik.

### 6.3 Az állapotegyenletek tömbvázlatos ábrázolása

Az állapotegyenletekben kijelölt műveletek, a szorzás, az integrálás és az összegzés ábrán szemléltethetők. Az ábrát a rendszer *állapotegyenletes hatásvázlatának* vagy *tömbvázlatának* nevezik. A tömörített vektoregyenletekre felrajzolható hatásvázlatot a (12) és (14) egyenletek alapján a 6-2. ábra mutatja. Az  $\dot{\underline{x}}(t)$  deriváltvektor az egyenletek szerint két



6-2. ábra

tag összege: az egyiket úgy állíthatjuk elő, hogy az  $\dot{\underline{x}}(t)$ -t integráljuk, és a kapott  $\underline{x}(t)$  állapotváltozó-vektort  $\underline{A}$ -n keresztül  $\dot{\underline{x}}(t)$  bemenetére csatoljuk vissza, míg a másik tag a  $\underline{b}$ -vel szorzott  $x_b$ . A kimenőjel előállításához  $\underline{x}(t)$ -t  $\underline{c}^T$ -vel kell szoroznunk, és a (14)-es egyenletek ( $m=n$ ) esetében ehhez hozzá kell adnunk a  $d$ -vel szorzott  $x_b$ -t is.

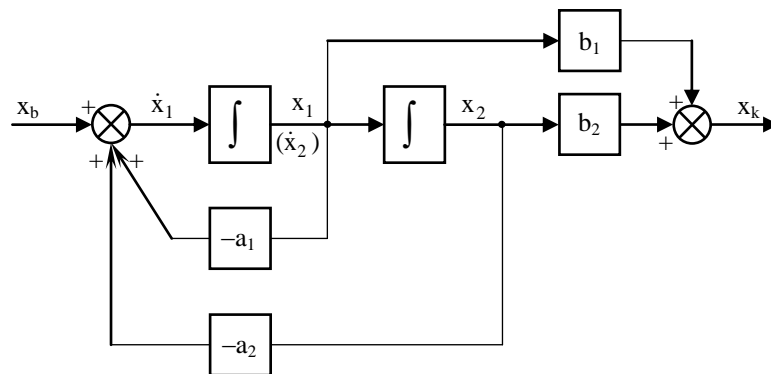
Az ábra szerinti hatásvázlat a hozzá tartozó egyenletekkel együtt a vizsgált rendszer (tag) állapotteres modellje. A modell itt összevethető azzal a tagmodellel, amelyet a 2.1 pontban vezettünk be. Ott az  $x_b$  és  $x_k$  közötti kapcsolatot jellemeztük az  $Y(s)$  átviteli függvényvel, míg az állapotegyenletes modellnél az  $x_b$ ,  $x_k$  jelek és az  $x_i$  állapotváltozók

közötti kapcsolatot jellemezzük az állapotegyenletekkel (hozzá értve a kimeneti egyenletet is). Az átviteli függvény és az állapotegyenletek között az is különbség, hogy az átviteli függvény a *rendszerből* csak a rendszerjellemező paramétereket használja, míg az állapotegyenletek a rendszer állapotváltozóit is.

Állapotegyenletes hatásvázlat nemcsak a tömörített, hanem a változókkal kiírt vektoregyenletekre is rajzolható. Rajzoljuk fel ezt a vázlatot az irányítható kanonikus alakú egyenletekre, de az egyszerűség kedvéért legyen  $n=2$ . Írjuk ki ehhez egyenként az egyenletrendszerben foglalt egyenleteket, akkor  $m < n$ -re a következőket kapjuk:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -a_1 x_1 - a_2 x_2 + x_b, \\ \dot{x}_2 &= x_1, \\ x_k &= b_1 x_1 + b_2 x_2.\end{aligned}$$

A hatásvázlat ezek alapján a 6-3. ábra szerinti. Az ábra mutatja az irányítható kanonikus alak



6-3. ábra

jellegzetességét: minden állapotváltozó a hatásirányban következő állapotváltozó deriváltja, és a megfelelő együtthatókon keresztül mindegyik az első állapotváltozó bemenetére van visszacsatolva [1].

#### 6.4 Példa az irányítható kanonikus alak felírására

1./ Egy átviteli tag differenciálegyenlete:

$$0,04\ddot{x}_k + 0,1\dot{x}_k + x_k = x_b.$$

Írjuk föl a tag irányítható kanonikus alakú paraméter mátrixait!

Megoldás:

Először az átviteli függvényt állítjuk elő. A differenciálegyenlet Laplace-transzformáltja:

$$0,04s^2 X_k(s) + 0,1s X_k(s) + X_k(s) = X_b(s).$$

Innen  $X_k(s)$  kiemelése és  $X_k(s)/X_b(s)$ -re rendezés után az átviteli függvény:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \frac{1}{0,04 \cdot s^2 + 0,1 \cdot s + 1} \quad .$$

$Y(s)$ -t az  $m < n$ -hez tartozó, (10) szerinti alakra kell hoznunk: 0,04-gyel osztunk, de  $n=2$ , és a számlálóban  $n-1=1$  hatványig kell írni, tehát a számlálóban kell egy  $0 \cdot s^1$  tag is:

$$Y(s) = \frac{0 \cdot s + \frac{1}{0,04}}{s^2 + \frac{0,1}{0,04} \cdot s + \frac{1}{0,04}} = \frac{\overbrace{0 \cdot s + 25}^{b_1 \quad b_2}}{\underbrace{s^2 + 2,5 \cdot s + 25}_{a_1 \quad a_2}} \quad .$$

Az „a”, „b” együtthatókkal a paraméter márixok az állapotegyenletek alapján:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -2,5 & -25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{c}^T = [0; \quad 25] \quad .$$

### 6.5 Az átviteli függvény meghatározása az állapotegyenletekből

A 6.2 pontban láttuk, hogy a rendszer átviteli függvényéből meghatározhatók a rendszer állapotegyenletei, de ennek a fordítottja is lehetséges, vagyis az állapotegyenletekből is meghatározható az átviteli függvény. Kanonikus alakú állapotegyenleteknél ehhez elég visszaírni a polinomok együtthatóit, de olyan módszert keresünk, amelyik az állapotegyenletek alakjától függetlenül alkalmazható. Válasszuk ehhez a (7) alakú általános állapotegyenleteket, és alkalmazzuk rájuk a Laplace-transzformációt. Zérus kezdeti feltételek mellett – a kezdeti feltételek az átviteli függvény esetében is nullák voltak – a következő egyenleteket kapjuk:

$$s\underline{X}(s) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{X}(s) + \underline{b} \cdot X_b(s) \quad , \quad (15a)$$

$$X_k(s) = \underline{c}^T \cdot \underline{X}(s) + d \cdot X_b(s) \quad . \quad (15b)$$

Mellőzve a levezetést, a két egyenletből képezhető  $X_k(s)$  és  $X_b(s)$  hányadosa, azaz az átviteli függvény:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \underline{c}^T \cdot (s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} \cdot \underline{b} + d \quad . \quad (16)$$

A képlet alkalmazása mátrixműveleteket igényel: szorzást, kivonást és reciprokképzést. Az  $(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})$  mátrix reciproka az ide vonatkozó képlet értelmében:

$$(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})}{\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})} \quad .$$

Az itt szereplő  $\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}})$  kerül az átviteli függvény nevezőjébe, ezért a

$$\det(s\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}) = 0 \quad (17)$$

egyenlet az  $\underline{A}$  állapotmátrixú rendszer *karakterisztikus egyenlete*, ahogyan ezt a fogalmat a 2.8.1.1 pontban is használtuk. Megoldása a rendszer pólusait szolgáltatja.

Amennyiben egy rendszernek több állapotegyenletes leírása van, ezekből mind ugyanazt az átviteli függvényt kapjuk.

## 6.6 Az irányíthatóság és a megfigyelhetőség fogalma

A rendszerek *irányíthatósága és megfigyelhetősége* az állapotegyenletes leírás fontos fogalma.

Az irányíthatóság a rendszereknek olyan tulajdonsága, amely megadja, hogy a bemenőjellel az állapotváltozók összessége (a rendszer állapota) vagy pedig a kimenőjel befolyásolható-e. Ha az összes állapotváltozó befolyásolhatóságát vizsgáljuk, *állapot-irányíthatóságról*, ha a kimenőjelét, *kimeneti irányíthatóságról* beszélünk.

Definíció szerint egy rendszer akkor állapot-irányítható, ha az állapotvektora az  $\mathbf{x}_b$  bemenőjel hatására tetszőleges  $\underline{\mathbf{x}}(t_0)$  kezdeti állapotból véges  $(t_v - t_0)$  idő alatt a tetszőlegesen előírt  $\underline{\mathbf{x}}(t_v)$  végállapotba vihető át [1]. A definíció értelemszerűen a kimeneti irányíthatóságra is alkalmazható, ekkor állapotvektor helyett a kimenőjelre mondjuk ki.

Az *állapot-irányíthatóság* matematikai feltétele az állapotegyenletek paraméter mátrixaival adható meg, az általunk vizsgált LI-SISO rendszereknél a rendszer állapot-irányíthatóságának az a feltétele, hogy a rendszer  $\underline{\mathbf{A}}$  és  $\underline{\mathbf{b}}$  paraméter mátrixaiból képzett

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_C = [\underline{\mathbf{b}}, \quad \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{b}}, \quad \underline{\mathbf{A}}^2\underline{\mathbf{b}} \quad \dots \quad \underline{\mathbf{A}}^{n-1}\underline{\mathbf{b}}] \quad (18)$$

állapot-irányíthatósági hipermátrix rangja egyenlő legyen a rendszer  $n$  rendszámával (az állapotváltozók  $n$  számával). A *kimeneti irányíthatóság* matematikai feltétele az, hogy a rendszer  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{Ck} = \underline{\mathbf{c}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}}_C$  mátrixának, azaz az

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{Ck} = [\underline{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{b}}, \quad \underline{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{b}}, \quad \underline{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{A}}^2\underline{\mathbf{b}} \quad \dots \quad \underline{\mathbf{c}}^T \underline{\mathbf{A}}^{n-1}\underline{\mathbf{b}}] \quad (19)$$

kimenet-irányíthatósági hipermátrixnak a rangja 1 legyen (egyenlő legyen a kimenőjelek számával).

Emlékeztetőül: egy  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  mátrix rangján  $\underline{\underline{\mathbf{Q}}}$  legmagasabb rendű, négyzetes, zérustól különböző al mátrixának a rendszámát értjük.

Amennyiben egy rendszer nem állapot-irányítható, kimenetileg még irányítható lehet.

A megfigyelhetőség arra ad választ, hogy a kimenőjel és a bemenőjel bizonyos ideig tartó mérésének (megfigyelésének) adataiból meghatározható-e a rendszernek a mérés

kezdetekor fennálló állapota. Ehhez nyilván szükséges, hogy a kimenőjel információt tartalmazzon az állapotváltozókról (kapcsolatban legyen velük).

Definíció szerint egy rendszert akkor nevezünk megfigyelhetőnek, ha bármely véges  $[t_0, t_v]$  időtartományban megfigyelt kimenőjelből és bemenőjelből az  $\underline{x}(t_0)$  kezdeti állapot meghatározható [1], [2].

A *megfigyelhetőség* matematikai feltétele az általunk vizsgált LI-SISO rendszereknél az, hogy a rendszer  $\underline{A}$  és  $\underline{c}^T$  paraméter mátrixaiból képzett

$$\underline{\underline{M}}_O = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{A} \\ \underline{c}^T \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

megfigyelhetőségi hipermátrix rangja egyenlő legyen a rendszer  $n$  rendszámával.

Az irányíthatósági és megfigyelhetőségi mátrixok kiértékelése megint csak mátrixműveleteket igényel. Megjegyezzük, hogy az állapotegyenletes, mátrixos számítások elvégzésekor nagy segítséget jelentenek a különböző szoftverek.

Az irányítható kanonikus alakra érdemes itt külön kitérni, ennek elnevezését az indokolja, hogy az irányíthatósági mátrixa különleges. Ezzel kapcsolatban a szakirodalomra [1] utalunk.

### 6.7 Példa az irányíthatósági és a megfigyelhetőségi mátrixok kiértékelésére

A 6-4. pont 1. példájában vizsgált tag irányítható kanonikus alakú paraméter mátrixainak ismeretében határozzuk meg a tag irányíthatósági és megfigyelhetőségi ( $\underline{\underline{M}}_C$ ,  $\underline{\underline{M}}_{CK}$ ,  $\underline{\underline{M}}_O$ ) mátrixait!

A paraméter mátrixok a példából átvéve:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -2,5 & -25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = [0; \ 25].$$

Megoldás:

Mivel  $n = 2$ , (18), (19) és (20)-ban az  $(n-1)$ -edik hatvány 1. Eddig a hatványig írva (18), (19) és (20)-at, és behelyettesítve a paraméter mátrixokat, a következőket kapjuk:

$$\underline{\underline{M}}_C = [\underline{b}, \underline{Ab}] = \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2,5 & -25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & -2,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{\underline{M}}_{Ck} = \underline{c}^T \cdot \underline{\underline{M}}_C = [0; \ 25] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2,5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0; \ 25] \ ,$$

$$\underline{\underline{M}}_O = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{\underline{A}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 25 \\ [0; \ 25] \cdot \begin{bmatrix} -2,5 & -25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 25 \\ 25 & 0 \end{bmatrix} \ .$$

Megállapítható, hogy

$\underline{\underline{M}}_C$  rangja 2,                    tehát a tag állapot-irányítható,

$\underline{\underline{M}}_{Ck}$  rangja 1,                    tehát a tag kimenet-irányítható,

$\underline{\underline{M}}_O$  rangja 2,                    tehát a tag megfigyelhető.

( $\underline{\underline{M}}_{Ck}$  különleges mátrix, mert egysoros sorvektor; ha van 0-tól különböző eleme, akkor a rangja 1.) Az eredmény a tag 6-3. ábra szerinti hatásvázlatából is látszik, mert a bemenőjellel az állapotváltozók és a kimenőjel is befolyásolható, a kimenőjel pedig kapcsolatban áll az összes állapotváltozóval.

## 6.8 Az irányíthatósági és megfigyelhetőségi viszonyok szemléltetése

Az irányíthatósági és megfigyelhetőségi viszonyok szemléltetésére tekintsük a következő állapotegyenleteket:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \cdot x_b \ ,$$

$$x_k = [c_1, \ c_2, \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \ .$$

Az egyenletek az ún. *diagonális kanonikus* alakban vannak felírva: az  $\underline{\underline{A}}$  állapotmátrixnak csak a főátlójában szerepelnek 0-tól eltérő elemek, és szükséges, hogy  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ .

Fölírva az állapotegyenletekből a bennük foglalt elsőrendű differenciálegyenleteket, fölrajzolható a rendszer hatásvázlata. Az egyenletek a következők:

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + b_1 x_b \ ,$$

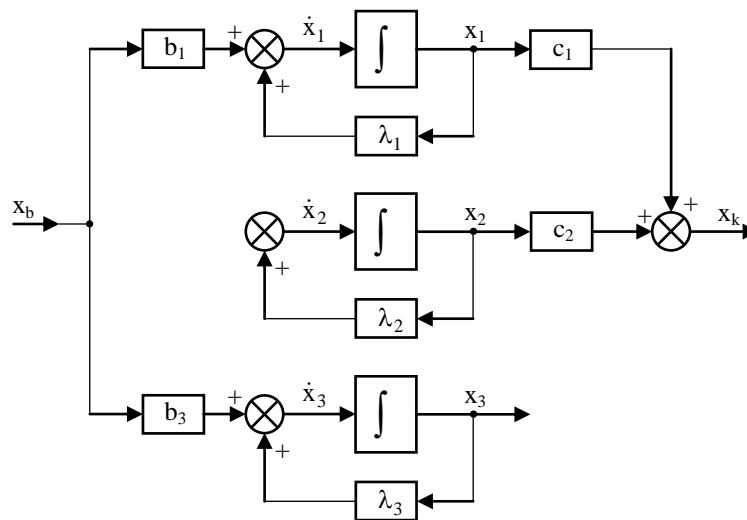
$$\dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 \ ,$$

$$\dot{x}_3 = \lambda_3 x_3 + b_3 x_b \ ,$$

$$x_k = c_1 x_1 + c_2 x_2 \ .$$



Az egyenletek alapján följelölhető hatásvázlatot a 6-4. ábra mutatja. A hatásvázlatból



6-4. ábra

leolvashatók a következő tulajdonságok: Az állapotváltozók közül  $x_2$  az  $x_b$ -vel nem befolyásolható, ezért  $x_2$  nem irányítható. Csak  $x_1$  és  $x_3$  irányítható, a rendszer tehát nem állapot-irányítható (nem teljesen irányítható). Más részről az  $x_k$  kimenőjel nincs kapcsolatban az  $x_3$ -mal,  $x_3$  tehát nem megfigyelhető, csak  $x_1$  és  $x_2$ . A rendszer tehát nem megfigyelhető (nem teljesen megfigyelhető). Ami a kimenetet illeti: a kimenőjel az irányítható  $x_1$  és  $x_3$  állapotváltozók közül  $x_3$ -mal nincs kapcsolatban, de  $x_1$ -gyel igen, ezért a rendszer kimenetileg irányítható. Mindez közvetlenül látható már az egyenletekből is:  $x_2$  a  $b_2 = 0$  miatt nem befolyásolható  $x_b$ -vel;  $x_3$  a  $c_3 = 0$  miatt nincs kapcsolatban  $x_k$ -val;  $x_1$ -nél viszont sem  $b_1$ , sem  $c_1$  nem nulla, így  $x_1$ -en keresztül  $x_k$  irányítható.

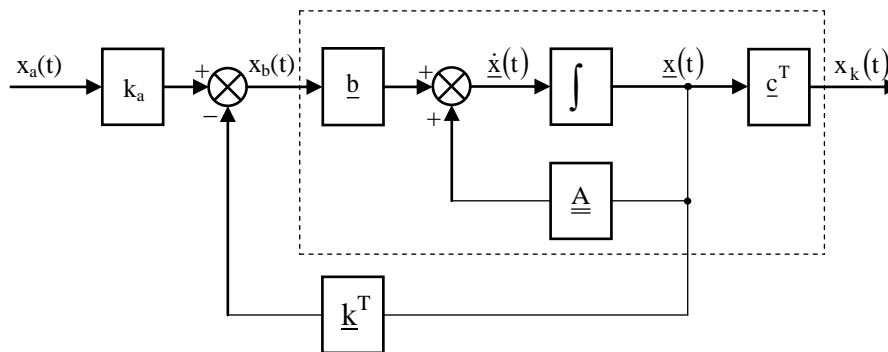
Az itt megismert *diagonális kanonikus* alak jellegzetessége, hogy az állapotegyenlet-rendszer  $n$  egymástól független differenciálegyenletre esik szét [1]. Ennek a következménye az, hogy a hatásvázlat párhuzamos felépítésű.

Az eddigiekben megismertük az állapotegyenletek két kanonikus alakját, de létezik egy harmadik, az ún. megfigyelhetőségi kanonikus alak is. Mindegyiknek kanonikus alaknak megvan a maga előnye, ezért a gyakorlatban mindegyiknek a használata előfordul, de ismeretesebbek olyan átalakítások, mátrix-transzformációk is, amelyekkel az egyes alakok egymásba átalakíthatók. Ennek tárgyalása meghaladja ennek a tárgynak a kereteit.

## 6.9 Az állapot-visszacsatolás

Az állapotegyenletes leírás fontos alkalmazása az *állapot-visszacsatolás*, amelynél az állapotváltozókról a rendszer bemenetéhez csatlakozó negatív visszacsatolást valósítunk meg.

