Ответы к коллоквиуму по курсу “Математический анализ”

(1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность “Информатика”)

$$\forall \text{ fix } x \in X, \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \nu = \nu(x,\varepsilon) \in \mathbb{R} | \forall n \geqslant \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

$$f_n(x) \xrightarrow[\to]{x} f(x) \tag{2}$$

1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

Теорема (*Супремальный критерий равномерной сходимости ФП*).

$$f_n(x) \xrightarrow[\to]{x} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sum_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{3}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Если выполнено (2), то, учитывая, что в (1) используется $\forall n \geqslant \nu(\varepsilon)$, $\forall x \in X$, получим

$$r_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ т.е.}$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \,|\, \forall n \geqslant \nu \Rightarrow 0 \leqslant r_n \leqslant \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\Leftarrow$ Пусть выполнено (3), тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \,|\, \forall n \geqslant \nu \wedge \forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, имеем (1), где ν зависит от $\forall \varepsilon > 0$ и не зависит от конкретного элемента множества X. □

Замечания:

1. Если известно, что $\forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, где (a_n) - б.м.п, то тогда имеем (2). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.
2. Если
$$\exists x_n \in X \,|\, g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
то тогда равномерной сходимости нет, т.е. $f_n(x) \not\xrightarrow[\to]{x} f(x)$. Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

Теорема (*мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР*).
Если ФР имеет на X сходящуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на X.

Доказательство. Доказательство с использованием критерия Коши сходимости числовых последовательностей и критерия Коши сходимости ФР:
Т.к. $\sum a_n$ сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\; \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \forall n \geqslant \nu, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Если выполняется неравенство $|u_n(x)| \leqslant a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$, то для частичных сумм (**??**) ФР (**??**) имеем: $|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon$, это $\forall n \geqslant \nu = \nu(\varepsilon), \forall m \in \mathbb{N}$, что в силу (**??**) даёт (**??**). □

Замечания:

1. Принцип Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходимость числовой мажоранты (a_n) либо находится с помощью соответствующих оценок $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \underset{x\in X}{sup}\, |u_n(x)|$. В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости $\sum a_n$ даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.

2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты - признак равномерной сходимости ФР, используя функцию мажоранты, а именно, если $\exists\ v_n(x) \geqslant 0 \mid |u_n(x)| \leqslant v_n(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ и $\sum v_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$, то тогда для (**??**) имеем (**??**), (**??**).

3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

Теорема (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП $a_n(x)$ частичные суммы $\sum a_n(x)$ ограничены в совокупности (равномерно на X), т.е.

$$\forall n \in X \text{ и } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x)| \leqslant c, \tag{5}$$

где $c = const > 0$, не зависит ни от n, ни от x. Если $\forall\ fix\ x \in X\,(b_n(x))$ - числовая последовательность является монотонной, то в случае

$$(b_n(x)) \overset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{6}$$

имеем $\sum a_n(x)b_n(x) \rightrightarrows$.

Доказательство. Монотонная последовательность $(b_n(x))\,\forall\ fix\ x \in X$ позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (5) оценку Абеля:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2 < ||b_{n+1}(x)| + 2\,|b_{n+m}(x)||\,. \tag{7}$$

Если выполняется (6), то тогда $\forall\varepsilon$ по $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0\ \exists\ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall n \in X \Rightarrow \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon}$ и $|b_{n+m}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon}$, поэтому для частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x)$ в силу (7) $\forall n \geqslant \nu$ и $\forall m \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ имеем: $|S_{n+m}(x) - S_m(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(m)b_k(x)\right| \leqslant 2c(\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}) = 6c\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости ФР следует, что $\sum a_n(x)b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. □

Следствие (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если $\forall x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ является монотонной,то в случае $b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \sum(-1)^n b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Следует из того, что в условии теоремы $a_n = (-1)^n$ не зависит от x, причём $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant 1 = const, \forall n \in \mathbb{N}$. □

Замечание.

По аналогичной схеме доказывается признак Абеля равномерной сходимости ФР: если для ФП $a_n(x) \Rightarrow \sum a_n(x) \rightrightarrows$, то в случае, когда $\forall\ fix\ x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ монотонна и равномерно ограничена (ограничена в совокупности, т.е. $\exists\ c \geqslant 0 \mid \forall n \in \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X \Rightarrow |b_n(x)| \leqslant c$), то тогда $\sum a_n(x)b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

4 Признак Дини равномерной сходимости ФР и следствие из него (теорема Дини для ФП)

Теорема (*Признак Дини равномерно сходящихся ФР*).

