Ответы к коллоквиуму по курсу "Математический анализ"
(1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность "Информатика")

Обозначение поточечной сходимости ФП:

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \text{ или } f_n(x) \xrightarrow{X}. \tag{1}$$

Определение (1) на $(\varepsilon - \delta)$-языке:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ и для } \forall\, fix\; x \in X\; \exists\, \nu = \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Обозначение равномерной сходимости ФП:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \text{ или } f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}. \tag{3}$$

Определение (3) на $(\varepsilon - \delta)$-языке:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Краткий план:

1. Формулировка: +.
2. Доказательство:
   $\Rightarrow$: $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow r_n = \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant r_n \leqslant \varepsilon$, т.е. $r_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.
   $\Leftarrow$: написать (4), вписав r_n т.е. $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leqslant \varepsilon$.
3. Замечания: достаточные условия равномерной (неравномерной) сходимости ФП.
   $|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, где (a_n) - б.м.п
   $\exists\, x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x_n) \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0$.

1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

Теорема (*Супремальный критерий равномерной сходимости ФП*).

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0. \tag{5}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Если выполнена (3), то, учитывая, что в (4) используется $\forall\, x \in X$ и $\forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon)$, получаем

$$r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ т.е.}$$
$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow 0 \leqslant r_n \leqslant \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

$\Leftarrow$ Пусть выполнена правая часть (5), тогда

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \text{ и для } \forall\, x \in X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, имеем (4), где ν зависит от $\forall\, \varepsilon > 0$ и не зависит от конкретного элемента множества X. □

Замечания:

1. Если известно, что для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, где (a_n) - б.м.п, то тогда имеем (3). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.
2. Если
   $$\exists\, x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x_n) \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} 0,$$
   то тогда равномерной сходимости нет, т.е. $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$. Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

Определение ФП частичных сумм ФР:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x),$$

Обозначение поточечной сходимости ФР:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x) \text{ или } \sum u_n(x) \xrightarrow{X} . \tag{6}$$

Из необходимого условия сходимости ЧР, имеем:

$$u_n(x) \xrightarrow{X} 0 \tag{7}$$

Обозначение равномерной сходимости ФР:

$$\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x) \text{ или } \sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} . \tag{8}$$

Критерий Коши равномерной сходимости ФР:

$$(8) \Leftrightarrow \text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, n \geqslant \nu \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

Критерий Коши сходимости ЧР:

$$\sum a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{R} : \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \ \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+m} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

ЧП (a_n) является *сходящейся числовой мажорантой* для ФР $\sum u_n(x)$, если:

$$1.\ \text{ЧР} \sum a_n \text{ сходится,} \tag{11}$$

$$2.\ \text{для } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \Rightarrow |u_n(x)| \leqslant a_n. \tag{12}$$

2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

Теорема (*мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР*).

Если ФР имеет на X сходяющуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на X.

Краткий план:

1. Формулировка: из названия (мажорантный признак РСФР).
2. Доказательство (расписать оба пункта определения сходящейся числовой мажоранты):

   1: $\sum a_n$ сходится: $\Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon.$

   2: $|u_n(x)| \leqslant a_n \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| \leqslant \varepsilon.$

3. Замечания: достаточное условие + функция мажоранты.

   оценить $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \sup\limits_{x \in X} |u_n(x)|$.

   если $\exists\, v_n(x) \geqslant 0\ :\ |u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$ и $\sum v_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Доказательство с использованием критерия Коши сходимости ЧР (10) и критерия Коши равномерной сходимости ФР (9):

Т.к. $\sum a_n$ сходится, то

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon. \tag{13}$$

Если для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X \Rightarrow |u_n(x)| \leqslant a_n$, то для частичных сумм ФР $\sum u_n(x)$ имеем:
$|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon$, это для $\forall\, n \geqslant \nu = \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, что в силу (9) даёт (8). $\square$

Замечания:

1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходящуюся числовую мажоранту (a_n) либо находят с помощью соответствующих оценок $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \sup\limits_{x\in X} |u_n(x)|$. В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости $\sum a_n$ даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.

2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты, - признак равомерной сходимости ФР, используют функцию мажоранты, а именно:

$$\text{если } \exists\, v_n(x) \geqslant 0 \mid \text{во-первых, } \sum v_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}, \text{ и, во-вторых, } |u_n(x)| \leqslant v_n(x) \text{ для } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X,$$

   то тогда для ФР $\sum u_n(x)$ имеем (8).

Краткий план:

1. Формулировка: из названия (как и Дирихле для рядов).
2. Доказательство:

   оценка Абеля, взятая с 2-кой для надёжности.

   оценить $|b_{n+1}|$ и $|b_{n+m}|$ по $\widetilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{6 \cdot c}$

   def равномерной сходимости для $\sum a_n(x) b_n(x)$.
3. Замечания: как и для рядов ($\sum (-1)^n b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$, Лейбница $\approx$ единица).

3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

Теорема (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП $a_n(x)$ частичные суммы $\sum a_n(x)$ ограничены в совокупности (равномерно на X), т.е.

$$\text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x)| \leqslant c, \tag{14}$$

где $c = const > 0$, *не зависит ни от* n, *ни от* x. Если $\forall\ fix\ x \in X \Rightarrow b_n(x)$ - ФП является монотонной, то в случае

$$b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{15}$$

имеем $\sum a_n(x) b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Монотонная последовательность $(b_n(x))$ для $\forall\ fix\ x \in X$ позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (14) оценку Абеля:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x) b_k(x) \right| \leqslant 2c\left(|b_{n+1}(x)| + 2\,|b_{n+m}(x)|\right). \tag{16}$$

Если выполняется (15), то тогда имеем:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ по числу } \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon} \text{ и } |b_{n+m}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon},$$

поэтому для частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(x)$ в силу (16) для $\forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$ имеем: $|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k(m) b_k(x)\right| \leqslant 2 \cdot c \cdot (\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}) = 6 \cdot c \cdot \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости ФР следует, что $\sum a_n(x) b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. □

Следствие (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если $\forall\ fix\ x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ является монотонной, то в случае $b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Следует из того, что в условии теоремы $a_n = (-1)^n$ не зависит от x, причём $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant 1 = const$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Для обозначения поточечной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X} . \tag{17}$$

Краткий план:

1. Формулировка: *оДини* - один знак, Д*ини* - непрерывны, Д*ини* - непрерывны.
2. Доказательство:

   3 свойства остатка ряда $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$: Fun UFO (Fun UFO — функция непрерывна, Fun UFO — функциональная последовательность убывает, Fun UFO — функция к 0).

   дм у пво (де Морган, упрощение, принцип выбора, x_0)

   противоречие с последним свойством остатка.

   $R_m(x_{nk}) \geqslant R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0 \Rightarrow$ [переходя к пределу] $\Rightarrow R_m(x_0) = \lim\limits_{n_k\to\infty} R_m(x_{nk}) \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит последнему из свойств остатка.
3. Теорема: то же самое, только вместо сохранения одного знака члены ФП будут монотонны.

   по доказанному признаку, задав ФР как $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$.

4 Признак Дини равномерной сходимости ФР и следствие из него (теорема Дини для ФП)

Теорема (*Признак Дини равномерной сходимости ФР*).

Пусть

1. Члены ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны и сохраняют один и тот же знак на $X = [a,b]$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$.

Тогда, если $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывная функция на $[a,b]$, т.е. $S(x) \in C([a,b])$, то $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Рассмотрим на $X = [a,b]$ остатки ряда $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \ldots = S(x) - S_n(x)$. Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. для $\forall\, fix\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow R_n(x)$ - непрерывная функция на $[a,b]$ как разность двух непрерывных функций.
2. для $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow$ ФП $(R_n(x))$ убывает в случае, когда $\forall\, u_n(x) > 0$, т.к. $R_n(x) = u_n(x) + R_{n+1}(x) \geqslant R_{n+1}(x)$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. Т.к. имеет место (17), то для $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow{X} 0$.

Докажем от противного. Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на X ФР не является равномерной сходимостью на X.

Тогда по правилу де Моргана имеем: $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \mid$ для $\forall\, \nu \in \mathbb{R}\ \exists\, n(\nu) \geqslant 0$ и $\exists\, x(\nu) \in X \mid R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$. Для простоты будем считать, что $\exists\, x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$. По принципу выбора из ограниченной последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. $x_{n_k} \underset{n_k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, при этом в силу использования $X = [a,b]$ - компакт, получаем, что $x_0 \in X$. Если зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, то для $\forall\, n_k \geqslant m \Rightarrow R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$, по свойствам остатка будем иметь, что $R_m(x_{n_k}) \geqslant R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$. В неравенстве $R_m(x_{n_k}) > \varepsilon_0$, переходя к пределу при $n_k \to \infty$ для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, получаем в силу непрерывности $R_n(x) : R_m(x_0) = \lim\limits_{n_k\to\infty} R_m(x_{n_k}) \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит последнему из свойств остатка, а именно $R_m(x_0) \xrightarrow{X} 0$ при $m \to \infty$, поэтому из нашего предположения следует, что выполняется $R_m(x_0) \not\to 0$, противоречие, т.е. выполняется $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Мы рассмотрели случай положительного ФР, отрицательный рассматривается аналогично. □

Следствие (*Теорема Дини для ФП*).

Если для ФП $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ на $X = [a,b]$ выполняются свойства:

1. для $\forall\, f_n(x) \in C([a,b])$ и для $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow f_n(x)$ монотонна.
2. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда, если $f(x) \in C([a,b])$, то $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. следует из того, что члены рассматриваемой ФП $f_n(x)$ можно рассматривать как частичные суммы соответствующего ФР с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Действительно, $S_n(x) = (f_1(x) - f_0(x)) + (f_2(x) - f_1(x)) + \ldots + (f_{n-1}(x) - f_{n-2}(x)) + (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x)$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

А далее к этому ФР $\sum u_n(x)$ применяется теорема Дини равномерной сходимости ФР. □

Пусть x_0 - предельная точка множества сходимости $X \subset \mathbb{R}$ для ФР $\sum u_n(x)$. Будем говорить, что в $\sum u_n(x)$ *возможен почленный предельный переход* $x \to x_0$, если

$$\exists \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x), \tag{19}$$

причём получившийся в левой части (19) ЧР является сходящимся.

В частности, если $x_0 \in X$ и $\forall\, u_n(x)$ непрерывен в некоторой окрестности точки x_0, и значит, для $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = u_n(x_0)$, то в случае выполнения (19) для суммы $S(x)$ ФР $\sum u_n(x)$ при $x \to x_0$ имеем:

$$\exists \lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x_0), \tag{20}$$

что соответствует непрерывности $S(x)$ в точке $x_0 \in X$.

5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

Краткий план:

1. Формулировка: по названию + каждый член ряда — непрерывная функция.
2. Доказательство (Зейдель $= 3 \cdot \varepsilon$):

   Пишем, что нужно обосновать для $\forall\, x_0 \in X$, при этом нужно использовать односторонние пределы для концевых значений.

   Рассматриваем приращение суммы $\Delta S(x_0)$.

   Рассматриваем три разности частичной суммы и полной суммы (с x_0 и $x_0 + \Delta x$).

   Подставляем 3 разности $(1 + 3 - 2)$ и получаем непрерывность по М-лемме.

Теорема (*о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР*).

Если все члены $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны на $X = [a, b]$, то в случае равномерной сходимости этого ряда на $[a, b]$ его сумма $S(x)$ будет непрерывной функцией на $[a, b]$.

Доказательство. Требуется обосновать (20) для $\forall\ x_0 \in [a, b]$, причём в случае концевых значений $x_0 = a,\ x_0 = b$ будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для $fix\ x_0 \in [a, b]$ придадим произвольные приращения $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ и рассмотрим соответствующие приращения суммы ФР $\sum u_n(x)$:

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b] \Rightarrow$ для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu$, и для $\forall\, x \in [a, b]$ для частичных сумм $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ ряда $\sum u_n(x)$ имеем: $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

Отсюда, в частности, для $x = x_0 \in X$ и $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leqslant \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{21}$$

Далее из непрерывности $\forall\ u_n(x)$ в $x_0 \in [a, b]$ следует непрерывность частичных сумм в x_0 (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ :$ для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{22}$$

Таким образом, в силу (21), (22) имеем: для $\forall\, \varepsilon > 0$, выбирая $n \geqslant \nu$ и рассматривая $\forall\, |\Delta x| \leqslant \delta$, имеем:

$|\Delta S(x_0)| = |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant$
$\leqslant |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon.$

Поэтому получаем: для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :$ для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow |\Delta S(x_0)| \leqslant M \cdot \varepsilon, M = const = 3 > 0$.

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что $\Delta S(x_0) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, что на языке приращений равносильно (20). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость, ЧР в правой части (20) будет сходящимся. □

Замечания:

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.
2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}$ на локальную равномерную сходимость.

6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

Краткий план:

1. Очевидно, что $S(x)$ - непрерывна, поэтому интегрируема
2. Рассмотрим частичные суммы $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx$.
3. Рассмотрим разницу $\left| T_n - \int\limits_a^b S(x) \right|$ и т.к. $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \varepsilon$ получим $\int\limits_a^b (S(x) - S_n(x)) \leqslant M\varepsilon$
4. Доказываем по М-лемме о сходимости ЧП.

Теорема (*о почленном интегрировании равномерно сходящихся ФР*).
Если $\forall\ u_n(x) \in C([a,b])$,

для $n \in \mathbb{N}$, то в случае, когда $\sum u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$, возможно почленное интегрирование этого ряда на $[a,b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx. \tag{23}$$

Доказательство. На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящихся ФР получим, что сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет непрерывна на $[a,b]$, а значит, интегрируема на $[a,b]$.

Используя частичные суммы для $\sum u_n(x)$, рассмотрим частичные суммы $T_n = \int\limits_a^b S_n(x)dx =$

$= \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx$ для ЧР правой части (23).

Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на $[a,b]$ получим, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall\ n \geqslant \nu$ и для $\forall\ x \in [a,b] \Rightarrow$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leqslant \varepsilon \tag{24}$$

Отсюда получаем, что $\left| \int\limits_a^b S(x)dx - T_n \right| = \left| \int\limits_a^b S(x)dx - \int\limits_a^b S_n(x)dx \right| = \left| \int\limits_a^b (S(x) - S_n(x))dx \right| \leqslant$

$\leqslant \int\limits_a^b |S(x) - S_n(x)|\, dx \leqslant \int\limits_a^b \varepsilon dx = M\varepsilon$, где $M = b - a = const \geqslant 0$.

Таким образом, для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall\ n \geqslant \nu \Rightarrow \left| \int\limits_a^b S(x)dx - T_n \right| \leqslant M\varepsilon$, поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} T_n = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx,$$

что равносильно (23). $\square$

7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

Краткий план:

1. $\sum u_n'(x)$ можно почленно интегрировать.

2. Берём интеграл с переменным верхним пределом (т.е. на $[a;x]$).

3. Выражаем $S(x)$, дифференцируем по теореме Барроу.

Теорема (*о почленном дифференцировании ФР*).
Пусть ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a,b]$ удовлетворяет условиям:

1. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$,

2. $\exists\, u_n^{'}(x)$, непрерывная для $\forall\, n \in \mathbb{N}, x \in X$.

Тогда, если

$$\sum u_n^{'}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \tag{25}$$

то рассматриваемый ФР $\sum u_n(x)$ можно почленно дифференцировать на $[a,b]$, т.е.

$$\exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{'}(x), \text{для } \forall\, x \in X. \tag{26}$$

Доказательство. В силу (25), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР $\sum u_n^{'}(t)$ можно почленно интегрировать на $\forall\, [a,x] \subset [a,b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n^{'}(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(t)]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(x) - u_n(a)\right).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для $\sum u_n(x)$) получаем, что

$$\exists\, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int\limits_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t)dt.$$

Используя далее *теорему Барроу* о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$$\exists\, S^{'}(x) = (const)^{'} + \left(\int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t)\right) dt\right)_x^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x),$$

что соответствует (26). □

Под *степенным рядом* будем подразумевать ФР вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{27}$$

где fix $x_0 \in \mathbb{R}$ - центр для СтР, а $\forall\, a_n \in \mathbb{R}$ - соответствующая числовая последовательность (*коэффициенты СтР*).

8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.

Краткий план:

1. Абеля - сходится абсолютно, признак сравнения ЧР.
2. Сходящаяся ЧП является ограниченной (т.е. ограничен каждый её член)
3. Рассматриваем это условие для x_1, получаем верхнюю границу для a_n.
4. Затем аналогично рассматриваем условие для x, ограничивая сверху Mq^n.

Теорема Абеля (*о сходимости степенных рядов*).
Если СтР (27) сходится при $x = x_1 \neq x_0$, то он будет сходится абсолютно для любого x, где

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|\,. \tag{28}$$

Доказательство. Из сходимости при $x = x_1$, т.е. ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ следует в силу необходимого условия сходимости ЧР, что $a_n(x_1 - x_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а т.к. $\forall$ сходящаяся ЧП является ограниченной, то
$\exists\, M = \mathrm{const} > 0 : |a_n(x_1 - x_0)^n| \leqslant M,$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{|x_1 - x_0|^n}. \tag{29}$$

Для $\forall\, x$, удовлетворяющего (28), в силу (29) получаем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n|\,|x - x_0|^n \overset{(29)}{\leqslant} \frac{M\,|x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} = Mq^n, \text{ где } q = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \in [0; 1[.$$

Таким образом, мы получили сходящуюся мажоранту, ибо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n = M \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $q \in [0; 1[$.

По признаку сравнения сходимости ЧР имеем, что для $\forall\, x$, удовлетворяющего (28), ряд (27) будет сходиться. □

Замечание.
Из полученных выше результатов следует, что если рассмотреть множество X_0 всех x, удовлетворяющих (28), то имеем, что $X_0 \subset X$, т.е. X_0 - некоторое подмножество множества X сходимости для (27).

9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.

Краткий план:

1. Рассматриваем $x \in \left]-R+x_0; x_0+R\right[\ (x \neq x_0)$.
2. Подставляем в теорему Даламбера для ЧР (a_{n+1}/a_n).
3. Рассматриваем два случая: $d < 1$ и $d > 1$.

Теорема (*формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР*).
Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{30}$$

то для радиуса сходимости ряда (27) имеем:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{31}$$

Доказательство.
Без ограничения общности будем считать, что в (27) $\forall\ a_n \neq 0$. Т.к. СтР (27) сходится при $x = x_0$, то рассмотрим случай $x \neq x_0$.
Если $x \in I = \Big]\, x_0 - R\ ;\ x_0 + R\, \Big[$, где $R \geqslant 0$, то по признаку Даламбера сходимости ЧР для (27) имеем:

$$\exists\ d = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}\right|}{\left|a_n(x-x_0)^n\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| \overset{(31)}{=} \frac{|x-x_0|}{R}.$$

В силу того, что $x \in I$ и, значит, $|x - x_0| < R$, получаем, что $d < 1$ и СтР (27) будет сходящимся. Если $d > 1$, т.е. $|x - x_0| > R$, то (27) расходится. Таким образом, (31) будет радиусом сходимости для (27). □

10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.

Краткий план:

1. Рассмотрим $x \neq x_0$
2. Применяем теорему Коши для ЧР
3. Рассматриваем два случая: $k < 1$ и $k > 1$.

Теорема (*формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР*).
Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{32}$$

то для радиуса сходимости ряда (27) имеем:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{33}$$

Доказательство проведём по той же схеме, что и в предыдущей теореме.
Т.к. случай $x = x_0$ тривиален (в данной точке ряд всегда сходится), то рассмотрим случай $x \neq x_0$.
По признаку Коши сходимости ЧР для (27) получаем:

$$\exists\, k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{(33)}{=} \frac{|x-x_0|}{R}.$$

Если $k < 1$, т. е. $|x - x_0| < R$, то СтР (27) сходится.
Если $k > 1$, т. е. $|x - x_0| > R$, то СтР (27) расходится.
Таким образом, в силу определения, величина (33) будет радиусом сходимости для (27).

□

Замечания:

1. В силу связи между признаками Даламбера и Коши сходимости ЧР, в случае, когда предел (31) не существует (ни конечный, ни бесконечный), предел (33) может существовать, и в этом смысле формула Коши (33) предпочтительнее, чем (31).

2. Можно показать, что в случае, когда в (33) нет ни конечного, ни бесконечного предела, радиус сходимости для (27) всегда можно вычислить по **формуле Коши-Адамара**, использующей понятие верхнего предела последовательности:
$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{34}$$
Под верхним пределом последовательности подразумевается верхняя грань (supremum) множества конечных пределов всех сходящихся подпоследовательностей рассматриваемой последовательности.

11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).

Краткий план:

1. Рассматриваем произвольный отрезок из интеравала сходимости.
2. Делаем отрезок симметричным относительно x_0.
3. Ограничиваем члены СтР сверху: $a_n r^n$.
4. Применяем обобщённый признак Коши (супремум пределов)

Следствие о равенстве СтР:
Краткий план:

1. Приравниваем сумму двух рядов
2. Подставляем x_0, получаем равенство $a_0 = b_0$
3. Делим остаток на $(x - x_0)$
4. Предел $x \to x_0$, получаем равенство $a_1 = b_1$. Goto 2.

Теорема (*о локальной равномерной сходимости СтР*).
Если СтР (27) имеет ненулевой радиус сходимости, то этот ряд (27) сходится равномерно на любом отрезке из интервала сходимости данного ряда.