Az állapot-visszacsatolás tömbvázlatát a 6-5. ábra mutatja, az ábra a 6-2. ábra szerinti vázlat kiegészítése az állapot-visszacsatolással és az ehhez alkalmazott elemekkel. Az ábrán



6-5. ábra

szaggatottan bekereteztük az eredeti, állapot-visszacsatolandó rendszert; ennél feltételeztük, hogy  $d=0$ , vagyis hogy a rendszerre  $m < n$ . A visszacsatolásban  $\underline{k}^T$  visszacsatoló vektort tételeztünk föl, ez sorvektor, az elemei lineáris, invariáns állandók, aminek eredményeként a  $\underline{k}^T \cdot \underline{x}$  szorzat skalár. A visszacsatolt rendszer bemenőjele az  $x_a$  alapjel, ezt a  $k_a$  erősítési tényezővel szorozzuk, amellyel az állandósult állapotbeli erősítést állítjuk be, jellemzően úgy, hogy az átmeneti függvény állandósult értéke ugyanaz legyen, mint állapot-visszacsatolás nélkül. A rendszer az állapot-visszacsatolástól függetlenül tartalmazhat negatív visszacsatolást az  $x_k$  jelről is az  $x_a$  alapjelre.

Az eredeti rendszerre vonatkozó állapotegyenletek azok, amelyeket (11)-ben is megadtunk:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot x_b, \quad (21a)$$

$$x_k = \underline{c}^T \underline{x}. \quad (21b)$$

Az egyenletek az  $x_b$  és  $x_k$  jel között a (16) szerinti átviteli függvényt valósítják meg:

$$Y(s) = \frac{X_k(s)}{X_b(s)} = \underline{c}^T \cdot (s\mathbf{I} - \underline{A})^{-1} \cdot \underline{b}.$$

A viselkedés szempontjából elsődleges fontosságúak  $Y(s)$  pólusai, ezeket (17)-nek megfelelően a

$$\det(s\mathbf{I} - \underline{A}) = 0$$

karakterisztikus egyenletből határozhatjuk meg.

A visszacsatolt, zárt rendszerre érvényes egyenletek fölírásához fejezzük ki  $x_b$ -t az  $x_a$ -val. A 6-5. ábra első összegzőjére írható, hogy

$$x_b = k_a x_a - \underline{k}^T \underline{x}.$$

Helyettesítsük ezt be (21a)-ba, akkor a következőket kapjuk:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x} + \underline{b} \cdot (\underline{k}_a x_a - \underline{k}^T \underline{x}) = (\underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T) \cdot \underline{x} + \underline{b} \underline{k}_a x_a \quad .$$

A képlet alapján a visszacsatolt, zárt rendszer állapotmátrixa:

$$\underline{A}_{\text{vcs}} = \underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T \quad .$$

$\underline{A}$  helyébe  $\underline{A}_{\text{vcs}}$ -t helyettesítve a visszacsatolt rendszer egyenletei ugyanolyanok, mint a visszacsatolatlanéi. A visszacsatolt, zárt rendszer pólusait így pl. a

$$\det(\underline{sI} - \underline{A}_{\text{vcs}}) = 0$$

karakterisztikus egyenlet szolgáltatja. Kifejtve ebben  $\underline{A}_{\text{vcs}}$ -t a

$$\det(\underline{sI} - \underline{A} + \underline{b} \underline{k}^T) = 0 \quad (22)$$

karakterisztikus egyenlet adódik, amelynek alapján megállapíthatjuk, hogy a visszacsatolt rendszer pólusai az  $\underline{A}$  állapotmátrix és a  $\underline{b}$  vektor mellett a  $\underline{k}^T$  visszacsatolási vektortól is függnének. Ez lehetőséget ad arra, hogy  $\underline{k}^T$  megválasztásával a visszacsatolt rendszer pólusainak a komplex számsíkon elfoglalt helyét befolyásoljuk, vagyis az eredeti rendszer pólusait nekünk megfelelő helyekre helyezzük át. A feladat annak a  $\underline{k}^T$  vektornak a meghatározása, ezt az áthelyezést megvalósítja. Belátható ugyanakkor, hogy mivel a (22)-ben szereplő determináns az átviteli függvénynek a nevezője, a  $\underline{k}^T$  vektor az átviteli függvény számlálóját változtatlanul hagyja.

#### 6.10 Pólusáthelyezés állapot-visszacsatolással

A  $\underline{k}^T$  sorvektor meghatározásának egyik módját példán keresztül mutatjuk be [1], [3].

Egy rendszer átviteli függvénye:

$$Y(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad .$$

A rendszer arányos típusú, pólusai:  $p = [-1; -2; -3]$ .

Helyezzük át a pólusokat a  $p_{\text{vcs}} = [-5; -2 + j3; -2 - j3]$  helyekre!

Megoldás:

$Y(s)$ -t irányítható kanonikus alakra hozzuk ((10)-nek megfelelő alakra,  $m < n$ ,  $n = 3$ ):

$$Y(s) = \frac{0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad .$$

Innen a kiindulási rendszer irányítható kanonikus alakú állapotmátrixa:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Felírjuk a visszacsatolt rendszer  $Y_{\text{vcs}}(s)$  átviteli függvényét gyöktényezős alakban, az előírt pólusokkal,  $Y(s)$  számlálóját változatlanul átvéve:

$$Y_{\text{vcs}}(s) = \frac{6}{(s+5)[s-(-2+j3)][s-(-2-j3)]} .$$

$Y_{\text{vcs}}(s)$  irányítható kanonikus alakban, a nevezőbeli szorzások és átalakítások után:

$$Y_{\text{vcs}}(s) = \frac{0 \cdot s^2 + 0 \cdot s + 6}{s^3 + 9s^2 + 33s + 65} . \quad (\text{Felhasználható az } [s-(a+jb)] \cdot [s-(a-jb)] = (s-a)^2 + b^2 \text{ azonosság.})$$

$Y_{\text{vcs}}(s)$ -ből a visszacsatolt rendszer irányítható kanonikus alakú állapotmátrixa:

$$\underline{\underline{A}}_{\text{vcs}} = \begin{bmatrix} -9 & -33 & -65 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

A visszacsatolt rendszer  $\underline{\underline{A}}_{\text{vcs}}$  állapotmátrixának az előző pont értelmében egyenlőnek kell lenni a visszacsatolandó rendszer  $\underline{\underline{A}}$  és  $\underline{\underline{b}}$  mátrixaival felírt  $(\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{b}} \underline{\underline{k}}^T)$  mátrixszal:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{b}}} \cdot \underbrace{[k_1; k_2; k_3]}_{\underline{\underline{k}}^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} -9 & -33 & -65 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}_{\text{vcs}}} ,$$

ahonnan a  $\underline{\underline{b}} \underline{\underline{k}}^T$  szorzást végrehajtva:

$$\begin{bmatrix} -6 & -11 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -33 & -65 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

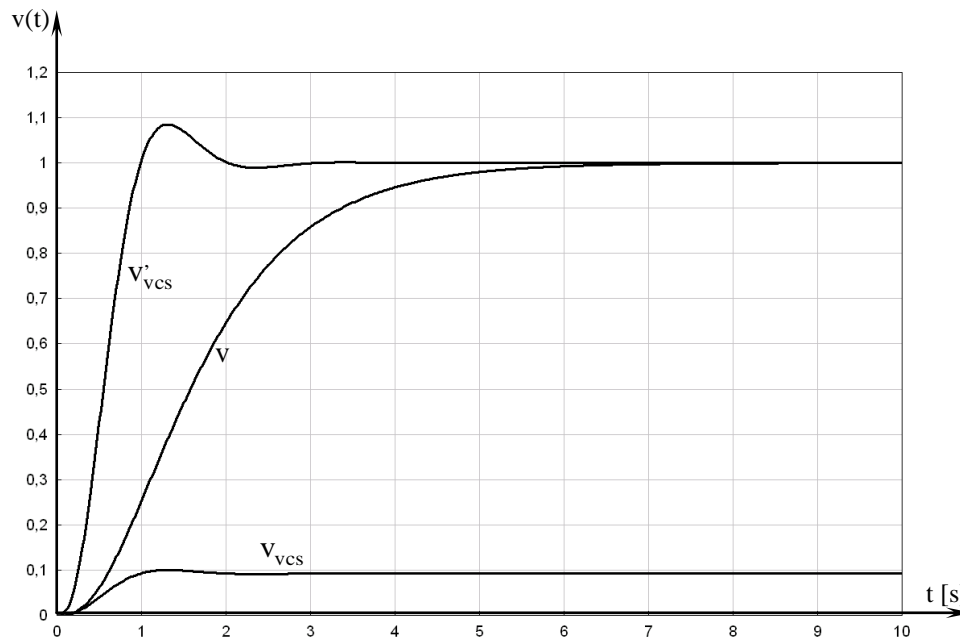
Az elemenkénti kivonást csak az első sorra kell elvégeznünk, mert a többi elemre az egyenlőség fennáll. Az első sorbeli elemenkénti kivonás alapján viszont a  $k_i$  elemek meghatározhatók. Elvégezve az első sorbeli kivonásokat, az első elemnél  $-6 - (-9) = 3$ , a többi elemnél 22, ill 59 adódik.

A  $\underline{\underline{k}}^T$  visszacsatolási vektor tehát:

$$\underline{\underline{k}}^T = [3; 22; 59] .$$

(Általában, ha  $-a_1, -a_2 \dots -a_i$  jelöli  $\underline{\underline{A}}$  első sorát,  $-r_1, -r_2 \dots -r_i$  jelöli  $\underline{\underline{A}}_{\text{vcs}}$  első sorát, akkor  $-a_i - k_i = -r_i$ , és  $k_i = r_i - a_i$ .)

Az eredmény szemléltetéséhez célszerű fölrajzoltatni az átmeneti függvényt a kiindulási és a visszacsatolt rendszerre (6-6. ábra, „v” a kiindulási rendszeré, „ $v_{vcs}$ ” a visszacsatolté). Az ábra alapján megállapítható, hogy a rendszer a pólusáthelyezéssel gyorsabb lett, köszönhetően annak, hogy időállandót csökkentettünk, ill. az aperiodikus jelleget a komplex pólusok elhelyezésével lengővé változtattuk. Ugyanakkor látható az is, hogy az átmeneti függvény állandósult értéke megváltozott, lecsökkent.



6-6. ábra

Az átmeneti függvény állandósult értékének beállításához a végérték-tétel alapján meghatározzuk az átmeneti függvény állandósult értékét a kiindulási és a visszacsatolt rendszerre:

a kiindulási rendszerre: 
$$v(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} Y(s) = \frac{6}{6} \quad ,$$

a visszacsatolt rendszerre: 
$$v_{vcs}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} Y_{vcs}(s) = \frac{6}{65} \quad .$$

Ezek ismeretében a szükséges  $k_a$  tényező:

$$k_a = \frac{v(\infty)}{v_{vcs}(\infty)} = \frac{6}{6} \cdot \frac{65}{6} = 10,833 \quad .$$

A módosított átmeneti függvényt az ábrán  $v'_{vcs}$  jelöli.

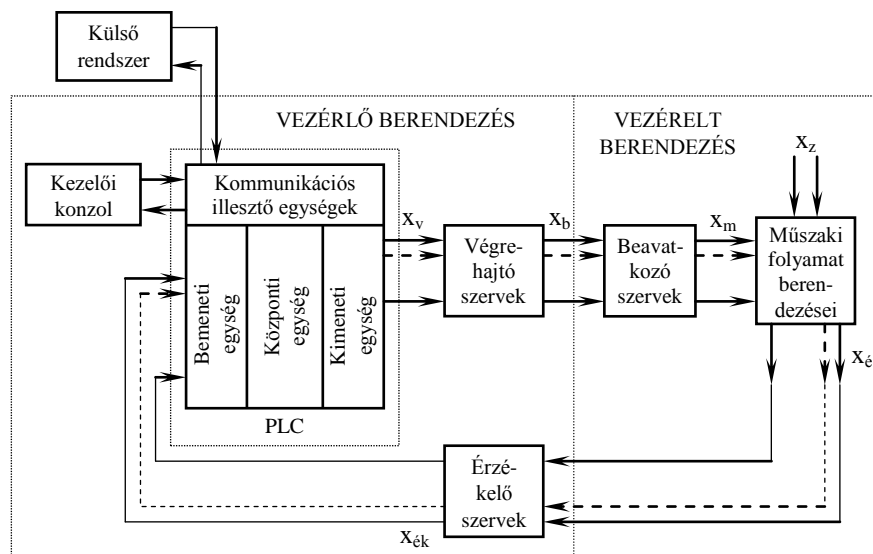
(A (10)-es képlet jelöléseit felhasználva  $v(\infty)$  általában  $b_n/a_n$  ;  $v_{vcs}(\infty)$  általában  $b_n/a_{n,vcs}$  ;  $k_a$  általában  $a_{n,vcs}/a_n$  .)

## 7. PLC-S VEZÉRLÉSEK ALAPJAI

A szabályozások tárgyalása után vezérléstechnikai kérdések tárgyalására térünk át. A műszaki, technológiai folyamatok vezérlésére a leggyakrabban alkalmazott irányítástechnikai eszköz ma a *programozható logikai vezérlő*, angol kezdőbetűkkel rövidítve a PLC (német rövidítésben SPS), ezért a PLC-s vezérlésekkel fogunk foglalkozni.

### 7.1 A PLC-s vezérlési rendszer felépítése

Általában a vezérlési rendszer a *vezérelt berendezésből* és a *vezérlő berendezésből* áll. A vezérelt berendezést a vezérelt műszaki, technológiai folyamat berendezései, eszközei alkotják, míg a vezérlő berendezés többféle lehet, de a PLC-s rendszerekben ennek az alapja maga a PLC. A PLC-s vezérlési rendszerek felépítését [5] nyomán a 7-1. ábra szemlélteti. Ez tkp. funkcionális vázlat, de nem csak a beavatkozásra érvényes, hanem a teljes irányítási folyamatra. A jelek ábrán alkalmazott jelölései közül  $x_e$ : érzékelt jellemző,  $x_{ék}$ : az érzékelők



7-1. ábra

kimenő jele; a többiek megegyeznek a korábban alkalmazottakkal, pl.  $x_v$ : végrehajtó jel stb.  $x_e$ -be most beleértjük  $x_z$  érzékelését,  $x_{ék}$ -ba a közvetlen kezelői beavatkozásokat (pl. nyomógomb),  $x_v$ -be pedig a létrehozott kijelzések (pl. jelzőlámpa) is. Az ábra szerinti rendszer részéről: A rendszer beavatkozó szervből és érzékelő szervből általában egynél többet, esetenként jóval többet tartalmaz. A *beavatkozó szerveket* a vezérelt berendezéshez, az *érzékelő szerveket* a vezérlő berendezéshez szokás sorolni. A vezérlő berendezéshez szokás sorolni a rendszerint szükséges *végrehajtó szerveket* is. A PLC e helyen megemlítendő

legfontosabb részei a következők: a *bemeneti egységek*, amelyek az érzékelt mennyiségeket fogadják; a *központi egység*, amely a jelek feldolgozását végzi; a *kimeneti egységek*, amelyekben a feldolgozás eredményeként a végrehajtó jelek megjelennek; és a *kommunikációs illesztő egységek*. A vezérlő berendezéshez soroljuk a *kezelői konzolt* is, amelyen keresztül a kezelőszemélyzet avatkozhat be. A technológiai folyamatot vezérlő PLC ma már ritkán működik önmagában, együttműködik *más, külső rendszerekkel*, amelyekkel kommunikációs kapcsolatban áll.

Az ábrán közvetlenül látszik, hogy az irányítás alapl műveletei közül az *érzékelés* és a *beavatkozás* a rendszerben jelen van. A fennmaradó alapl művelet, az *ítéletalkotás*, azaz az információk feldolgozása és a döntés a PLC-ben tárolt ún. *felhasználói program* alapján megy végbe. A felhasználói program olyan utasítás-sorozat, olyan algoritmus, amely az irányítási feladatot írja le. A program bemenő paraméterei a PLC bemenőjelei: az érzékelőktől, a kezelőtől és a külső rendszertől érkező jelek, kimenő paraméterei a PLC kimenőjelei, amelyek végső soron a beavatkozásokat kiváltják (elindítják). Az utasítások műveleteket tartalmaznak, ezek a PLC bemenőjelein, az azokból származtatott egyéb jeleken és a kimenőjeleken elvégzendő műveletek, és az utasítás végén a műveletek eredményétől függően a PLC-nek egy-egy meghatározott kimenőjele létrejön. Az elvégzendő műveletek elsősorban a vezérlési feladatok megoldásához szükséges tipikus műveletek:

- *logikai alapl műveletek* (ÉS, VAGY stb.);
  - *tárolási műveletek*: pl. egy jel felvette a logikai 1 értéket;
  - *időzítési műveletek*: valamely jel megjelenésétől eltelt időtartam mérése; valamely jel megszűnésétől eltelt időtartam mérése stb.;
  - *számlálás*: pl. valamely kétállapotú jel megváltozásának száma stb.;
  - *összehasonlítás*: annak a megállapítása, hogy valamely jel értéke egy meghatározott értéknél kisebb, nagyobb vagy vele egyenlő;
- de számos más művelet is lehetséges, pl. *matematikai alapl műveletek*, *matematikai függvények értékének kiszámítása* stb.

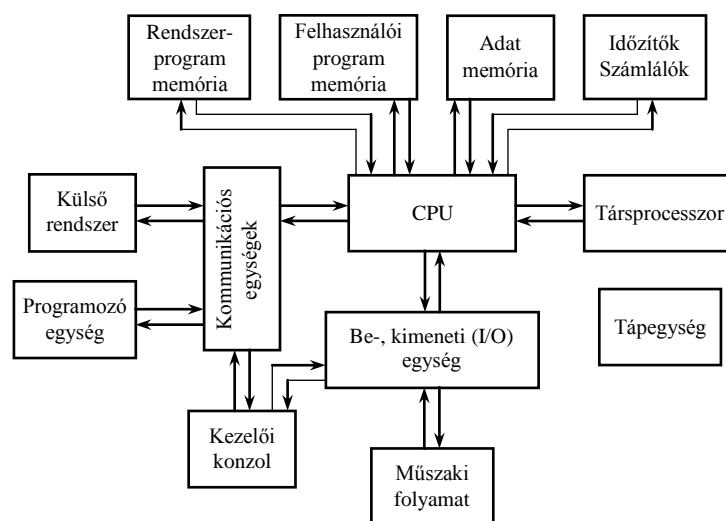
## 7.2 A PLC-k felépítése

A PLC-k felépítésének igazodnia kell azokhoz a feladatokhoz, amelyeket a PLC-nek el kell látnia. Ezek a feladatok a következőképpen foglalhatók össze:

1./ *Jelfeldolgozási feladatok*. Ezen belül a következők szükségesek:

- a/ Tárolni és futtatni kell a már tárgyalt *felhasználói programot*.

- b/ A felhasználói programon kívül szükség van egy másik programra, a *rendszerprogramra* (operációs rendszerre) is, amely a felhasználói programot indítja, szükség esetén megszakítja vagy leállítja; amely a külső utasításokat – pl. a hibajelzéseket – kezeli; a kommunikációs feladatokat irányítja; stb.; egyszóval, amely a PLC működését, tevékenységét megszervezi. A PLC-ben ezt a programot is tárolni kell.
- c/ Mind a felhasználói program, mind az operációs rendszert alkotó programok futásának velejárója az *adattárolás* szükségessége. A műveletek során ugyanis szükség lehet egyes adatok *átmeneti* tárolására és újbóli elővételére.
- d/ A gyakran használt felhasználói programrészeket – pl. *időzítők*, *számlálók* – célszerűen előre programozott, beépített formában kell tárolni (ún. standard programok).
- 2./ Fogadni kell az irányított folyamattól érkező *érzékelte jeleket*, és ki kell adni a folyamat számára a megfelelő *beavatkozó (végrehajtó) jeleket*.
- 3./ El kell látni kommunikációs feladatokat, amelyek a következők:
- a/ Kommunikáció más, *külső rendszerekkel*: PLC–PLC, PLC–számítógép, PLC–felügyeleti rendszer.
- b/ Kommunikáció a *kezelő személyzettel* (angol rövidítéssel: MMI, man-machine interface).
- c/ *Programozási* feladatok: programfejlesztés; próbafuttatás szimulációval és „élesben”, vagyis magán a PLC-n; program-dokumentálási feladatok.
- A kommunikációs feladatok ellátása szintén jelfeldolgozással jár együtt.
- 4./ *Tápellátási* feladatok.