Пусть

1. Члены ФР (**??**) непрерывны и сохраняют один и тот же знак на $X = [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$.

2. $\sum u_n(x) \overset{X}{\to} S(x)$.

Тогда, если $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$, т.е. $S(x) \in C([a, b])$, то $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Рассмотрим на $X = [a, b]$ остатки ряда $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \ldots + \ldots = = S(x) - S_n(x)$. Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. $\forall\ fix\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ как разность двух непрерывных функций.

2. $\forall\ fix\ x \in X \Rightarrow$ ФП $(R_n(x))$ убывает в случае, когда $\forall u_n(x) > 0$, т.к. $R_n(x) = u_n(x) + +R_{n+1}(x) \geqslant R_{n+1}(x), \forall n \in \mathbb{N}$.

3. Т.к. имеет место (**??**), то $\forall\ fix\ x \in X \Rightarrow R_n(x) \overset{X}{\to} 0$.

Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на X ФР не является равномерной сходимостью на X.

Тогда по правилу де Моргана имеем: $\exists\ \varepsilon_0 > 0 \mid \forall \nu \in \mathbb{R}\ \exists\ n(\nu) \geqslant 0, \exists x(\nu) \in X | R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$. Для простоты будем считать, что $\exists\ x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$. По принципу выбора из ограниченной последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. $x_{nk} \underset{n_k \to \infty}{\longrightarrow} x_0$, при этом в силу использования $x = [a, b]$ - компакт, получаем, что $x_0 \in X$. Если зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, то $\forall n_k \geqslant m \Rightarrow R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$, по свойствам остаткам будем иметь, что $R_m(x_{nk}) \geqslant R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$. В неравенстве $R_m(x_{nk}) > \varepsilon_0$, переходя к пределу при $n_k \to \infty\ \forall m \in \mathbb{N}$, получаем в силу непрерывности $R_n(x) : R_m(x_0) = \lim\limits_{n_k \to \infty} R_m(x_{nk}) \geqslant x_0$, что противоречит последнему из свойств остатка, а именно $R_m(x_0) \xrightarrow{X}$ при $m \to \infty$, поэтому из нашего предположения следует, что выполняется $R_m(x_0) \to 0$, противоречие, т.е. выполняется $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. □

Следствие (*Теорема Дини для ФП*).

Если для ФП $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ на $X = [a, b]$ выполняются свойства:

1. $\forall f_n(x) \in C([a, b])$ и $\forall\ fix\ x \in X \Rightarrow f_n(x)$ монотонна.
2. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда, если $f(n) \in C([a, b])$, то $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. следует из того, что члены рассматриваемой ФП $f_n(x)$ можно рассматривать как частичные суммы соответствующего ФР с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Действительно, $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x), \forall n \in \mathbb{N}$.

А далее к соответствующему ФР применима теорема Дини равномерно сходящихся ФР. □

Замечания:

1. В дальнейшем связь (8) будем использовать для переформулирования соответствующих результатов, полученных для ФР с помощью перехода на соответствующую ФП. Такие ряды и последовательности, связанные с (8), будем называть ассоциированными между собой.
2. Теорема Дини, с одной стороны, даёт одно из достаточных условий равномерной сходимости ФР, а, с другой стороны, даёт признак неравномерной сходимости ФР, а именно: если у знакопостоянного поточечно сходящегося $\sum u_n(x)$ на $[a, b]$ сумма $S(x)$ является функцией разрывной, то этот ряд сходится неравномерно на $[a, b]$ (то же самое для ФП).

5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

Теорема (*о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР*).

Если все члены $u_n(x), n \in \mathbb{N}$ ФР (**??**) непрерывны на $X = [a, b]$, то в случае равномерной сходимости этого ряда на $[a, b]$ его сумма $S(x)$ будет непрерывной функцией на $[a, b]$.

Доказательство. Требуется обосновать (**??**) $\forall\ x_0 \in [a, b]$, причём в случае концевых значений $x_0 = a,\ x_0 = b$ будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для $fix\ x_0 \in [a, b]$ придадим произвольные приращения $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ и рассмотрим соответствующие приращения суммы (**??**) ФР (**??**):

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР (**??**) на $X = [a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \ \exists\ \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \forall n \geqslant \nu,\ \forall x \in [a, b]$ для частичных сумм $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ ряда (**??**) имеем: $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

Отсюда, в частности, для $x = x_0 \in X$ и $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leqslant \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{9}$$

Далее из непрерывности $\forall u_n(x)$ в $x_0 \in [a, b]$ следует непрерывность частичных сумм в x_0 (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для $\forall\ \varepsilon, \exists\ \delta > 0, \forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

Таким образом, в силу (9), (10) имеем: $\forall \varepsilon > 0$, выбирая $n \geqslant \nu$ и рассматривая $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta$, имеем:

$|\Delta S(x_0)| = |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant$
$\leqslant |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon.$

Вследствие этого: $\forall\varepsilon\ \exists\,\delta>0,\ \forall\,|\Delta x|\leqslant\delta\Rightarrow|\Delta S(x_0)|\leqslant M\cdot\varepsilon, M=const=3>0$.