Доказательство.
Рассмотрим $\forall\, [a, b] \subset I = \Big]\, x_0 - R\, ;\ x_0 + R\, \Big[$, где $R > 0$ - радиус сходимости СтР (27). Имеем:

$$x_0 - R < a < b < x_0 + R \Rightarrow -R < a - x_0 < b - x_0 < R \Rightarrow \begin{cases} |a - x_0| < R, \\ |b - x_0| < R. \end{cases} \tag{35}$$

Полагая $r = \max\Big\{\ |a - x_0|\,,\ |b - x_0|\ \Big\}$, в силу (35) получаем:

$$0 \leqslant r < R. \tag{36}$$

Отсюда для $\forall\, x \in [a, b]$ получаем:

$$|x - x_0| \leqslant \max\Big\{\ |a - x_0|\,,\ |b - x_0|\ \Big\} = r,$$

поэтому для $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ имеем:

$$|a_n (x - x_0)^n| = |a_n|\, |x - x_0|^n \leqslant |a_n|\, r^n = c_n \text{ - мажоранта.}$$

Применяя к ряду c_n обобщённый признак Коши сходимости ЧР, получаем:

$$\exists\ \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\, r^n} = r \cdot \underbrace{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R}} \overset{(34)}{=} \frac{r}{R} \overset{(36)}{<} 1,$$

а значит, ряд $\sum c_n$ сходится.

Таким образом, мы получили равномерно сходящуюся числовую мажоранту, и поэтому, по мажорантному признаку Вейерштрасса для ФР, рассматриваемый СтР (27) будет равномерно сходиться на $\forall\, [a, b] \subset I$. □

Замечания:

1. Из доказанной теоремы следует, что любой СтР сходится локально равномерно на интервале своей сходимости.
2. Применяя теорему Стокса-Зейделя для ФР и учитывая, что в (27) все слагаемые являются непрерывными функциями на I, в силу локальной равномерной сходимости (27) на I, внутри интервала сходимости сумма любого СтР (27) будет являться непрерывной функцией.

Следствие (*о равенстве СтР*).
Если для СтР (27) с непрерывной суммой $S(x)$ есть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ с соответствующей суммой $T(x)$, причём $T(x) = S(x)$ в некоторой окрестности центра разложения x_0, то тогда и сами СтР совпадают, т.е. $a_n = b_n$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Пусть имеем, что

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots = T(x).$$

В силу непрерывности $S(x)$ и $T(x)$ в соответствующей окрестности точки x_0 при $x \to x_0$, получаем:

$$a_0 = \lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} T(x) = b_0, \text{ отсюда}$$
$$a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Таким образом, для $\forall\, x \neq x_0$ имеем:

$$a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots = b_1 + b_2(x - x_0) + \ldots.$$

Используя опять соответствующую окрестность точки x_0, при $x \to x_0$, получим, что $a_1 = b_1$ и так далее (по ММИ). □

12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.

Краткий план:

1. Слагаемые - непрерывно дифференцируемы + имеем поточечную сходимость СтР, поэтому сумма СтР будет непрерывно дифференцируемой.
2. Считаем радиус по обобщённой теореме Коши (формула Коши-Адамара)

Следствие
Краткий план:

1. Просто дифференцируем и замечаем схожесть с рядом Тейлора.

Теорема (*о дифференцировании СтР*).
Сумма СтР (27) внутри его интервала сходимости является непрерывно дифференцируемой функцией, причём у продифференцированного СтР будет тот же радиус (а, значит, и интервал) сходимости, что и у исходного ряда (27).

Доказательство. По теореме о почленном дифференцировании ФР и замечанию к ней достаточно показать, что возможно почленное дифференцирование (27) на $\forall$ отрезке $[a,b] \subset I = \,]\, x_0 - R\,;\, x_0 + R\,[\,$.

1. В (27) слагаемые $u_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями для $\forall\, x \in [a;b]$ т.к. $\exists\, u_n'(x) = na_n(x-x_0)^{n-1}$ непрерывная на $[a;b]$.
2. Так как $\forall$ СтР (27) сходится поточечно внутри своего интервала сходимости, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{\text{для } \forall\, [a;b]\subset I} S(x)$.

Осталось показать, что продифференцированный СтР

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows}.$$

Используя *формулу Коши-Адамара*, имеем:

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{|a_{n+1}|}\right)} = \left[\begin{array}{c} \sqrt[n]{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \\ \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}}} = \left[\begin{array}{c} \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R} \end{array}\right] = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R.$$

Значит, у исходного и продифференцированного рядов один и тот же радиус, а, значит, и интервал, сходимости. Тогда, в силу того, что $\forall$ СтР сходится локально равномерно, получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} S'(x)$.

Причём, в силу непрерывности слагаемых, S(x) будет непрерывно дифференцируема на $\forall\ [a;b] \subset I$, а, значит, и для $\forall\, x \in I$. □

Замечания:

1. Применяя последовательно дифференцирование к СтР (27), получим по ММИ, что сумма ряда (27) будет бесконечное число раз дифференцируемой функцией.
2. Можно показать, что дифференцирование СтР хоть и сохраняет интервал сходимости, но в общем случае *не улучшает* его множество сходимости в том смысле, что если, например, исходный ряд (27) сходится на каком-то из концов интервала I ($x = x_0 \pm R$), то продифференцированный ряд уже может расходиться на этом конце.

Следствие.
Если на интервале $I = \,]\, x_0 - R\,;\, x_0 + R\,[\,$ бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, для $\forall\, x \in I$, то для неё СтР (27) будет являться соответствующим рядом Тейлора в окрестности точки x_0, т. е. для $\forall\, a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Действительно, дифференцируя почленно n раз равенство

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

в силу доказанной теоремы получим:

$$\exists\ f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + (n+1) \cdot n \cdot \ldots \cdot 2 \cdot a_{n+1}(x - x_0) + \ldots$$

Отсюда при $x \to x_0$ имеем:

$$n! \cdot a_n = \lim_{x \to x_0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) \qquad \Leftrightarrow \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

т.е. $\forall\ a_n$ - коэффициент в разложении в ряд Тейлора. $\square$

НИ-1 (линейность, аддитивность, монотонность). Рассмотрим $f(x)$, определённую для $\forall\ x \in [a; +\infty[$. Предположим, что для $\forall\ A > a \Rightarrow f \in \mathbb{R}([a, A])$, т.е.

$$\exists\ \Phi(A) = \int\limits_a^A f(x)dx \in \mathbb{R}. \tag{37}$$

Предел функции (37) при $A \to +\infty$ называется НИ-1, обозначаемый:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^A f(x)dx = \lim_{A\to+\infty} \Phi(A) = \Phi(+\infty). \tag{38}$$

Интеграл (37) сходится $\Leftrightarrow$ в (38) $\Phi(+\infty) \in \mathbb{R}$. В этом случае конечную величину $\Phi(+\infty)$ принимают за значение (38).

Геометрически, если $f(x)$ неотрицательная непрерывная для $\forall\ x \geqslant a$ функция, то в случае сходимости (38) его значение соответствует площади неограниченной фигуры между Ox и графиками функции.

НИ-2 (линейность, аддитивность, монотонность). Пусть $f(x)$ определена для $\forall\ x \in [a, b[$ и неограничена в левосторонней окрестности точки b, т.е. $f(b-0) = \infty$. Если $f(x)$ интегрируема на $\forall\ [a, c] \subset [a, b[$, то для $\forall\ \varepsilon\ \exists\ ]0, b-a[\Rightarrow$

$$\exists\ I(\varepsilon) = \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{39}$$

В этом случае НИ-2 от $f(x)$ по $[a, b[$ называют величину:

$$I_0 = \lim_{\varepsilon\to+0} I(\varepsilon) \overset{(39)}{=} \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int\limits_a^{b-0} f(x)dx. \tag{40}$$

В дальнейшем для простоты вместо (40) для НИ-2 будем просто писать

$$I_0 = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{41}$$

НИ-2 (41) считается сходящимся $\Leftrightarrow$ предел (40) конечен.

13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.

Краткий план:

1. Применяем теорему о замене переменных в ОИ на произвольном подотрезке $[\alpha; \gamma]$.
2. Переходим к пределу $\gamma \to \beta - 0$.

Теорема (*о замене переменных в НИ*).

Будем одновременно рассматривать как НИ-1, так и НИ-2.

Пусть $f(x)$ определена для $\forall\ x \in [a; b[$, где либо $b = +\infty$ (НИ-1), либо $f(b-0) = \infty$ (НИ-2).

Если функция $x(t) = \phi(t)$ - *непрерывно дифференцируема* для $\forall\ t \in [\alpha; \beta[$ и *строго монотонна*, то в случае, когда: $\begin{cases}\phi(\alpha) = a,\\ \phi(\beta-0) = b.\end{cases}$, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $b = +\infty$ (НИ-1) либо $f(b-0) = \infty$ (НИ-2), сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt. \tag{42}$$

При этом справедлива формула замены переменных в НИ:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi^{'}(t)dt, \\ x\Big|_{a=\phi(\alpha)}^{b=\phi(\beta-0)}. \end{bmatrix} = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt, \tag{43}$$

причём в правой части (43) может стоять как некоторый НИ, так и обычный интеграл Римана.

Доказательство. Следует из соответствующей теоремы о замене переменных в ОИ (интеграле Римана).

Для доказательства, выбирая для $\forall\ \gamma \in [\alpha;\beta[$, в силу строгой монотонности $\phi(t)$, получаем что $c = \phi(\gamma) \in [a;b[$. При этом для $\forall\ c \in [a;b[\ \exists\,!\ \gamma \in [\alpha;\beta[$.

Тогда по *теореме о замене переменных в ОИ* имеем:

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \left[\begin{matrix} x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi^{'}(t)dt, \\ x\big|_{a=\phi(\alpha)}^{c} \Rightarrow \exists\,!\ \gamma \in [\alpha;\beta[\ \mid c = \phi(\gamma) \Rightarrow t\big|_{\alpha}^{\gamma}. \end{matrix} \right] = \int\limits_{\alpha}^{\gamma} f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt.$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что $\gamma \to \beta - 0 \Rightarrow c \to b - 0$, получаем (43). $\square$

Замечание.

Для НИ-2 вида $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ после замены переменных имеем:

$$t = \frac{1}{b-x}\Bigg|_{\frac{1}{b-a}>0}^{+\infty},\ \text{а для}\ \ x\big|_a^{b-0},$$

отсюда получаем: $x = b - \dfrac{1}{t} \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t^2} \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \dfrac{f(b-\frac{1}{t})}{t^2}dt.$

Тем самым мы *свели НИ-2 к соответствующему НИ-1*, дальнейшее исследование которого, например, на сходимость, можно проводить с помощью полученных ранее условий сходимости НИ-1.

Аналогично, как и теорема о замене переменных в НИ-2, обосновываются формулы двойной подстановки (аналог формулы Ньютона-Лейбница) и метод интегрирования по частям для НИ-2 и НИ-1.

14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.

Краткий план:

1. Рассматриваем частичную первообразную $F_0(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$
2. По теореме Барроу можно продифференцировать интеграл.
3. Рассматриваем произвольную первообразную $F(x)$ и замечаем, что $F(x) = F(x_0) + c_0$
4. $x = a$, $x = b - 0$
5. Выражаем общий интеграл и получаем нужную формулу. При этом проблемным в формуле будет только $F(b-0)$. Т.е. интеграл сходится $\Leftrightarrow$ сходится $F(b-0)$.

Интегрирование по частям
Краткий план:

1. По формулам двойной подстановки и интегрирования по чатям для НИ.

Теорема (*Формула Ньютона-Лейбница для НИ.*).
Пусть для $f(x)$, определённой для $\forall\, x \in [a, b[$, где $b = +\infty$ или $f(b-0) = \infty$ существует непрерывно дифференцируемая первообразная $F(x)$, т.е. $\exists\, F^{'}(x) = f(x)$, для $\forall\, x \in [a, b[$. Тогда имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c\to+\infty\\ c\to b-0}} \int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{c\to b-0} \big[F(x)\big]_a^c =$$
$$= \lim_{c\to b-0} (F(c) - F(a)) = F(b-0) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^{b-0}.$$

При этом используемый интеграл сходится тогда и только тогда, когда значения $F(b-0), F(+\infty)$ конечны.

Доказательство. Для $fix\ x_0 \in [a, b[$ рассмотрим $F_0(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ - одну из первообразных для $f(x)$, т.к. по теореме Барроу $\exists\, F_0^{'}(x) = f(x)$. Рассмотрим $\forall\, F(x)$ - первообразную $f(x)$ на $[a, b[$. Тогда $\exists\, c_0 = const \mid F(x) = F_0(x) + c_0$, т.е. $F(x) - c_0 = F_0(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$. Полагая здесь $x := a, x := b - 0$, имеем:

$$\begin{cases} F(a) - c_0 = \int\limits_{x_0}^{a} f(t)dt, \\ F(b-0) - c_0 = \int\limits_{x_0}^{b-0} f(t)dt. \end{cases} \Rightarrow (F(b-0)-c_0) - (F(a)-c_0) = \int\limits_{x_0}^{b-0} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{a} f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{b-0} f(t)dt + \int\limits_{a}^{x_0} f(t)dt = \int\limits_{a}^{b-0} f(t)dt =$$
$$= F(b-0) - F(a).$$

$\int\limits_a^{b-0} f(t)dt$ сходится $\Leftrightarrow F(b-0)$, т.к. $F(a) = const \in \mathbb{R}$. □

Замечание.

На практике формулы двойной подстановки используются в том же виде, что и для ОИ: $\int\limits_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$.

Теорема (*Интегрирование по частям в НИ.*).
Пусть $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $\forall\, x \in [a; b[$, где $b = +\infty$ или $f(b-0) = \infty$.
Если существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to b-0\\ (x\to+\infty)}} u(x)v(x) = u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}$, то тогда в случае сходимости одного из использованных ниже интегралов, получаем:

$$\int\limits_a^b u(x)v^{'}(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int\limits_a^b v(x)u^{'}(x)dx.$$

Доказательство. По формулам двойной подстановки для НИ и интегрирования по частям в ОИ:

$$\int\limits_a^{b-0} u(x)dv(x) = \Big[\int u(x)v^{'}(x)dx\Big]_a^{b-0} = \Big[u(x)v(x) - \int v(x)du(x)\Big]_a^{b-0} = \big[u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}\big] =$$

$$= \Big(u(b-0)v(b-0) - \int v(b-0)u^{'}(b-0)db\Big) - \Big(v(a)u(a) - \int v(a)u^{'}(a)da\Big) =$$

$$= \big[u(x)v(x)\big]_a^{b-0} - \Big[\int v(x)u^{'}(x)dx\Big]_a^{b-0} = \big[v(x)u(x)\big]_a^{b-0} - \int\limits_a^{b-0} v(x)du(x). \qquad \square$$

Замечание.

На практике удобнее использовать:

$$\int\limits_a^b udv = \big[uv\big]_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Функцию $\phi(x)$, определённую на X будем называть *равномерным частным пределом* $f(x,y)$ при $y \to y_0$, если

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leqslant \delta \text{ следует } |f(x,y) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{44}$$

В этом случае будем писать

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x). \tag{45}$$

15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.

Краткий план:

1. Теорема Кантора для ФНП (что-то вроде Коши для ЧР).
2. Хитрая замена нужных x.

Теорема (*признак равномерной сходимости Ф2П*).
Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$, являющимся компактом в $\mathbb{R}^2$, и $y_0 \in [c,d]$, то имеем:

$$f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0,\, y_0 \in [c,d]]{[a,b]} f(x,y_0). \tag{46}$$

Доказательство. Из *теоремы* Кантора для ФНП получаем, что рассматриваемая $f(x,y)$ будет равномерно непрерывна для $\forall\, x \in [a,b]$ и для $\forall\, y \in [c,d]$, т.е.:

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \text{для } \forall\, \widetilde{x}, \bar{x} \in [a,b] \text{ и для } \forall\, \widetilde{y}, \bar{y} \in Y \\ &\text{из } \begin{cases} 0 < |\widetilde{x} - \bar{x}| \leqslant \delta, \\ 0 < |\widetilde{y} - \bar{y}| \leqslant \delta. \end{cases} \Rightarrow |f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Полагая здесь: $\begin{cases} \widetilde{x} = \bar{x} = x \in [a,b], \\ \widetilde{y} = y \in [c,d], \\ \bar{y} = y_0 \in [c,d]. \end{cases}$, получаем:

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \text{для } \forall\, y \in [c,d] \text{ из } |y - y_0| \leqslant \delta(\varepsilon), \text{ для } \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x,y) - f(x,y_0)| \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Т.к. здесь $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от $x \in [a,b]$, то получаем (45), где $\phi(x) = f(x,y_0)$, что соответствует (46). $\square$

16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.

Краткий план:

1. Доказываем в обе стороны!
2. $\Rightarrow$ по определению.
3. $\Leftarrow$ Из равномерной сходимости $f(x, y_n)$ и критерия Гейне для Ф1П следует поточечная сходимость $f(x, y)$.
4. Предполагаем, что нету равномерной сходимости и применяем правило Де Моргана.
5. Для каждого $\delta = \dfrac{1}{n}$ выбираем $x_n = x(\delta)$ и $y_n = y(\delta)$.
6. Подставляем x_n в определение поточечной сходимости.
7. Докидываем туда же y_n, получаем противоречие т.к. одновременно должно выполняться $blabla \leqslant \varepsilon_0$ и $blabla > \varepsilon_0$.

Теорема (*критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П*).
$f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x) \Leftrightarrow$ для $\forall\ y_n \in Y, y_n \to y_0, y_n \neq y_0$, где y_0 - предельная точка для множества Y, выполнялось:

$$\text{ФП } g_n(x) = f(x, y_n) \underset{n \to \infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x) \tag{47}$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть выполняется (45), тогда для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: для $\forall\ y \in Y$ из $0 < |y - y_0| \leqslant \delta$, для $\forall\ x \in X \Rightarrow |f(x, y) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon$.

Рассматривая $\forall$ последовательность Гейне $(y_n) \in Y$, в пределах точки y_0 по найденному ранее $\delta > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall\ n \geqslant \nu \Rightarrow |y_n - y_0| \leqslant \delta$.

Окончательно получаем: для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall\ n \geqslant \nu$, для $\forall\ x \in X \Rightarrow$ $\Rightarrow |y_n - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x, y_n) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon$, т.е. имеем (47).

$\Leftarrow$. Пусть для $\forall\ (y_n) \in Y$ в предельной точке выполнено (47). Тогда в силу того, что из равномерной сходимости $g_n(x) = f(x, y_n)$ следует поточечная сходимость ФП $g_n(x)$, получаем, что $g_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{X} \phi(x)$.

Поэтому в силу критерия Гейне существования предела Ф1П получаем, что:

$$f(x, y_0) = g_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{X} \phi(x) \Rightarrow f(x, y) \xrightarrow[y \to y_0]{X} \phi(x).$$

Предположим, что имеем поточечную сходимость, но равномерной сходимости нет, т.е. получаем:

$$f(x, y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\not\rightrightarrows}} \phi(x).$$

Тогда по *правилу де Моргана*, имеем:

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0 \text{ такое, что для } \forall\ \delta > 0\ \exists\ y(\delta) \in Y, \exists\ x(\delta) \in X \text{ такое, что из } 0 < |y(\delta) - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f\left(x(\delta), y(\delta)\right) - \phi(x(\delta))| > \varepsilon_0. \tag{48}$$

Выбирая для простоты $\delta = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} +0$, получаем, что $\begin{cases} \exists\ x_n = x\left(\dfrac{1}{n}\right) \in X, \\ \exists\ y_n = y\left(\dfrac{1}{n}\right) \in Y. \end{cases}$ такие, что из $0 < |y_n - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$.

Используя условие $f(x_n, y) \xrightarrow[y \to y_0]{X} \phi(x_n)$, для найденного $\varepsilon_0 > 0$ получаем:

$$\exists\ \delta_0 > 0 \text{ такая, что для } \forall\ y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leqslant \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y) - \phi(x_n)| \leqslant \varepsilon_0.$$

Подставляя $y = y_n$, получаем $0 < |y_n - y_0| \leqslant \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| \leqslant \varepsilon_0$.

Выбирая теперь $\nu = \dfrac{1}{\delta_0} \in \mathbb{R}$, для $\forall\ n \geqslant \nu \Rightarrow 0 < |y_n - y_0| \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{\nu}$. Отсюда в силу (48) при $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$ получаем, что для $\forall\ n \geqslant \nu$ выполняется $|f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$. Противоречие. $\square$

Замечания:

1. Доказанная теорема позволяет из соответствующих свойств ФП получить аналогичные свойства для равномерно сходящихся Ф2П, в том числе сформулированный ранее супремальный критерий равномерной сходимости Ф2П и критерий Коши для равномерной сходимости Ф2П. Кроме того, в силу теоремы Дини для ФП имеем соответствующую теорему Дини для равномерной сходимости Ф2П.

   Теорема (*Дини для равномерной сходимости Ф2П*).

   Пусть для $\forall\ fix\ y \in Y, f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a,b] = X$, причём при монотонной сходимости $y \to y_0$ ($y \uparrow y_0$ либо $y \downarrow y_0$) соответственно получаем $f(x,y)$ монотонно сходится к $\phi(x)$ ($f(x,y) \uparrow\downarrow \phi(x)$). Тогда, если предельная функция $\phi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ непрерывна на $X = [a,b]$, то кроме поточечной сходимости будем иметь равномерную сходимость (45).

2. Аналогично получаем теорему Стокса-Зейделя для Ф2П.

   Теорема (*Стокса-Зейделя*).

   Пусть для $\forall\ fix\ y \in Y, f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a,b] = X$. Тогда, если $f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, где y_0 - предельная точка для Y, то предельная функция $\phi(x)$ будет непрерывной на $[a,b]$.

Предположим, что $f(x,y)$ определена для $\forall\ y \in Y$ и для $\forall\ x \in [a,b]$, причём при $\forall\ fix\ y \in Y\ f(x,y)$ интегрируема по $x \in [a,b]$. В этом случае:

$$\exists\ F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx, y \in Y. \tag{49}$$

(49) - *интеграл Римана (собственный)*, зависящий от параметра $y \in Y$.