7-2. ábra



A PLC a vázolt feladatokat a 7-2. ábra szerinti felépítésben látja el. Ez csak a *feladatellátás szempontjából jellemző felépítés* (funkcionális felépítés), nem szemlélteti a gyakorlati megvalósítással létrejött hardver megoldást, amely igen sokféle lehet. Az ábrázolt egységeket sorra véve, ezekről a következők mondhatók:

#### Központi egység (CPU):

Ez a szűkebb értelemben vett jelfeldolgozás eszköze, feladatát *mikroprocesszor* látja el. A fő processzor mellett egyes jelfeldolgozási feladatok társprocesszorra lehetnek bízva (aritmetikai processzor, grafikus processzor stb.).

A CPU fontosabb jellemzői: az alkalmazott szóhosszúság, a ciklusidő (l. később, ismétlődő időtartam, amely alatt a felhasználói program egyszer végrehajtodik), a társprocesszor megléte vagy nemléte, az ún. megszakítások lehetősége stb.

#### Rendszerprogram memória:

A gyárilag rögzített operációs rendszert, működtető algoritmust tartalmazza. Típusát tekintve nemfelejtő memória, pl. ROM, PROM vagy EPROM.

Jellemzője a típusán kívül a mérete: pl. 128 kB.

#### Felhasználói program memória:

A felhasználói programot, az irányítási feladatot leíró algoritmust tárolja. Típusát tekintve RAM, esetleg EPROM.

Jellemzője a típusán kívül a mérete: pl. 32 kB.

#### Adat (operatív) memória:

Az átmeneti adattárolásra szolgál, így RAM típusú. A rendszer- és a felhasználói program által használt területen kívül van a felhasználó által közvetlenül címezhető területe is. Az adatmemória mérete pl. 128 kB.

#### Időzítők, számlálók:

Általában RAM memóriában hívhatja meg a felhasználó a *beépített* számlálási, időzítési, komparálási (összehasonlítási) stb. *funkciókat* is.

#### Be- , kimeneti egység (I/O egység):

A *bemeneti egység* az érzékelőktől kapott jeleket illeszti a mikroprocesszorhoz, a *kimeneti egység* pedig a mikroprocesszor által előállított kimenőjeleket illeszti a beavatkozó vagy végrehajtó, esetleg erősítő szervekhez.

A normál *bemenetek* egyenáramúak, és lehetnek bináris (kétállapotú) vagy analóg típusúak. A bináris jelértékek legtöbbször 0 és 24 V (logikai 0 és logikai 1), az analóg jelek értéke a szabványos: 0 – 10 V, 4 – 20 mA. Vannak azonban váltakozó áramú és különleges

bemenetek is, ez utóbbiak pl. olyanok, amelyekre közvetlenül hőmérséklet-érzékelő csatlakoztatható, vagy amely digitális (kódolt jel) fogadására képes.

A *kimenetek* normál esetben egyenáramú bináris (kétállapotú) vagy analóg típusúak, az előbbi esetben 0 és 24 V, az utóbbiban 0 – 10 V, 4 – 20 mA jelértékekkel, mindkét esetben tranzistoros vagy reléérintkezős kimenőkörrrel. A kimenetek is lehetnek váltakozó áramúak, ekkor a kimenőkör reléérintkezős vagy triakos.

(Megjegyezzük, hogy a bináris be- és kimeneteket szokás digitálisnak is nevezni.)

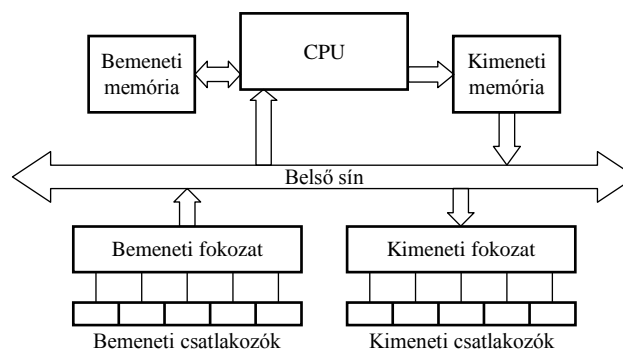
#### Kezelői konzol:

Ezen keresztül valósul meg a kezelő és a PLC közötti kommunikáció: a kezelő innen avatkozhat be indítás, leállítás, folyamatmódosítás, adatlekérés stb. céljából, és itt jelennek meg a PLC állapotának a kijelzései: futtat, áll, a be- és kimenetek állapota stb. Esetenként korlátozott mértékű programozásra is használható. Nyomógombokat, kapcsolókat, kijelzőket tartalmaz.

#### Programozó egység:

Ezen az egységen keresztül hajthatók végre a programozási, programfejlesztési, szimulálási, programdokumentálási feladatok. A programozó egység általában PC, de lehet külön programozó készülék vagy külön fejlesztő rendszer is.

A *hardver-felépítés* tekintetében a működés szempontjából fontos a be- és a kimeneti egység felépítésének a megismerése. A CPU egy belső sínrendszeren (belső busz) keresztül csatlakozik a be- és a kimeneti egységekre. A *bemenetekkel* kezdve, a bemeneti jelek a bemeneti csatlakozókra érkeznek (7-3. ábra), de a jeleken ahhoz, hogy a belső sínre csatlakoztathatók legyenek, bizonyos műveleteket kell végrehajtani. Ezeket a műveleteket a



7-3. ábra

bemeneti fokozat hajtja végre. A műveletek bináris egyenáramú bemenet esetén a következők: túlfeszültség-védelem, szűrés, jelformálás, galvanikus leválasztás (optocsatolással), a belső sínhez való illesztés. Analóg egyenáramú bemenet esetén a

túlfeszültség-védelem és a szűrés, valamint a galvanikus leválasztás után A/D (analóg-digitális) átalakítót kell alkalmazni, és azt követi a belső sínhez való illesztés. A bemenetek állapotát LED kijelzővel kijeleztetik. A bemenetek állapotát a CPU a bemeneti memóriában a szükséges ideig tárolja.

A *kimenetekre* térve, a mikroprocesszor kimenőjelei a kimeneti memóriákon keresztül jutnak a belső sínre (7-3. ábra), de ezek a jelek nem alkalmasak közvetlenül arra, hogy a vezérlés beavatkozó vagy végrehajtó szerveit meghajtsák, hanem ehhez bizonyos műveleteket kell rajtuk elvégezni. A jelek ezért egy kimeneti fokozaton keresztül kerülnek a kimeneti csatlakozókra. A fokozat által végrehajtott műveletek bináris egyenáramú kimenet esetében a következők: galvanikus leválasztás a belső síntől, teljesítményerősítés-illesztés, rövidzárlat elleni védelem. Analóg egyenáramú kimenet esetében a galvanikus leválasztás után D/A (digitális-analóg) átalakítót is kell alkalmazni. Állapotkijelzőt a kimenetek esetében is használnak.

A PLC gyártmányok a kivitelük alapján lehetnek ún. *kompakt* és *moduláris* kivitelű készülékek.

A *kompakt* (egybeépített) PLC-k hardver-felépítése nem módosítható, a különféle hardver elemek egybeépítve, egy tokozásban találhatók. Alkalmazási területük: az egy adott céllal, nagy sorozatban gyártott vezérlések, egyedi vezérlések, automatizálási részfeladatok stb.

A *moduláris* kivitelű PLC-k a PLC egyes feladatait önmagában ellátó egységekből, modulokból épülnek fel. A modulok megjelenési formája pl. áramkörti kártya, dugaszolható csatlakozóval. A moduláris felépítésű PLC-k meghatározott mértékben bővíthetők, és a modulokból a legkülönbözőbb felhasználói igényeknek megfelelő készülékek állíthatók össze. A moduláris felépítés előnye a rugalmasság, a feladatokhoz való alkalmazkodás lehetősége. A moduláris PLC-eket technológiai folyamatok, ipari folyamatok irányítására alkalmazzák. Az egyes modulok pl. lehetnek a következők:

- CPU modul: beépítve az adatmemória, esetleg a társprocesszor;
- memória modul: rendszerprogramtár, felhasználói programtár, az utóbbi esetleg bővíthető;
- bemeneti modul;
- kimeneti modul; stb.

Megjegyezzük, hogy a PLC elsősorban vezérléstechnikai eszköz, de a vezérléstechnikai feladatok mellett diszkrét idejű (digitális) szabályozási feladatokat is elláthat. A közepes vagy annál nagyobb kategóriájú készülékek pl. beépített formában – RAM területen vagy társprocesszorral bízva – PID algoritmust is tartalmaznak.

### 7.3 A PLC működése

A legtöbb PLC ún. *ciklikus* elven működik, de vannak más működési módok is.

*Ciklikus* működéskor a ciklus első lépéseként a processzor lekérdezi valamennyi bemenet állapotát, és tárolja őket a bemeneti memóriában a ciklus végéig. Ez után a felhasználói program végrehajtása következik. Ennek során a processzor az egész ciklus alatt a bemeneti memóriákban rögzített adatokból, valamint a kimeneti memóriákban lévő, szintén rögzített adatokból dolgozik (a kimeneti memóriák az előző ciklus végén beírt tartalmúak). A felhasználói program végrehajtása az első utasítástól kezdve, utasításról-utasításra haladva történik: a processzor beolvassa az egyes utasításokat, majd értelmezi és végrehajtja őket. Az utasítások végrehajtásának eredményeként előállnak a kimeneti adatok, ezeket a processzor a kimeneti memóriákba küldi. Ezt követően az operációs rendszer végrehajt néhány, nem a felhasználói programban rögzített feladatot: pl. kommunikációs kérések kiszolgálása, öndiagnosztika stb. A ciklus végén a processzor átküldi a kimenőjelek adatait a kimeneti memóriákból a kimeneti kapcsokra. Ennek megtörténte után új ciklus kezdődik, a processzor lekérdezi a bemenetek állapotát, átírja az eredménynek megfelelően a bemeneti memóriákat, és rátér az utasítások végrehajtására, stb.

Az utasítások műveletekből állnak, ezeket legkisebb részműveletükre lebontva úgy képzelhetjük el, hogy a részművelet egy kijelölt regiszterben tárolt *változó* és egy különleges rendeltetésű regiszter, az ún. *akkumulátor* tartalma között jön létre, és az eredmény ugyancsak az akkumulátorban képződik.

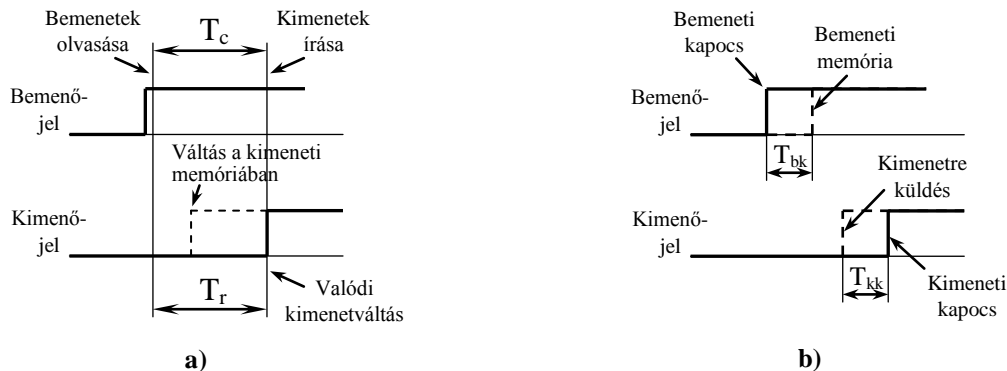
A ciklust megszakíthatják különböző események, pl. vészjelzés v. hibajelzés, ezeket az ún. megszakításkéréseket a PLC programja külön kiszolgáló programok végrehajtásával kezeli. Több megszakításkérés esetén a megszakítások a besorolásuk szerinti sorrendben hajttnak végre.

A PLC-nek fontos jellemzője a ciklus egyszeri végrehajtásának időtartama, a *ciklusidő*. Mivel a fentiek szerint –rendes esetben– a PLC minden ciklusban egyszer végrehajtja a felhasználói programot, a ciklusidőt *programletapogatási* időnek is nevezik. A ciklusidő függ a program hosszától, jellemző értéke: kb. 10 ms-tól néhány száz ms. A ciklusidőt gyakran a K méretű programmemória, azaz az 1024 utasításszó végrehajtásához szükséges időként adják meg, ez nem függ a program hosszától, jellemző értéke: 0,5–5 ms/K. A ciklusidőnek illeszkednie kell az irányított technológiai folyamathoz, ha túl nagy, akkor a PLC nem tudja követni a folyamat eseményeit, ha túl kicsi, a tranzienseket is követi, ami helytelen működést okozhat.

A ciklusidő mellett használatos jellemző az ún. *válaszidő* (reakcióidő) is. A válaszidő az a legnagyobb időtartam, amely alatt a PLC bemenetén történő változásra a PLC kimenetén megjelenik a jelváltozás. A válaszidő:

$$T_r = T_{bk} + T_{kk} + 2T_c \quad ,$$

ahol  $T_{bk}$  a bemeneti jelkésleltetési idő,  $T_{kk}$  a kimeneti jelkésleltetési idő,  $T_c$  pedig a PLC ciklusideje. A  $T_c$  ciklusidő és  $T_r$  összefüggésének a magyarázatához tekintsük a 7-4.a ábrát!



7-4. ábra

Az ábrán feltételeztük, hogy a késleltetési idők nullák. Az ábra szerinti esetben  $T_r = T_c$ , de ha a „Váltás a kimeneti memóriában” csak  $T_c$  idő eltelte után történik meg, akkor a valódi kimenetváltás is  $2T_c$ -hez tolódik. A jelkésleltetések keletkezési helyét a 7-4.b ábra magyarázza. A késleltetések elsősorban a szűrőtagok miatt lépnek fel, jellemző értékük:  $T_{bk}$ : 2–3 ms;  $T_{kk}$ : 1 ms.

A PLC-k egy másik működési módja a *lépésenkénti végrehajtású* működés. Ez esetben a PLC a program végrehajtása során minden lépésben csak a következő lépés feltételét vizsgálja, és attól függően, hogy a feltétel teljesül-e vagy sem, két irányban léphet tovább, de mindkét irányban tartalmaz egy-egy utasítást, amellyel beállítja a kimenetek kívánt állapotát. Ez esetben tehát a PLC nem vizsgálja ciklikusan az összes bemenetet, hanem minden lépésben csak azokat a bemeneteket olvassa be, amelyek az éppen esedékes feltétel vizsgálatához szükségesek.

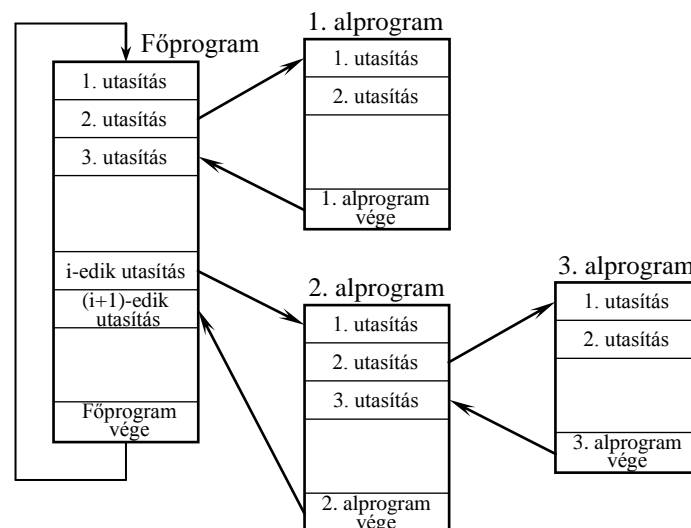
#### 7.4 A felhasználói program szervezése

A végrehajtás (lefuttatás) módja szerint a PLC-ben futó felhasználói program lehet *lineáris* és *strukturált* szervezésű.

*Lineáris* programszervezéskor a felhasználói program utasításai egyetlen programegységben vannak. Az utasítások ilyen esetben a programban megadott sorrendben

hajtódnak végre, valahányszor csak a program lefut. Az ilyen programszervezés hátránya, hogy hosszú programok esetén megnő a letapogatási idő, és hogy az ismétlődő programrészeket annyszor kell a programba bevinni, ahányszor a végrehajtásukra szükség van. A hosszú, terjedelmes program más tekintetben is hátrányos: nehezen áttekinthető, a javítása nehézkes stb.

A *strukturált* szervezésű program főprogramból és alprogramokból áll (az alprogramok egyéb elnevezései: programblokk, programmodul, szubrutin). A főprogramra van értelmezve a ciklus lefuttatása (ciklus kezdete, ciklus vége), de a főprogramból alprogramok hívhatók be, és ezek egymásba is ágyazhatók, vagyis egy-egy alprogram további alprogramokat tartalmazhat. Egy-egy alprogram többször is behívható, ismétléskor csak a behívó utasítást kell újra megadni. A strukturált szervezésű program felépítését a 7-5. ábra



7-5. ábra

szemlélteti. A főprogram végéről az elejére visszatérő vonal a ciklus újraindulását jelképezi; ezt az operációs rendszer (rendszerprogram) vezérli.

A *strukturált* programozás előnyei: a terjedelmes programokat könnyebb áttekinteni; egyszerűbb a program összeállítása; könnyebb a módosítások elvégzése; egyszerűbb a hibajavítás, mert egyszerre csak egy alprogramot kell futtatni; könnyebb és gyorsabb a teljes program üzembe helyezése stb. Összetettebb vezérlési feladatok csak strukturált programozással oldhatók meg.

Már korábban említettük, hogy a ciklust megszakíthatják különböző események (pl. vészjelzés), és hogy ezeket a megszakításkéréseket a program külön kiszolgáló programokkal kezeli. A kérés befutásakor a ciklus a futó alprogram határánál (vagy azonnal) megszakad, és a kiszolgáló program lefutása után a főprogramnak azon a helyén folytatódik, ahol

megszakadt. Ezek a kiszolgáló programok mellérendelt főprogramként futnak, de különböző prioritással. Szintén említettük, hogy a gyakran használt felhasználói programrészeket (pl. sin függvény, időzítők stb.) a PLC-ben előre programozott, beépített formában tároljuk, s így ezeket a felhasználónak nem kell mindig újra elkészíteni, hanem elegendő csak behívni. Ezek az ún. standard programok alprogramként futnak.

A PLC-k programozásával foglalkozó IEC 61131-3 sz. szabványban (l. később ismét) a *program* nevű programszervezési egység felel meg az itt tárgyalt főprogramnak, a *függvényblokk* és a *függvény* nevű pedig az alprogramnak. A szabványban a *program* nevű egység és a rendszerprogram között még egy programszervezési egység van, az ún. *task* (futásvezérlő, taszk). Minden *program* taszkhoz van rendelve, amely megadja, hogy a *program* ciklikusan vagy megszakításosan fusson, és hogy milyen legyen a programok prioritása. A taszkok a programszervezésben egymás mellé rendelve, de a bennük levő programok prioritása más-más.

A Step 7 programnyelvben a ciklikusan futó főprogram neve 1. sz. szervezőmodul (OB1), a felhasználói utasításokat tartalmazó alprogramok neve függvénymodul (FB) vagy függvény (FC), a standard felhasználói alprogramok pedig SFB vagy SFC jelűek. Ugyanitt van még egy programegység, az adatmodul (DB), amelyben a felhasználói program számára szükséges adatok tárolhatók. A Step 7 programnyelv a ciklusmegszakításokat szintén szervezőmodulnak nevezi, s különböző sorszámú OB-vel jelöli; ezek a rendszerprogram beépített részprogramjai, amelyeket a felhasználó tölt ki adatokkal.