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что $\Delta S(x_0)\underset{\Delta x\to 0}{\to}0$, что на языке приращений равносильно (**??**). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость ЧР в правой части (**??**) будет сходящимся. □

Замечания:

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.
2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества $X\subset\mathbb{R}$ на локальную равномерную сходимость.

6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

Теорема (*о почленном интегрировании равномерно сходящихся ФР*).

Если $\forall u_n(x)\in C([a,b])$,

$n\in\mathbb{N}$, то в случае, когда $\sum u_n(x)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$, возможно почленное интегрирование этого ряда на $[a,b]$, т.е.

$$\exists\int\limits_a^b S(x)dx=\int\limits_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_a^b u_n(x)dx. \tag{11}$$

Доказательство. На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходяшегося ФР получим, что сумма ряда $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ будет непрерывна на $[a,b]$, а значит, интегрируема на $[a,b]$.

Используя частичные суммы (**??**) для (**??**), рассмотрим частичные суммы $T_n=\int\limits_a^b S_n(x)dx=$

$=\int\limits_a^b\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)dx=\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_a^b u_k(x)dx$ для ЧР правой части (11).

Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=\int\limits_a^b S(x)dx$.

Из равномерной сходимости (**??**) на $[a,b]$ получим, что $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\nu=\nu(\varepsilon)\mid\forall n\geqslant\nu$ и $\forall x\in[a,b]\Rightarrow$

$$|S(x)-S_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)\right|\leqslant\varepsilon \tag{12}$$

Отсюда получаем, что $\left|\int\limits_a^b S(x)dx-I_n\right|=\left|\int\limits_a^b S(x)dx-\int\limits_a^b S_n(x)dx\right|=\left|\int\limits_a^b(S(x)-S_n(x))dx\right|\leqslant$

$\leqslant\int\limits_a^b|S(x)-S_n(x)|\,dx\leqslant\int\limits_a^b\varepsilon dx=M\varepsilon$, где $M=b-a=const\geqslant 0$. Таким образом, $\forall\varepsilon>0\ \exists\,\nu=\nu(\varepsilon)\mid\forall n\geqslant\nu\Rightarrow$ $\left|\int_a^b S(x)dx-I_n\right|\leqslant M\varepsilon$, поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что

$$\exists\lim_{n\to\infty}I_n=\int\limits_a^b S(x)dx=\int\limits_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)dx,$$

что равносильно (11). □

Замечание.

Если на множестве сходимости $X\subset\mathbb{R}$ для (**??**) нет равномерной сходимости, но есть локальная равномерная сходимость, то в случае непрерывности $\forall u_n(x)$ на X можно почленно интегрировать ФР (**??**) на $\forall[a,b]\subset X$.

7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

Теорема (*о почленном дифференцировании ФР*).

Пусть ФР (**??**) на $X=[a,b]$ удовлетворяет условиям:

1. $\sum u_n(x)\overset{X}{\to}$,

2. $\exists u_n^{'}(x)$, непрерывная для $\forall n \in \mathbb{N}, x \in X$.

Тогда, если

$$\sum u_n^{'}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \tag{13}$$

то рассмотренный ФР (**??**) можно почленно дифференцировать на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)^{'} = \sum_{k=n}^{\infty} u_n^{'}(x), \forall x \in X. \tag{14}$$

Доказательство. В силу (13), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР $\sum u_n^{'}(t)$ можно почленно интегрировать на $\forall[a,x] \subset [a,b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n^{'}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(x) - u_n(a) \right).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для (**??**)) получаем, что

$$\exists S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int\limits_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) dt.$$

Используя далее теорему Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$\exists S^{'}(x) = (const)^{'} + \left(\int\limits_a^x \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) \right) dt \right)_x^{'} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x)$, что соответствует (14). $\square$

8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.

9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.

10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.

11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).

12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.

13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.

14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.

15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.

16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.

17 Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.

18 Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.

19 Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.

20 Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.

21 Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.

22 Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.

23 Лемма Фруллани.

24 Первая теорема Фруллани.

25 Вторая теорема Фруллани.

26 Третья теорема Фруллани.