В дальнейшем интеграл вида (49) будем кратко называть *СИЗОП*.

17 Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.

Краткий план:

1. Рассматриваем разность двух интегралов, и показываем, что она $\leqslant M\varepsilon$.

Теорема (*о предельном переходе в СИЗОП*).

Пусть определён СИЗОП (49). Тогда, в случае $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, где, как и в определении СИЗОП (49), предполагая интегрируемость $f(x,y)$ по x, получаем:

$$\exists \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \phi(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx. \tag{50}$$

Доказательство. В силу (45) имеем (44), откуда для $I = \int\limits_a^b \phi(x)dx$, получаем:

$$|F(y) - I| \overset{(49)}{=} \left| \int\limits_a^b (f(x,y) - \phi(x))\, dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,y) - \phi(x)|\, dx \overset{(44)}{\leqslant} \int\limits_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a).$$

Таким образом, получаем, что $\exists\ M = b - a = const > 0$ такое, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такая, что для $\forall\ y \in Y$ из $0 < |y - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |F(y) - I| \leqslant M\varepsilon$.

Откуда по M-лемме для сходимости Ф1П, получаем: $F(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} I$, т.е. имеем (50). □

Замечания:

1. При доказательстве теоремы неявно предполагалось, что $\phi(x) \in \mathbb{R}([a,b])$. Это условие выполняется в силу критерия Гейне существования равномерного частного предела и соответствующего условия интегрируемости Ф1П.

2. Используя теорему Дини для Ф2П, в силу доказанной теоремы, получаем, что если для $\forall\ fix\ y \in Y \Rightarrow f(x,y)$ непрерывна и, значит, интегрируема на $X = [a,b]$, то в случае, когда $f(x,y)$ монотонна по y на $Y = [c,d]$ получаем, что при выполнении условия поточечной сходимости:

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x),$$

   то имеем для $\forall\ y_0 \in [c,d] \Rightarrow (50)$.

3. Если $f(x,y)$ непрерывна для $\forall\ x \in [a,b]$ и для $\forall\ y \in [c,d]$, тогда справедливо (50), где $\phi(x) = f(x,y_0)$, для $\forall\ fix\ y_0 \in [c,d]$.

   В частности, при указанных условиях СИЗОП (49) является непрерывной функцией на $Y \in [c,d]$, т.к.

$$\exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)dx = F(y_0),$$

   что равносильно непрерывности (49) в любой точке $y_0 \in [c,d]$, причём на концах отрезка рассматривается односторонняя непрерывность.

18 Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.

Краткий план:

1. Рассматриваем $G(y) =$ интеграл от $f'_y(x,y)$ на $[a;b]$.
2. $G(y)$ - непрерывно дифференцируема, а значит интегрируема. Берём интеграл на $[c;y]$.
3. Меняем порядок интегрирования, и берём интеграл, получаем первообразную.
4. По теореме Барроу берём производную.

Теорема (*о почленном дифференцировании СИЗОП*).
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$ и для неё:

$$\exists\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \text{непрерывна на } [a,b]\times[c,d].$$

Тогда СИЗОП (49) будет непрерывно дифференцируемой функцией на $[c,d]$, для которой производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$F^{'}(y) = \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)_y^{'} = \int\limits_a^b f_y^{'}(x,y)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \tag{51}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой об интегрируемости СИЗОП. Рассмотрим функцию

$$G(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \tag{52}$$

В силу полученных ранее результатов, СИЗОП (52) корректно определён и является непрерывно дифференцируемой функцией на $[c,d]$. Поэтому функция $G(y)$ для $\forall\ fix\ y \in\ ]c,d[$ будет интегрируемой на $[c,y]$. А значит, получаем:

$$\exists \int\limits_c^y G(t)dt \overset{(52)}{=} \int\limits_c^y \left(\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx\right)dt.$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, в силу теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, имеем:

$$\int\limits_c^y G(t)dt = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt\right)dx = \int\limits_a^b \big[f(x,t)\big]_{t=c}^{t=y}dx = \int\limits_a^b \left(f(x,y)-f(x,c)\right)dx \overset{(49)}{=} F(y)-c_0,$$

где $c_0 = \int\limits_a^b f(x,c)dx = const$.

Отсюда получаем, что $F(y) = c_0 + \int\limits_c^y G(t)dt$.

Используя теорему Барроу о дифференцировании интегралов с переменным верхним пределом, получаем:

$$\exists\ F^{'}(y) = (c_0)_y^{'} + \left(\int\limits_c^y G(t)dt\right)_y^{'} = 0 + G(y) \overset{(52)}{=} \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx, \text{ что даёт (51).}$$

□

1. Пусть $f(x, y)$ определена для $\forall x \in [a; +\infty[$ и $\forall y \in Y \subset \mathbb{R}$. Если $\forall$ fix $y \in Y \Rightarrow$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y) = dx \xrightarrow{y} . \tag{53}$$

Тогда будет корректно определена функция:

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx, y \in Y. \tag{54}$$

2. Пусть НИЗОП (54) сходится на $Y \subset \mathbb{R}$. Если y_0 - предельная точка Y и выполняется

$$f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0]{[a;+\infty[} \phi(x),$$

то будем говорить, что в данном НИЗОП *допустим предельный переход*, если

$$\exists \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx. \tag{55}$$

19 Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.

Краткий план:

1. Раскладываем на сумму ФР
2. применяем теорему о предельном переходе в СИЗОП.

Теорема (*О предельном преходе в НИЗОП*).
Пусть для $\forall$ fix $y \in Y \Rightarrow f(x,y)$ непрерывна для $\forall\, x \geqslant a$ и для предельной точки $y_0 \in Y$ имеем

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{\forall\ [a;A]}{\rightrightarrows}} \phi(x), \text{ где } \forall\, A > a. \tag{56}$$

Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows}$, то тогда возможен предельный переход (55).

Доказательство. Воспользуемся *теоремой о предельном переходе в функциональном ряду*, для чего, беря произвольную последовательность $(A_n) \uparrow +\infty$, по критерию Гейне существования конечного предела функции для (54) получаем

$$\exists \lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \left[\int\limits_a^{+\infty} = \lim_{An \to +\infty} \left(\int\limits_{A_0}^{A_1} + \int\limits_{A_1}^{A_2} + \ldots + \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx \right] =$$

$$= \lim_{y \to y_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx = \left[f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{[A_{n-1}, A_n]}{\rightrightarrows}} \phi(x), \text{из } (56) \Rightarrow u_n(y) = \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx \overset{Y}{\rightrightarrows} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{y \to y_0} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx = \left[\text{По теореме о предельном переходе в СИЗОП} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \phi(x)dx = \lim_{An \to +\infty} \left(\int\limits_{A_0 = a}^{A_1} + \int\limits_{A_1}^{A_2} + \ldots + \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \right) =$$

$$= \lim_{An \to +\infty} \int\limits_a^{A_n} \phi(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx,$$

т.е. имеем (55). $\square$

Следствие (*О непрерывности НИЗОП*).

Пусть $f(x,y)$ непрерывная для $\forall\ x \in\ [a;\ +\infty[$ и для $\forall\ y \in\ [c;d]\ \subset \mathbb{R}$. Если интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c;\,d]}{\rightrightarrows}$$

то НИЗОП (54) - непрерывная функция на $[c;d]$, т.е.

$$\text{для } \forall\ y_0 \in\ [c;d]\ \Rightarrow \exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = F(y_0).$$

Доказательство. Из непрерывности $f(x,y)$ на $[a;\ +\infty[\ \times\ [c;d]$ следует, что

$$\text{для } \forall\ \text{fix}\ \ A \geqslant a \Rightarrow f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a;\,A]}{\rightrightarrows}} f(x,y) = \phi(x) (\text{для } \forall\ \text{fix}\ \ y_0 \in\ [c;d]\ )$$

Далее, используя доказательство теоремы в силу (55)

$$\exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \int\limits_a^{A} \phi(x)dx \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = F(y_0),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание.

Доказанная теорема и следствие справедливы и в отсутствии равномерной сходимости для рассматриваемого НИЗОП, если он сходится локально равномерно на Y,

$$\text{для } \forall\ [\alpha;\beta]\ \subset Y \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[\alpha;\,\beta]}{\rightrightarrows}$$

Это связано с тем, что свойство непрерывности функции на множестве определено в любой точке из этого множества. Поэтому, выбирая $\forall$ fix $y_0 \in Y$ и заключая его в соответствующий отрезок $y_0 \in\ [\alpha;\beta]\ \subset Y$, в случае локальной равномерной сходимости получаем, например, что (54) будет непрерывна на $[\alpha;\beta]$, а значит, в точке y_0. А исходя из этого, получаем непрерывность (54) на всём Y.

Теорема (*о предельном переходе в НИЗОП-2*).

Пусть $f(x,y)$ определена на $[a,b[\times Y$ и для $\forall$ *fix* $y \in Y$ непрерывна по $X = [a,b[$. Если для $\forall\ \varepsilon \in]0, b-a[\Rightarrow$ $f(x,y) \underset{y\to y_o}{\overset{[\alpha;\,\beta-\varepsilon]}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, где y_0 - предельная точка для множества Y, то тогда $\int\limits_a^b f(x,y) \overset{Y}{\rightrightarrows}$. Для НИЗОП-2 вида

$$F(y) = \int\limits_a^{b-0} f(x,y)dx,$$

имеем:

$$\exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{b} f(x,y)dx = \int\limits_a^{b} \phi(x)dx = \int\limits_a^{b} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx.$$

20 Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.

Краткий план:

1. Рассматриваем последовательность $(A_n)\uparrow$

Теорема (*Об интегрировании НИЗОП*).

Пусть $f(x,y)$ непрерывная на декартовом произведении $[a;+\infty[\times[c;d]$. Если интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c;\,d]}{\rightrightarrows},$$

то тогда НИЗОП (54) является интегрируемой на $[c;d]$ функцией, для которой

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)dy \tag{57}$$

Доказательство. По той же схема, что и в предыдущей теореме, рассмотрим произвольную последовательность $(A_n)\uparrow +\infty (A_0=a)$ и используем критерий Гейне на основании теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, получаем:

$$\exists\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d\left(\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx\right)dy = \left[\begin{array}{c} u_n(y)=\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx \text{ непрерывна на } [c;d] \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(y)=\int\limits_a^{+\infty} f(x,y) \overset{[c;\,d]}{\rightrightarrows}\end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_c^d\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^d u_n(y)dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^d\left(\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx\right)dy=\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n}\left(\int\limits_c^d f(x,y)dx\right)dy=$$

$$=\lim_{A_n\to+\infty}\left(\int\limits_{A_0=a}^{A_1}+\int\limits_{A_1}^{A_2}+\ldots+\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n}\right)=\lim_{A_n\to+\infty}\int\limits_a^{A_n}\left(\int\limits_c^d f(x,y)dx\right)dy=\int\limits_a^{+\infty}dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$$

$\square$

Замечания:

1. Доказанная теорема справедлива не только для случае $x\in[a;+\infty[$, $y\in[c;d]$, но и для случая $x\in\,]a;+\infty[$, $y\in[c;d]$, при условии, что дополнительно ко всем условиям указанной теоремы выполняется, что точка $x=a$ не является точкой разрыва второго рода для $g(x,y)$, т.е.

   $$\exists\lim_{x\to a+0} f(x,y)\in\mathbb{R}$$

   В этом случае, доопределяя функцию $f(x,y)$ в точке $x=a$, т.е. рассматривая функцию

   $$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y), x>a, y\in[c;d] \\ \lim\limits_{x\to a+0} f(x,y), y\in[c;d]\end{cases}$$

   Получаем её непрерывность в точке $x=a$ справа. А далее, учитывая, что рассмотренные интегралы от $f(x,y)$ и $g(x,y)$ совпадают используя доказанную теорему.

2. Можно показать, что наряду с интегрируемым НИЗОП по конечному промежутку возможно его почленное интегрирование по бесконечному промежутку $[c;+\infty[$, если

   (а) $f(x,y)$ непрерывна на $[a;+\infty[\times[c;+\infty[$

   (б) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c;+\infty[}{\rightrightarrows}$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[a;+\infty[}{\rightrightarrows}$

3. $\exists\int\limits_c^{+\infty}dy\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int\limits_a^{+\infty}dx\int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy)$ - существуют повторные интегралы.

Теорема (*об интегрировании НИЗОП-2*).

Если $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b[\times[c,d]$ и $\int\limits_a^b f(x,y)dx = \overset{[c;d[}{\rightrightarrows}$, то тогда для НИЗОП-2:

$$F(y) = \int\limits_a^{b-0} f(x,y)dx,$$

имеем:

$$\exists \int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

21 Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.

Краткий план:

1. Записываем интеграл от интеграла от производной.
2. Меняем порядок интегрирования.
3. По теореме Барроу доводим до логического завершения.

Теорема (*О почленном дифференцировании НИЗОП*).
Пусть $f(x,y)$ - непрерывна на $[a;+\infty[\times[c;d]$, и для неё $\exists\, f'_y(x,y)$ - непрерывная на $[a;+\infty[\times[c;d]$. Тогда если

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \xrightarrow{[c;\,d]}$
2. $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \overset{[c;\,d]}{\rightrightarrows}$,

то тогда НИЗОП (54) - функция почленно дифференцируема на $[a;+\infty[$, и её производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$\exists\, F'(y) \overset{(54)}{=} \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)'_y = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

Доказательство. Для $\forall$ fix $y\in[c;d]$ корректно определяем СИЗОП

$$\Phi(y) = \int\limits_c^{y}\left(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,t)dx\right)dt$$

В силу выполнения всех условий почленного интегрирования СИЗОП можем изменить порядок интегрирования

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^{y} f'_y(x,t)\right)dx = \int\limits_a^{+\infty}\big[f(x,t)\big]_{t=c}^{t=y}dx = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c f(x,y)-f(x,c)\right)dx =$$
$$= \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,c)dx = F(y)-F(c)$$

Отсюда, используя теорему Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$\exists F'(y) = (\Phi(y)+F(c))'_y = \left(\int\limits_c^{y}\left(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,t)dt\right)dx\right)'_y =$$
$$= \left[\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,t)dx\right]_{t=y} = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \Leftrightarrow (21)$$

□

Замечание.
Так же, как и в условии непрерывности НИЗОП в доказательстве теоремы о почленном дифференцировании вместо равномерной сходимости рассмотрим НИЗОП используя локальную равномерную сходимость соответствующего НИЗОП.

Теорема (*о дифференцировании НИЗОП-2*).
Если $f(x,y)$ определена на $[a,b[\times Y$ и для $\forall$ fix $y\in Y$ непрерывна на $[a,b[$ по x. Если $\exists f'_y(x,y)$ непрерывная на $[a,b[\times Y$ и $\int\limits_a^b f(x,y)dx \overset{Y}{\to}$, а $\int\limits_a^b f'_y(x,y) \overset{Y}{\rightrightarrows}$, то тогда справедливо правило Лейбница дифференцирования НИЗОП-2 вида:

$$F(y) = \int\limits_a^{b-0} f(x,y)dx,$$

имеем:

$$\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)'_y = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx$$

Интегралом Дирихле называется НИ-1:

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}. \tag{58}$$

22 Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.

В данном случае $\dfrac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1\in\mathbb{R}$, поэтому $x=0$ - точка устранимого разрыва, и интеграл (58) представляет собой НИ-1:

$$I=\underbrace{\int\limits_0^1\frac{\sin x}{x}dx}_{\substack{\text{сходится как}\\ \text{интеграл Римана}}}+\underbrace{\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx}_{\substack{\text{сходится по признаку}\\ \text{Дирихле для НИ-1}}}.$$

В данном случае сходимость будет условной.

Для получения значения (58) рассмотрим при fix $a>0$ НИЗОП-1:

$$\begin{cases}F(y)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\cos(xy)\,dx,\\ y=[0;+\infty[.\end{cases} \tag{59}$$

В (59) подынтегральная функция $f(x,y)=e^{-ax}\cos(xy)$, во-первых, является непрерывной для $\forall x\geqslant 0$ и $\forall y\geqslant 0$, а, во-вторых, в силу неравенства $|f(x,y)|=e^{-ax}\,|\cos(xy)|\leqslant e^{-ax}=\varphi(x)$, где $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)\,dx=\left[-e^{-ax}\dfrac{1}{a}\right]_0^{+\infty}=\dfrac{1}{a}\in\mathbb{R}$ - сходится, по мажорантному признаку Вейерштрасса получаем, что $F(y)\overset{[0;+\infty[}{\rightrightarrows}$.

В связи с этим, возможно почленное интегрирование этого НИЗОП, например, по $y\in[0;1]$. Имеем:

$$\exists\, G(a)=\int\limits_0^1F(y)\,dy\overset{(59)}{=}\int\limits_0^1dy\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\cos(xy)\,dx=\int\limits_0^{+\infty}dx\int\limits_0^1e^{-ax}\cos(xy)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left[e^{-ax}\cdot\frac{\sin(xy)}{x}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

С другой стороны, интеграл вида (59) был вычислен нами ранее, и для него было получено значение

$$F(y)=\big[\text{Демидович, № 1828}\big]=\left[\frac{y\sin(xy)-a\cos xy}{a^2+y^2}e^{-ax}\right]_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{a}{a^2+y^2},\ \forall\,\text{fix}\ a>0.$$

Таким образом:

$$G(a)=\int\limits_0^1F(y)\,dy=\int\limits_0^1\frac{a\,dy}{a^2+y^2}=\Big[\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\Big]_0^1=\operatorname{arctg}\frac{1}{a},\ a>0.$$

Ранее на основании признака Абеля было показано, что $G(a)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\dfrac{\sin x}{x}\,dx\overset{a\in[0;+\infty[}{\rightrightarrows}$.

А так как в данном случае $g(x,a)=e^{-ax}\dfrac{\sin x}{x}$ - непрерывна для $\forall\,x\neq 0$, $\forall\,a\in\mathbb{R}$ и выполняется $g(x,a)\xrightarrow[x\to+0]{}1\in\mathbb{R}$, то $G(a)$ будет непрерывна для НИЗОП-2 как функция от $a\geqslant 0$. В связи с этим:

$$\lim_{a\to+0}G(a)=G(0)=\left.\int\limits_0^{+\infty}e^{-ax}\,\frac{\sin x}{x}\,dx\right|_{a=0}=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=I,$$

$$I=\lim_{a\to+0}G(a)=\lim_{a\to+0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{a}\right)=\frac{\pi}{2}\Rightarrow(58).$$

Следствие (*обобщение интеграла Дирихле*).

Для $\forall\,b\in\mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(bx)}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}b=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & b>0,\\ 0, & b=0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & b<0.\end{cases} \tag{60}$$

Доказательство. Действительно, если $b > 0$, то, делая замену $t = bx \ \Big|_0^{+\infty}$, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\left(\dfrac{t}{b}\right)} \cdot \frac{dt}{b} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Если же $b < 0$, то аналогичным образом получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(-bx)}{x}\, dx \overset{-b>0}{=} -\frac{\pi}{2}.$$

Случай $b = 0$ проверяется непосредственной подстановкой. $\square$

Интегралами Фруллани будем называть интегралы вида

$$\Phi(a;b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \tag{61}$$

где $a, b = \text{const} > 0$.

В зависимости от свойств подынтегральной функции в (61), рассмотрим три основные формулы для вычисления интеграла Фруллани. Для этого нам понадобится с следующая

23 Лемма Фруллани.

Краткий план:

1. Замена $t = ax$.

2. Замена $z = t/\alpha$.

Лемма Фруллани.

Если для функции $f(x)$, определённой для $\forall\ x > 0$, функция $\dfrac{f(x)}{x}$ интегрируема на любом конечном промежутке из $]\,0;\ +\infty\,[$, то тогда для $\forall\ a, b, \alpha, \beta = \text{const} > 0$ верно равенство

$$\int\limits_\alpha^\beta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int\limits_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx \tag{62}$$

Доказательство.

Используя аддитивность интеграла Римана, после соответствующей замены имеем:

$$\int\limits_\alpha^\beta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int\limits_\alpha^\beta \frac{f(ax)}{x} dx - \int\limits_\alpha^\beta \frac{f(bx)}{x} dx = \begin{bmatrix} 1)\ t = ax\big|_{\alpha a}^{\beta a} \\ 2)\ t = bx\big|_{\alpha b}^{\beta b} \end{bmatrix} = \int\limits_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{\frac{t}{a}} \cdot \frac{dt}{a} - \int\limits_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{\frac{t}{b}} \cdot \frac{dt}{b} =$$

$$= \int\limits_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \left(\int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} + \int\limits_{\alpha b}^{\beta a} \right) - \left(\int\limits_{\alpha b}^{\beta a} + \int\limits_{\beta a}^{\beta b} \right) = \int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt =$$

$$= \begin{bmatrix} 1)\ t = \alpha x, x\big|_a^b \\ 2)\ t = \beta x, x\big|_a^b \end{bmatrix} = \int\limits_a^b \frac{f(\alpha x)}{\alpha x}\ \alpha\ dx - \int\limits_a^b \frac{f(\beta x)}{\beta x}\ \beta\ dx = \int\limits_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx.$$

$\square$

24 Первая теорема Фруллани.

Краткий план:

1. Раскладываем на два интеграла по лемме Фруллани.
2. По теореме о среднем для ОИ получаем подобие формулы из условия.
3. Переходим к пределу в формуле.