### 7.5 A PLC programozása

A PLC-ben egyidejűleg két program fut, a felhasználói program és a rendszerprogram. A rendszerprogram az operációs rendszert, azaz a PLC működését, tevékenységét irányító algoritmust tartalmazza. Ez gyárilag beépített program, miközben a PLC programot futtat, a rendszerprogram nem változik. A felhasználói program az irányítási feladatot leíró algoritmust tartalmazza, ezt a felhasználó alkotja meg, és az irányítási feladattól függően mindig más lehet. A felhasználói program elkészítésére vonatkozó előírásokat, ajánlásokat az IEC 61131-3 sz. nemzetközi szabvány tartalmazza. Ez kiterjed a programnyelvekre (jelképrendszer, amelynek a segítségével a PLC-vel feladatot közölhetünk) és egyáltalán azokra a módokra, ahogyan egy PLC-munkaterv (projekt) elkészíthető.

### 7.5.1 Néhány, a programozással kapcsolatos alapismeret

A felhasználói program elkészítésére vonatkozó IEC 61131-3 sz. szabvány a jeleken elvégzendő műveletekhez *változókat* használ (l. alább részletesebben), és a műveletek elvégzéséhez három programszervezési egységet ismer: a *programot*, a *függvényblokkot* és a *függvényt* (angolul: Program, Function block, Function). Ezek közül az egységek közül a program felel meg az előző szakaszban tárgyalt főprogramnak, a függvényblokk és a függvény pedig az alprogramnak. Az egyszerűbbtől a bonyolultabb felé haladva:

A *függvény* több bemenő változót tartalmazhat, de csak egyetlen kimenő változója van, és elvégzett műveletek eredményeit nem tárolhatja. A kimenő értéket csak a bemenő értékek befolyásolhatják. A függvény ugyanazokra a bemenő adatokra mindig ugyanazt a kimenő eredményt (függvényérték, visszatérési érték) szolgáltatja. Többször előforduló, ismétlődő feladatok programozásához célszerű alkalmazni. A függvény másik függvényt hívhat.

A *függvényblokknak* vannak bemenő és kimenő változói, és saját adatterülete van, ahol elvégzett műveletek eredményeit tárolhatja. A kimenő értékeket a bemenő értékeken kívül ezek a tárolt adatok is befolyásolhatják, így ugyanazokra a bemenő adatokra a tárolt adatoktól függően más-más kimenő eredményt szolgáltathat. A függvényblokk az elkülöníthető, önmagukban egységet alkotó részfeladatok megfogalmazására alkalmas programszervezési egység. A függvényblokk függvényblokkot és függvényt hívhat.

A *program* mindazt „tudja”, mint a függvényblokk, de nem elkülönülő részfeladatokat lát el, hanem a függvényblokkok és a függvények feladatát hangolja össze, szervezi egységbe.

Lineáris programszervezésnél csak *program* nevű egység van, és minden utasítást ez tartalmaz. Strukturált programszervezéskor a *programon* kívül legalább egy *függvényblokk* vagy *függvény* is van, ilyenkor a *program* jellemzően vezérlési (pl. behívó) utasításokat, a másik kettő pedig jellemzően változókra vonatkozó utasításokat tartalmaz.

A változókra visszatérve, a felhasználói program a programozó által megadott *változókkal* dolgozik, a program utasításaiban foglalt műveleteket ezekkel hajtja végre.

A *változók* az érvényességi körük szerint lehetnek *globális* típusú változók, ezek a teljes felhasználói programban érvényesek, és lehetnek *lokális* változók, amelyek csak a függvényblokkon vagy a függvényen belül érvényesek.

A *változók* adattípus szerinti legelemibb változatai a logikai típusú és az egész szám típusú változók. A *logikai típusú* változók (BOOL) 0 vagy 1 értéket vehetnek fel, jellemzően ilyenek a bináris (kétállapotú) be- és kimenetek változói, valamint a program belső változói közül a bináris jellegűek. Az *egész szám típusú* változók (INT) jellemzően az analóg be- és



kimenetekhez rendelt változók. Itt a szabványos, pl. 0 – 10 V-os tartománynak egy nagy értékű egész számot (pl. 16365) feleltetünk meg, és a tartományon belüli értékeket – arányos átszámítással – egész részű számmal fejezzük ki. Pl. ha a tartomány 0 – 10 V, az egész szám pedig 16365, akkor 5 V-nak megfelel: az  $(5/10) \cdot 16365$  művelet egész részű eredménye, vagyis 8182. A fentiekén kívül természetesen az IEC 61131-3 sz. szabvány még számos más adattípust ismer: *valós szám, időtartam, dátum* stb.

A PLC a változókat *memóriaterületeken* tárolja, ezek a bemenetekhez rendelt (I), a kimenetekhez rendelt (Q), valamint a belső változókhoz rendelt (M) memóriák. A jelöléseket illetően: „I” jelentése: input; „Q” jelentése: output (a „Q” betű az „O” helyett használatos); „M” jelentése: merker (németből vett elnevezés).

A memóriában lévő változókat kétféleképpen érhetjük el. Az egyik elérési mód a hardverhez igazodó *közvetlen címzés*, ez pl. két bináris bemenet esetén a következő: I0.0, I0.1, vagy bináris merker esetében: M20.0. Itt a pont előtti szám az illető bájtának, a pont utáni szám a bájton belüli bitnek a sorszáma. Az analóg bemeneteket szoként kell megcímezni, ezt a W betű jelöli, pl. IW24, ahol 24 az illető szó kezdőbájtjának a sorszáma. A másik változó-elérési mód, hogy a közvetlen címhez *szöveges jelet, nevet* rendelünk hozzá, és a programban a változóra ezzel a névvel hivatkozunk. Két bemenet esetén pl. ez a név lehet: BE1, BE2. A változó neve – a szabvány szerint – nem kezdődhet számmal, csak betűvel vagy aláhúzással, és nem tartalmazhat ékezetes betűt, valamint helyközt. A közvetlen címet szokás abszolút címnek is nevezni, a nevet (szöveges jelet) pedig szimbolikus címnek.

Már korábban szó volt róla, hogy a műveletek egy *változó* és egy regiszter, az ún. *akkumulátor* tartalma között jönnek létre, és hogy az eredmény ugyancsak az akkumulátorban képződik. A szabvány is ismeri ezt az akkumulátort, „aktuális eredmény” (CURRENT RESULT, rövidítve: CR) néven. Az ezzel kapcsolatos műveletek nemcsak a változó és a CR tartalma közötti műveletek lehetnek, hanem a CR-be változó is betölthető, és a CR tartalma ki is íratható másik regiszterbe.

A szabvány szerint a változókat *deklarálni* kell: jellemzőik (érvényességi kör szerinti típus, adattípus stb.) megadásával fel kell őket sorolni. Ennek módjával itt nem foglalkozunk, az ismertető programrészleteket e nélkül mutatjuk be. Ez részben indokolható azzal, hogy a közvetlen cím a legtöbbször deklaráció nélkül is használható, ha pedig szöveges neveket is használunk, ezek hozzárendelése a közvetlen címekhez – ami már deklaráció – gyártmányoktól függően viszonylag egyszerűen megtehető. Ez természetesen csak egyszerűbb programoknál (és gyártmányoknál) járható út, bonyolultabbaknál nem. A deklaráció végrehajtási módja mindig függ attól, hogy milyen gyártmányú PLC-re

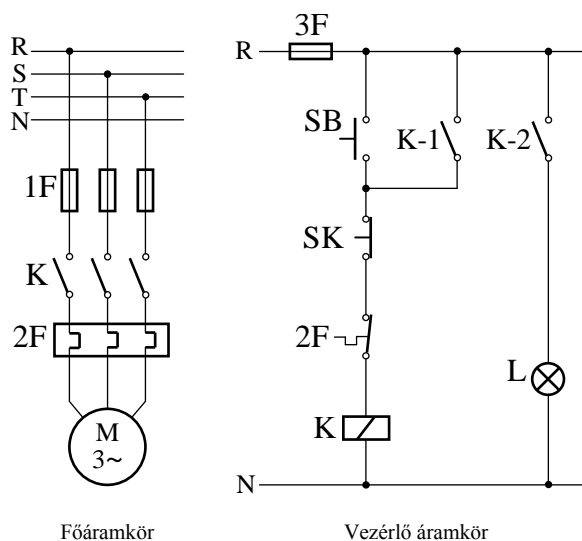
programozunk; ezzel kapcsolatban a Függelék F3. fejezetében rövid útmutató található a Step 7 programnyelvben alkalmazandó deklarációról.

A programozás minden esetben azzal kezdődik, hogy a kezelő és érzékelő szerveket hozzárendeljük a PLC bemeneteihez, a beavatkozó v. végrehajtó szerveket pedig a PLC kimeneteihez. Ez az *összerendelés* történhet táblázatosan vagy bekötési rajz megadásával. Ennek a bemutatására már programozási példát is kell választanunk; legyen ez egy egyszerű motorindítás. A példa ismertetéséhez – az ilyen feladatok jellegénél fogva – szükség van az áramutas ábrázolási mód (az áramúterv) fogalmainak a megismerésére.

#### Az áramutas ábrázolási mód:

Áramúton a tápfeszültség két sarka között bejárható, áramot vezető utakat értjük. Az áramút tartalmazhat csak soros elemeket is, de legtöbbször a soros elemeken kívül más elemeket, pl. párhuzamos részek egy-egy ágát is tartalmazza. Az áramút elemei érintkezős vezérlésekben relé- és mágneskapcsoló-tekercesek, érintkezők és az érintkezők által működtetett készülékek.

Az áramutas ábrázolási módban a tápfeszültség két párhuzamosan meghúzott vezetéke közé rajzoljuk be a tápfeszültség két sarka között bejárható áramutakat. Vezérlőkapcsolások



7-6. ábra

esetében általában csak a vezérlő áramköröket szokás áramutas formában ábrázolni, a főáramkört nem, de az ábrázolási mód a főáramkörre is kiterjeszthető. A példaként választott motorindítás kapcsolási rajza áramutas vezérlő áramkörrel a 7-6. ábrán látható; a vezérlő áramkör áramútjainak száma itt három.

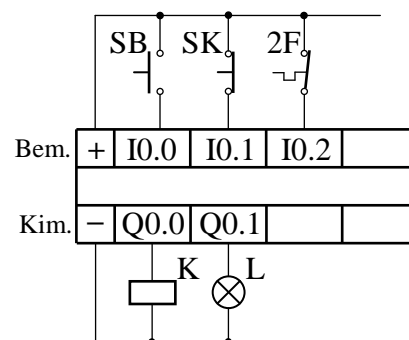
Az ábrán motorként háromfázisú indukciós motort tételeztünk föl. Az áramköri elemek, készülékek *rajzjele* mellé

írt betű, ill. betűk és számok csoportja az illető elem *tervjele*. Az ábra tervjelei rendre a következő elemeket jelölik: A *főáramkörben*: 1F: biztosító; K: a motorindító mágneskapcsoló főérintkezői; 2F: a hőkioldó érzékelője; M: motor. A *vezérlő áramkörben*: K: a mágneskapcsoló tekercse; K-1, K-2: a K mágneskapcsoló segédérintkezői; 2F: a hőkioldó nyitóérintkezője; SB: bekapcsoló nyomógomb; SK: kikapcsoló nyomógomb; L: jelzőlámpa.

(Az áramutas kapcsolásokban a név kezdődhet számmal, a névkezdő szám az egyébként egyforma jelű készülékek megkülönböztetésére szolgál.)

Mint látható, az áramutas rajzon a berendezések nem az összes elemükkel egy helyen, hanem elemeikre bontva vannak ábrázolva, és az elemek helye az áramköri előfordulásukat követi. Így pl. a mágneskapcsoló tekercse, főérintkezői és segédérintkezői a rajzon külön-külön helyen szerepelnek. Ez egyrészt a tervjelek számát megnöveli, másrészt bonyolultabb esetekben az összetartozást kifejező hivatkozásokat tesz szükségessé. E célból az áramutakat megszámozzák, és pl. a tekercsek alá táblázatot készítenek, amely megadja, hogy a tekercs által működtetett érintkezők melyik áramútban találhatók. Az áramutas rajzokon az elemeket mindig alapállapotban (nyugalmi állapotban) ábrázoljuk.

A 7-6. ábra szerinti kapcsolás működése: az SB nyomógomb megnyomásakor a K mágneskapcsoló behúz, de SB elengedése után is behúzva marad, mert a K tekercs a saját, K-1 jelű érintkezőjén keresztül SB elengedése után is vezérlőfeszültséget kap. A K mágneskapcsoló behúzásakor a motor elindul, és a jelzőlámpa kijelez. Az SK nyomógomb megnyomásakor vagy a 2F érintkező nyitásakor a motor leáll.



7-7. ábra

Az *összerendelésre* visszatérve, a példában alkalmazható összerendelés bekötési rajz formájában a 7-7. ábra szerinti lehet. A bekötési rajz – akárcsak az áramúterv – alaphelyzetet ábrázol. Ugyanezen példában a táblázatos összerendelés a 7-1. táblázat szerinti. (Logikai 1-nek a zárt állapotokat kell tekintenünk, mert az elemek zárásakor kapcsolnak +24 V-ot, azaz logikai 1-et az illető bemenetre.)

7-1. táblázat

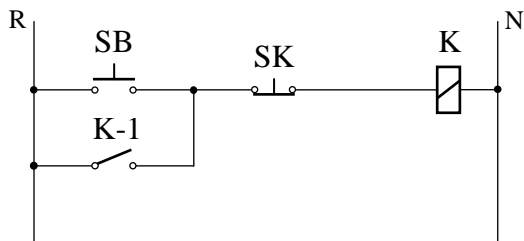
Megnevezés	Név	Logikai állapotok	Közvetlen cím
Záró nyomógomb (BE-gomb)	SB	Alaphelyzetben: 0 Megnyomásakor: 1	IO.0
Nyitó nyomógomb (KI-gomb)	SK	Alaphelyzetben: 1 Megnyomásakor: 0	IO.1
Hőkioldó nyitóérintkezője	2F	Alaphelyzetben: 1 Működésakor: 0	IO.2
Motor mágneskapcsoló	K	Alaphelyzetben: 0 Bekapcsoláskor: 1	Q0.0
Jelzőlámpa	L	Alaphelyzetben: 0 Bekapcsoláskor: 1	Q0.1

A bekötési rajz előnye, hogy azon a logikai állapotok könnyebben követhetők; de bekötési rajzra a vezérlés megvalósítása esetén az elemek valóságos bekötéséhez is szükség van. Az

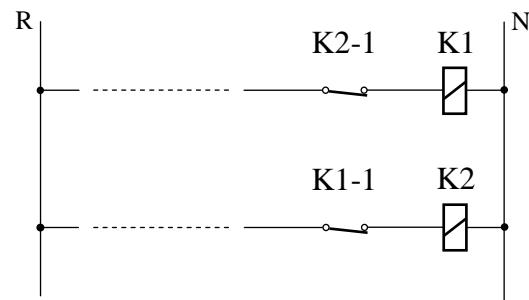
összerendelési táblázat előnye, hogy a változók deklarálásához közvetlenül felhasználható.

Merker (belső változókhoz rendelt) memóriák használata esetén célszerű ezeknek a memóriáknak a feladatát is táblázatban rögzíteni. A bekötési rajz és a táblázatok a programozási munka során természetesen az igények szerint módosulhatnak.

Vezérléstechnikai kiegészítés: A 7-6. ábra szerinti kapcsolat K-1 érintkezője a vezérlések egyik alapvető feladatát, az ún. *öntartó* feladatot látja el. Az öntartást külön önmagában a 7-8. ábra mutatja. Az öntartás mellett az érintkezős (relés) vezérlések gyakran alkalmazott alapeleme a *reteszelés* is. Ezt akkor alkalmazzuk, amikor egy elem (pl. K1) működését egy másik elem (pl. K2) működésének esetére le kell tiltani. A reteszelést a letiltandó elemmel sorba kapcsolt nyitóérintkezővel valósítjuk meg (7-9. ábra, felső sor; K2 reteszeli K1-et). Amennyiben két elem nem működhet egyszerre, ún. *keresztreteszelést* alkalmazunk (7-9. ábra, mindkét sor).



7-8. ábra



7-9. ábra

### 7.5.2 PLC felhasználói programnyelvek

A felhasználói programnyelvek olyan jelképrendszerek, amelyeknek a segítségével a PLC-vel feladatot közölhetünk. A programnyelveket két csoportba soroljuk: *szöveges* és *grafikus* programnyelvek. A szöveges programnyelvek az *utasításlistás* és a *magas szintű* (ún. strukturált) programnyelvek, a grafikus programnyelvek pedig a *létradiagramos*, a *funkcióterves* és a *sorrendi folyamatábrás* programnyelv. A felsoroltak közül a magas szintű programnyelvekkel nem foglalkozunk.

#### 7.5.2.1 Utasításlistás programozási nyelv

Az utasításlistás programnyelv (angolul Instruction List, rövidítve IL; németül Anweisungsliste, rövidítve AWL) gépközel programnyelv, amely szöveges utasítások sorozatából áll. Egy-egy utasítás két részt tartalmaz: a *műveleti részt* és az *operandusrészt*. A műveleti rész azt határozza meg, hogy a CPU-nak milyen műveletet kell végrehajtani; az

operandusrész pedig azt, hogy mi az, amin a megadott műveletet el kell végezni, azaz meghatározza az ún. operandust.

A műveleti rész (7-10. ábra) tartalmazza magát a műveletet, rendszerint az angol elnevezéssel vagy annak rövidítésével: pl. AND; és tartalmazhat egy (csak egy) kiegészítést, amely a műveletet módosítja: pl. N. Az N kiegészítés jelentése pl.: végrehajtás előtt az operandust negálni kell. Az operandusrészben az operandus megadható közvetlen címmel, de megadható névvel (szimbolikus címmel) is. A műveleti rész és az operandusrész között legalább egy helyközt kell hagyni.

Műveleti rész		Operandusrész
Művelet	Kiegészítés	BE1
AND	N	

7-10. ábra

A műveletek zárójellel összekapcsolhatók, és a zárójelek egymásba ágyazhatók. A „kezdő zárójel” műveletkiegészítésnek számít, a „befejező zárójel” viszont műveletnek. A zárójelek az operandust egy műveletsorozat eredményével teszik egyenlővé.

A BOOL típusú, azaz logikai változókra vonatkozó műveletek és értelmezésük a 7-2. táblázat szerinti.

7-2. táblázat

Művelet	Kiegészítés		Értelmezés
LD	N	(	Az operandus betöltése a CR-be.
AND	N	(	ÉS művelet a CR és az operandus között. Eredmény a CR-ben.
OR	N	(	VAGY művelet a CR és az operandus között. Eredmény a CR-ben.
XOR	N	(	KIZÁRÓ-VAGY művelet a CR és az operandus között. Eredmény a CR-ben.
ST	N		A CR tartalmának kivitele az operandusba.
S			Az operandus beállítása „1” értékre.
R			Az operandus beállítása „0” értékre.
)			A zárójeles művelet vége.

A példaként választott motorindítás utasításlistás programjának megírásához tekintsük a 7-6. ábra szerinti kapcsolási és a 7-7. ábra szerinti bekötési rajzot.