Первая теорема Фруллани. Если $f(x)$ непрерывна для $\forall\, x \geqslant 0$ и $\exists\, f(+\infty) \in \mathbb{R}$, то

$$\Phi(a,b) = \Big(\, f(0) - f(+\infty) \,\Big) \ln \left(\frac{b}{a} \right). \tag{63}$$

Доказательство. В силу леммы Фруллани для (61), имеем:

$$\Phi(a,b) = \lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \beta \to +\infty}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx \overset{(62)}{=} \lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \beta \to +\infty}} \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\alpha x)}{x}\, dx - \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\beta x)}{x}\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{По теореме о среднем для ОИ:} \\ 1)\ \exists\, c_1 \in [a;b] \Rightarrow \displaystyle\int\limits_{a}^{b} \frac{f(\alpha x)}{x} dx = f(\alpha c_1) \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x} = f(\alpha c_1) \ln \frac{b}{a} \\ 2)\ \exists\, c_2 \in [a;b] \Rightarrow \displaystyle\int\limits_{a}^{b} \frac{f(\beta x)}{x} dx = f(\beta c_2) \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{x} = f(\beta c_2) \ln \frac{b}{a} \end{array} \right] = \lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \beta \to +\infty}} \Big(f(\alpha c_1) - f(\beta c_2) \Big) \ln \frac{b}{a} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 1)\ \alpha a \leqslant \alpha c_1 \leqslant \alpha b \Rightarrow \big[\alpha \to +0,\ \alpha c_1 \to 0\big] \Rightarrow f(\alpha c_1) \xrightarrow[\alpha \to +0]{} f(0) \\ 2)\ \beta a \leqslant \beta c_2 \leqslant \beta b \Rightarrow \big[\beta \to +\infty,\ \beta c_2 \to \infty\big] \Rightarrow f(\beta c_2) \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} f(+\infty) \end{array} \right] = \Big(f(0) - f(+\infty) \Big) \ln \frac{b}{a}.$$

$\square$

25 Вторая теорема Фруллани.

Краткий план:

1. Раскладываем на два интеграла по лемме Фруллани.
2. По теореме о среднем для ОИ получаем подобие формулы из условия.
3. Переходим к пределу в формуле.

Вторая теорема Фруллани.

Пусть $f(x)$ непрерывна для $\forall\, x \geqslant 0$ и $\forall\, A > 0 \Rightarrow \exists \int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \in \mathbb{R}$ - сходится.

Тогда:

$$\Phi(a,b) \overset{(61)}{=} f(0) \ln \frac{b}{a}. \tag{64}$$

Доказательство. Действуя как в первой теореме Фруллани, получим:

$$\Phi(a,b) \overset{(61)}{=} \lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+\infty}} \int\limits_\alpha^\beta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\, dx = \ldots = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 1)\ \exists\, c \in [\alpha a; \alpha b]\ :\ \int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt = f(c) \int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{dt}{t} = f(c) \ln \frac{b}{a} \\ 2) \int\limits_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \int\limits_{A>0}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt\ - \int\limits_{A>0}^{\beta a} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \underbrace{\int\limits_{A>0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int\limits_{A>0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt}_{\text{сходится}} = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} f(c) \ln \frac{b}{a} = \left[\alpha a \leqslant c \leqslant \alpha b \Rightarrow c \xrightarrow[\alpha\to+0]{} 0 \right] = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

□

26 Третья теорема Фруллани.

Краткий план:

1. Рассматриваем новую функцию $f_0(t) = f(1/t)$, доопределяем её в нуле.
2. Вычисляем $\Phi(a_0; b_0)$.
3. Показваем, что $\Phi(a_0; b_0) = \Phi(a; b)$

Третья теорема Фруллани.
Пусть $f(x)$ непрерывна для $\forall\, x > 0$ и $\exists\, f(+\infty) \in \mathbb{R}$.

Тогда, если для $\forall\, A > 0 \Rightarrow \int\limits_0^A \frac{f(x)}{x}dx$ сходится, то

$$\Phi(a,b) \overset{(61)}{=} -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}. \tag{65}$$

Доказательство. Рассмотрим $f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, непрерывную для $\forall\, t > 0$.

Во-первых, $\exists\, f_0(+0) = \lim\limits_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$, поэтому f_0 можно доопределить в точке $t = 0$, приняв $f_0(0) = f_0(+0) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$.

Во-вторых, для полученной непрерывной $f_0(t)$ для $\forall\, A_0 > 0 \Rightarrow \exists \int\limits_{A_0}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{t}dt = \begin{bmatrix} t = \frac{1}{x} \\ A = \frac{1}{A_0} > 0 \end{bmatrix} = \int\limits_0^A \frac{f(x)}{x}dx \in \mathbb{R}$ сходится.

Таким образом, в силу второй теоремы Фруллани, имеем:

$$\Phi(a_0, b_0) = \begin{bmatrix} a_0 = \frac{1}{a} > 0 \\ b_0 = \frac{1}{b} > 0 \end{bmatrix} = f_0(0)\cdot\ln\frac{b_0}{a_0} = f(+\infty)\ln\left(\frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)}\right) = -f(+\infty)\ln\frac{b}{a}.$$

С другой стороны, получаем:

$$\Phi_0(a_0, b_0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f_0(a_0t) - f_0(b_0t)}{t}dt = \int\limits_0^{+\infty} \left(f_0\left(\frac{a}{t}\right) - f_0\left(\frac{b}{t}\right)\right)\cdot\frac{1}{t}\,dt = \left[t = \frac{1}{x}\right] = \ldots =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}dx \overset{(61)}{=} \Phi(a,b).$$

Таким образом, $\Phi(a,b) = -f(+\infty)\,\ \ln\frac{b}{a}$. □

27 Γ-функция Эйлера и её основные свойства

Эйлеровым интегралом II рода или Γ-функцией Эйлера называется НИЗОП

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx. \tag{66}$$

(90) является НИЗОП смешанного типа. Для исследования его на поточечную сходимость отделим возможные особенности $x = 0$ и $x = +\infty$ следующим образом

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^1 e^{-x}x^{a-1}dx + \int\limits_1^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}dx. \tag{67}$$

Для подынтегральной функции $f(x,a) = e^{-x}x^{a-1}$ в (91) имеем

1. $f(x,a) \underset{x\to+0}{\sim} x^{a-1} = \dfrac{1}{x^{1-a}}$. Поэтому по степенному признаку сходимости НИ-2 получаем, что первое слагаемое в (91) сходится тогда и только тогда, когда $1 - a < 1 \Leftrightarrow a > 0$.

2. Учитывая, что экспонента при $x \to +\infty$ растёт быстрее любой степенной функции и значит, например

$$\frac{x^{a+1}}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{\forall a\in\mathbb{R}} 0.$$

$$|f(x,a)| = \left(\frac{x^{a+1}}{e^x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} \leqslant \frac{\text{const}}{x^2} = \phi(x).$$

   Поэтому сходится интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \phi(x)dx \ = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\text{const}}{x^2}dx \quad (a > 2 > 1)$$

   Поэтому по признаку сравнения для НИ-1 второе слагаемое в (91) будет сходиться для $\forall a \in \mathbb{R}$.

Значит, множеством поточечной сходимости для функции в (90) будет интервал $]0;+\infty[$.

Используя правило Вейерштрасса равномерной сходимости НИЗОП-2 можно показать, что в своей области поточечной сходимости $\Gamma(a)$ сходится локально равномерно, т.е.

$$\forall\ [a_0; b_0] \subset\ ]0;+\infty[\ \Rightarrow \Gamma(a) \overset{[a_0;b_0]}{\rightrightarrows}$$

Отсюда, в силу теоремы о непрерывности НИЗОП, получаем, что $\Gamma(a)$ - непрерывная $\forall a > 0$. Кроме того, учитывая, что

$$\forall\ [a_0; b_0] \subset\ ]0;+\infty[\ \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} f'_a(x,a)dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}\ln x dx \overset{[a_0;b_0]\subset[0;+\infty[}{\rightrightarrows}$$

Получаем, что в силу непрерывности $f(x,a)$ и $f'_a(x,a)$ Γ-функция (90) будет непрерывно дифференцируемой для $\forall a > 0$, причём, в силу правила Лейбница, имеем:

$$\exists\Gamma'(a) = \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-x}x^{a-1}\right)'_a dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}\ln x dx.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{-x}x^{a-1}\right)^{(m)}_a dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}\ln^m x dx \overset{[a_0;b_0]}{\rightrightarrows}$$

Получаем, что $\Gamma(a)$ бесконечное число раз непрерывно дифференцируема $\forall a > 0$, причём

$$\forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma^{(m)}(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{a-1}\ln^m x dx.$$

Используя интегрирование по частям $\forall a > 0$, имеем:

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}d\left(\frac{x^a}{a}\right) = \left[\underbrace{\frac{x^a e^{-x}}{a}}_{=0}\right]_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^a}{a}d\left(e^{-x}\right) = \frac{1}{a}\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{(a+1)-1}dx = \frac{\Gamma(a+1)}{a}.$$

В результате имеем формулу понижения аргумента для Γ-функции:

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \forall a > 0. \tag{68}$$

Из этой формулы для $a = n \in \mathbb{N}$ получаем обобщение факториала на действительный случай:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!\Gamma(1).$$

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{69}$$

Используя интеграл Эйлера-Пуассона имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^{-\frac{1}{2}}dx = \left[x = t^2\right] = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

Отсюда, в силу формулы понижения аргумента (68), получаем значение функции для полуцелых значений аргумента:

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \ldots = \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\cdot\ldots\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{70}$$

Полученные формулы понижения аргумента позволяют свести вычисление значения $\Gamma(a)$, $a > 0$ к вычислению при $a \in \left]0;1\right[$.

Используя интеграл Эйлера-Пуассона, получим формулу дополнения для Γ-функции. Для $\forall a \in \left]0;1\right]$ имеем

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}t^{a-1}dt\right)\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-y}y^{-a}dy\right) = \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-t-y}t^{a-1}y^{-a}dtdy =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-t-y}t^{a-1}y^{-a}dt\right)dy = \begin{bmatrix} y = \text{fix} \\ t = xy|_0^{+\infty} \\ dt = ydx \end{bmatrix} = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy-y}x^{a-1}y^{a-1}y^{-a}ydx\right)dy =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-y(x+1)}x^{a-1}dx\right)dy = \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty} e^{-y(x+1)}x^{a-1}dy\right)dx = \int\limits_0^{+\infty}\left[-\frac{x^{a-1}}{x+1}e^{-y(x+1)}\right]_{y=0}^{y=+\infty}dx =$$
$$= \int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{a-1}}{x+1}dx = E(a) = \frac{\pi}{\sin\pi a}.$$

Получаем формулу дополнения для Γ-функции

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin\pi a}, 0 < a < 1 \tag{71}$$

Формулы (71) и (68) позволяют свести вычисление для $a > 0$ к вычислению для $a \in \left]0;\frac{1}{2}\right]$. Из (71) в частности при $a = \frac{1}{2}$ получаем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{72}$$

В свою очередь, используя (72), можно ещё раз вычислить интеграл Эйлера-Пуассона.

28 В-функция Эйлера и её основные свойства.

Эйлеровым интегралом I рода или *B-функцией Эйлера* называется НИЗОП-2 следующего вида:

$$B(a;b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx, \tag{73}$$

где a, b - некоторые константы.

Для исследования (73) на сходимость, отделяя возможные особенности, имеем:

$$B(a,b) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx.$$

Для подынтегральной функции $f(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}$ в точках $x = 0$ и $x = 1$ получаем:

1. $x = 0$: $\quad f(x) \underset{x\to+0}{\sim} x^{a-1} = \dfrac{1}{x^{1-a}}$.

   Отсюда видно, что первое слагаемое будет сходиться при $1 - a < 1 \Leftrightarrow a > 0$.

2. $x = 1$: $\quad f(x) \underset{x\to1-0}{\sim} (1-x)^{b-1} = \dfrac{1}{(1-x)^{1-b}}$.

   Аналогичным образом имеем условие сходимости второго слагаемого: $1 - b < 1 \Leftrightarrow b > 0$.

Таким образом, областью сходимости для B-функции Эйлера будет $\begin{cases} a > 0, \\ b > 0. \end{cases}$

В дальнейшем нам понадобится представление B-функции не в виде НИЗОП-2, а в виде НИЗОП смешанного типа. Для этого введём замену $x = \dfrac{t}{1+t} \Rightarrow t = \dfrac{x}{1-x}\Big|_0^{+\infty}$, $dx = \dfrac{dt}{(1+t)^2}$. Имеем:

$$B(a,b) \overset{(73)}{=} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{t}{1+t}\right)^{b-1} \frac{dt}{(1+t)^2} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt. \tag{74}$$

Отсюда, учитывая, что B-функция симметрична относительно своих переменных, т. е.

$$B(a,b) \overset{(73)}{=} \big[x = 1-y\big] = \int\limits_0^1 (1-y)^{a-1}y^{b-1}\,dy = \big[y \leftrightarrow x\big] = \int\limits_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}\,dx = B(b,a),$$

получаем НИЗОП смешанного типа:

$$B(a,b) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{b-1}\,dt}{(1+t)^{a+b}}. \tag{75}$$

Теорема (*связь между B- и Γ- функциями*).
Для любых $a, b > 0$ имеем:

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \tag{76}$$

Доказательство. Используя определения B- и Γ- функций и представление (74), получаем:

$$B(a,b)\cdot\Gamma(a+b)=\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dt\right)\cdot\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-x}x^{a+b-1}\,dx\right)=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\,x^{a+b-1}\,t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dx\,dt=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\,x^{a+b-1}\,t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,dx\right)dt=$$

$$=\begin{bmatrix} t=\text{fix}\\ x=(1+t)y\Rightarrow dx=(1+t)dy\\ y=\dfrac{x}{1+t}\ \Big|_0^{+\infty}\end{bmatrix}=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-(1+t)y}\left((1+t)y\right)^{a+b-1}\;t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,(1+t)\,dy\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-(1+t)y}\;y^{a+b-1}\;t^{a-1}\,dy\right)dt=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-(1+t)y}\;y^{a+b-1}\;t^{a-1}\,dt\right)dy=$$

$$=\begin{bmatrix} y=\text{fix}\\ t=\dfrac{z}{y}\Rightarrow dt=\dfrac{dz}{y}\\ z=\left[-y\right]_0^{+\infty}\end{bmatrix}=\int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-(y+z)}\;y^{b-1}\;z^{a-1}\,dz\right)dy=\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\left(e^{-y}y^{b-1}\right)\left(e^{-z}z^{a-1}\right)dy\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{+\infty}\underbrace{\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-y}y^{b-1}dy\right)}_{\Gamma(b)}e^{-z}z^{a-1}\,dz=\Gamma(b)\int\limits_0^{+\infty}e^{-z}z^{a-1}\,dz=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)\Rightarrow(76).$$

□

Замечание.

Из (76) на основании соответствующих свойств Γ-функций получаем аналогичные свойства B-функций:

1. *Симметричность:*

$$\begin{cases}B(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\\ B(b,a)=\dfrac{\Gamma(b)\Gamma(a)}{\Gamma(b+a)}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B(a,b)=B(b,a),\\ \forall\ a,b>0\end{cases}\tag{77}$$

2. *Формулы понижения аргумента:*

$$B(a+1,b)=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}=\frac{a\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{(a+b)\,\Gamma(a+b)}=\frac{a}{a+b}B(a,b),\quad\forall\ a>0,b>0,$$
$$B(a,b+1)=\frac{b}{a+b}B(a,b),\quad\forall\ a>0,b>0.$$

3. *Значения B-функции при натуральном значении одного из аргументов:*

$$B(n+1,b)=\frac{n}{b+n}\;B(n,b)=\frac{n(n-1)}{(b+n)(b+n-1)}\;B(n-1,b)=\ldots=$$
$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1}{(b+n)\cdot(b+n-1)\cdot\ldots\cdot(b+2)\cdot(b+1)}\;B(1,b).$$

Отсюда, учитывая, что $B(1,b)\overset{(73)}{=}\int\limits_0^1(1-x)^{b-1}\,dx=\left[-\dfrac{(1-x)^b}{b}\right]_0^1\overset{b>0}{=}\dfrac{1}{b}$, получаем:

$$B(n+1,b)=\frac{n!}{b(b+1)\ldots(b+n)},\quad b>0,\quad n\in\mathbb{N}.\tag{78}$$

Аналогично, в силу симметрии, для $\forall\ m\in\mathbb{N}$:

$$B(a,m+1)=\frac{m!}{a(a+1)\ldots(a+m)},\quad a>0.\tag{79}$$

Из (78) и (79), при $a=n\in\mathbb{N}$ и $b=m\in\mathbb{N}$, имеем формулу для вычисления значения B-функции с натуральными аргументами:

$$B(n+1,m+1)=\frac{n!}{m(m+1)\ldots(m+n)}=\frac{m!}{n(n+1)\ldots(n+m)}=\frac{m!\;n!}{(m+n+1)!}\,.\tag{80}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что (80) верно не только в случае, когда $n,m\in\mathbb{N}$, но и при $n,m\in\mathbb{N}_0$.

4. *Вычисление значения B-функции, когда оба аргумента - полуцелые числа:*

$$\forall\, n, m \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; B\left(n+\frac{1}{2},\, m+\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+m+1)} = \\ = \begin{bmatrix} \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi} \\ \Gamma(n+m+1) = (n+m)! \\ \forall\, k \in \mathbb{N} \end{bmatrix} = \frac{(2n-1)!!(2m-1)!!}{(n+m)! \cdot 2^{n+m}} \cdot \pi. \tag{81}$$

5. *Формула дополнения для B-функции:*

$$\forall\, a \in]0;1[\;\Rightarrow\; B(a, 1-a) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1-a)}{\Gamma(a+1-a)} = \frac{\left(\dfrac{\pi}{\sin\pi a}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\pi a}. \tag{82}$$

Отсюда, в частности, для $n = \dfrac{1}{2}$ имеем:

$$B\left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

29 Теорема об ортогональности основной тригонометрической системы, следствие из неё и замечание к ней.

Система функций
$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots - \qquad (83)$$
основная тригонометрическая система (ОТС). Функции (83) имеют общий $\mathbb{R}_+$ период, равный $T_0 = 2\pi$.
Теорема (*Об ортогональности ОТС*).
Система функций (83) ортогональна на $[-\pi;\pi]$.

Доказательство. $\forall k, m \in \mathbb{N}_0, k \neq m$ имеем:

1. $< \cos kx, \cos mx >= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos kx \cos mx}_{\text{чётная}} dx == 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(k-m)x + \cos(k+m)x)dx =$
   $= \left[\frac{\sin(k-m)x}{k-m} + \frac{\sin(k+m)x}{k+m}\right]_0^{\pi} = \left[\sin \pi n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}\right] = 0,$
   Т.е. $\cos kx \perp \cos mx, \forall k \neq m.$

2. $< \cos kx, \sin mx >= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos kx \sin mx}_{\text{нечётная}} dx = 0$
   Т.е. $\cos kx \perp \sin mx, \forall k \neq m.$

3. $< \sin kx, \sin mx >= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sin kx \sin mx}_{\text{чётная}} dx = 2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos(k-m)x - \cos(k+m)x)dx =$
   $= \left[\frac{\sin(k-m)x}{k-m} - \frac{\sin(k+m)x}{k+m}\right]_0^{\pi} = \left[\sin \pi n = 0, \forall n \in \mathbb{Z}\right] = 0,$
   Т.е. $\sin kx \perp \sin mx, \forall k \neq m.$

□

Следствие.
Ортогональной ОТС (83) соответствует ортонормированная тригонометрическая система на $[-\pi;\pi]$:
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots \qquad (84)$$

Доказательство. Следует из того, что
$$||1|| = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi};$$
$$||\cos kx|| = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left[x + \frac{\sin 2kx}{2k}\right]\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi};$$
$$||\sin kx|| = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\int\limits_{0}^{\pi} \frac{1-\cos 2kx}{2} dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left[x - \frac{\sin 2kx}{2k}\right]\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi};$$

Поэтому в силу доказанной выше теоремы система (84) будет не только ортогональной на $[-\pi;\pi]$, но и ортонормированной на $[-\pi;\pi]$, т.к. норма любой функции из (84) равна 1. □

Замечания:

1. Т.к. $T_0 = 2\pi > 0$ - общий период функций (83), то на основании леммы об интеграле от интегрируемой периодической функции, рассмотренном на промежутке длины периода, получаем, что ОТС ортогональна на любом отрезке $[a; a+2\pi]$, fix $a \in \mathbb{R}$. В доказанной теореме для удобства было взято $a = -\pi$.

2. Наряду с ортогональной (83) и ортонормированной (84) рассмотрим также *обобщённую тригонометрическую систему*

$$1, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \dots, \cos\frac{\pi n x}{l}, \sin\frac{\pi n x}{l}, \dots \tag{85}$$

у функций которой общий период $T = 2l > 0$. (85) также будет ортогональной на любом отрезке $[a; a + 2\pi]$, fix $a \in \mathbb{R}$ и ей будет соответствовать следующая *обобщённая ортонормированная система*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{\sqrt{\pi}}, \dots \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi n x}{\sqrt{\pi}}, \frac{1}{\sqrt{l}}\sin, \frac{\pi n x}{\sqrt{\pi}}, \dots \tag{86}$$

30 Теорема о тригонометрическом многочлене наименьшего отклонения.

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k \cos kx + B_k \sin kx). \tag{87}$$

$$A_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\cos mx dx, m = \overline{0,n}; \tag{88}$$

$$B_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} T_n(x)\sin mx dx, m = \overline{1,n}; \tag{89}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)dx = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k^2 + B_k^2). \tag{90}$$

$$\Delta = ||f(x) - T_n(x)|| = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{91}$$

Теорема (*О ТМ наименьшего отклонения*).

Среди ТМ (87) фиксированной степени $\leqslant n$ многочлен Фурье для $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$ - многочлен

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{92}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx, m = \overline{0,n}; \tag{93}$$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx dx, m = \overline{1,n}; \tag{94}$$

$$\tag{95}$$

Доказательство. Рассматривая произвольный тригонометрический многочлен (87) fix степени $\leqslant n$ и используя формулы (88), (89), (90), для отклонения (91) имеем

$$\Delta = (||f(x) - T_n(x)||) = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2 dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)dx + \int\limits_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)dx =$$
$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\left(\frac{A_0}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\left(A_k\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx + B_k\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx\right)\right) + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k^2 + B_k^2)\right) =$$
$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - 2\pi\left(\frac{a_0 A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k A_k + b_k B_k)\right) + \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k^2 + B_k^2)\right) =$$
$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{\pi}{2}\left(A_0^2 - a_0 A_0 + 2\sum_{k=1}^{n}(A_k^2 - 2a_k A_k)\right) + \pi\sum_{k=1}^{n}(B_k^2 - 2b_k B_k) =$$
$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx + \frac{\pi}{2}(A_0 - a_0)^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(A_k - a_k)^2 + \pi\sum_{k=1}^{n}(B_k - b_k)^2 - \frac{\pi}{2}\left(a_0^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geqslant$$
$$\geqslant \begin{bmatrix}\forall A_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0,n}, \\ \forall B_k \in \mathbb{R}, k = \overline{1,n},\end{bmatrix} \geqslant \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx - \pi\left(a_0^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

RHS не зависит от выбора $T_n(x)$ и минимум достигается при

$$\forall A_k = a_k, k = \overline{0,n},$$
$$\forall B_k = b_k, k = \overline{1,n},$$

□

31 Формула Дирихле для частных сумм ряда Фурье (Р.Ф.) и замечание к ней.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \tag{96}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \tag{97}$$

Теорема (*Формула Дирихле для частных сумм ряда Фурье*).

Пусть $f(x) - 2\pi$ периодическая и интегрируемая на $[-\pi;\pi]$ функция. Тогда для $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ значение частных сумм ряда Фурье

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k\cos kx + b_k \sin kx, n \in \mathbb{N}_0$$

для $f(x)$ вычисляются по формуле Дирихле

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(f(x_0-t)+f(x_0+t))\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{t}{2}}dt \tag{98}$$

Доказательство. Используя (96)-(97), имеем

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx\right)\cos kx_0 + \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx\right)\sin kx_0\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kx\cos kx_0 + \sin kx \sin kx_0)\right)f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right)f(x)dx =$$

$$= \left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos k\phi = \dfrac{\frac{\sin\phi}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}2\sin\frac{\phi}{2}\cos k\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}} = \dfrac{\frac{\sin\phi}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-\sin(k-\frac{1}{2})\phi + \sin(k+\frac{1}{2})\phi\right)}{2\sin\frac{\phi}{2}} = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}, \\ \phi = x - x_0|_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0}, dx = d\phi\end{matrix}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi-x_0}^{\pi-x_0} f(x_0+\phi)\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\phi}{2\sin\frac{\phi}{2}}\right)d\phi = \left[\begin{matrix} f-2\pi \text{ периодическая,} \\ T = (\pi-x_0)-(-\pi-x_0) = 2\pi\end{matrix}\right] = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\pi}^{0}+\int\limits_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \left[\begin{matrix}1)t=-\phi|_{\pi}^{0}, d\phi = -dt \\ 2)t = \phi|_0^{\pi}, d\phi = dt\end{matrix}\right] = \frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{\pi}^{0} f(x_0-t)\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(-t)}{2\sin\frac{-t}{2}}\right)dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(x_0+t)\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt = \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x_0-t)+f(x_0+t))\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt.$$

□

Замечания:

1. Применим (98) к $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Учитывая, что

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx = 2, \forall a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx = 0,$$

$$\forall b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx = 0, \text{ получаем}$$

$$\forall S_n(x) = 1, n \in \mathbb{N}_0, 1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} 2\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt, \text{т.е.}$$

$$\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{\pi}{2}. \tag{99}$$

2. $D_n(t)\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}, n \in \mathbb{N}_0 -$ ядро Дирихле. Для неё в точке $t = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, где $\sin\frac{t}{2}$ - устранимый разрыв, т.к.

$$\exists \lim_{t\to 2\pi m} D_n(t) = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{t\to 2\pi m} \frac{(n+\frac{1}{2})\cos(n+\frac{1}{2})t}{\cos\frac{t}{2}} = \frac{(n+\frac{1}{2})\cos(m(2n+1)\pi}{\cos \pi m} = \ldots = (n+\frac{1}{2}) \in \mathbb{R},$$

поэтому в LHS формулы (99) имеем СИЗОП, зависящий от параметра $n \in \mathbb{N}_0$, а сама формула (99) аналогична интегралу Дирихле.

32 Теорема о поточечной сходимости Р.Ф. Следствие из неё и замечание к ней.

Теорема (*О поточечной сходимости ряда Фурье*).
Если для 2π-периодической функции $f(x) \in \mathbb{R}(\,[-\pi;\pi]\,)$ в $x_0 \in \mathbb{R}$ найдётся $s_0 \in \mathbb{R}$ т.ч.

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)-2S_0}{t} \in \mathbb{R}, \tag{100}$$

то тогда ряд Фурье для $f(x)$ сходится в x_0 к значению S_0.

Доказательство. Из формулы Дирихле (98) и аналога (99) интеграла Дирихле имеем

$$S_n(x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}(f(x_0-t)+f(x_0+t))\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt - S_0\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} g_0(t)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)tdt,\, g_0(t)\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Учитывая, что $2\sin\frac{t}{2} \underset{t\to+0}{\sim} t$, или

$$\exists \lim_{t\to+0} g_0(t) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)-2S_0}{t} \in \mathbb{R},$$

в силу (100), поэтому $t=0$ - точка устранимого разрыва для $g_0(t)$.
Во всех остальных точка $t \in\ ]0;\pi]$ у $g_0(t)$ особенностей не будет, отсюда в силу

$$f(x) \in \mathbb{R}(\,[-\pi;\pi]\,) \Rightarrow g_0 \in \mathbb{R}(\,[-\pi;\pi]\,),$$

а тогда по лемме Римана-Лебега

$$\int\limits_0^{\pi} g_0(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(S_n(x_0)-S_0) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = S_0 \in \mathbb{R}.$$

□

Следствие.
Пусть для 2π-периодической $f(x) \in \mathbb{R}(\,[-\pi;\pi]\,)$ в точке $x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists f(x_0 \pm 0) \in \mathbb{R}$ и $\exists f'_{\pm} \in \mathbb{R}$, тогда ряд Фурье для $f(x)$ в точке x_0 сходится к значению

$$S_0 = \frac{1}{2}(f(x_0-0)+f(x_0+0))$$

Доказательство. Нужно проверить, выполняется ли (100) используемого S_0

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)+f(x_0+t)-2\dfrac{f(x_0+0)-f(x_0-0)}{2}}{t} =$$
$$= \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t} + \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t} =$$
$$= f'_+(x_0+0) - f'_-(x_0-0) \in \mathbb{R}.$$

□

Замечание.
В дальнейшем будем говорить, что функция $f(x)$ является кусочно-дифференцируемой на $[a;b]$, если

$$\exists a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b - \text{ разбиение } [a;b]\ ,$$

если

1. На любом интервале $]x_{k-1};x_k[\ , k=\overline{1,n}, f(x)$ дифференицруема и имеет односторонние пределы
$$f(x_m \pm 0) \in \mathbb{R}, m = \overline{1,n-1}, \exists f(a+0), f(b-0) \in \mathbb{R}$$
2. Существуют односторонние производные $f'_+(x_m), f'_-(x_m), m = \overline{1,n-1}, \exists f'_+(a+0), \exists f'_+(b-0) \in \mathbb{R}$, при вычислении которых функцию доопредлеяют в концевых точках $x_m, m = \overline{0,n}$ заменой на соответствующие односторонние пределы.

Если $f(x)$ - кусочно-дифференцируема на $\forall\ [a;b] \subset \mathbb{R}$, то она считается кусочно-дифференцируемой на $\mathbb{R}$.

33 Достаточное условие равномерной сходимости Р.Ф.

Теорема (*Достаточное условие равномерной сходимости РФ*).

Пусть 2π-периодическая функция $f \in \mathbb{C}([-\pi;\pi])$ и имеет кусочно-непрерывную производную. Тогда РФ для $f(x)$ сходится к этой функции на $[-\pi;\pi]$ абсолютно и равномерно.

Доказательство. Т.к. $f(x)$ имеет кусочно-непрерывную производную на $[-\pi;\pi]$, то этот отрезок можно разбить на конечное число частей, внутри каждой из которых $\exists f'(x)$ непрерывная, а на концах любое из отрезков разбиения у $f(x)$ существуют конечные производные. Для простоты будем считать, что это условие выполняется для $[-\pi;\pi]$.

В силу 2π-периодичности имеем

$$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x+2\pi) = f(x), f'(x+2\pi) = f'(x).$$

Учитывая, что на концах $f(-\pi) = f(\pi)$, то

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} kb_k \cos kx - ka_k \sin kx,$$

где a_k, b_k - коэффициенты Фурье для $f(x)$ на $[-\pi;\pi]$. Используя неравенство Бесселя для $f'(x)$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} (kb_k)^2 + (-ka_k)^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx.$$

Имеем

$$0 \leqslant |a_k| + |b_k| = \frac{|ka_k|}{k} + \frac{|kb_k|}{k} \leqslant \frac{1}{2}((kb_k)^2 + \frac{1}{k^2}) + \frac{1}{2}((ka_k)^2 + \frac{1}{k^2}) \leqslant \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \sqrt{\alpha\beta} \\ 1)\alpha = kb_k, \beta = \dfrac{1}{k} \\ 2)\alpha = ka_k, \beta = \dfrac{1}{k} \end{bmatrix} = \frac{1}{k}^2 (a_k^2 + b_k^2) + \frac{1}{k^2}$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k^2(a_k^2 + b_k^2) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx + \mathrm{const}\,.$$

По критерию сходимости положительных рядов получаем, что $\frac{|a_0|}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)$ сходится. А т.к. этот ряд - мажоранта для РФ $f(x)$, т.к.

$$\begin{cases} |a_k \cos kx| \leqslant |a_k|\,, k \in \mathbb{N}, \\ |b_k \sin kx| \leqslant |b_k|\,, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

то (эта мажоранта сходящаяся) РФ для $f(x)$ будет сходится по признаку Вейерштрасса. $\square$

34 Обобщённое равенство Парсеваля и следствие из него (о почленном интегрировании Р.Ф.).

Теорема (*Обобщённое равенство Парсеваля*).
Пусть 2π периодические функции $f, g \in \mathbb{R}([-\pi;\pi])$ имеют РФ

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{101}$$

$$g(x) \sim \frac{\widetilde{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a_k} \cos kx + \widetilde{b_k} \sin kx), \tag{102}$$

Тогда выполняется обобщённое равнство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0\widetilde{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\widetilde{a_k} + b_k\widetilde{b_k}) \tag{103}$$

Доказательство. Учитывая, что $\forall f, g$ выполняется равнтсвво Парсеваля, то

$$\frac{\widetilde{a_0}^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a_k}^2 + \widetilde{b_k}^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(x)dx, \tag{104}$$

и, учитывая, что

$$f(x) \pm g(x) \sim \frac{a_0 \pm \widetilde{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}((a_k \pm \widetilde{a_k})\cos kx + (b_k \pm \widetilde{b_k})\sin kx),$$

приходим к равенствам Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) \pm g(x))^2 dx = \frac{(a_0 \pm \widetilde{a_0})^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}((a_k \pm \widetilde{a_k})^2 + (b_k \pm \widetilde{b_k})^2),$$

Беря отдельно уравнения со знаком "+" и "-" и вычитая из почленно, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2dx - \int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2dx\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{(a_0+\widetilde{a_0})^2 - (a_0-\widetilde{a_0})^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big((a_k+\widetilde{a_k})^2 - (a_k-\widetilde{a_k})^2 + (b_k+\widetilde{b_k})^2 - (b_k-\widetilde{b_k})^2\Big)\right) =$$
$$= \ldots = \frac{a_0\widetilde{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\widetilde{a_k} + b_k\widetilde{b_k})$$

□

Следствие (*О почленном интегрировании РФ*).
РФ 2π-периодической функции $f \in \mathbb{R}([-\pi;\pi])$ можно почленно интегрировать по любому промежутку $[x_0;x] \subset [-\pi;\pi]$, и при этом будет выполнятся равенство

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{x_0}^{x} dx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \int_{x_0}^{x}\cos ktdt + b_k\int_{x_0}^{x}\sin ktdt), \tag{105}$$

независимо от характера сходимости РФ для $f(x)$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(t) = \begin{cases} 1, t \in [x_0;x] \subset [-\pi;\pi], \\ 0, t \in [-\pi;x_0[\cup]x;\pi], \end{cases}$$

Для коэффициентов её РФ имеем

$$\widetilde{a_0} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x} dt.$$

Аналогично

$$\widetilde{a_k} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos ktdt = \ldots = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\cos ktdt, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Точно так же

$$\widetilde{b_k} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(t)\sin ktdt = \ldots = \frac{1}{\pi}\int\limits_{x_0}^{x}\sin ktdt, \forall k \in \mathbb{N},$$

поэтому в силу обобщённого равенства Парсеваля (103) получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt = \ldots = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt = \frac{a_0\widetilde{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\widetilde{a_k} + b_k\widetilde{b_k}) = \frac{a_0}{2}\int\limits_{x_0}^{x} dt + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\int\limits_{x_0}^{x}\cos ktdt + b_k\int\limits_{x_0}^{x}\sin ktdt),$$

что соответствует почленному интегралу РФ для $f(x)$ на $[x_0; x] \subset [-\pi; \pi]$, при этом сам РФ для $f \in \mathbb{R}([-\pi;\pi])$ может как сходится, так и расходится, а проинтегрированный ряд (105) будет уже всегда сходится. $\square$

35 Формула Дирихле для интегралов Фурье (И.Ф.) и следствие из неё.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx \tag{106}$$

Рассмотрим $\forall A > 0$ при фиксированном $x \in \mathbb{R}$

$$F(A,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos y(t-x)dt \tag{107}$$

$$\Phi(x) = \lim_{A\to+\infty} F(A,x). \tag{108}$$

Теорема (*Формула Дирихле для интегралов Фурье*).
При условной сходимости (106) для (107) справедлива формула Дирихле

$$F(A,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} (f(x-u)+f(x+u))\frac{\sin Au}{u}du. \tag{109}$$

Доказательство. В силу сходимости (106) в (107) возможно изменение порядка интегрирования, в силу которого имеем

$$F(A,x) = \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{A}\left(\int\limits_{-B}^{B} f(t)\cos y(t-x)dt\right)dy.$$

Здесь предельный переход для внешнего интеграла подразумевается в смысле *v.p.* НИЗОП. В результате получим

$$\begin{aligned}
F(A,x) &= \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-B}^{B}\left(\int\limits_{0}^{A} f(t)\cos y(t-x)dy\right)dt = \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-B}^{B}\left[f(t)\frac{\sin y(t-x)}{t-x}\right]_0^A dt = \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{\sin A(t-x)}{t-x}dt = \left[t-x=v\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+v)\frac{\sin Av}{v}dv = \frac{1}{\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}+\int\limits_{0}^{+\infty}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} 1)u=-v|_{-\infty}^{0}, dv=-du \\ 2)u=v|_{0}^{+\infty}, dv=du \end{bmatrix} = \frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{+\infty}^{0} f(x-u)\frac{\sin A(-u)}{-u}du + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x+u)\frac{\sin Au}{u}du\right) = \\
&= \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}(f(x-u)+f(x+u))\frac{\sin Au}{u}du.
\end{aligned}$$

□

Следствие.
В силу представления (109) из (108) для ИФ получаем

$$\Phi(x) = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{f(x-u)+f(x+u)}{u}\sin Au du. \tag{110}$$

36 Теорема о поточечной сходимости И.Ф. Следствие из неё и замечание к ней.

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos yt dt, \tag{111}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin yt dt, \tag{112}$$

Из теоремы Римана-Лебега: для кусочно-непрерывной функции $g(t)$ и абсолютно интегрируемой на $[a; +\infty[$ имеем

$$\lim_{A \to +\infty} \int\limits_{a}^{+\infty} g(t) \sin At = 0 \tag{113}$$

Теорема (*О поточечной сходимости ИФ*).

Если $f(x)$ - абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, т.е. сходится (106), то в случае, когда для

$$x_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow S_0 \in \mathbb{R} | \exists \lim_{t \to +0} \left(\frac{f(x_0 + t)}{t} + \frac{f(x_0 - t) - 2s_0}{t} \right) \in \mathbb{R}, \tag{114}$$

то тогда в точке x_0 для ИФ имеем $\Phi(x_0) = S_0$

Доказательство. Для $A > 0$ воспользуемся обобщением интеграла Дирихле из котором следует

$$\frac{2}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin At}{t} dt = 1. \tag{115}$$

Из (115) для (107) в точке $x = x_0$ получаем

$$F(A, x_0) - S_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x_0 - u) + f(x_0 + u)}{u} \sin Au du - \frac{2S_0}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin Au}{u} du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x_0 - u) + f(x_0 + u) - 2S_0}{u} \sin Au du = \left[\begin{matrix} g(u) = \dfrac{f(x_0 - u) + f(x_0 + u) - 2S_0}{u}; \\ \exists g(+0) = \lim\limits_{u \to +0} g(u) \in \mathbb{R} \end{matrix} \right] =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} g(u) \sin Au du = \left[\text{Теорема Римана-Лебега} \right] \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0,$$

поэтому

$$F(A, x_0) \xrightarrow[A \to +\infty]{} S_0 \Rightarrow \Phi(x_0) = \lim_{A \to +\infty} F(A, x_0) = S_0.$$

□

Следствие.

Для кусочно-непрерывной абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$, имеем кусочно-непрерывную производную на любом конечном промежутке, её интеграл Фурье в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ сходится к

$$\Phi(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно взять

$$S_0 = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

а тогда

$$\frac{f(x_0 - t) + f(x_0 + t) - 2S_0}{t} = \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} + \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} \xrightarrow[t \to +0]{} f'_+(x_0 + 0) - f'_-(x_0 - 0) \in \mathbb{R},$$

т.е. выполняется условие (113), а тогда по доказанной теореме

$$\Phi(x_0) = S_0 = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

□

Замечание.

Если $x \in \mathbb{R}$ - точка непрерывности для f, т.е. $f(x_0-0)=f(x)=f(x_0+0)$, то тогда при выполнении остальных соответствующих условий доказанной теоремы получаем для интеграла Фурье

$$\Phi(x)=\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}=f(x), \text{ т.е.}$$

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(a(y)\cos xy+b(y)\sin xy)dy,$$

где $a(y)$, $b(y)$ вычисляется по формулам (111), (112).

37 Комплексная форма И.Ф. Преобразование Фурье и его свойства.

Пусть выполнены для $f(x)$ все условия теоремы о её представлении в виде интеграла Фурье. Тогда

$$f(x) = \Phi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)dt.$$

В дальнейшем все соответствующие НИ-1 будем рассматривать в смысле $v.p.$ В этом случае

$$\forall B > 0 \Rightarrow \int\limits_{-B}^{B} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(t-x)dt = 0.$$

А отсюда при

$$B \to +\infty v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(t-x)dt = 0.$$

В дальнейшем $v.p.$ будем опускать. Поэтому, используя мнимую единицу $i(i^2=-1)$, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos y(t-x)dt + \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin y(t-x)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos y(t-x) + i\sin y(t-x))dt = \left[e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iy(t-x)} f(t)dt. \tag{116}$$

(116) даёт комплексную форму ИФ из которой следует

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-ixy} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} f(t)dt \right) dy =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} F(y)dy \tag{117}$$

где

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iyt} f(t)dt. \tag{118}$$

(118) - преобразование Фурье функции $f(t)$, которое может быть не только действительным, но и комплексно-значным для $t \in \mathbb{R}$. Сам (118) подразумевается в смысле $v.p.$

Функция $F(y)$ в (118) - образ $f(x)$ при преобразовании Фурье, сама $f(x)$ - первообразная для (118). Его можно восстановить по формуле (117), где интеграл также поразумевается в смысле $v.p.$. (117) - обратное преобразование Фурье.

Можно показать, что преобразование Фурье (118) обладает следующими свойствами

1. Линейность: Если $f(x)$ и $g(x)$ имеют преобразования Фурье $F(y)$ и $G(y)$, то тогда

   $$\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow h(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

   имеет преобразовение Фурье $H(y) = \lambda F(y) + \mu G(y)$.

   По ММИ это свойство обобщается на любое число слогаемых.

2. $F(y) \xrightarrow[y\to\infty]{} 0$. Доказательство следует из теоремы Римана-Лебега.

3. Если $f(x)$ непрерывна для $\forall x \in \mathbb{R}$, то $F(y)$ также будет непрерывна.

4. Если для $f(x)$ наряду с её прФ $F(y)$ существует прФ для $xf(x) - S(y)$, то тогда в случае выполнения (106) и сходимости $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |xf(x)|\, dx$ при выполнении условий сходимости ИФ получим, что $F'(y)$ будет прФ функции $(ixf(x))$. Доказательство следует из теоремы о почленном дифференцировании НИЗОП и правила Лейбница дифференцирования НИЗОП, т.к. для интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} itf(t)e^{iyt}d$ имеем сходящуюся мажоранту

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|itf(t)e^{iyt}\right| dt = \left[\left|e^{iyt}\right| = 1\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\, dt \text{ - сходится,}$$

а поэтому будет сходится равномерно, а тогда

$$\exists F'(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iyt}dt \right)'_y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(f(t)e^{iyt}\right)'_y dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} itf(t)e^{iyt}dt -$$

преобразование Фурье функции $ixf(x)$.

При соответствующих условиях это свойство по ММИ обобщается: $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow F^{(k)}(y)$ - прФ функции $(ix)^k f(x)$. На основании свойств можно использовать прФ для вычисления соответствующих интегралов и решения дифференциальных и интегральных уравнений и их систем.