A bekötési rajz alaphelyzetet ábrázol, a 7-7. ábrán ekkor SB és K „0” értékű, SK és 2F „1” értékű; ez a K kivételével minden elemen látszik is. A motor K mágneskapcsolójának

tekercse (7-6. ábra) akkor húzhat be (állapota akkor lehet „1”), ha az SB nyomógombot megnyomjuk ( $SB=1$  lesz), és az SK nyomógomb zárt („1”), továbbá a 2F érintkező is zárt („1”). Ez ennek a három elemnek a K-ra vonatkozó ÉS kapcsolatát jelenti ( $SB \cdot SK \cdot 2F$ ). A K mágneskapcsoló behúzásakor ( $K=1$ ) a motor elindul. SB elengedése után a K tekercsnek behúzva kell maradnia, ezt úgy érhetjük el, hogy a K kimenetet (mint logikai változót) VAGY kapcsolatba hozzuk az SB-vel, és az ÉS kapcsolatban az eddigi SB helyén ezt szerepeltetjük ( $(SB + K) \cdot SK \cdot 2F$ ). Ekkor az ÉS művelet eredménye SB elengedése ( $SB=0$ ) után is „1” marad. Ugyanakkor az ÉS kapcsolat fennmaradása miatt az SK nyomógomb megnyomásakor ( $SK=0$ -nál), ill. a 2F termikus túláramvédelmi nyitóérintkező nyitásakor ( $2F=0$ -nál) a K mágneskapcsoló elenged ( $K=0$ ), és a motor leáll, ahogy a helyes működéshez szükséges. Az utasításlistás program mindezek alapján a következő:

LD	SB	„CR=SB”
OR	K	„CR=SB+K”
AND	SK	„CR=(SB + K) · SK ”
AND	2F	„CR=(SB + K) · SK · 2F ”
ST	K	„K=CR”
ST	L	„L=CR”

Az utasítások mellett idézőjelben megadtuk, hogy az utasítás hatására mi történik. Az egy kimenetre vonatkozó logikai függvények első utasításának – ahogy itt is – mindig változó betöltésének kell lennie.

#### 7.5.2.2 Létradiagramos programozási nyelv

A létradiagramos programozási nyelv (angolul Ladder Diagram, rövidítve LD v. LAD; németül Kontaktplan, rövidítve KOP) az érintkezős (relés) villamos vezérlések áramutas kapcsolási rajzaiból kialakult programnyelv.

7-3. táblázat

Záróérintkező	
Nyitóérintkező	
Tekercs	

A létradiagramok legjellegzetesebb elemei: az érintkezők (kontaktusok) és a logikai kapcsolatok eredményét, kimenetét tartalmazó változók, az ún. tekercsek. Az érintkezők lehetnek *záróérintkezők* és *nyitóérintkezők*, a tekercsek pedig lehetnek a PLC bináris *kimenetei*, de lehetnek bináris *merkek* (memóriabitek) is. Az elemek jelképét a 7-3. táblázat mutatja. A táblázatbeli elemeken kívül lehetnek még a létradiagramban *időzítők*, *számlálók* és egyéb, különleges elemek is. Az elemeket, akár csak az áramutas rajzokon, *huzalozás* köti össze. A létradiagramot szintén az alapállapotra szerkesztjük meg.

Fontos tudatosítani, hogy a létradiagram elemei nem valódi elemek, nem valódi érintkezők, tekercsek stb., hanem szoftver elemek. Ezért pl. a nyomógombnak nincs külön jele a létradiagramban, hanem ugyanúgy érintkező jelöli, mint pl. egy relé érintkezőjét.

A létradiagram elemei közül az érintkezők bináris bemenetekhez és tekercsekhez (kimenet, merker) rendelten működnek, és a *záróérintkező* egyező logikai állapotot valósít meg annak az elemnek a logikai állapotával, amelyhez rendelve van, a *nyitóérintkező* pedig ellentéteset. Ezt a 7-4. táblázat szemlélteti; látható, hogy a záróérintkező logikai állapotot másol, a nyitó pedig a logikai állapotot megfordítja.

7-4. táblázat

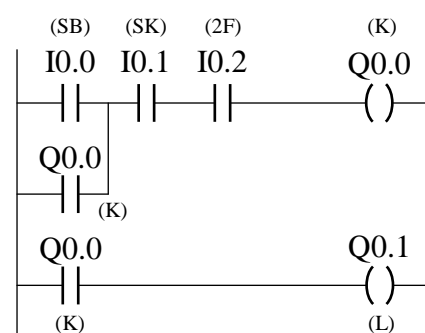
Bemenet, tekercs logikai állapota	Hozzárendelt záróérintkező		Hozzárendelt nyitóérintkező	
	kapcsolási állapota	logikai állapota	kapcsolási állapota	logikai állapota
1	zárt	1	nyitott	0
0	nyitott	0	zárt	1

Ami a logikai műveleteket illeti, az ÉS műveletnek a létradiagramban soros kapcsolás, a VAGY műveletnek párhuzamos kapcsolás felel meg, éppúgy, mint a relés vezérlésekben.

A bemutatott motorindítás vezérlőáramkörének létradiagramját a fentieknek megfelelően a 7-11. ábra mutatja. A létradiagramot két függőleges vonal közé húzott, vízszintes „áramutakkal” ábrázoljuk. A kimenetek egyik pontja mindig a jobb oldali függőleges egyenes. A huzalozás kereszteződését kerülni kell. Az összetartozó működtető és működtetett elemeket (pl. tekercs és érintkezője) ugyanolyan betűjellel látjuk el.

Az ábra legfelső sorában felismerhető a már korábban elemzett ÉS kapcsolat. Ezt záróérintkezőkkel kell megvalósítanunk, mert ekkor alapállapotban, amikor a kapcsolásban az SB nyomógomb „0”, az SK és 2F érintkező pedig „1” állapotú, a diagramban nyitott I0.0-t, zárt I0.1-et, és zárt I0.2-t, kapunk, ahogy a működéshez szükséges. A diagram értelmezéséhez szükség van a motorindításra korábban megadott

összerendelési jegyzékre (I0.0-hoz pl. SB tartozik stb.). Ezenkívül a teljes vezérlés vizsgálatához szükség van a főáramköri kapcsolásra is. Ha a biztonság úgy kívánja, az áramutas rajzon látható K-1 és K-2 érintkezők is beköthetők a PLC egy-egy bemenetére, és



7-11. ábra

Q0.0 helyett a programban ezek a bemenetek szerepeltethetők; ekkor azonban már két újabb összerendelésünk is van.

Az előzőekből leszűrhető, hogy villamos berendezés PLC-vel történő vezérlése esetén a vezérlés teljes elvi jellemzéséhez a következők szükségesek:

a/ a főáramkör kapcsolási rajza;

b/ az összerendelési jegyzék táblázat vagy bekötési rajz, esetleg mindkettő formájában; kiegészítve a merker memóriák feladatát tartalmazó táblázattal;

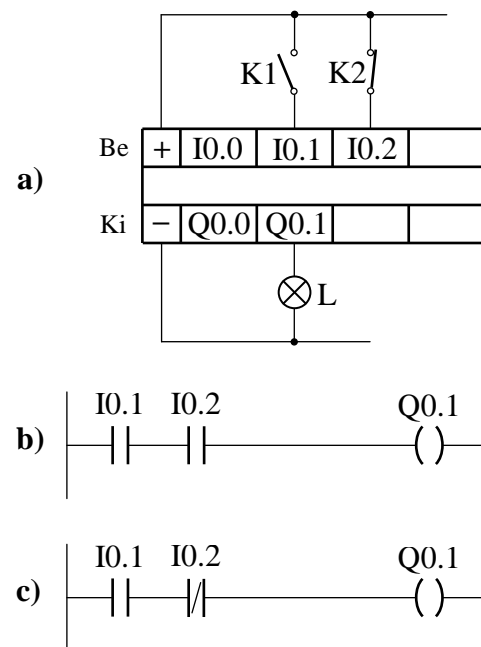
c/ a felhasználói program (ez most a létradiagram).

Nemvillamos berendezés vezérlésekor a főáramkör kapcsolási rajza helyett a berendezésnek a beavatkozó és érzékelő szerveket tartalmazó szerkezeti (technológiai) vázlatára van szükség.

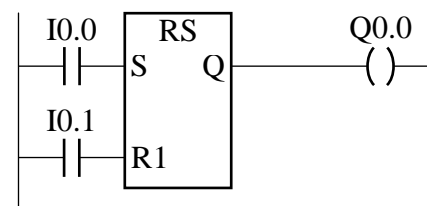
Az érintkezőkkel kapcsolatban fontos tudatosítani, hogy a PLC nem tudja megállapítani, hogy egy bemenetre kívülről záró- vagy nyitóérintkező csatlakozik-e, csak azt ismeri fel, hogy a bemeneten logikai 1 vagy logikai 0 van-e, és a logikai függvény kiértékelésekor ezt az 1-et vagy 0-t veszi figyelembe. Legyen például a feladat annak az állapotnak a kijelzése, amikor egy K1 (mechanikus) záróérintkező működik ÉS (logikai ÉS) egy K2 nyitóérintkező nem működik (7-12.a ábra)! Ez esetben a létradiagramban mindkét bemenethez záróérintkezőt kell rendelnünk (7-12.b ábra), mert K1 működésekor az I0.1 bemenet 1-es, K2 nem-működésekor az I0.2

bemenet is 1-es állapotú, és ezekre az állapotokra a létradiagramban záróérintkezőkkel kapunk zárt utat. Ha ezzel szemben az I0.1 bemenethez záróérintkezőt, az I0.2 bemenethez pedig nyitóérintkezőt rendelnénk (7-12.c ábra), akkor az I0.1 bemenet 1-es és az I0.2 bemenet 1-es állapota esetén a létradiagramban I0.2 helyén szakadást kapnánk. Ez utóbbi esetben a kijelzett állapot „K1 működik ÉS K2 működik” lenne.

A létradiagramnak az eddig tárgyaltakon kívül más elemei is lehetnek (időzítő, számláló, R/S tároló stb.). Ezek közül a 7-13. ábra R/S tároló elem elhelyezését mutatja létradiagramban.



7-12. ábra

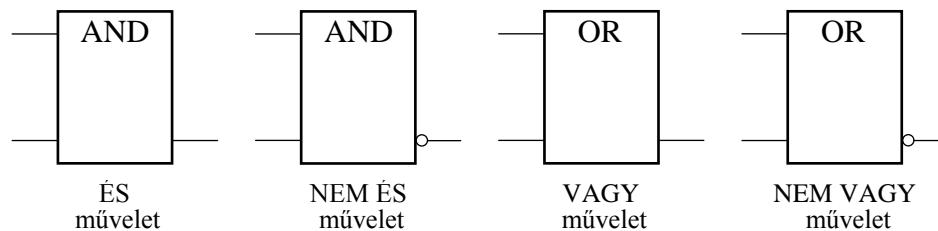


7-13. ábra



### 7.5.2.3 Funkcióterves programozási nyelv

A funkcióterves programozási nyelv (angolul Function Block Diagram, rövidítve FBD; németül Funktionsplan vagy Funktionsbausteinsprache, rövidítve „FUP”, ill. „FBS”) a digitális rendszerek logikai vázlataihoz hasonló alakban írja le az irányítási feladatot. Grafikus elemekből, ún. *funkcióblokkokból* épül fel, ennek bal oldalán vannak a bemenetek, jobb oldalán a kimenetek, és a funkcióblokkok egymással összekapcsolhatók. A funkcióblokk a



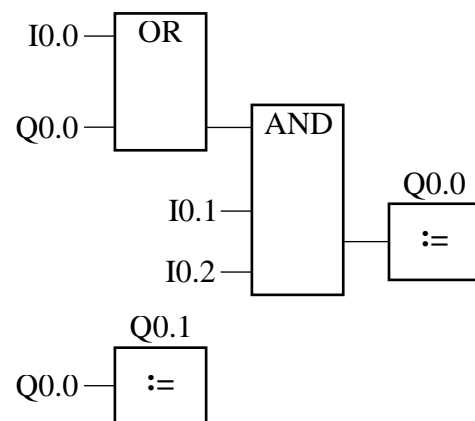
7-14. ábra

rendszer egy meghatározott feladatot ellátó, „funkcionális” egységének a rajzi megjelenítése, tekinthető grafikus függvényblokknak (alprogramnak), de felfogható hardver-elem jelképeként is. A funkcióterv felülről lefelé és balról jobbra haladva olvasható.

A fontosabb *logikai műveletek* szabványos funkcióblokkja a 7-14. ábrán látható. Az AND felirat helyett gyakran az „&” jelet, az OR felirat helyett gyakran a „≥1” jelet alkalmazzák. A 7-11. ábrán létradiagramjával jellemzett motorindítás funkciótervét a 7-15. ábra mutatja. A logikai kapcsolatok kimenetének (kimenet, merker) külön jelképe van, ennek kinézete az ábráról leolvasható.

A logikai műveleteken kívüli, fontosabb funkcióblokkok a következők: *R/S tárolók, élkiértékelők, számlálók, időzítők és komparátorok*.

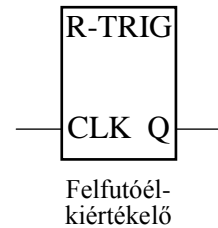
Az *R/S tároló* olyan elem, amelybe logikai „1”-et lehet beírni, s az elem ezt tárolja, amíg törlő utasítás nem érkezik. Az R/S tároló lehet *beírásra* és *törlésre* kitüntetett tároló. *Törlésre* kitüntetett



7-15. ábra

esetben, ha a beíró (SET) és a törlő (RESET) jel egyidejűleg „1”, a törlő jel határozza meg a kimenetet, vagyis annak értéke „0”. Ilyenkor a tároló jelölése RS, a törlő bemeneté R1; ilyen blokk látható a 7-13. ábrán. *Beírásra* kitüntetett esetben a helyzet fordított, és a tároló jelölése SR, a beíró bemeneté pedig S1.

Az *élkiértékelő* lehet *felfutóél-* és *lefutóél-kiértékelő*. A „felfutóéles” esetben (R-TRIG, 7-16. ábra) az elem kimenete abban a  $T_c$  idejű programciklusban, amelyben a CLK bemenet 0-ról 1-re vált, a ciklusnak a váltás után fennmaradó részére „1”. A „lefutóéles” esetben (F-TRIG) az elem kimenete annak a  $T_c$  idejű programciklusnak a fennmaradó részére „1”, amelyben a CLK bemenet 1-ről 0-ra vált.



7-16. ábra

A számláló lehet *fölfelé* és *lefelé* számláló (de van fölfelé-lefelé változat is).

A CTU (Count Up) jelű *fölfelé számláló* (7-17. ábra) mindaddig fölfelé számol, amíg számolt értéke a beállított határértéket el nem éri. A CTU számláló be- és kimeneteinek rendeltetése:

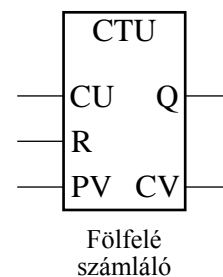
CV: a számláló értéke (V: value);

CU: számlálóbemenet, az itt megjelenő jel felfutó élére a számláló értéke 1-gyel növekszik;

PV: a beállított határérték;

R: törlőbemenet, az itt megjelenő jel felfutó élére a számláló értéke 0-val lesz egyenlő;

Q: kétértékű kimenet, értéke (csak akkor) 1, ha  $CV \geq PV$ .



7-17. ábra

A felsorolt be- és kimenetek közül CU, R és Q kétértékű (BOOL) típusú, CV és PV egész szám (INT) típusú.

A CTD (Count Down) jelű *lefelé számlálón* (7-18. ábra) beállítható egy kezdeti érték, és a számláló mindaddig lefelé számol, amíg számolt értéke nulla nem lesz. A CTD számláló be- és kimeneteinek rendeltetése:

CV: a számláló értéke;

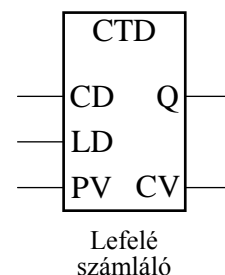
CD: számlálóbemenet, az itt megjelenő jel felfutó élére a számláló értéke 1-gyel csökken;

PV: a beállított kezdeti érték, alapértelmezés: 0;

LD: a számláló kezdeti értékének beállítása, az itt megjelenő jel felfutó élére a számláló értéke PV-vel lesz egyenlő, Q pedig 0 lesz;

Q: kétértékű kimenet, értéke (csak akkor) 1, ha CV értéke 0.

A felsoroltak közül CD, LD és Q kétértékű (BOOL) típusú, CV és PV egész szám (INT) típusú.



7-18. ábra

Az *időzítők* szabvány szerinti típusai: az *impulzus időzítő*, a *bekapcsolás-késleltetési* és a *kikapcsolás-késleltetési időzítő*.

Az *impulzus időzítő* jele: TP (Time-Pulse). Funkcióblokkja és a viselkedését bemutató idődiagram a 7-19. ábrán látható. A be- és kimenetek rendeltetése:

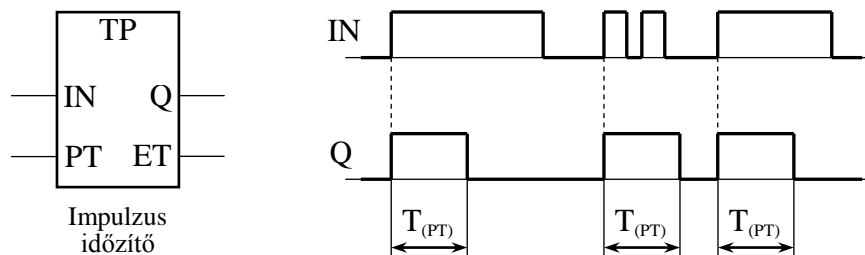
IN: bemenet, az ide érkező jel felfutó élére indul az időzítés;

PT: a kimeneti impulzus időtartamát állítja be, értékét a program mindig csak az indító jel felfutó élére kérdezi le;

Q: kimenet;

ET: az indítás óta eltelt idő kijelzése.

A felsoroltak közül IN és Q kétértékű (BOOL) típusú, PT és ET időtartam (TIME) típusú.



7-19. ábra

A *bekapcsolás-késleltetési időzítő* jele: TON. Funkcióblokkja és a viselkedését bemutató idődiagram a 7-20. ábrán látható. A be- és kimenetek rendeltetése:

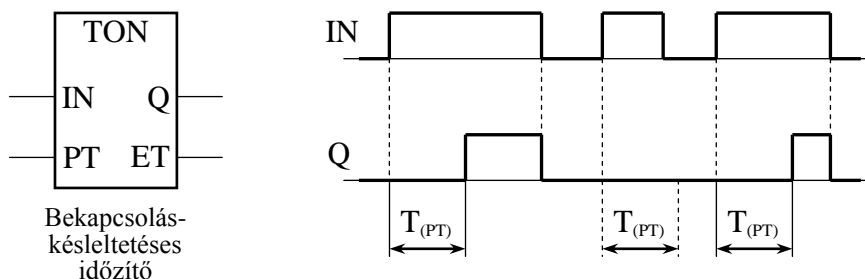
IN: bemenet, az ide érkező jel felfutó élére indul az időzítés;

PT: a kimeneten megjelenő jel késleltetésének az idejét állítja be;

Q: kimenet;

ET: az indítás óta eltelt idő kijelzése.

A felsoroltak közül IN és Q kétértékű (BOOL) típusú, PT és ET időtartam (TIME) típusú.



7-20. ábra

A *kikapcsolás-késleltetési időzítő* jele: TOF. Funkcióblokkja és a viselkedését bemutató idődiagram a 7-21. ábrán látható. A be- és kimenetek rendeltetése:

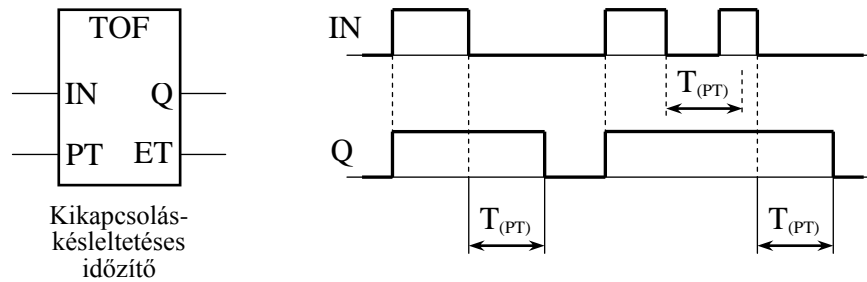
IN: bemenet, az itt megjelenő jel felfutó élére a kimenet 1-re vált;

PT: a bemeneti jel lefutó éle után számított késleltetési időt állítja be;

Q: kimenet;

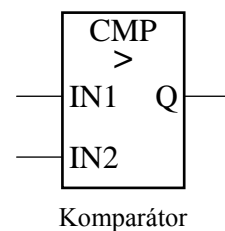
ET: a lefutó él óta eltelt idő kijelzése.