38 И.Ф. для чётных и нечётных функций. Синус- и косинус-преобразование Фурье.

Пусть $f(x)$ чётна на $\mathbb{R}$, тогда

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos yt dt \tag{119}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt dt = 0. \tag{120}$$

При выполнении соответствующих условий в силу теоремы о поточечной сходимости ИФ и в случае непрерывности $f(x)$ имеем

$$f(x) = \Phi(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} a(y)\cos xy dy. \tag{121}$$

В соответствии с (119) - (121) для $f(x)$, определённой для $x \in \,]0; +\infty[$ её cos-преобразованием Фурье называется

$$\Phi_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\cos yt dt, \tag{122}$$

а тогда в силу (121) сама $f(x)$ будет восстанавливаема на $x > 0$ по своему cos-преобразованию (123) по формуле

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} \Phi_c(y)\cos xy dy. \tag{123}$$

Аналогично, если $f(x)$ - нечётна на $\mathbb{R}$, то

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos yt dt = 0, \tag{124}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin yt dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin yt dt. \tag{125}$$

$$\tag{126}$$

Отсюда, при выполнении соответствующего условия на непрерывность $f(x)$ получаем

$$f(x) = \Phi(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} b(y)\sin xy dy. \tag{127}$$

В соответствии с (124) - (127) для $f(x)$, определённой для $x > 0$ её sin-преобразованием Фурье называется

$$\Phi_x(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} f(t)\sin yt dt, \tag{128}$$

а сама $f(x)$ для $x > 0$ в силу (124) - (127) восстанавливается по формуле

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} \Phi_s(y)\sin xy dy, \tag{129}$$

В этом случае для $f(x)$, определённой для $x > 0$ строим их чётные (нечётные) продолжения

$$f_{\text{чн}}(x) = f(|x|), x \in \mathbb{R},$$
$$f_{\text{неч}}(x) = f(|x|)\operatorname{sgn} x, x \in \mathbb{R},$$

а полученные для этих функций интегралы Фурье назовём соответствующими интегралами Фурье по cos и sin.

Так же, как и общее прФ, sin и cos прФ могут использоваться для вычисления интегралов, решения дифференциальных и интегральных уравнений.

39 Критерий сходимости комплексных последовательностей (К.П.) и замечание к нему.

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\nu_\varepsilon | \forall n \geqslant \nu_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_0| \leqslant \varepsilon. \tag{130}$$

Теорема (*Критерий сходимости КП*).

$$z_n = x_n + iy_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0 = x_0 + iy_0 \Leftrightarrow \tag{131}$$

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0, x_n, x_0 - \operatorname{Re} z_n, z_0; y_n, y_0 - \operatorname{Im} z_n, z_0; \tag{132}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть выполняется (130), тогда, учитывая

$$\begin{aligned}|x_n - x_0| &\leqslant \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = |z_n - z_0|\,,\\ |y_n - y_0| &\leqslant \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = |z_n - z_0|\,,\end{aligned}$$

в силу (130) имеем

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\nu_\varepsilon \in \mathbb{R} | \forall n \geqslant \nu_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_0| \leqslant \varepsilon, |y_n - y_0| \leqslant \varepsilon,$$

т.е. имеем (132).

$\Leftarrow$ $\forall\varepsilon > 0$ по $\widetilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0$ в силу (132) имеем

$$\begin{aligned}&\exists\nu_1 \in \mathbb{R} | \forall n \geqslant \nu_1 \Rightarrow |x_n - x_0| \leqslant \widetilde{\varepsilon},\\ &\exists\nu_2 \in \mathbb{R} | \forall n \geqslant \nu_2 \Rightarrow |y_n - y_0| \leqslant \widetilde{\varepsilon},\end{aligned}$$

Отсюда, выбирая $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}, \forall n \geqslant \nu \Rightarrow$

$$\begin{aligned}&|x_n - x_0| \leqslant \widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\\ &|y_n - y_0| \leqslant \widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},\\ &|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \leqslant \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

Замечания:

1. Критерий сходимости КП сводит исследование этих последовательностей на сходимость к исследованию двух действительных последовательностей из действительной и мнимой частей рассматриваемой КП. В связи с этим большинство свойств действительных последовательностей автоматически переносятся на КП. В то же время не все свойства действительных последовательностей, связанные с неравенствами, выполняются для КП. Это обусловлено тем, что, в отличие от множества $\mathbb{R}$, которое можно упорядочить, в множестве $\mathbb{C}$ нельзя ввести отношение порядка между числами, удовлетворяющее всем аксиомам порядка, поэтому, например, для КП не рассматривается предельный переход в неравенствах, и, в частности, не используют теорему о пределе сжатой последовательности, а также определяется понятие монотонности КП.

2. Предел линейной комбинации, произведения и частного.

40 Принцип выбора для К.П. и замечание к нему.

Краткий план:

1. Замечаем, что (x_n) и (y_n) - ограничены.

2. Выбираем сходящуюося подпоследовательность (x_{m_k}).

3. Выбираем сходящуюося подпоследовательность (y_{n_k}), (n_k) - подпоследовательность (m_k).

Теорема (*Принципе выбора для КП*).

Если КП $(z_n), n \in \mathbb{N}$, ограниченна, т.е. $\exists M = \text{const} \geqslant 0 |\, |z_n| \leqslant M, \forall n \in \mathbb{N}$, то из (z_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$z_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} z_0 \in \mathbb{C}, 1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots \tag{133}$$

Доказательство. Заметим, что для действительной последовательности $x_n = \operatorname{Re} z_n \in \mathbb{R}$, $y_n = \operatorname{Im} z_n \in \mathbb{R}$ в силу неравенств

$$|x_n| \leqslant \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|\,, |y_n| \leqslant \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n|\,,$$

из ограниченности (z_n) следует ограниченность (x_n) и (y_n), а тогда в силу принципа выбора для действительной последовательности, например, из ограниченной действительной последовательности (x_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$\widetilde{x}_{m_k} \xrightarrow[m_k \to \infty]{} x_0 \in \mathbb{R}, 1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$$

Далее, в соответствии с полученными индексами $m_k \in \mathbb{N}$ из ограниченной подпоследовательности (y_{m_k}) можно выбрать некоторую сходящуюся подпоследовательность $\widetilde{y}_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} y_0 \in \mathbb{R}, (n_k)$ - подпоследовательность индексов (m_k), $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$

В свою очередь, для полученных индексов подпоследовательность $(\widetilde{x}_{n_k})$ будет некоторой подпоследовательностью последовательности $(\widetilde{x}_{m_k})$ и поэтому $\widetilde{x}_{n_k} \xrightarrow[n_k \to \infty]{} x_0 \in \mathbb{R}$.

Таким образом, у ограниченной КП $(z_n) = (x_n + iy_n)$ нашлась сходящаяся подпоследовательность $z_{n_k} = \widetilde{x}_{n_k} + i\widetilde{y}_{n_k} \to x_0 + iy_0 = z_0 \in \mathbb{C}$. $\square$

Замечание.

На основании принципа выбора для КП по той же схеме, что и для действительных последовательностей, доказывается *критерий Коши* сходимости КП:

(z_n) сходится $\Leftrightarrow$ (z_n) фундаментальна, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{R} | \forall m, n \geqslant \nu_\varepsilon \Rightarrow |z_n - z_m| \leqslant \varepsilon \tag{134}$$

Отсюда, по правилу Де Моргана получаем, что последовательность (z_n) будет расходится $\Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon_0 > 0 | \forall \nu \in \mathbb{R}, \exists m_0, n_0 \geqslant 0 \Rightarrow |z_{n_0} - z_{m_0}| > \varepsilon_0 \tag{135}$$

41 Критерий абсолютной сходимости комплексных числовых рядов.

Краткий план:

1. $\Rightarrow$ Ограничиваем $|x_n|$ и $|y_n|$ сверху $|z_n|$.

2. $\Leftarrow$ Ограничиваем $|z_n|$ сверху $|x_n|+|y_n|$.

Теорема (*Критерий абсолютной сходимости КР*).
$\sum z_n$ сходится абсолютно $\Leftrightarrow$ одновременно сходятся абсолютно действительные ряды $\sum \operatorname{Re} z_n$ и $\sum \operatorname{Im} z_n$.

Доказательство. $\Rightarrow$ $\sum z_n$ сходится абсолютно, т.е. сходится $\sum |z_n|$. Учитывая, что

$$\begin{cases} x_n = \operatorname{Re} z_n, \\ y_n = \operatorname{Im} z_n, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x_n| \leqslant \sqrt{x_n^2+y_n^2} = |z_n|\,, \\ |y_n| \leqslant \sqrt{x_n^2+y_n^2} = |z_n|\,, \end{cases}$$

На основании признака сравнения сходимости положительных ЧР $\Rightarrow \sum |x_n|$ и $\sum |y_n|$ сходятся. Т.е. $\sum x_n = \sum \operatorname{Re} z_n$ и $\sum y_n = \sum \operatorname{Im} z_n$ сходятся абсолютно.

$\Leftarrow$ Пусть сходятся абсолютно $\sum x_n = \sum \operatorname{Re} z_n$ и $\sum y_n = \sum \operatorname{Im} z_n$. Тогда в силу неравенства для

$$z_n = x_n + iy_n, |z_n| = \sqrt{x_n^2+y_n^2} = \sqrt{(x_n+y_n)^2 - 2\,|x_n|\,|y_n|} \leqslant |x_n| + |y_n|\,,$$

в силу сходимости

$$\sum (|x_n| + |y_n|) = \sum |x_n| + \sum |y_n|\,,$$

на основании признака сравнения сходимости положительных рядов получаем, что $\sum |z_n|$ сходится, а значит, $\sum z_n$ сходится абсолютно. $\square$

42 Линейная ФКП и её свойства.

Краткий план:

1. $\omega_1 = az$.
2. $\omega_2 = z + b$.
3. $\omega = az + b$.

Линейным будем называть отображение вида $\omega = f(z) = az + b$, где $a, b = \text{const} \in \mathbb{C}$. Если $a = 0$, то $\omega = b = \text{const}$ - постоянная ФКП.

Пусть $a \neq 0$, тогда для рассмтриваемой линейной ФКП будет существовать обратная функция

$$z = f^{-1}(\omega) = \frac{1}{a}\omega - \frac{b}{a} = a_0\omega + b_0,$$

$$a_0 = \frac{1}{a} \neq 0, b_0 = -\frac{b}{a},$$

т.е. опять имеем линейное отображение, поэтому в этом случае любая область D плоскости Z при линейном отображении взаимно однозначно будет отображаться в некоторую область плоскости ω.

Для более подробного изучения линейных ФКП, соответствующих отображению при $a \neq 0$, рассмотрим частные случаи:

1. $\omega_1 = az, a \neq 0$. Представим $a \in \mathbb{C}$ в экспоненциальном виде

   $$a = re^{i\alpha}, r = |a| > 0, \alpha = \arg a \in \,]-\pi; \pi]\ ,$$

   получаем $\omega_1 = re^{i\alpha}z \Rightarrow$

   $$|\omega_1| = |r|\left|e^{i\alpha}\right||z| = |z|\,r,$$
   $$\operatorname{Arg}\omega_1 = \arg re^{i\alpha} + \operatorname{Arg} z = \alpha + \operatorname{Arg} z.$$

   Эти равенства показывают:

   (а) С помощью ω_1 происходит преобразование подобия с коэффициентом $k = r$ (расширение, если $r > 1$ и сжатие, если $r \leqslant 1$).

   (б) Для $\phi = \arg z \Rightarrow \psi = \operatorname{Arg}\omega_1 = \alpha + \phi$, что соответствует повороту на угол α.

2. $\omega_2 = z + b$. В данном случае геометрически точка z переходит в точку ω_2 с помощью параллельного переноса на вектор, соответствующий числу $b \in \mathbb{C}$.

3. Общий случай: $\omega = az + b = a(z + \frac{b}{a})$. Получаем:

   (а) Параллельный перенос $\omega_0 = z + b_0, b_0 = \frac{b}{a}$.

   (б) $\omega = a\omega_0$ - растяжение (сжатие) и поворот.

   При указанных операциях линейная ФКП осуществляет преобразование подобия плоских фигур.

43 Дробно-линейная ФКП и её свойства.

Краткий план:

1. Любое дробно-линейное преобразование состоит из последовательного выполнения следующих операций: параллельный перенос -> инверсия->преобразование подобия -> параллельный перенос
2. Композицию двух дробно-линейных преобразований можно представить в виде умножения матриц с коэффициентами.

Рассмотрим отображение $\omega = f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, причём $c \neq 0$ или $d \neq 0$. Если у нас $c = 0, d \neq 0$, то $\omega = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}$ - уже рассмотренная линейная ФКП.

Вычислим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

В случае $\Delta = 0$ получаем пропорциональность строк рассматриваемого определителя, а из этого следует пропорциональность числителя и знаменателя дробно-линейной функции, в силу чего $\omega = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, что также было рассмотрено.

Пусть теперь $c \neq 0$ и $\Delta \neq 0$. После элементарных преобразование имеем

$$\omega = \frac{a}{c} - \frac{\Delta}{c^2\left(z + \frac{d}{c}\right)}.$$

В связи в этим дробно-линейную ФКП можно рассматривать как последовательность (композицию) простых дробно-линейных ФКП:

1. $\omega_1 = z$ - идентичное отображение.
2. $\omega_2 = \omega_1 + z_0 = z + z_0, z_0 = \dfrac{d}{c}$ - параллельный перенос на радиус-вектор, соответствующий $z_0 \in \mathbb{C}$.
3. $\omega_3 = \dfrac{1}{\omega_2} = \dfrac{1}{z + \frac{d}{c}}$ - инверсия (симметрия относительно единичной окружности).
4. $\omega_4 = p\omega_3 = -\dfrac{\Delta}{^2(z + \frac{d}{c})}, p = -\dfrac{\Delta}{2} \in \mathbb{C}$ - преобразование подобия с помощью растяжения (сжатия) и поворота.
5. $\omega_5 = \omega_4 + \omega_0 = \dfrac{a}{c} - \dfrac{\Delta}{c^2(z + \frac{d}{c})}, \omega_0 = \dfrac{a}{c}$ - параллельный перенос на радиус-вектор, соответствующий числу ω_0.

Из указанных преобразований новым является лишь инверсия относительно окружности.

Говорят, что точки z и ω находятся в инверсии между собой относительно окружности $|z - z_0| = R$, если $|OZ|\,|OW| = R^2$. Инверсия также называется симметричной относительно рассмотренной окружности радиуса > 0. Для нашего преобразования $\omega_3 = \dfrac{1}{\omega_2}$ имеем

$$\omega_3\omega_2 = 1 \Rightarrow |\omega_3|\,|\omega_2| = 1,$$

т.е. точки ω_2 и ω_3 симметричны относительно единичной окружности с центром в начале координат, т.е. находятся в инверсии.

Таким образом, любое дробно-линейное преобразование состоит из последовательного выполнения параллельного переноса, растяжения (сжатия), поворота и инверсии, при условии, что $c \neq 0$ и $\Delta \neq 0$. При этих ограничениях можно показать, что обратная к дробно-линейной функция также будет соответствующей дробно-линейной функцией. Кроме того, при $\Delta \neq 0$ множество всех дробно-линейных преобразований (в том числе линейных) относительно композиции преобразований изоморфно множеству невырожденных матриц второго порядка, с комбинацией коэффициентов относительно их умножения, т.е. для

$$\widetilde{\omega} = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad \overline{\omega} = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\widetilde{\omega}(\overline{\omega}) = \frac{a_1\overline{\omega} + b_1}{c_1\overline{\omega} + d_1} = \frac{a_0 z + b_0}{c_0 z + d_0}, \qquad \text{где} \quad \begin{bmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

Кроме того, можно показать, что любое дробно-линейное (а следовательно и линейное) преобразование обладает круговым свойством. При этих преобразованиях окружность в широком смысле слова (т.е. либо окружность конечного радиуса, либо прямая как окружность бесконечного радиуса) переходит в окружность в широком смысле слова. При этом при линейном отображении всегда обычная окружность переходит в обычную окружность, а обычная прямая - в обычную прямую, а при обобщённом дробно-линейном преобразовании возможны все варианты. Обоснование основывается на том, что существует единственная дробно-линейная функция, которая 3 различные заданные точки z_1, z_2, z_3 плоскости z переводит в указанном порядке в 3 заданные точки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ плоскости ω .

Это дробно-линейное преобразование можно найти из соотношения

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} \cdot \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \tag{136}$$

В (136) точки могут быть как конечными, так и бесконечными, при этом все разности с бесконечными точками заменяются на 1.

44 Степенная ФКП с натуральным показателем и её свойства.

Краткий план:

1. Используем экспоненциальное представление.
2. Подробно расписываем случай $n = 2$.

$\omega = f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$. Случай $n = 1 \Leftrightarrow w = z$ - идентичное преобразование, которое уже было рассмотрено. Поэтому будет считать, что $n \geqslant 2$. Тогда, используя экспоненциальное представление $z = |z| e^{i\phi}, \phi = \arg z$, имеем

$$\omega = |z|^n e^{in\phi}, |\omega| = |z|^n, \operatorname{Arg} \omega = n\phi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

В связи с этим, если, например, мы в z рассмотрим сектор, ограниченный лучами $\phi = \alpha$ и $\phi = \beta$, то в результате в ω получим сектор, ограниченный лучами $\psi = n\alpha + 2\pi m$ и $\delta = n\beta + 2\pi l$, поэтому исходный угол $\beta - \alpha$ меду первоначальным лучом в z перейдёт в угол $\delta - \psi = n(\beta - \alpha) + 2\pi p, p \in \mathbb{Z}$. Произошло увеличение этого угла в n раз.

Для определённости рассмотрим частный случай $n = 2$, т.е.

$$\omega = z^2 \Rightarrow |\omega| = |z|^2, \operatorname{Arg} \omega = 2 \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

1. $\arg z \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \operatorname{Arg} \omega \in \left]2\pi k; \pi + 2\pi k\right[.$
2. $\arg z = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{Arg} \omega = \pi + 2\pi k.$
3. $\arg z \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[\Rightarrow \omega \in \left]\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k\right[.$

в общем случае при $n \geqslant 2$ обратную функцию к $\omega = t^n$ определяют через решение уравнения $t^n = a \in \mathbb{C}$. Если $a \neq 0$, то

$$t = |a|^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\cos(\phi + 2\pi k)}{n} + i \frac{\sin(\phi + 2\pi k)}{n} \right),$$
$$\phi = \arg \omega \in \left]-\pi; \pi\right].$$

Здесь получаем n различных значений, если вместо k брать любые n последовательных целых чисел.

В связи с этим обратная к ω записывается в виде $\omega = \sqrt[n]{z}$, и она оказывается здесь многозначной (имеет n ветвей).

45 Экспоненциальная ФКП. Гиперболическая и тригонометрическая ФКП.

Краткий план:

1. Любое дробно-линейное преобразование состоит из последовательного выполнения следующих операций: параллельный перенос -> инверсия->преобразование подобия -> параллельный перенос
2. Композицию двух дробно-линейных преобразований можно представить в виде умножения матриц с коэффициентами.

Для $z = x + iy; x, y \in \mathbb{R}$ экспоненциальная ФКП определяется как

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Используя соответствующие свойства тригонометрических о показательных действительных функций, нетрудно получить, что $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Rightarrow e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $e^{\frac{z_1}{z_2}} = e^{z_1-z_2}$, отсюда, в частности, имеем $e^0 = 1, \dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$. В отличие от действительной экспоненты, комплексная экспонента является уже периодической функцией с чисто мнимым периодом $T = 2\pi i$, т.к.

$$\forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{z+2\pi ki} = e^z e^{2\pi ki} = e^z(\cos 2\pi k + i \sin 2\pi k) = e^z.$$

Отсюда получаем, что $e^{2\pi i} = 1$. Непосредственно вычисляя также получаем $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, $e^{\pi i} = -1$.

На основании комплексной экспоненты вводятся комплексные гиперболические функции

$$\begin{cases} \operatorname{ch} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sh} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \end{cases}$$

Непосредственно вычисляя для них получаем

1. $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;
2. $\operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z = \operatorname{ch} 2z$;
3. $\operatorname{sh} 2z = 2 \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$;

Из sh и ch определяем

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, z \neq i(\frac{\pi}{2} + 2\pi k), k \in \mathbb{Z},$$
$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{\operatorname{th} z} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}, z \neq i2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$
$$1 - \operatorname{th}^2 z = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}, \quad \operatorname{cth}^2 z - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 z},$$
$$\operatorname{th} 2z = \frac{2 \operatorname{th} z}{1 + \operatorname{th}^2 z}, \quad \operatorname{cth} 2z = \frac{2 \operatorname{cth} z}{1 + \operatorname{cth}^2 z}$$

С помощью комплексной экспоненты вводится также тригонометрическая ФКП

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \operatorname{ch}(iz),$$
$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -i \operatorname{sh}(iz),$$
$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \operatorname{th}(iz),$$
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \operatorname{cth}(iz).$$

В данном случае, если в $z = x + iy$ взять $y = 0, x \in \mathbb{R}$, то тригонометрические ФКП совпадают с действительными тригонометрическими функциями. В связи с этим большинство тригонометрических формул для действительных тригонометрических функций (кроме связанных с неравенствами) будут справедливы для тригонометрических ФКП, например

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$
$$1 + \operatorname{tg}^2 z = \frac{1}{\cos^2 z},$$
$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z,$$
$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z.$$

В данном случае тригонометрические ФКП являются неограниченными функциями, в отличие от, например, действительных cos и sin.

Например

$$\cos(i \ln 2) = \operatorname{ch}(-\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4} \notin [-1; 1]$$

46 Логарифмическая ФКП и общая степенная ФКП.