A felsoroltak közül IN és Q kétértékű (BOOL) típusú, PT és ET időtartam (TIME) típusú.



7-21. ábra

A komparátoroknak (CMP) két bemenetük (IN1, IN2) és egy kimenetük (Q) van, és az IN1 és az IN2 bemenet között – ilyen sorrendben – összehasonlítást végeznek. Ha az összehasonlítási feltétel teljesül, a kimenet értéke logikai 1, egyébként 0. Az összehasonlítási műveletek a következők:  $>$ ,  $\geq$ ,  $=$ ,  $\neq$ ,  $\leq$ ,  $<$ . A funkcióblokk a  $>$  műveletre a 7-22. ábrán látható. A bemenetek egész szám (INT) típusúak, a kimenet kétértékű (BOOL) típusú.



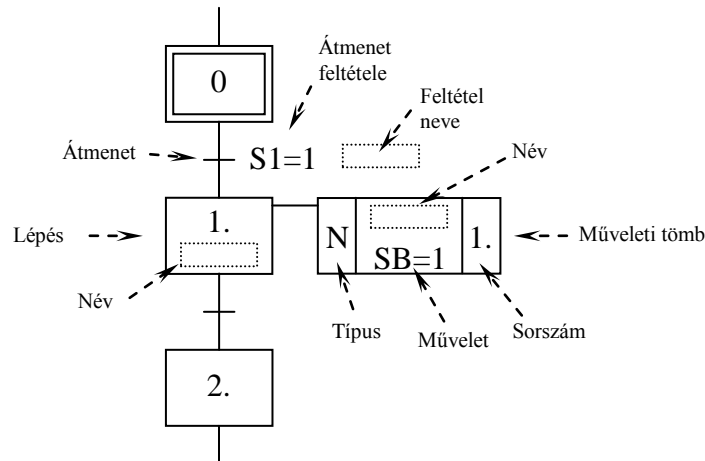
7-22. ábra

#### 7.5.2.4 Sorrendi folyamatábra nyelv

A sorrendi folyamatábra programozási nyelv (angolul Sequential Function Chart, rövidítve SFC; németül Ablaufsprache, rövidítve AS) a lefutó vezérlések leírására, ill. programozására kidolgozott programnyelv, de alkalmazható olyan esetekben is, amikor a vezérlés nem kifejezetten lefutó vezérlés, de egymást követő részfeladatokra bontható. (Megj.: A nyelvet nevezik gráfnak is.)

Lefutó vezérléskor – mint korábban láttuk – a vezérlés menete lépésekre tagolódik, amelyek mindegyikében beavatkozást v. beavatkozásokat kell végrehajtani, és az egyes lépések csak akkor indulhatnak, amikor az előző már eredményesen lejátszódott. Az eredményesség itt azt jelenti, hogy a vezérelt szakasz (folyamat) előírt állapotba került, ami bizonyos, érzékeléssel megállapítható feltételek fennállása esetén mondható ki. Az elmondottaknak megfelelően (és mert grafikus nyelv) a sorrendifolyamatábra-nyelv (a továbbiakban SF-nyelv) *lépések* és *átmenetek* egymást váltó sorozatát jeleníti meg olyan ábrázolásban, amelyben a lépésekhez *beavatkozások* (műveletek, akciók, események), az átmenetekhez pedig *átmenet-feltételek* tartoznak (7-23. ábra).

A *lépéseknek* van sorszámuk, és lehet nevük, pl.: „M(otor) Be”. A lépés lehet aktív, amikor a lépésen belüli műveletek éppen végrehajtódnak, és lehet inaktív az ellenkező



7-23. ábra

esetben. A lépést a sorrendiségre utalóan szekvenciának is nevezik. A vezérlés kezdeti lépését kettős vonallal rajzolt tömb jelöli, ennek a 0 jelölést szokás adni.

A lépésen belüli *műveleteknek* szintén van sorszámuk, és lehet nevük, pl.: „SK Ki”. A műveleteknek az előzőeken kívül megadható a típusa is, amely a szabvány szerinti alaptípusokból, ill. ezek kombinációiból választható. Az alaptípusok a következők:

- N: nem tárolt művelet
- S: tárolt művelet végrehajtása
- R: tárolt művelet törlése
- P: impulzus jellegű művelet
- L: időben korlátozott művelet
- D: késleltetett művelet

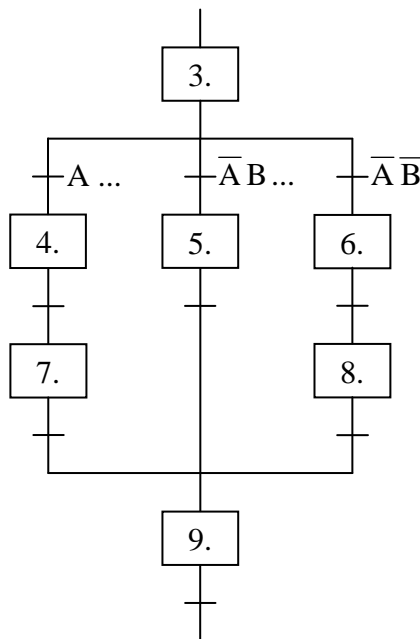
Az *átmenet-feltételeknek* szintén lehet neve, pl.: „Tartály tele”.

A *műveletek* és az *átmenet-feltételek* a többi szabványos programnyelven is megírhatók, de megírhatók SF-nyelven is.

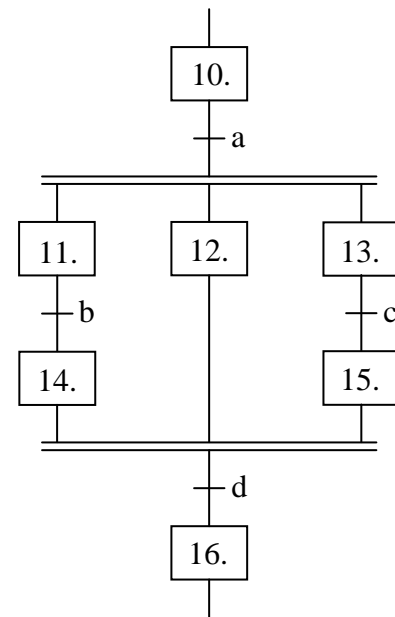
A 7-23. ábrával jellemzett SF-nyelvű programrészlet két lépése időben egymás után, időben „sorosan” következik be. Az ilyen időben soros lépések közötti váltás szokásos rendje a következő: ha egy lépés aktív, és a következőre való átmenet feltétele teljesül, a következő lépés aktívvá válik, és az előzőt inaktívvá teszi.

Az SF-nyelv az időben soros lépések programozásán kívül lehetőséget biztosít időben egymás mellett, időben „párhuzamosan” elhelyezkedő lépések programozására is. Ennek eszköze az *elágazás*. Az elágazás lehet VAGY jellegű (7-24. ábra), és lehet ÉS jellegű (7-25. ábra).

A VAGY jellegű elágazást a szabvány egyvonalas jelöléssel ábrázolja (7-24. ábra). VAGY elágazásnál a program az elágazás előtti lépésről az elágazásnak csak az egyik ágára léphet tovább. Ez úgy érhető el, hogy minden ágba történő belépésnél – mint az ábrán is – a többi ágat kizáró feltételt alkalmazunk. A 7-24. ábrán pl. a 3. lépésről a továbblépés vagy csak a 4., vagy csak az 5., vagy csak a 6. lépésre lehetséges. Az elágazások egy ágba történő összefutását konvergálásnak nevezik. VAGY elágazásoknál a konvergálás utáni lépésre bármely elágazásról át lehet lépni. A 7-24. ábrán pl. a 9. lépésre át lehet térni a 7., az 5. és a 8. lépésről is.



7-24. ábra



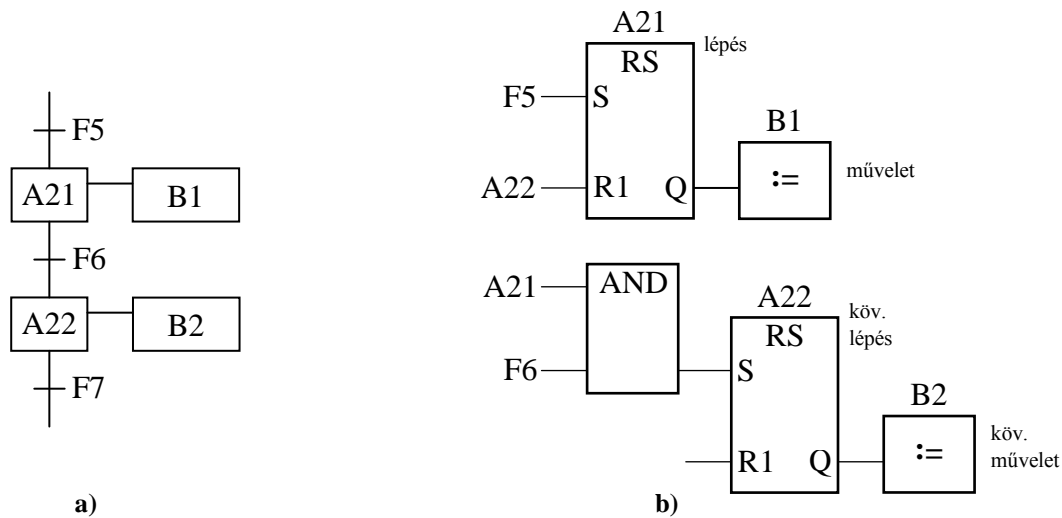
7-25. ábra

Az ÉS jellegű elágazás kétvonalas jelöléssel van ábrázolva (7-25. ábra). Ennél az elágazásnál a program az elágazás előtti lépésről az elágazás összes ágának az első lépésére egyidejűleg átlép. Ehhez az elágazás előtti lépésnek aktívnak kell lenni, és emellett teljesülnie kell a lépés és az elágazás közötti átmenet feltételének is. A 7-25. ábrán pl. a 10. lépésről, ha a lépés aktív, az „a” átmenet feltételének a teljesülésekor a program egyidejűleg átlép a 11., 12. és 13. lépésre. Az ÉS elágazást követő konvergáláskor az elágazásokról való továbblépéshez az összes ág utolsó lépésének az aktív állapota szükséges, és emellett teljesülnie kell a konvergálás utáni átmenet feltételének is. Így a 7-25. ábrán a 16. lépésre történő továbbhaladáshoz a 14., 12. és 15. lépésnek kell aktívnak lennie, és a d átmenet feltételének kell teljesülnie.

Az SF programok alapját képező sorrendiség megvalósítására ún. sorozatképzőket alkalmaznak. Ebben minden lépéshez R/S tároló van hozzárendelve, és a lépés, s így a lépés

műveleteinek a végrehajtása akkor kezdődik, amikor a lépéshez rendelt R/S tároló kimenete „1” értékűvé válik. Ha a lépés utáni átmenet feltétele teljesül, akkor a sorrendben következő lépés tárolójának a kimenete „1” értékű lesz, és az előző lépés tárolóját törli.

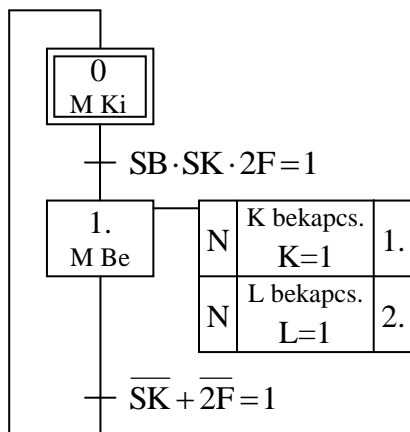
Az SF programnyelv (SFC) nem csak arra alkalmas, hogy közvetlenül a PLC-be bevihető programot készítsünk vele, hanem alkalmas arra is, hogy a vezérlési feladatot a segítségével megfogalmazzuk, függetlenül attól, hogy a tényleges programot milyen nyelven



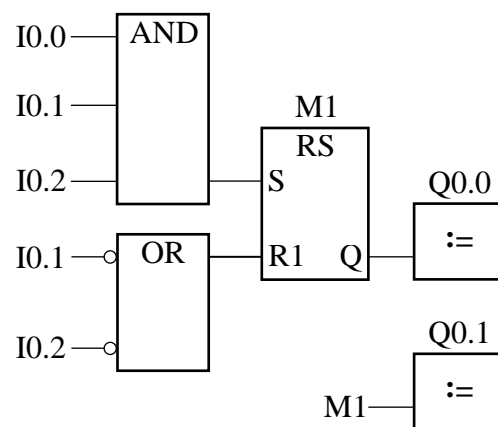
7-26. ábra

szándékozunk megírni. Ezért gyakori, hogy a vezérlési feladatot SF-nyelven fogalmazzák meg, és a PLC-be való bevitelhez az SF-nyelvű programot átírják más nyelvű, pl. létradiagramos vagy funkcióterves programmá. Az SF programok funkcióterves átírásának elvét két lépést tartalmazó programrészlet esetére a 7-26. ábra mutatja be. Az a) ábrán látható az SF-nyelvű, a b) ábrán a neki megfelelő funkcióterves programrészlet.

Az előző programnyelvek mindegyikénél tárgyalt egyszerű motorindítás SF-nyelvű programja a 7-27. ábrán látható. Két lépést különböztetünk meg: 1. a motor ki van kapcsolva



7-27. ábra



7-28. ábra

(M Ki), 2. a motor be van kapcsolva (M Be). A kikapcsolt állapot a kezdő lépés, innen a bekapcsolt állapotra való továbblépés feltétele, hogy az SB nyomógomb megnyomott, tehát zárt ÉS az SK nyomógomb, valamint a hőkioldó 2F érintkezője alaphelyzetű, tehát szintén zárt legyen. Az „M Be” lépéshez rendelt művelet a K mágneskapcsoló és a jelzőlámpa bekapcsolása. A motor bekapcsolt állapotáról a kikapcsolt állapotára térünk vissza, a visszatérés feltétele az SK kikapcsoló nyomógomb nyitott VAGY a 2F termikus túláramvédelmi érintkező nyitott állapota. Az ábra olvasásához felelevenítjük az összerendelési táblázatot, amelyet a jelzőlámpával kiegészítve a 7-5. táblázat mutat. A 7-27. ábrán nem a közvetlen címeket használtuk, hanem a táblázat szerinti neveket.

7-5. táblázat

Megnevezés	Név	Logikai állapotok	Közvetlen cím
Záró nyomógomb (BE-gomb)	SB	Alaphelyzetben: 0 Megnyomáskor: 1	I0.0
Nyitó nyomógomb (KI-gomb)	SK	Alaphelyzetben: 1 Megnyomáskor: 0	I0.1
Hőkioldó nyitóérintkezője	2F	Alaphelyzetben: 1 Működéskor: 0	I0.2
Motor mágneskapcsoló	K	Alaphelyzetben: 0 Bekapcsoláskor: 1	Q0.0
Jelzőlámpa	L	Alaphelyzetben: 0 Bekapcsoláskor: 1	Q0.1

A 7-27. ábra szerinti SF program formális funkcióterves átírásával a 7-28. ábrán látható programot kapjuk. Az ábrán szereplő M1 merker az 1. lépés RS tárolója. Ezen az ábrán már a közvetlen címek szerepelnek. (A 7-28. ábra szerinti program egyszerűsíthető, ennek elemzésével nem foglalkozunk.)



## A FELHASZNÁLT IRODALOM JEGYZÉKE

### Az 1. és 2. fejezethez:

- [1] Dr. Bausz Imre: Irányítástechnika I., KKVMF, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983
- [2] Csáki Frigyes – Bars Ruth: Automatika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986
- [3] Gecsey László: Automatika gyakorlatok Windora programmal, BMF KVK - 2038, Budapest, 2006
- [4] Hetthéssy – Tuschák – Bars – Barta: Szabályozástechnika gyakorlatok, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002, azonosító: 10043
- [5] Mórocz István: Irányítástechnika I., BMF KKVFK - 2038, Budapest, 2006
- [6] Tuschák Róbert: Szabályozástechnika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2003, azonosító: 55020
- [7] Tverdota Miklós: Automatika I., BMF KVK - 2005, Budapest, 2002

### A 3. és 4. fejezethez:

- [1] Csáki Frigyes – Bars Ruth: Automatika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986
- [2] Mórocz István: Irányítástechnika I., BMF KKVFK - 2038, Budapest, 2006
- [3] Tuschák Róbert: Szabályozástechnika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2003, azonosító: 55020
- [4] Tverdota Miklós: Automatika, Mintavételes rendszerek, BMF KKVFK - 2006, Budapest, 2003

### Az 5. fejezethez:

- [1] Csáki Frigyes – Bars Ruth: Automatika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986
- [2] Gecsey László: Automatika gyakorlatok Windora programmal, BMF KVK - 2038, Budapest, 2006
- [3] Hetthéssy – Tuschák – Bars – Barta: Szabályozástechnika gyakorlatok, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002, azonosító: 10043
- [4] Hetthéssy Jenő – Bars Ruth – Barta András: Szabályozástechnika Matlab gyakorlatok, Villamosmérnöki, 2005, BME honlap, pdf file
- [5] Schlüter, Gerd: Digitale Regelungstechnik interaktiv, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2000

- [6] Tuschák Róbert: Szabályozástechnika, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2003, azonosító: 55020
- [7] Tverdota Miklós: Automatika, Mintavételes rendszerek, BMF KKVFK - 2006, Budapest, 2003
- [8] Vass József: Digitális szabályozási algoritmusok elmélete és gyakorlati tervezése, 2006, Veszprémi Egyetem honlap, pdf file
- [9] Keviczky – Bars – Hetthéssy – Barta – Bányász: Szabályozástechnika, Universitas-Győr Kht., Győr, 2006, pdf file

A 6. fejezethez:

- [1] Keviczky – Bars – Hetthéssy – Barta – Bányász: Szabályozástechnika, Universitas-Győr Kht., Győr, 2006, pdf file
- [2] Csáki Frigyes: Fejezetek a szabályozástechnikából, Állapotegyenletek, Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1973
- [3] Hetthéssy Jenő – Bars Ruth – Barta András: Szabályozástechnika Matlab gyakorlatok, Villamosmérnöki, 2005, BME honlap, pdf file

A 7. fejezethez:

- [1] Ajtonyi István – Gyuricza István: Programozható irányítóberendezések, hálózatok és rendszerek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2002
- [2] Bánhidi L. – Oláh M. – Gyuricza I. – Kiss M. – Rátkai L. – Szecső G.: Automatika mérnököknek, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001
- [3] Gecsey László – Neszveda József: Automatika I. laboratórium, BMF KVK - 2042, Budapest, 2006
- [4] Jancskárné Anweiler Ildikó: PLC programozás az IEC 1131-3 szabvány szerint, PTE-PMMFK honlap, pdf file
- [5] Tverdota Miklós: Számítógépes irányító rendszerek I., BMF KVK - 2034, Budapest, 2004

Az F1. Függelékhez:

- [1] Fodor György: Hálózatok és rendszerek, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2004
- [2] Tverdota Miklós: Automatika I., BMF KVK - 2005, Budapest, 2002

Az F2. Függelékhez:

- [1] Dr. Bausz Imre: Irányítástechnika I., KKVMF, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983
- [2] Csáki Frigyes – Bars Ruth: Automatika, Tankönyvkiadó, Budapest, 1986

Az F3. Függelékhez:

- [1] Siemens, Simatic, Working with STEP 7 V5.3, Getting Started, Tverdota Miklós fordításában

## Függelék:

### F1. A LAPLACE-TRANSZFORMÁCIÓ ALAPISMERETEI SZABÁLYOZÁSTECHNIKAI SZÁMÍTÁSOKHOZ

#### F1.1 A Laplace-transzformáció definíciós képlete, alaptételei

A Laplace-transzformáció az alapja az operátoros módszernek, amely a differenciálegyenlet-módszerhez képest megkönnyíti a lineáris rendszerek vizsgálatát. Az operátoros módszerrel a differenciálegyenletek algebrai egyenletekké válnak.

A Laplace-transzformáció egy  $f(t)$  valós változós függvényhez egy  $F(s)$  komplex változós függvényt rendel:

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad .$$

$F(s)$  az  $f(t)$  függvény Laplace-transzformáltja, „s” a Laplace-változó (operátor).

A Laplace-transzformáció fontosabb tételei:

Az állandó szorzó a transzformáció elé kiemelhető:

$$L[C f(t)] = C F(s).$$

Összeg transzformálása tagonként lehetséges:

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s).$$

Függvény integráljának Laplace-transzformáltja:

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{s} F(s).$$

Függvény deriváltjának Laplace-transzformáltja:

$$L\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = s F(s) - f(-0).$$

Eltolási tétel:

$$L[l(t - T) f(t - T)] = F(s) e^{-sT}.$$

Csillapítási tétel:

$$L[f(t) e^{-\gamma t}] = F(s + \gamma).$$

Határértéktételek:

Kezdetiérték-tétel:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s F(s).$$

Végérték-tétel:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s F(s).$$

A Laplace-transzformáció szabályozástechnikai alkalmazásának teljeskörű módja az, hogy az időfüggvényekről áttérünk Laplace-transzformáltakra, a számítási munkát a Laplace-transzformáltakkal végezzük, és a számítások végén a Laplace-transzformáltakról visszatérünk időfüggvényekre. Ehhez el kell tudnunk végezni időfüggvények Laplace-transzformálását, de el kell tudnunk végezni az inverz Laplace-transzformációt, a visszatranszformálást is.

## F1.2 Időfüggvény Laplace-transzformálása ( $f(t) \rightarrow F(s)$ )

$F(s)$  meghatározásához felhasználhatók: a definíciós képlet, a szakirodalomban közölt táblázatok és a különféle tételek. A gyakorlati alkalmazás számára a két utóbbi módszer a legfontosabb.

Táblázat alkalmazása  $F(s)$  meghatározására:

A főbb függvények Laplace-transzformáltját az F1-1. táblázat tartalmazza.

F1-1. táblázat

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$1(t) \cdot t$	$\frac{1}{s^2}$
$1(t) \cdot \frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$
$1(t) \cdot t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$1(t) \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$1(t) \cdot te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$1(t) \cdot \sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$1(t) \cdot \cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$

A táblázatban szereplő  $\delta(t)$  és  $1(t)$  függvényről:

A  $\delta(t)$  Dirac-impulzus a  $t = 0$ -tól kezdődő, végtelenül keskeny, végtelenül nagy amplitúdójú, egységnyi területű impulzus; egyszerűsített függvényutasítása:

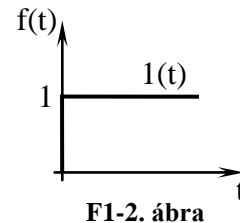
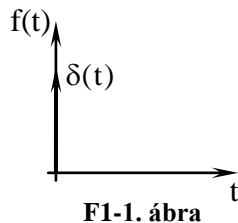
$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } t = 0, \\ 0, & \text{ha } t \neq 0; \end{cases} \quad \text{Ter.} = 1.$$

Ábrázolása az F1-1. ábrán látható.

Az  $1(t)$  egységugrást leíró függvényutasítás:

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t < 0, \\ 1, & \text{ha } t \geq 0. \end{cases}$$

A függvény képét az F1-2. ábra mutatja.



A tételek alkalmazása  $F(s)$  meghatározására:

Példák:

a) Határozzuk meg az  $1(t)$  függvény,  $T$ -vel történő, pozitív irányú eltolásával kapott  $1(t-T)$  függvény Laplace-transzformáltját!

Az eltolási tétel alkalmazásával:

$$L[1(t-T)] = L\left[1(t-T) \overbrace{1(t-T)}^{f(t-T)}\right] = \frac{1}{s} e^{-sT},$$

mert  $f(t) = 1(t)$  és így  $F(s) = \frac{1}{s}$ .

b) Határozzuk meg a  $\delta(t)$  függvény,  $T$ -vel történő, pozitív irányú eltolásával kapott  $\delta(t-T)$  függvény Laplace-transzformáltját!

Az eltolási tétel alkalmazásával:

$$L[\delta(t-T)] = L\left[1(t-T) \overbrace{\delta(t-T)}^{f(t-T)}\right] = e^{-sT},$$

mert  $f(t) = \delta(t)$  és így  $F(s) = 1$ .

c) Határozzuk meg az  $1(t) \cdot e^{-at}$  függvény Laplace-transzformáltját!

A csillapítási tétel alkalmazásával:

$$L[l(t)e^{-at}] = L\left[\overbrace{l(t)}^{f(t)} e^{-\underbrace{a}_{\gamma} t}\right] = \frac{1}{s+a},$$

mert  $f(t)=l(t)$  miatt  $F(s)=\frac{1}{s}$ , továbbá

$$\gamma = a, \text{ ezért } F(s+\gamma) = \frac{1}{s+a}.$$

### F1.3 Visszatranszformálás ( $F(s) \rightarrow f(t)$ )

A visszatranszformálás lépései:

1./  $F(s)$ -t az

$$F(s) = \frac{M(s)}{N(s)} \quad \begin{array}{l} \rightarrow m\text{-edfokú polinom} \\ \rightarrow n\text{-edfokú polinom} \end{array}$$

alakra hozzuk. A szabályozástechnikában teljesül, hogy:  $m \leq n$ .

2./ Ha fennáll, hogy  $m \leq n$ , akkor  $F(s)$ -ben a nevezőt **gyöktényezős** alakra hozzuk.

Ezt követően két eset lehetséges:

a/  $F(s)$  ismert  $f(t)$  Laplace-transzformáltja, ekkor felírjuk  $f(t)$ -t.

b/  $F(s)$  nem ismert  $f(t)$  Laplace-transzformáltja. Ez esetben  $F(s)$ -t **részlet törtre** bontjuk, s így  $F(s)$  olyan tagok összege lesz, amelyek már ismert időfüggvények Laplace-transzformáltjai. A keresett  $f(t)$ -t ekkor ezeknek az ismert tag-időfüggvényeknek az összegeként írjuk föl.

3./ Ha  $m=n$  áll fenn, akkor a számlálót elosztjuk a nevezővel, aminek az eredményeként egy

$$\text{„egész” függvény} + \underbrace{\text{valódi törtfüggvény}}_{m < n}$$

alakú összeget kapunk. Az  $m < n$  jellemzőjű tagra alkalmazzuk a 2. pontot, az „egész” függvényt pedig (táblázat alapján) visszatranszformáljuk.

A részlet törtre bontás módja:

Legyen a kiindulási  $F(s)$  pl. az

$$F(s) = \frac{C(b_1s + b_0)}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)^2} \quad (1)$$

alakú! A képletben a nevezőben gyöktényezős felírást alkalmaztunk, ennek megfelelően  $s_1$ ,  $s_2$  és  $s_3$  a nevező gyökeit jelenti. A gyökök közül  $s_3$  kétszeres gyök. A számlálóban szereplő  $C$ ,  $b_1$  és  $b_0$  mennyiség állandó. A részlettörtes alak ekkor a következő:

$$F(s) = \frac{K_1}{s-s_1} + \frac{K_2}{s-s_2} + \frac{K_{31}}{s-s_3} + \frac{K_{32}}{(s-s_3)^2} \quad (2)$$

A  $K$  állandók meghatározásának algoritmusát a Dr. Tverdota M. által alkalmazott módszer alapján [2]:

$$K_1 = [(s-s_1)F(s)]_{s=s_1}$$

$$K_2 = [(s-s_2)F(s)]_{s=s_2}$$

$$K_{31} = \left[ \frac{d}{ds} (s-s_3)^2 F(s) \right]_{s=s_3}$$

$$K_{32} = \left[ (s-s_3)^2 F(s) \right]_{s=s_3}$$

Az állandók meghatározásakor  $F(s)$  helyébe az (1) szerinti, kiindulási  $F(s)$ -t kell helyettesíteni.

Az egyszerű szabályozástechnikai alkalmazásokban ritkán fordul elő kettőnél többszörös gyök, de a felírt összefüggések értelemszerű módosításokkal ilyenkor is alkalmazhatók. Háromszoros gyök esetén pl. az állandók:  $K_{31}$ ,  $K_{32}$ ,  $K_{33}$ , továbbá a részlettörtes alakban  $K_{33}$  esetében a nevezőben  $(s-s_3)^3$  szerepel, ezenkívül az állandók kifejezései  $(s-s_3)^3$  szorzóval érvényesek, és  $K_{31}$  kifejezését kétszeres deriválással,  $K_{32}$  kifejezését egyszeres deriválással,  $K_{33}$ -ét pedig deriválás nélkül kell felírunk.

Megj.: A deriváltakkal felírt állandók meghatározását az alábbi példában bemutatott módon egyszerűbbé tehetjük [1].

#### Példa a visszatranszformálásra:

Határozzuk meg az  $f(t)$  időfüggvényt, ha a függvény Laplace-transzformáltja:

$$F(s) = \frac{50 \cdot (1 + s \cdot 0,1)}{s^2 \cdot (1 + s \cdot 4)}$$

*Megoldás:*

A számláló fokszáma:  $m = 1$ , a nevezőé:  $n = 3$ , tehát  $m < n$ .

$F(s)$ -ben a nevezőt gyöktényezős alakra hozzuk:

$$F(s) = \frac{50 \cdot (1 + s \cdot 0,1)}{s^2 \cdot 4 \cdot \left(s + \frac{1}{4}\right)} = \frac{12,5 \cdot (1 + s \cdot 0,1)}{s^2 \cdot (s + 0,25)}$$



A kapott  $F(s)$ -ből nem tudjuk  $f(t)$ -t közvetlenül fölírni, ezért  $F(s)$ -t részlet törtre bontjuk. Ehhez először meg kell állapítanunk a nevező gyökeit. A gyökök a kapott gyöktényezős alakból kiolvashatók:

$$s_{11} = 0 \quad ;$$

$$s_{12} = 0 \quad ;$$

$$s_2 = -0,25 \quad .$$

Ezzel az elvi részlet törtes alak (2)-nek megfelelően:

$$F(s) = \frac{12,5 \cdot (1 + s \cdot 0,1)}{s^2 \cdot (s + 0,25)} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{K_{12}}{s^2} + \frac{K_2}{s + 0,25} \quad .$$

Az állandók meghatározása:

$K_{12}$ -t és  $K_2$ -t az algoritmus szerint számoljuk:

$$K_{12} = [s^2 F(s)]_{s=0} = 12,5 \frac{(1 + 0 \cdot 0,1)}{0 + 0,25} = 50 \quad .$$

$$K_2 = [(s + 0,25)F(s)]_{s=-0,25} = 12,5 \frac{(1 - 0,25 \cdot 0,1)}{(-0,25)^2} = 195 \quad .$$

$K_{11}$  számítását az algoritmusban megadotthoz képest egyszerűbbé tehetjük, ha  $K_{12}$  és  $K_2$  számszerű értékével és az ismeretlen  $K_{11}$ -gyel felírjuk a részlet törtes és az eredeti alak egyenlőségét, majd véve az egyenletet egy olyan  $s$  értéken, ahol a nevezők nem nullák, az egyenletből  $K_{11}$ -et kifejezzük:

Az eredeti és a részlet törtes alak egyenlősége:

$$\frac{12,5 \cdot (1 + s \cdot 0,1)}{s^2 \cdot (s + 0,25)} = \frac{K_{11}}{s} + \frac{50}{s^2} + \frac{195}{s + 0,25} \quad .$$

Helyettesítsünk ide be  $s = 1$ -et, akkor:

$$\frac{12,5 \cdot (1 + 0,1)}{1 + 0,25} = K_{11} + 50 + \frac{195}{1 + 0,25} \quad ,$$

ahonnan  $K_{11}$ :

$$K_{11} = -195 \quad .$$

A számszerű állandókkal felírt részlet törtes alak:

$$F(s) = \frac{-195}{s} + \frac{50}{s^2} + \frac{195}{s + 0,25} \quad .$$

Az  $f(t)$  időfüggvény tagonként történő visszatranszformálással:

$$f(t) = -195 + 50 \cdot t + 195 \cdot e^{-0,25t} = -195 + 50 \cdot t + 195 \cdot e^{-\frac{t}{4}} \quad , \quad t \geq 0 \quad .$$

*Kiegészítés:*

Természetesen  $K_{11}$ -re ugyanezt az eredményt kapjuk az algoritmusban megadott módon is:

A kiinduló képlet:  $K_{11} = \left[ \frac{d}{ds} s^2 F(s) \right]_{s=0}$ . Ide  $F(s)$ -nek az  $F(s) = \frac{12,5 \cdot (1 + s \cdot 0,1)}{s^2 \cdot (s + 0,25)}$  alakját

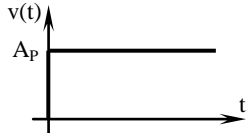
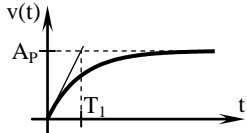
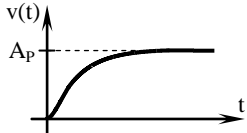
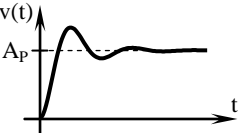
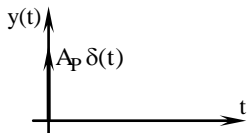
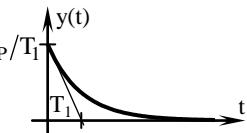
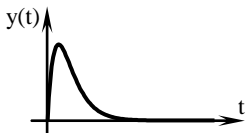
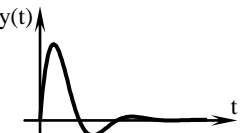
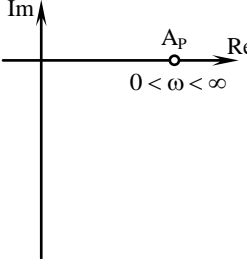
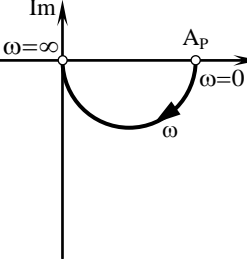
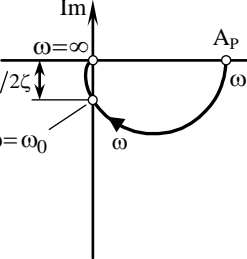
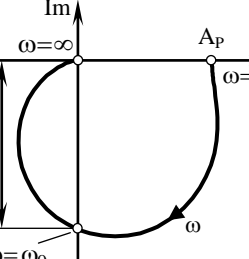
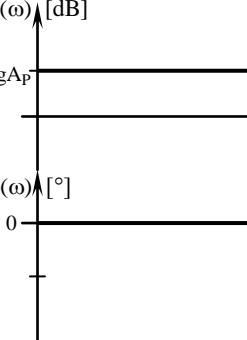
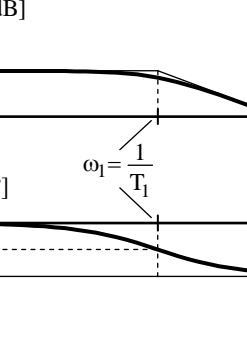
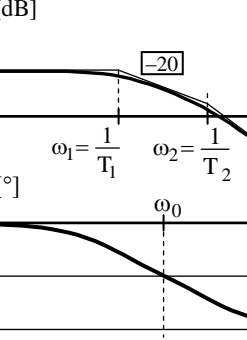
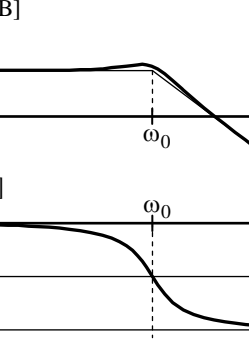
behelyettesítve, és a tört deriváltjának az összefüggését alkalmazva:

$$K_{11} = \left[ \frac{d}{ds} s^2 F(s) \right]_{s=0} = 12,5 \frac{0,1 \cdot (0 + 0,25) - 1(1 + 0 \cdot 0,1)}{(0 + 0,25)^2} = -195 \quad .$$

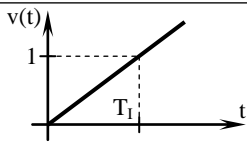
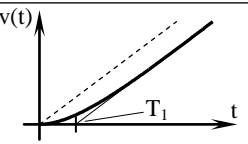
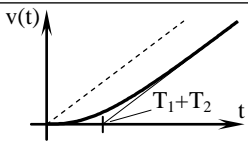
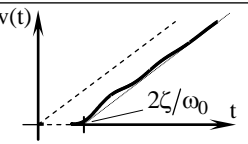
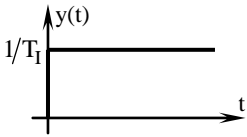
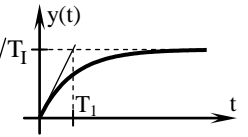
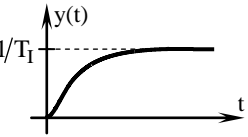
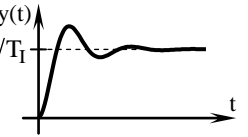
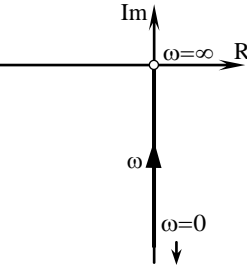
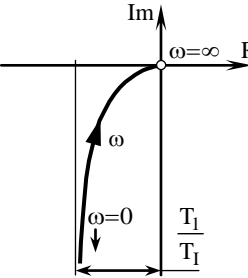
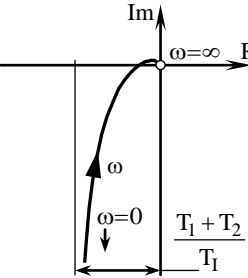
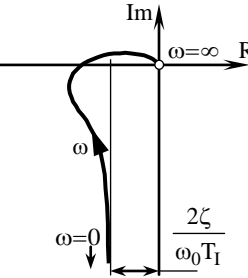
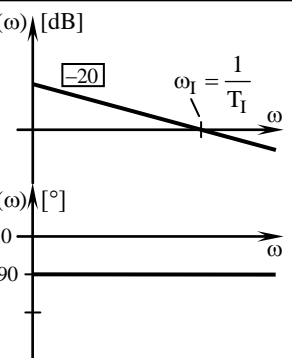
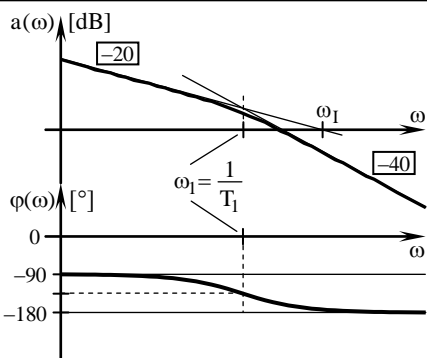
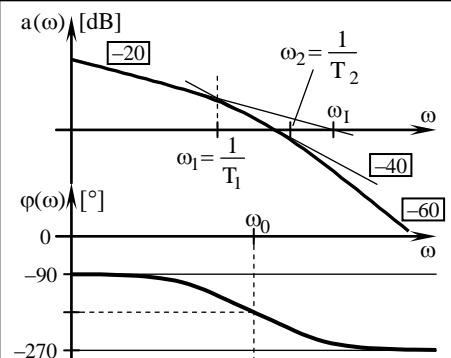
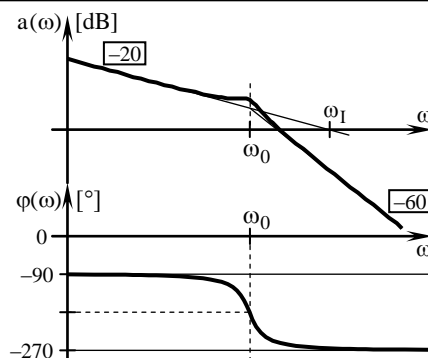
Megj.: A hivatkozott irodalmat l. a **Függelék** előtt, „A FELHASZNÁLT IRODALOM JEGYZÉKÉ”-ben.