Краткий план:

1. $z = x + iy, \omega = u + iv$. Выражаем u, v.
2. Расписываем $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$ и $\operatorname{Ln}(z_1 z_2)$.
3. Общая степенная функция $z^\alpha \overset{z\neq 0}{=} e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$.
4. Общая показательная функция $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$.

Логарифмическая ФКП $\omega = \operatorname{Ln} z$ определяется как решение уравнения $e^\omega = z$, для получения явной формулы для решения этого уравнения запишем

$$\begin{aligned}
&z = x + iy, \omega = u + iv; x, y, v, u \in \mathbb{R}.\\
&e^{u+iv} = x + iy \Rightarrow e^u(\cos v + i\sin v) = x + iy \Rightarrow\\
&\Rightarrow \begin{cases} e^u \cos v = x,\\ e^u \sin v = y, \end{cases}
\end{aligned}$$

1. $x^2 + y^2 = e^{2u}(\cos^2 v + \sin^2 v) = e^{2u} \Rightarrow u = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \ln|z|, z \neq 0.$
2. $\begin{cases} \cos v = \dfrac{x}{e^u} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\\ \sin v = \dfrac{y}{e^u} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \end{cases}$ поэтому, используя $\phi = \arg z$ и учитывая, что $\cos\phi = \dfrac{\operatorname{Re} z}{|z|}$, $\sin\phi = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|z|}$, получаем

$$\begin{cases} \cos v = \cos\phi\\ \sin v = \sin\phi \end{cases} \Rightarrow v = \phi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\forall z \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Ln} z = u + iv = \ln|z| + i(\phi + 2\pi k) = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

Логарифм ФКП - многозначная функция. Для неё ветвь, соответствующая $k = 0$ - главное значение $\operatorname{Ln} z, z \neq 0$, и обозначается $\ln z = \ln|z| + i\arg z$. Используя форм. действия над множествами, в силу определения $\operatorname{Ln} z$ имеем

$$\begin{aligned}
\forall z_1, z_2 \neq 0, \operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,\\
\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.
\end{aligned}$$

В общем случае имеем

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ln} 1 = 2\pi k i, k \in \mathbb{Z}, k = 0 \Rightarrow \operatorname{Ln} 1 = 0.\\
\text{Аналогично } \operatorname{Ln}(-1) = i\pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Используя экспоненциальную и логарифмическую ФКП, по аналогии с основным логарифмическим тождеством для действительных функций, в общем случае для $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ полагают $a^b = e^{b \operatorname{Ln} a}$. На основании этого определения общая степенная функция $z^\alpha \overset{z\neq 0}{=} e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$ и общая показательная функция $a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$, которая, вообще говоря, многозначна.

47 Обратные гиперболические и тригонометрические ФКП.

1. Обратный гиперболический sin.

   $\omega = \operatorname{Arsh} z$ определяется как все решения уравнения относительно z

$$z = \operatorname{sh}\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} \Leftrightarrow e^{2\omega} - 2ze^{\omega} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{\omega} = z \pm \sqrt{z^2+1} \Leftrightarrow \omega = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right).$$
$$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right).$$

2. Обратный гиперболический cos.

   $\omega = \operatorname{Arch} z$ определяется в как все решения уравнения $z = \operatorname{ch}\omega$ относительно z. Имеем

$$z = \operatorname{ch}\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2} \Leftrightarrow e^{2\omega} - 2ze^{\omega} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{\omega} = z \pm \sqrt{z^2-1}, \omega = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right).$$
$$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right)$$

3. Обратный гиперболический tg.

   $\omega = \operatorname{Arth} z$ определяется как все решения относительно z уравнения $\operatorname{th}\omega = z$. Имеем

$$z = \operatorname{th}\omega = \frac{e^{2\omega} - 1}{e^{2\omega} + 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{2\omega} = \frac{1+z}{1-z}, \omega = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$
$$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right), z \neq \pm 1.$$

4. Обратный гиперболический ctg.

   $\omega = \operatorname{Arcth} z$ определяется как все решения относительно z уравнения $\operatorname{cth}\omega = z$. Имеем

$$z = \operatorname{cth}\omega = \frac{e^{2\omega} + 1}{e^{2\omega} - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{2\omega} = \frac{z+1}{z-1}, \omega = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$
$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+1}{z-1}\right), z \neq \pm 1.$$

5. Комплексный arcsin.

   $\omega = \operatorname{Arcsin} z$ определяется как все решения относительно z уравнения $\sin\omega = z$. Имеем

$$z = \sin\omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \Leftrightarrow e^{2i\omega} - 2ize^{i\omega} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{i\omega} = iz \pm \sqrt{1-z^2}, \omega = -i\operatorname{Ln}\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right).$$
$$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right).$$

6. Комплексный arccos.

   $\omega = \operatorname{Arccos} z$ определяется как все решения относительно z уравнения $\cos\omega = z$. Имеем

$$z = \cos\omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} \Leftrightarrow e^{2i\omega} - 2ze^{i\omega} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{i\omega} = z \pm \sqrt{z^2-1}, \omega = -i\operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right).$$
$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right).$$

7. Комплексный arctg.

$\omega = \operatorname{Arctg} z$ определяется как все решения относительно z уравнения $\operatorname{tg}\omega = z$. Имеем

$$z = \operatorname{tg}\omega = \frac{e^{2i\omega}-1}{i(e^{2i\omega}+1)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{2i\omega} = \frac{1+iz}{1-iz}, \omega = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right).$$
$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), z \neq \pm i.$$

8. Комплексный arcctg.

$\omega = \operatorname{Arcctg} z$ определяется как все решения относительно z уравнения $\operatorname{ctg}\omega = z$. Имеем

$$z = \operatorname{ctg}\omega = \frac{i(e^{2i\omega}+1)}{e^{2i\omega}-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{2i\omega} = \frac{z+i}{z-i}, \omega = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+i}{z-i}\right).$$
$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{z+i}{z-i}\right), z \neq \pm i.$$

Замечание.

Исходя из общей формулы для обратных гиперболических и тригонометрических ФКП вводятся главные значения этих ФКП $\operatorname{arsh} z, \operatorname{arch} z$ и т.д. При этом из полученных функций выбираются выражения, которые для соответствующих действительных значений переменной z дают то же, что и ранее рассмотренные обратные гиперболические и тригонометрические функции, при этом, кроме формальной замены общего комплексного логарифма в полученных функциях на главное значение логарифма, иногда приходится вводить некоторые постоянные поправки, вид которых зависит от выбора главного значения аргумента ($\arg z \in \,]-\pi;\pi]$ или $\arg z \in [0;2\pi[\,$).

48 Сходящаяся и непрерывная ФКП. Критерий непрерывности ФКП.

Рассмотрим ФКП $\omega - f(z)$ с областью определения $D \subset \mathbb{C}$. Пусть точка z_0 - предельная для D, т.е. либо внутренняя, либо граничная. Число $p \in \mathbb{C}$ называется пределом $f(z)$ в точке z_0, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(z) - p| < \varepsilon \tag{137}$$

В этом случае говорят, что функция $f(z)$ сходится к $p \in \mathbb{C}, z \to z_0$ и пишут $f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} p$, или $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = p$.

На языке окрестностей имеем

$$f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} p \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 | \forall z \in D \cap \overline{B_\delta}(z_0) \Rightarrow f(z) \in \overline{B_\varepsilon}(p)$$

Теорема (*Критерий сходимости ФКП*).

Если для ФКП $\omega = f(z), z = x + iy, x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$, или $\omega = u + iv, u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, то

$$f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} p \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0 = \operatorname{Re} p, \\ \exists \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0 = \operatorname{Im} p, \end{cases} \tag{138}$$

Доказательство. По той же схеме, как и в критерии сходимости КП. □

Пусть z_0 - внетренняя точка для $D = D(f) \subset \mathbb{C}$. Говорят, что $\omega = f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \in D$, если $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Аналогично определяется нерерывность в граничной точке $z_0 \in D$ (односторонняя непрерывность).

На языке окрестности имеем:

$$\begin{aligned} & f(z) \text{ непрерывна в } z_0 \in D \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 | \forall z \in \overline{B}_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in \overline{B}_\varepsilon(f(z_0)). \end{aligned}$$

Теорема (*Критерий непрерывности ФКП*).

$\omega = f(z)$ непрерывная в точке $z_0 \in D \Leftrightarrow u(x, y) = \operatorname{Re} f(z), v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ непрерывны в $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = \operatorname{Re} z_0, y_0 = \operatorname{Im} z_0$.

Доказательство. Следует их критерия сходимости ФКП. □

49 Дифференцируемые ФКП. Критерий Коши-Римана дифференцируемости ФКП и замечания к нему.

Для получения условия дифференцируемости ФКП через её действительную $u = \operatorname{Re} f(z)$ и мнимую $v = \operatorname{Im} f(z)$ части будем использовать *условие Коши-Римана*

$$\Big\{u = u(x,y), v = v(x,y),$$

считаются удовлетворяющими условию Коши-Римана, если у них существуют соответствующие производные первого порядка, для которых выполняется

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \tag{139}$$

Теорема (*Критерий Коши-Римана дифференцируемости ФКП*).

ФКП $f(z) = u + iv$ дифференцируема в области $G \subset D(f) \Leftrightarrow u = \operatorname{Re} f(z), v = \operatorname{Im} f(z)$ удовлетворяют условию Коши-Римана (139).

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $f(z)$ - дифференцируема в G. Тогда $\forall z \in G \Rightarrow \exists f'(z) \in \mathbb{C}$, т.е.

$$\exists \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \big[f = u + iv, \Delta f = \Delta u + i\Delta v, \Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y), \Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)\big] = f'(z) \in \mathbb{C}.$$

В силу любого допустимого $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ при $\Delta z \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, а тогда из того, что для Ф2П из существования двойного предела следует существование соответствующих частных пределов, при использовании приращений вдоль координатных осей получаем

1. $\Delta y = 0, \Delta x \to 0 \Rightarrow f'(z) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y) + i(v(x+\Delta x, y) - v(x,y))}{\Delta x} = u'_x + iv'_x.$
2. $\Delta x = 0, \Delta y \to 0 \Rightarrow f'(z) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y) + i(v(x, y+\Delta y) - v(x,y))}{i\Delta y} = v'_y - iu'_y.$

$f(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y$. Из равенства получаем

$$\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Leftrightarrow (139) \tag{140}$$

$\Leftarrow$ Для простоты будем считать, что для Ф2П

$$\begin{cases} u = \operatorname{Re} f(z), \\ v = \operatorname{Im} f(z), \end{cases}$$

существуют не только частные производные, удовлетворяющие (139), но и что эти производные непрерывны, т.е. используемые функции непрерывно дифференцируемы, а тогда соответствующие их приращения записываются в виде

$$\Delta u(x,y) = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$
$$\Delta v(x,y) = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Отсюда, для

$$\begin{aligned}
&\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v \Rightarrow \\
&\Rightarrow \Delta f(z) = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) + i\left(v'_x \Delta x + v'_y \Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})\right) = \\
&= (u'_x + iv'_x)\Delta x + (u'_y + iv'_y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \begin{bmatrix} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{bmatrix} = \\
&= (v'_y + iv'_x)\Delta x + (-v'_x + iv'_y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \\
&= (\Delta x + i\Delta y)v'_y + (i\Delta x - \Delta y)v'_x + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \\
&= (\Delta x + i\Delta y)v'_y + i(i\Delta x + i\Delta y)v'_x + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \\
&= (\Delta x + i\Delta y)(v'_y + iv'_x) + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}) = \begin{bmatrix} \Delta x + i\Delta y = \Delta z, \\ |\Delta z| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{bmatrix} = (v'_y + iv'_x)\Delta z + \gamma, \text{ где } \gamma = o(|\Delta z|), \Delta \to 0.
\end{aligned}$$

Имеем

$$\left|\frac{\gamma}{\Delta z}\right| \overset{\Delta z \neq 0}{=} \left|\frac{o(|\Delta z|)}{|\Delta z|}\right| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0, \text{ т.е. } \gamma = o(\Delta z), \Delta z \to 0.$$

Из полученного представления $\Delta f(z) = (v'_y + iv'_x)\Delta z + o(\Delta z), \Delta z \to 0$, получаем в силу определения дифференцируемость $f(z)$. Её производную, в частности, можно вычислить по формуле $f'(z) = v'_y + iv'_x$. $\square$

Замечания:

1. При обосновании достаточности существенную роль играло предположение о непрерывной дифференцируемости $u = \operatorname{Re} f(z)$ и $v = \operatorname{Im} f(z)$. В общем случае можно показать, что это предположение излишне, но тогда доказательство значительно усложняется.

2. Если у нас $f(z)$ дифференцируема в $G \subset D(f)$, то $f(z)$ будет бесконечное число раз дифференцируема в G, т.е. $\exists f'(z)$ - .. для ФКП и существование всех остальных производных высших порядков.

3. Из доказательства теоремы и условия Коши-Римана (139) следует, что производную ФКП можно вычислить через её действительную и мнимую части, используя одну из формул

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = u'_x - iu'_y = v'_y + iv'_x = v'_y - iu'_y.$$

50 Интеграл ФКП и его вычисление через КРИ-2.

Определение интеграла ФКП проводится по той же схеме, что и определение КРИ-2 для действительных функций.

Рассмотрим в плоскости $\textcircled{z}$ некоторый ориентированный путь l:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), t|_{\alpha}^{\beta},$$

где движение происходит от $z_\alpha = x(\alpha) + iy(\alpha)$ до $z_\beta = x(\beta) + iy(\beta)$, т.е. от $A(x(\alpha), y(\alpha))$ до $B(x(\beta), y(\beta))$. В соответствии с ориентацией рассмотрим произвольное разбиение $l = \overrightarrow{AB}$ на n частей точками $z_0 = A, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = B$. В результате l разбивается на части $l_k = \overrightarrow{z_{k-1}z_k}, k = \overline{1,n}$. Исходя из рассмотренного разбиения $P = \{z_k\}, k = \overline{0,n}$ примем $d = \max\limits_{k=\overline{1,n}} |\Delta z_k|, \Delta z_k - z_{k-1}, k = \overline{1,n}$. Выбирая произвольным образом множество отмеченных точек $Q = \{M_k\}$, $\forall M_k \in l_k, k = \overline{1,n}$, составим интегральную сумму для $f(z)$, определённую для $\forall z \in l$:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} f(M_k)\Delta z_k. \tag{141}$$

ФКП $f(z)$ считается интегрируемой на l, если

$$\exists I = \lim_{d\to 0} \sigma \in \mathbb{C}, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall \{P, Q\}, d = \text{diam } P \leqslant \delta_\varepsilon \Rightarrow |\sigma - I| \leqslant \varepsilon.$$

В этом случае конечное число I, не зависящее ни от P, ни от Q, называется значением интеграла от $f(z)$ по кривой l и обозначается $I = \int\limits_{l=\overrightarrow{AB}} f(z)dz$.

Для вычисления интеграла ФКП через действительный КРИ-2 рассмотрим

$$u = \operatorname{Re} f(z), v = \operatorname{Im} f(z), x = \operatorname{Re} y = \operatorname{Im} z,$$

тогда в соответствии с используемым разбиением $P = \{z_k\}$, с отмеченными точками $Q = \{M_k\}$ при параметризации

$$l = \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}, t|_{\alpha}^{\beta},$$

получим некоторое разбиение $\{t_k\}$ промежутка с концами α и β, в силу которых $x_k = x(t_k), y_k = y(t_k), M_k(x(t_k), y(t_k))$.

В соответствии с этим

$$f(M_k) = u(M_k) + iv(M_k) = u(x(t_k), y(t_k)) + iv(x(t_k), y(t_k)).$$

В результате для интегральной суммы имеем

$$\sigma = \sum_{k=1}^{\infty} f(M_k)\Delta z_k = \left[\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k, f(M_k) = u(M_k) + iv(M_k)\right] = \sum_{k=1}^{n}(u(M_k) + iv(M_k))(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(u(M_k)\Delta x_k - v(M_k)\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v(M_k)\Delta x_k + u(M_k)\Delta y_k).$$

Любая из полученных сумм представляет собой соответствующую интегральную сумму для КРИ вида $\int\limits_l Pdx + Qdy$, где в первом случае

$$\begin{cases} P = u, \\ Q = -v, \end{cases}$$

а во втором

$$\begin{cases} P = v, \\ Q = u, \end{cases}$$

В результате получаем

$$\int\limits_l f(z)dz = \lim_{d\to 0} \sigma = \int\limits_l (udx - vdy) + i\int\limits_l vdx + udy \tag{142}$$

Данное выражение сводит вычисление интеграла ФКП к вычислению соответствующего действительного КРИ-2, при этом, если l задана параметрически, то получаем выражение интеграла ФКП через интеграл от КЗФ

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t))dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta}(v(x(t), y(t))x'(t) - u(x(t), y(t))x'(t))dt \tag{143}$$

Нетрудно видеть, что формула (143) соответствует формуле формальной замены переменных в интеграле ФКП

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(u + iv)(dx + idy) = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(udx - vdy) + i\int\limits_{\alpha}^{\beta}(vdx + udy) \Leftrightarrow (143).$$

51 Интеграл от аналитической ФКП. Интегральная теорема Коши и замечание к ней.

ФКП $f(z)$ называется аналитической в точке $z_0 \in D(f)$, если

$$\exists B(z_0) \subset D(f) | \forall z \in B(z_0) \Rightarrow f'(z) \in \mathbb{C},$$

т.е. $f(z)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0. Функцию $f(z)$, аналитическую в любой точке множества $G \subset D(f)$ будем называть аналитической в G.
Теорема (*Интегральная теорема Коши*).

Пусть $f(z)$ - аналитическая в односвязной области $G \subset D(f)$, причём $f'(z)$ непрерывна в G, тогда для произвольного кусочно-непрерывного замкнутого контура

$$l \subset G \Rightarrow \oint\limits_l f(z)dz = 0. \tag{144}$$

Доказательство. Пусть $u = \operatorname{Re} f(z), v = \operatorname{Im} f(z)$, тогда по формуле вычисления интеграла ФКП через КРИ-2 для $I = \oint\limits_l f(z)dz$ имеем: $I = I_1 + iI_2$, где

$$I_1 = \oint\limits_l udx - vdy,$$

$$I_2 = \oint\limits_l vdx + udy.$$

Из существования $f'(z)$ непрерывной в G следует, что $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы. Воспользуемся теоремой о независимости КРИ-2 от пути интегрирования:

1. $P = u, Q = -v$. В силу условия Коши-Римана имеем

$$P'_y = u'_y = -v'_x = Q'_x \Rightarrow I_1 = \oint\limits_l Pdx + Qdy = 0.$$

2. Аналогично для $P = v, Q = u$ в силу условия Коши-Римана получаем

$$P'_y = v'_y = u'_x = Q'_x \Rightarrow I_2 = \oint\limits_l Pdx + Qdy = 0.$$

Отсюда следует $I = I_1 + iI_2 = 0$. □

Замечания:

1. Можно показать, что интегральная формула Коши верна и при менее ограничивающих условиях на $f(z)$ - достаточно потребовать лишь дифференцируемости $f(z)$ на G, но при этом строгое доказательство значительно усложняется.

2. Если $f(z)$ аналитическая в G и непрерывная в $\overline{G} = G \cup \sigma G$, то в случае, когда $l = \sigma G$ - кусочно-гладкий контур, интегральная теорема Коши верна и для этого контура, т.е. $\oint\limits_{\sigma G} f(z)dz = 0$.

3. Интегральная теорема Коши естественным образом обобщается на случай многосвязной области G, но при этом под границей l для такой многосвязной области G подразумевается её полная граница, соответствующим образом ориентированная.

52 Независимость от пути интегрирования интеграла от аналитической ФКП.

Следствие (*независимость интеграла от аналитической ФКП от пути интегрирования*).

Если $f(z)$ - аналитическая в G, то $\forall z_1, z_2 \in G$ и любых кусочно-гладких путей $l_1 \subset G, l_2 \subset G$ с началом в z_1 и концом в z_2 (ориентированных от z_1 к z_2) имеем

$$\int\limits_{l_1} f(z)dz = \int\limits_{l_2} f(z)dz.$$

Доказательство. Рассмотрим $l_1^+ = \overrightarrow{z_1z_2}$, $l_2^- = \overrightarrow{z_1z_2}$ и составим замкнутый кусочно-гладкий путь $l = l_1^+ \cup l_2^-$, проходящий через точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Тогда по интегральной теореме Коши получаем

$$\int\limits_{l} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int\limits_{l_1^+ \cap l_2^-} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int\limits_{l_1^+} f(z)dz + \int\limits_{l_2^-} f(z)dz = 0 \Rightarrow \int\limits_{l_1^+} f(z)dz = -\int\limits_{l_2^-} f(z)dz \Rightarrow \int\limits_{l_1^+} f(z)dz = \int\limits_{l_2^+} f(z)dz$$

$\square$

В дальнейшем для ФКП $f(z), z \in G$, дифференцируемую функцию $F(z), z \in G$, будем называть первообразной на G, если $\forall z \in G \Rightarrow F'(z) = f(z)$.

53 Теорема о существовании первообразной аналитической ФКП.

В дальнейшем для ФКП $f(z), z \in G$, дифференцируемую функцию $F(z), z \in G$, будем называть первообразной на G, если $\forall z \in G \Rightarrow F'(z) = f(z)$.
Теорема (*о существовании первообразной для аналитической ФКП*).

Для аналитической на G функции $f(z)$ всегда существует в G хотя бы одна первообразная $F(z)$, в качестве которой можно взять, например, интеграл с переменным верхним пределом

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt, \tag{145}$$

при этом в G интегрирование проводится по кусочно-гладкому контуру $\forall \overrightarrow{z_0 z} \subset G$, где $z_0 \in G$ - фиксированная точка.

Доказательство. Из интегральной формулы Коши следует, что $F(z) = \int\limits_{l=\overrightarrow{z_0 z}} f(t)dt$ корректно определена в силу того, что значение для (145) не зависит от пути $l \subset G$, соединяющего $z_0, z \in G$.