F2-1. táblázat

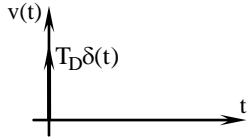
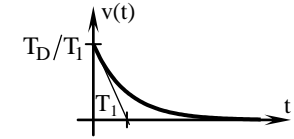
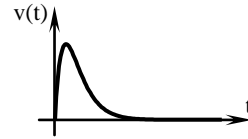
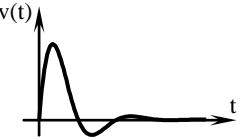
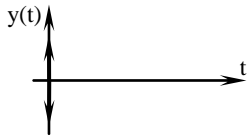
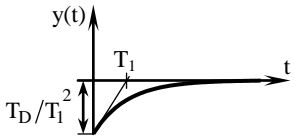
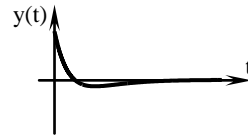
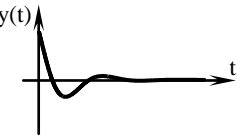
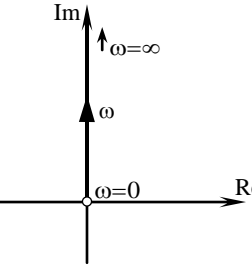
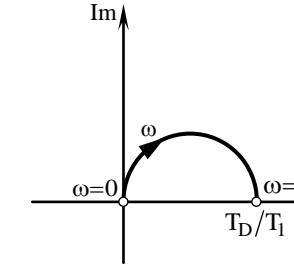
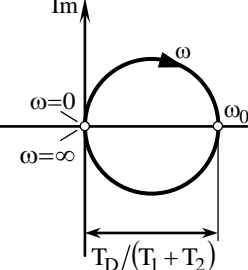
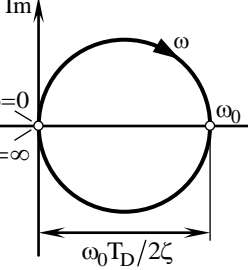
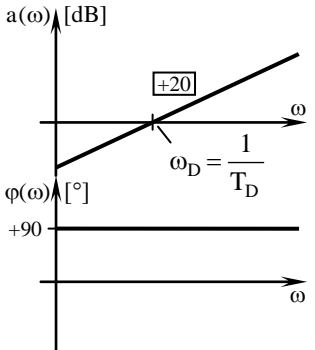
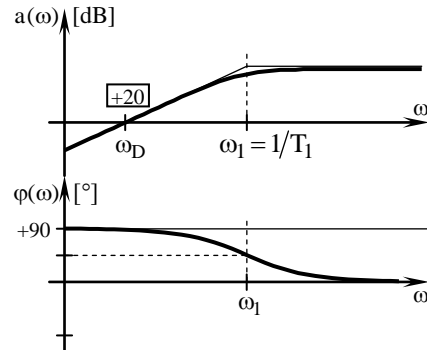
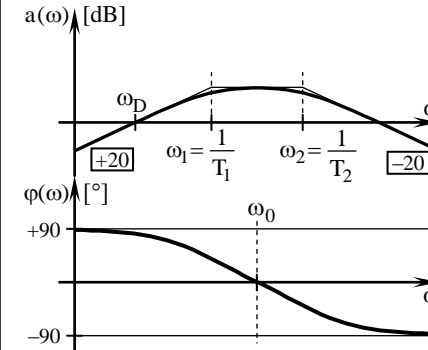
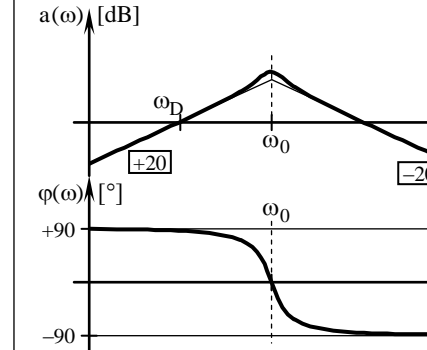
F2. A LEGFONTOSABB EGYSZERŰ ÁTVITELI TAGOK ÖSSZEHAISONLÍTÓ TÁBLÁZATAI

ÁRÁNYOS tagok	Ideális (P)	Egytárolós (PT1)	Kéttárolós (PT2)	
Differenciál-egyenlet	$x_k(t) = A_P x_b(t)$	$T_1 \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = A_P x_b(t)$	$a_2 \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = A_P x_b(t)$	
Átviteli függvény	$A_P$	$\frac{A_P}{1 + sT_1}$	aperiodikus, $\zeta > 1$ $\frac{A_P}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)}$	lengő, $\zeta < 1$ $\frac{A_P}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}; \quad \tau = \frac{1}{\omega_0}$
Átmeneti függvény				
Súlyfüggvény				
Nyquist-diagram				
Bode-diagram				

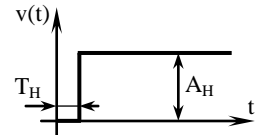
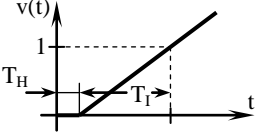
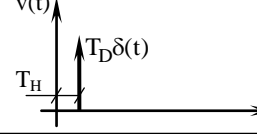
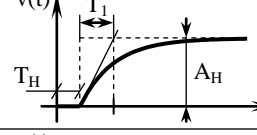
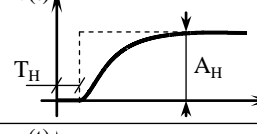
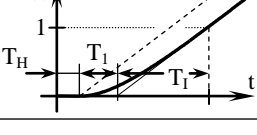
F2-2. táblázat

INTEGRÁLÓ tagok	Ideális (I)	Egytárolós (IT1)	Kéttárolós (IT2)	
Differenciál-egyenlet	$T_I \frac{dx_k(t)}{dt} = x_b(t)$	$a_2 \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_k(t)}{dt} = x_b(t)$	$a_3 \frac{d^3 x_k(t)}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_k(t)}{dt} = x_b(t)$	
Átviteli függvény	$\frac{1}{s T_I}$	$\frac{1}{s T_I (1 + s T_I)}$	aperiodikus, $\zeta > 1$ $\frac{1}{s T_I (1 + s T_I) (1 + s T_2)}$	lengő, $\zeta < 1$ $\frac{1}{s T_I (\tau^2 s^2 + 2\zeta \tau s + 1)}$ ; $\tau = \frac{1}{\omega_0}$
Átmeneti függvény				
Súlyfüggvény				
Nyquist-diagram				
Bode-diagram				

F2-3. táblázat

DIFFERENCIÁLÓ tagok	Ideális (D)	Egytárolós (DT1)	Kéttárolós (DT2)	
Differenciál- egyenlet	$x_k(t) = T_D \frac{dx_b(t)}{dt}$	$T_1 \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = T_D \frac{dx_b(t)}{dt}$	$a_2 \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = b_1 \frac{dx_b(t)}{dt}$	
Átviteli függvény	$s T_D$	$\frac{s T_D}{1 + s T_1}$	aperiodikus, $\zeta > 1$ $\frac{s T_D}{(1 + s T_1)(1 + s T_2)}$	lengő, $\zeta < 1$ $\frac{s T_D}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$ ; $\tau = \frac{1}{\omega_0}$
Átmeneti függvény				
Súlyfüggvény				
Nyquist-diagram				
Bode-diagram				

F2-4. táblázat

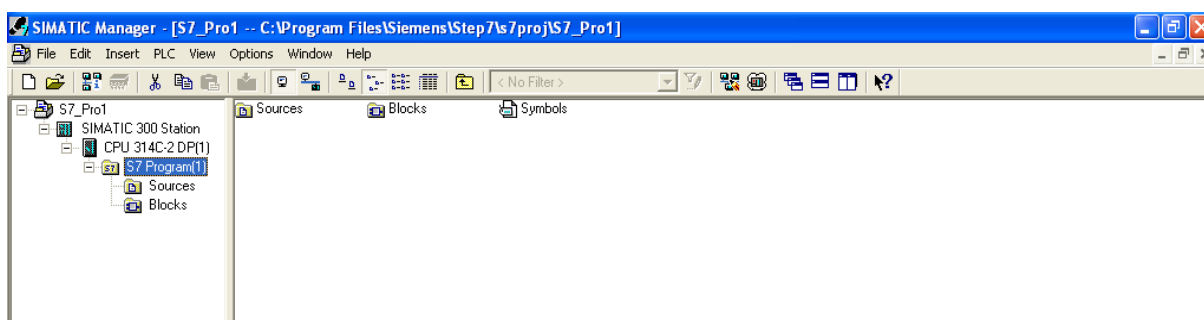
<u>HOLTIDŐS</u> <u>tagok</u>	Differenciálegyenlet	Átviteli függvény	Átmeneti függvény
Arányos (HP)	$x_k(t) = A_H x_b(t - T_H)$	$A_H e^{-sT_H}$	
Integráló (HI)	$T_I \frac{dx_k(t)}{dt} = x_b(t - T_H)$	$\frac{1}{sT_I} e^{-sT_H}$	
Differenciáló (HD)	$x_k(t) = T_D \frac{dx_b(t - T_H)}{dt}$	$T_D s e^{-sT_H}$	
Egytárolós (HPT1)	$T_I \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = A_H x_b(t - T_H)$	$\frac{A_H}{1 + sT_I} e^{-sT_H}$	
Kéttárolós (HPT2)	$a_2 \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_k(t)}{dt} + x_k(t) = A_H x_b(t - T_H)$	aperiodikus, $\zeta > 1$ $\frac{A_H}{(1 + sT_I)(1 + sT_2)} e^{-sT_H}$	
HIT1 (összetett)	$a_2 \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_k(t)}{dt} = x_b(t - T_H)$	$\frac{A_I}{s(1 + sT_I)} e^{-sT_H}$	

### F3. A STEP 7 PROGRAMNYELVBEN ALKALMAZOTT DEKLARÁCIÓRÓL

Ebben a fejezetben a Step 7 nyelv OB1 szervezőmoduljához, valamint FB függvénymoduljához szükséges deklarációval foglalkozunk. Az OB1 szervezőmodul az IEC szabvány szerinti *program* egységnek felel meg (ciklikus futással), az FB függvénymodul pedig megfelel a szabvány szerinti *függvényblokknak*. Az ismertetést onnan indítjuk, hogy a megvalósítani kívánt munkatervet (projectet) már létrehoztuk.

#### F3.1 Deklaráció az OB1-nél

Létrehozott projectnél (F3-1. ábra) a bal oldali könyvtárfában az **S7 Program** mappára kattintva a jobb oldali ablakrészben megjelennek a programösszetevők. Itt a **Symbols**



F3-1. ábra

összetevő az, amelyben a felhasználói program *globális* változóit deklarálhatjuk, de ha *függvényblokkot* vagy *függvényt* is használunk, ebben az összetevőben azokat is deklarálni kell. A **Symbols** ikonra kétszer kattintva kinyílik egy táblázat, a deklarációt ebben

The screenshot shows the Symbol Editor window. It contains a table with the following columns: Status, Symbol, Address, Data type, and Comment. The table has two rows: Row 1: Status 1, Symbol Cycle Execution, Address OB 1, Data type OB 1, Comment. Row 2: Status 2, Symbol, Address, Data type, Comment.

Status	Symbol	Address	Data type	Comment
1	Cycle Execution	OB 1	OB 1	
2				

F3-2. ábra

végezhetjük el (F3-2. ábra). A táblázat kitöltendő oszlopai: **Symbol**, **Address**, **Data type** és **Comment**. A táblázatban már szerepel a mindig szükséges OB1 szervezőblokk, ennek a **Cycle Execution** nevét átírhatjuk pl. „Fo\_program”-ra. Függvényblokk deklarálásához pl. a 2. sorba a **Symbol** oszlopba beírhatjuk az „Al\_program1” nevet, az **Address** oszlopba pedig, hogy FB1; az adattípus (itt blokk típus) önmagától hozzáadódik. A **Comment** oszlopot szabadon kitölthetjük, az OB1-hez pl. beírhatjuk a program tárgyát, az FB1-hez az FB1-gyel megoldandó részfeladat nevét stb.

Ami a *globális* változókat illeti, a változó nevét a **Symbol** oszlopba kell beírni (pl. Be1), a közvetlen címet pedig az **Address** oszlopba (pl. I124.0). Mivel a közvetlen cím meghatározza az adat típusát, ez a **Data type** oszlopban most is önmagától hozzáadódik (az adattípusokat illetően l. a következő pontot is). Célszerű a **Comment** oszlopot is kitölteni (pl. Motor be). Közvetlen címet *csak* az OB1-nél deklarálhatunk, tehát ilyen címet csak globális változóként és ebben a táblázatban szabad deklarálni.

A *globális* változókat a program ” ” idézőjelek közé teszi.

A *lokális* változókat az illető függvénymodulnál (FB) vagy függvénynél (FC) kell deklarálni, de deklarálás után ezek is megjelennek az F3-2. ábra szerinti Symbol táblázatban.

A *lokális* változókat a program # jellel jelöli.

### F3.2 Deklaráció az FB-nél

Először magát az FB-t kell létrehoznunk. Ehhez a project könyvtárfájában (F3-1. ábra, bal ablakrész) a **Blocks** mappára kell kattintani, ekkor a jobb oldali ablakrészben megjelennek a létező programegységek, jelenleg csak az OB1. Ugyanott a jobb oldalon a jobb gombbal kattintva az **Insert New Object** pontból a **Function Block** pontot választva előtűnik az FB-t létrehozó **Properties-Function Block** ablak. Ebben az **FB1**-et jóváhagyva, a **Mult. Inst. Cap.**-ot bejelölve, a programnyelvet megadva, majd **OK**-t kattintva az FB1 függvényblokk létrejön.

Az **FB1** ikonra kétszer kattintva kinyílik az FB1 szerkesztő ablaka (F3-3. ábra). A változódeklarációs rész az „FB1: Title:” felirat fölött látható, és két részből áll: a bal oldali áttekintő részből és a jobb oldali részletező részből.

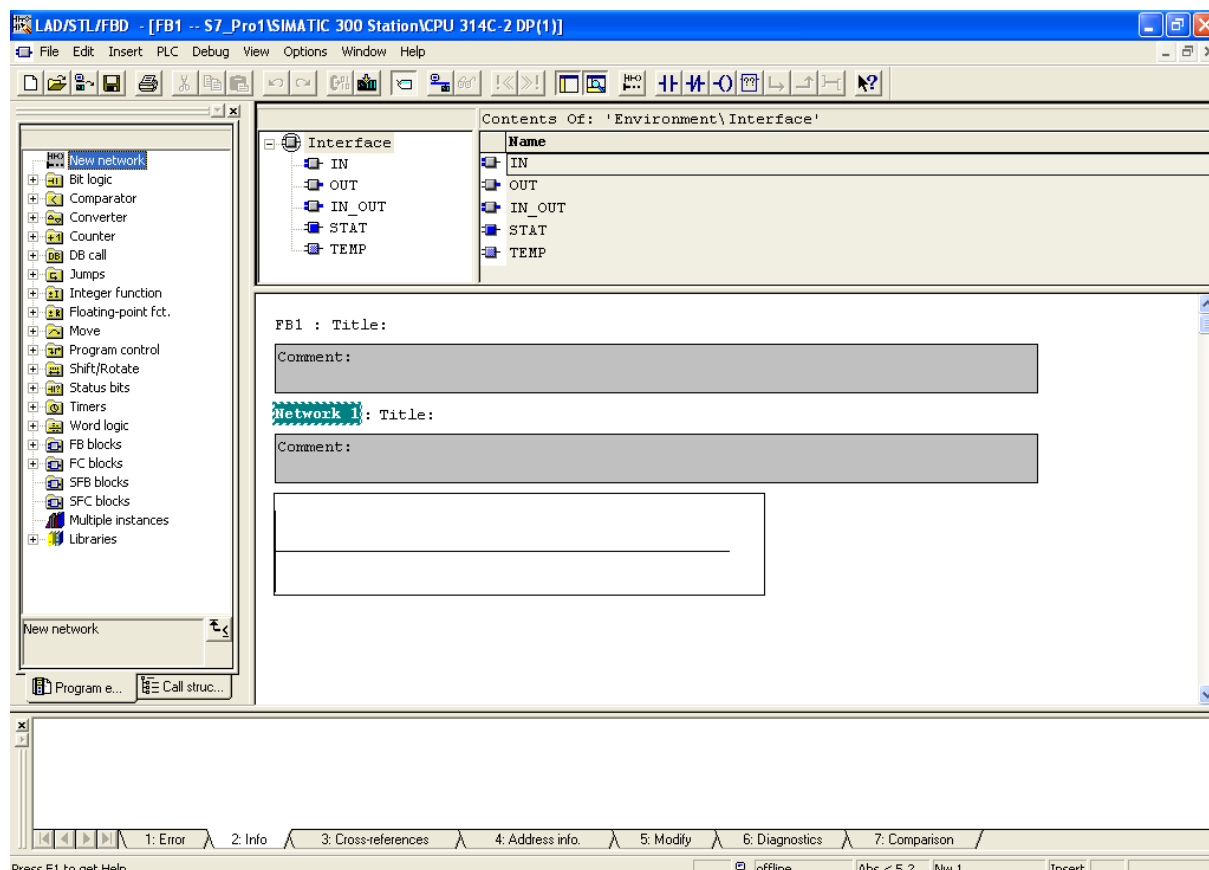
Az áttekintő részben sorra ki kell választani a változó deklarációs típusát, és a jobb oldalon kell megadni hozzá a kiválasztott típusba tartozó változókat. A deklarációs típusok a következők:

- IN: ez adatot visz be az illető FB-be feldolgozás céljából;
- OUT: ez eredményt visz ki az illető FB-ből a behívó blokkba (pl. OB1-be);
- IN\_OUT: ez adatot visz be az illető FB-be, majd az adat feldolgozásával kapott eredményt ugyanebben a változóban viszi ki a behívó blokkba;
- STAT: ez olyan konstans, amelyet az FB tárol és az FB minden behívásakor ugyanolyan értékű;
- TEMP: ideiglenes adat, amelyet az FB csak addig tárol, ameddig fut.

Az áttekintő részben egy deklarációs típust kiválasztva, és a részletező részben egy sort megkezdve a következő oszlopokat kell kitölteni: **Name**, **Data type**, **Address**, **Initial**



**value, Comment.** A **Data type** oszlopba beírandó adattípus alapértelmezésben BOOL. Ha



**F3-3. ábra**

ettől eltérő típus szükséges, akkor egy lenyíló menüből kell másik adattípust választani. Az adattípusok lehetnek elemi és származtatott adattípusok. Az elemi adattípusokat az F3-1. táblázatban foglaltuk össze. Az **Initial value** kezdő érték az alapértelmezés szerinti értéket veszi föl, de szükség esetén megváltoztatható.

**F3-1. táblázat**

Típus	Értelmezés	Bitek száma	Csoport
BOOL	kétértékű bináris szám	1	bitkombinációk
BYTE	bájt	8	
WORD	szó	16	
DWORD	kettős szó	32	
CHAR	ASCII karakter	8	karakter
INT	egész szám	16	számértékek
DINT	dupla egész szám	32	
REAL	valós szám	32	
S5TIME	S7 időtartam	16	idő és kelezés
TIME	IEC időtartam	32	
DATE	kelezés	16	
TIME OF DAY	napi időpont	32	

Az FB függvénymodul tipikus alkalmazása az, amikor egy eljárást többször kell, más-más adatokkal megismételni. A feladat megoldására ekkor egyetlen FB-t írhatunk ún. formális paraméterekkel, és az eljárás lefolytatására mindig ezt az FB-t hívjuk meg, de minden esetben az éppen szükséges adatokkal, az ún. aktuális paraméterekkel. Az aktuális paraméterek megadására a Step 7-ben az eseti adatblokk („Instance DB”) szolgál, amelyből annyit kell létrehozni, ahány egymástól különböző adatsorunk, aktuális-paramétersorunk van. A Symbol táblázatban ekkor az FB-t más-más néven mindegyik eseti adatblokkal külön deklarálni kell.