Придавая точке $z \in G$ произвольное приращение $\Delta z \in \mathbb{C}$ т.ч. $z + \Delta z \in G$, имем

$$\Delta F(z) = F(z+\Delta z) - F(z) = \int\limits_{\overrightarrow{z_0, z+\Delta z}} f(t)dt - \int\limits_{\overrightarrow{z_0 z}} f(t)dt = \int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt.$$

Отсюда $\forall \Delta z \neq 0$ имеем

$$\left|\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - \frac{f(z)}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} dt\right| = \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}(f(t)-f(z))dt\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}|f(t)-f(z)|\,|dt|\right|.$$

Далее, заключая путь $l_0 = \overrightarrow{z, z+\Delta z}$ в соответствующий компакт $G_0 \in G$, в силу теоремы Кантора получаем, что непрерывная $f(t)$ будет равномерно непрерывна на компакте G_0, а значит и на l_0, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall t, z \in G_0, |t - z| \leqslant \delta \Rightarrow |f(t) - f(z)| \leqslant \varepsilon,$$

поэтому для любого допустимого $\Delta z \neq 0$,

$$|\Delta z| \leqslant \delta \Rightarrow \left|\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \leqslant \frac{1}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}\varepsilon\,|dt|\right| = \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}\left|\int\limits_{z}^{z+\Delta z}|dt|\right| = \big[l_0 = [z; z+\Delta z]\,, L_0 = \text{Длина} l_0 = |\Delta z|\big] \leqslant \frac{\varepsilon}{|\Delta z|}|\Delta z| = \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0, \text{ т.е. } \left(\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} - f(z)\right) \xrightarrow[\Delta z \to 0]{} 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \exists F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta F(z)}{\Delta z} = f(z),\end{aligned}$$

т.е. (145) является одной из первообразных для $f(z)$ в G. $\square$

54 Следствие об общем виде первообразной для аналитической ФКП и замечания к нему.

Следствие (*Об общем виде первообразной для аналитической ФКП*).

Для аналитической в односвязной области G функции $f(z)$ любая её первообразная $\Phi(z)$ в G отличается от первообразной (145) на соответствующую константу $c_0 = \text{const} \in \mathbb{C}$, т.е.

$$\Phi(z) = F(z) + c_0 \tag{146}$$

Доказательство. Рассмотрим критерий постоянства аналитической ФКП. Покажем, что если для аналитической ФКП в G $H(z) \Rightarrow H'(z) = 0, \forall z \in G$, то $H(z) = \text{const}$. Пусть $u = \operatorname{Re} H(z)$, $v = \operatorname{Im} H(z)$, тогда отсюда из формулы $H'(z) = u'x + iv'_x$, имеем

$$u'_x + iv'_x = 0 \Rightarrow \begin{cases} u'_x = 0, \\ v'_x = 0, \end{cases}$$

Отсюда, используя интегральное условие Коши-Римана для дифференцируемой ФКП имеем

$$v'_y = u'_x = 0, u'_y = -v'_x = 0,$$

поэтому

$$\begin{cases} u'_x = 0, \\ u'_y = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow u = \text{const} = c_1 \in \mathbb{R}, \forall (x, y),$$
$$\begin{cases} v'_x = 0, \\ v'_y = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow v = \text{const} = c_2 \in \mathbb{R}, \forall (x, y),$$

Значит

$$H(z) = u + iv = c_1 + ic_2 = c_0 = \text{const} \in \mathbb{C}.$$

Применяя доказанное к $H(z) = \Phi(z) - F(z)$, где

$$\Phi'(z) = f(z), F'(z) = f(z), \forall z \in G \Rightarrow H'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0, \text{ т.е.}$$
$$H(z) = c_0 = \text{const} \Rightarrow \Phi(z) - F(z) = c_0 \Rightarrow \Phi(z) = F(z) + c_0.$$

□

Замечания:

1. Из доказанного следствия так же, как и для действительного интеграла, имеем следующий аналог формулы Ньютона-Лейбница (двойной подстановки) для интеграла от аналитической ФКП: если $f(z)$ аналитичекская в G, то

$$\forall z_1, z_2 \in G \Rightarrow \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \big[\Phi(z)\big]_{z_1}^{z_2},$$

где $\Phi(z)$ - одна из первообразных для аналитической $f(z)$ в G.

Доказательство. По той же схеме, что и для действительного ОИ. □

2. Как и для действительного ОИ, обосновывается формула интегрирования по частям для интеграла от аналитической ФКП: если $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в G, то

$$\forall z_1, z_2 \in G \Rightarrow \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)g'(z)dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dg(z) = \big[f(z)g(z)\big]_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} g(z)df(z) = \big[f(z)g(z)\big]_{z_1}^{z_2} - \int\limits_{z_1}^{z_2} g(z)f'(z)dz.$$

55 Интегральная формула Коши.

Теорема (*Интегральная формула Коши*).

Пусть $f(z)$ аналитическая в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, а $l \subset D$ - простой замкнутый контур, ограниченный некоторой замкнутой областью (компактом) $D_0 \subset D$, тогда

$$\forall z_0 \in D_0 \Rightarrow f(z_0) = \oint\limits_{l=\sigma D_0} \frac{f(t)}{t-z_0} dt \tag{147}$$

Доказательство. Для простоты ограничим внутреннюю точку $z_0 \in D_0 \subset D$ кругом $K_r = \{|t - z_0| = r | t \in D_0\}$, целиком лежащим в D_0. Используя интегральную теорему Коши, нетрудно показать, что

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l} \frac{f(t)}{t-z_0} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\sigma K_r} \frac{f(t)}{t-z_0} dt. \tag{148}$$

Рассмотрим $G = D - K_r$, тогда

$$\forall t \in G \Rightarrow t - z_0 \neq 0 \Rightarrow F(t) = \frac{f(t)}{t-z_0}$$

- аналитическая в G, поэтому по интегральной теореме Коши

$$\oint\limits_{\sigma G} F(t)dt = 0 \Rightarrow \int\limits_{l_0^-} F(t)dt - \int\limits_{l^+} F(t)dt = 0 \Rightarrow I = \oint\limits_{l^+} \frac{f(t)}{t-z_0} dt = -\int\limits_{l_0^-} \frac{f(t)}{t-z_0} = \int\limits_{l_0^+} F(t)dt \Rightarrow (148).$$

Используя важный пример из предыдущей лекции имеем

$$|I - f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\sigma K_r} \frac{f(t)}{t-z_0} dt - \frac{f(z_0)}{2\pi i} \oint\limits_{\sigma K_r} \frac{dt}{t-z_0} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)-f(z_0)}{t-z_0} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{|t-z_0|=r} \frac{|f(t)-f(z_0)|}{|t-z_0|} |dt| \right| = \big[|t-z_0| = r\big] = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{|t-z_0|=r} \frac{|f(t)-f(z_0)|}{r} |dt|.$$

Учитывая, что $G_0 = \{|t - z_0| \leqslant r | t \in G\}$ является компактом, а для $f(t)$ имеем непрерывность на G_0. По теореме Кантора для ФКП получаем, что $f(t)$ равномерно непрерывна на $l_r = \{|t - z_0| = r | t \in G\}$, поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 | \forall t, z_0 \in G, |t - z_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(t) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Выбирая $\delta > 0$ достаточно малым, так, чтобы $\delta \leqslant r$, получим, что

$$\forall t \in l_r \Rightarrow |f(t) - f(z_0)| \leqslant \varepsilon, \text{ отсюда}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |I - f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{l_r} \frac{|f(t)-f(z_0)|}{r} |dt| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi r} \oint\limits_{l_r} |dt| = \frac{\varepsilon}{2\pi r} \text{ Длина } l_r = \frac{\varepsilon}{2\pi r} 2\pi r = \varepsilon,$$

поэтому в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $I = f(z_0)$, т.е. приходим к интегральной формуле Коши (147). $\square$

56 Теорема о дифференцировании ИЗОП ФКП и замечание к ней.

Из интегральной формулы Коши следует

$$\int\limits_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} 2\pi i f(z), z \in D, \\ 0, z \notin D, \end{cases}$$

В данном случае имеем ИЗОП от ФКП вида

$$F(z) = \int\limits_{l} \phi(t,z)dt, \tag{149}$$

где $z \in D$ в плоскости (z) , а l - некоторая линия в плоскости (t) .

В зависимости от свойств подинтегральной функции в (149) исследуем соответствующие свойства ИЗОП (149).

Теорема (*О дифференцировании ИЗОП ФКП*).

Пусть для $\forall t \in l$ функция $\phi(t,z)$ - аналитическая по $z \in G \subset \mathbb{C}$ - область, причём у $\phi(t,z)$ её производная $\dfrac{\partial\phi(t,z)}{\partial}$непрерывна, как по $z \in G$, так и по $t \in l$.

Тогда ИЗОП (149) является аналитической функцией в области G, производная от которой вычисляется по правилу Лейбница

$$F'(z) = \int\limits_{l} \frac{\partial\phi(t,z)}{\partial z}dt. \tag{150}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z, \tau = \operatorname{Re} t, s = \operatorname{Im} t, u = \operatorname{Re}\phi(t,z), v = \operatorname{Im}\phi(t,z),$$

по формуле вычисления интеграла ФКП через КРИ-2 имеем

$$F(z) = \left[z = x+iy, t = \tau + is, \phi = u(\tau,s,x,y) + iv(\tau,s,x,y)\right] = \int\limits_{l}(u+iv)(d\tau + ids) = \ldots = H(x,y) + iR(x,y),$$

Где $H(x,y) = \int\limits_{l} ud\tau - vds, R(x,y) = \int\limits_{l} vd\tau + uds.$

Для обоснования аналитичности $F(z)$ нужно показать, что функции

$$\begin{cases} H = H(x,y), \\ R = R(x,y), \end{cases}$$

удовлетворяют условию Коши-Римана

$$\begin{cases} H'_x = R'_y, \\ H'_y = -R'_x. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что интегральное представление от $H(x,y)$ и $R(x,y)$ позволяет использовать теорему о почленном дифференцировании ИЗОП, записанную через КРИ-2.

В силу этого имеем по правилу Лейбница дфференцирования ИЗОП

1. $\exists H'_x = \int\limits_{l} u'_x d\tau - v'_x ds; \exists R'_y = \int\limits_{l} v'_y d\tau + u'_y ds$. В силу аналитичности $\phi(t,s)$ имеем

$$\left\{ u'_x = v'_y, v'_x = -u'_y, \qquad \text{т.е. } H'_x = \begin{bmatrix} u'_x = v'_x \\ u'_y = -v'_x \end{bmatrix} = \int\limits_{l} v'_y d\tau + u'_y ds = R'_y. \right.$$

2. $\exists H'_y = \int\limits_{l} u'_y d\tau - v'_y ds = \begin{bmatrix} u'_y = -v'_x \\ v'_y = u'_x \end{bmatrix} = -\int\limits_{l} v'_x d\tau + u'_x ds = -R'_x.$

Т.к. для $F(z) = H + iR$ выполняется усовие Коши-Римана, то эта ФКП аналитична, при этом для её производной получаем

$$F'(z) = H'_x + iR'_x = \int\limits_{l} u'_x d\tau - v'_x ds + i\int\limits_{l} v'_x d\tau + u'_x ds = \ldots = \int\limits_{l} \frac{\partial\phi(t,z)}{\partial z}dt.$$

$\square$

Замечание.

При выводе (150) предполагалось, что линия l - ограничена. Доказательство сохраняется и когда l неограниченна, т.е. когда (149) - НИЗОП ФКП. В этом случае также справедлива формула (150).

57 Теорема об интегральном представлении производных ФКП и замечания к ней.

Теорема (*Об интегральном представлении производных ФКП*).

Пусть $f(z)$ аналитическая в односвязной области D с кусочно-гладкой границей $l = \partial D$. Если $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $f(z)$ бесконечное число раз дифференцируема в D, и при этом

$$\forall z \in D \Rightarrow f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt, n \in \mathbb{N}_0, \tag{151}$$

Доказательство. При $n = 0$ (151) соответствует интегральной формуле Коши

$$\begin{cases} f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l} \phi(t,z) dt, \\ \phi(t,z) = \dfrac{f(t)}{t-z}, t \in l, z \in D, \end{cases} \tag{152}$$

Если зафиксировать t и заключить точку $z \in D$ в соответствующий компакт $G \subset D$ с кусочно-гладкой границей $l_0 = \partial G$, то $\forall t \in l_0, \forall z \in G \Rightarrow t - z \neq 0$, поэтому функция $\phi(t,z)$ в (152) аналитична по $z \in G$, для её производной имеем

$$\frac{\partial \phi(t,z)}{\partial z} = \left(\frac{f(t)}{t-z} \right)'_z = \frac{f(t)}{(t-z)^2}.$$

Далее, по формуле Коши для многосвязной области имеем

$$f(z) \overset{(152)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l=\partial D} \phi(t,z) dt = \ldots = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l_0 = \partial G} \phi(t,z) dt.$$

Отсюда, в силу теоремы о дифференцировании ИЗОП ФКП, получаем

$$\exists f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l_0} \frac{\partial \phi(t,z)}{\partial z} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l_0} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt$$

Применяя снова формулу Коши для многосвязной области получаем

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt,$$

т.е. формула (151) верна для $n = 1$. Далее, по индукции, доказывается справедливость (151) для $\forall n \in \mathbb{N}_0$. □

Замечания:

1. Обоснование формулы (151) показывает, что если $f(z)$ аналитическая в D, то она бесконечное число раз дифференцируема в любой внутренней точке из D.
2. Формула (151) справедлива также для многосвязной области D, при этом за l берётся полная граница для D.
3. Как и интегральную формулу Коши, на практике формулу (151) переписывают в виде

$$\oint\limits_{l} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \begin{cases} \dfrac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0), z \in D, \\ 0, z \notin D, \end{cases}$$

и используют для вычисления соответствующего интеграла ФКП.

58 Теорема Мореры и замечание к ней.

В качестве приложения интегрального представления производных аналитической ФКП докажем теорему Мореры, являющуюся в некотором смысле обратной к интегральной формуле Коши.
Теорема (*Мореры*).
Если $f(z)$ - непрерывная в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и для любого замкнутого кусочно-гладкого контура

$$l \subset D \Rightarrow \oint\limits_{l} f(z)dz = 0, \tag{153}$$

то тогда $f(z)$ аналитическая в D.

Доказательство. Фиксируя $z_0 \in D, \forall z \in D$ рассмотрим функцию $\Phi(z) = \oint\limits_{\overrightarrow{z_0 z}} f(t)dt$. В силу условия (153) получаем, что $\Phi(z)$ корректно определена в том смысле, что не зависит от пути интегрирования $l_0 = \overrightarrow{z_0 z} \subset D$ и соединяет z_0 и z.
Действительно, рассмотрим $l_1 = \overrightarrow{z_0 z}$ и $l_2 = \overrightarrow{z_0 z}$ - различные пути и построим замкнутый контур $l_2^+ \cup l_1^-$, имеем

$$\oint\limits_{l_1^- \cup l_2^+} f(t)dt = \int\limits_{l_2^+} + \int\limits_{l_1^-} = 0 \Rightarrow \int\limits_{l_2^+} f(t)dt = -\int\limits_{l_1^-} f(t)dt = \int\limits_{l_1^+} f(t)dt.$$

В связи с этим мы можем рассматривать $\Phi(z)$ как $\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt$, так же, как и в теореме о существовании первообразной для аналитической ФКП, для непрерывной $f(z)$ получаем

$$\exists \Phi'(z) = \left(\int\limits_{z_0}^{z} f(t)dt \right)'_z = f(z),$$

Таким образом, $f(z)$ - производная аналитической ФКП, а т.к. любая аналитическая ФКП бесконечное число раз дифференцируема, то $f(z)$ - тоже бесконечное число раз дифференцируема, а значит $f'(z) = \Phi''(z)$, т.е. $f(z)$ - аналитическая в D. $\square$

59 Теорема о разложении ФКП в степенной ряд и замечания к ней.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = c_0 + c_1(z-z_0) + \ldots + c_n(z-z_0)^n + \ldots \tag{154}$$

Теорема (*О разложении ФКП в СтР*).

Если $f(z)$ - аналитическая в односвязной области D, то тогда $f(z)$ разлагается в СтР (154) внутри круга $K_R = \{|z-z_0| < R | z \in D\} \subset D$, где $R = \min\limits_{t \in \partial D} d(z_0, z)$ - наименьшее расстояние от центра разложения z_0 до ближайшей граничной точки в D для $f(z)$.

Доказательство. Рассмотрим

$$\forall \text{fix } z \in K_R, l_R = \partial K_R = \{|z-z_0| = R | z \in D\},$$

тогда полагаем

$$q = \left|\frac{z-t}{t-z_0}\right|, z \in K_R, t \in l_R \Rightarrow 0 \leqslant q < 1.$$

Используя разложение

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)} = \frac{1}{(t-z_0)(1-\frac{z-z_0}{t-z_0})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{(t-z_0)^{k+1}},$$

и учитывая, что после домножения на $f(t)$ получим равномерно сходящийся ряд, почленно проинтегрировав который получаем

$$\oint\limits_{l_R} \frac{f(t)}{t-z} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \oint\limits_{l_R} \frac{f(t)dt}{(t-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k.$$

Отсюда, в силу интегральной формулы Коши и интегрального представления производной аналитической ФКП, имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{l_R} \frac{f(t)}{t-z} dt = \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k,$$

т.е. получаем разложение в СтР, являющийся рядом Тейлора. □

Замечания:

1. Если $f(z)$ разлагается в СтР (154) с центром z_0, то радиус сходимости R это расстояние от z_0 до ближайшей особой точки для $f(z)$, что соответствует максимальному кругу аналитичности.

2. Доказанная теорема показывает, что в ??? в СтР и дифференцируемости ???.

3. по аналогии с действительными разложениями получим соответствующие разложения в СтР для некоторых ФКП.

   (а) $(1+z)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+z)} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} z^n;$

   (б) $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C};$

   (в) $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, |z| < 1, z \neq -1;$

   (г) $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C};$

   $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C};$

   (д) $\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C};$

   $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C};$

60 Теорема о разложении ФКП в ряд Лорана.

Теорема (*о разложении ФКП в ряд Лорана*).

Если $f(z)$ - аналитичная внутри некоторого кольца $r < |z - z_0| < R$ с центром z_0, то тогда $f(z)$ разлагается в соответствующий ряд Лорана в этом кольце, причём

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{155}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt, n \in \mathbb{Z}, \tag{156}$$

а l - произвольный замкнутый кусочно-гладкий контур в рассматриваемом кольце.

Разложение (155) единственно.

Доказательство. Для $\forall$ fix $z, r < |z - z_0| < R$, рассмотрим $r < r_1 < |z - z_0| < R_1 < R$, $l = l_1^- \cup l_2^+$, где $l_1 : |t - z_0| = R_1$ и $l_2 : |t - z_0| = R_2$ Из интегральной формулы Коши следует представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(t)}{(t - z)} dt = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{l_2^+} \frac{f(t)}{t - z} dt - \int_{l_1^+} \frac{f(t)}{t - z} dt \right).$$

1. Если $|z - z_0| < R_1 < R$, то

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=R_1} \frac{f(t)}{t - z} dt = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(t - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{t - z_0}\right)}, \\ q = \frac{z - z_0}{t - z_0}, |q| = \frac{|z - z_0|}{|t - z_0|} < \frac{R_1}{|t - z_0|} = 1 \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=R_1} \frac{f(t)}{t - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{t - z_0} \right)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=R_1} \frac{f(t)}{(t - z)^{n+1}} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где c_n вычисляется по формуле (156) для $n \in \mathbb{N}_0$.

2. Пусть $r < r_1 < |z - z_0|$. Тогда

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=r_1} \frac{f(t)}{t - z} dt = \left[\begin{array}{c} \frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)\left(1 - \frac{t - z_0}{z - z_0}\right)}, \\ q = \frac{t - z_0}{z - z_0} \Rightarrow q = \frac{|t - z_0|}{|z - z_0|} < \frac{|t - z_0|}{r_1} = 1 \end{array} \right] =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^k} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|t-z_0|=R_1} (t - z_0)^{k-1} f(t) dt = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k},$$

где

$$c_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_1^-} (t - z_0)^{k-1} f(t) dt, k \in \mathbb{N}.$$

Заменяя формально $-k = n$ имеем

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_1^-} (t - z_0)^{-n-1} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{l_1^-} \frac{f(t)}{(t - z_0)^{n+1}} dt, n \in \{-1, -2, -3, \dots\}.$$

Таким образом, коэффициенты c_n также вычисляются по формуле (156) и для $n < 0$.

Отметим, что несмотря на то, что в доказательстве для вычисления коэффициентов (156) используются разные контуры, из интегральной теоремы Коши следует, что эти формулы можно использовать в виде (156) с некоторым общим контуром l, при этом

$$f(z) = I_1 - I_2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} \Leftrightarrow (155).$$

Единственность:

Предположим, что наряду с (155) имеется разложение $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(z-z_0)^n$. Тогда из равенств $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} d_n(z-z_0)^n$, после умножения на $(z-z_0)^{-m-1}$ и соответствующего почленного интегрирования, получим:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint\limits_l \frac{dz}{(z-z_0)^{m-n+1}}}_{=0,\ m-n\neq 0.} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint\limits_l \frac{dz}{(z-z_0)^{m-n+1}}}_{=0,\ m-n\neq 0.}$$

Для $n = m$ следует:

$$0 + c_m \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint\limits_l \frac{dz}{z-z_0}}_{=2\pi i} + 0 = 0 + d_m \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint\limits_l \frac{dz}{z-z_0}}_{=2\pi i} + 0 \Rightarrow c_m = d_m, \forall\, m \in \mathbb{Z}.$$

□