Ответы к коллоквиуму по курсу "Математический анализ"

(1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность "Информатика")

Определение предельной функции $f(x) \overset{X}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ на $(\varepsilon - \delta)$-языке:

$$\text{для } \forall\ fix\ x \in X \text{ и для } \forall\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \nu = \nu(x,\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Для обозначения равномерной сходимости $f_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x). \tag{2}$$

1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

Теорема (*Супремальный критерий равномерной сходимости ФП*).

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Если выполнена (2), то, учитывая, что в (1) используется $\forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon)$ и $\forall\ fix\ x \in X$, получаем

$$r_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ т.е.}$$
$$\text{для } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leqslant r_n \leqslant \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\Leftarrow$ Пусть выполнена (3), тогда

$$\text{для } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall\ x \in X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, имеем (1), где ν зависит от $\forall\ \varepsilon > 0$ и не зависит от конкретного элемента множества X. $\square$

Замечания:

1. Если известно, что для $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\ x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, где (a_n) - б.м.п, то тогда имеем (2). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.

2. Если
$$\exists\ x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$
то тогда равномерной сходимости нет, т.е. $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$. Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

Для обозначения равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} . \tag{4}$$

Критерий Коши сходимости ФР: (4) $\Leftrightarrow$ для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X \Rightarrow$

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{k=n+m} u_k(x) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Критерий Коши сходимости числовых последовательностей:

$$\tag{6}$$

2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

Теорема (*мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР*).
Если ФР имеет на X сходяющуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на X.

Доказательство. Доказательство с использованием критерия Коши сходимости числовых последовательностей и критерия Коши сходимости ФР (5):
Т.к. $\sum a_n$ сходится, то

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Если выполняется неравенство $|u_n(x)| \leqslant a_n,$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$, то для частичных сумм ФР $\sum u_n(x)$ имеем: $|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leqslant \varepsilon$, это для $\forall\, n \geqslant \nu = \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, что в силу (5) даёт (4). □

Замечания:

1. Принцип Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходимость числовой мажоранты (a_n) либо находится с помощью соответствующих оценок $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \sup\limits_{x \in X} |u_n(x)|$. В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости $\sum a_n$ даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.

2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты - признак равомерной сходимости ФР, используют функцию мажоранты, а именно получаем:

$$\text{если } \exists\, v_n(x) \geqslant 0\ :\ |u_n(x)| \leqslant v_n(x) \text{ для } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \text{ и } \sum v_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows},$$

то тогда для ФР $\sum u_n(x)$ имеем (4).

3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

Теорема (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП $a_n(x)$ частичные суммы $\sum a_n(x)$ ограничены в совокупности (равномерно на X), т.е.

$$\text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x)| \leqslant c, \tag{8}$$

где $c = const > 0$, *не зависит ни от* n, *ни от* x. Если $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow (b_n(x))$ - числовая последовательность является монотонной, то в случае

$$(b_n(x)) \overset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{9}$$

имеем $\sum a_n(x) b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Монотонная последовательность $(b_n(x))$ для $\forall\, fix\ x \in X$ позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (8) оценку Абеля:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x) b_k(x) \right| \leqslant 2c \left(|b_{n+1}(x)| + 2\, |b_{n+m}(x)| \right). \tag{10}$$

Если выполняется (9), то тогда имеем:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ по } \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon} \text{ и } |b_{n+m}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon},$$

поэтому для частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(x)$ в силу (10) для $\forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$ имеем: $|S_{n+m}(x) - S_m(x)| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k(m) b_k(x) \right| \leqslant 2 \cdot c \cdot (\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}) = 6 \cdot c \cdot \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости ФР следует, что $\sum a_n(x) b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. □

Следствие (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если $\forall\, fix\ x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ является монотонной, то в случае $b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Следует из того, что в условии теоремы $a_n = (-1)^n$ не зависит от x, причём $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant 1 = const$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Для обозначения поточечной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} . \tag{11}$$

4 Признак Дини равномерной сходимости ФР и следствие из него (теорема Дини для ФП)

Теорема (*Признак Дини равномерно сходящихся ФР*).
Пусть

1. Члены ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны и сохраняют один и тот же знак на $X = [a, b]$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$.

Тогда, если $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$, т.е. $S(x) \in C([a, b])$, то $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Рассмотрим на $X = [a, b]$ остатки ряда $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \ldots + \ldots = S(x) - S_n(x)$. Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. для $\forall\, fix\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ как разность двух непрерывных функций.
2. для $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow$ ФП $(R_n(x))$ убывает в случае, когда $\forall\, u_n(x) > 0$, т.к.
$R_n(x) = u_n(x) + R_{n+1}(x) \geqslant R_{n+1}(x),$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. Т.к. имеет место (11), то для $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow{X} 0$.

Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на X ФР не является равномерной сходимостью на X.

Тогда по правилу де Моргана имеем: $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \mid$ для $\forall\, \nu \in \mathbb{R}\ \exists\, n(\nu) \geqslant 0$ и $\exists\, x(\nu) \in X \mid R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$. Для простоты будем считать, что $\exists\, x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$. По принципу выбора из ограниченной последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. $x_{nk} \underset{n_k \to \infty}{\longrightarrow} x_0$, при этом в силу использования $X = [a, b]$ - компакт, получаем, что $x_0 \in X$. Если зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, то для $\forall\, n_k \geqslant m \Rightarrow R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$, по свойствам остаткам будем иметь, что $R_m(x_{nk}) \geqslant R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$. В неравенстве $R_m(x_{nk}) > \varepsilon_0$, переходя к пределу при $n_k \to \infty$ для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, получаем в силу непрерывности $R_n(x)$: $R_m(x_0) = \lim\limits_{n_k \to \infty} R_m(x_{nk}) \geqslant x_0$, что противоречит последнему из свойств остатка, а именно $R_m(x_0) \xrightarrow{X}$ при $m \to \infty$, поэтому из нашего предположения следует, что выполняется $R_m(x_0) \to 0$, противоречие, т.е. выполняется $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. ☐

Следствие (*Теорема Дини для ФП*).
Если для ФП $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ на $X = [a, b]$ выполняются свойства:

1. для $\forall\, f_n(x) \in C([a, b])$ и для $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow f_n(x)$ монотонна.
2. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда, если $f(n) \in C([a, b])$, то $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. следует из того, что члены рассматриваемой ФП $f_n(x)$ можно рассматривать как частичные суммы соответствующего ФР с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Действительно, $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x),$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

А далее к соответствующему ФР применима теорема Дини равномерной сходимости ФР. ☐

Пусть x_0 - предельная точка множества сходимости $X \subset \mathbb{R}$ для ФР $\sum u_n(x)$. Будем говорить, что в $\sum u_n(x)$ *возможен почленный предельный переход* $x \to x_0$, если

$$\exists\, lim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} lim u_n(x), \tag{13}$$

причём получившийся в левой части (13) ЧР является сходящимся.

В частности, если $x_0 \in X$ и $\forall\, u_n(x)$ непрерывен в некоторой окрестности точки x_0, и значит, для $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = u_n(x_0)$, то в случае выполнения (13) для суммы $S(x)$ ФР $\sum u_n(x)$ при $x \to x_0$ имеем:

$$\exists \lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x), \tag{14}$$

что соответствует непрерывности $S(x)$ в точке $x_0 \in X$.

5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

Теорема (*о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР*).

Если все члены $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны на $X = [a, b]$, то в случае равномерной сходимости этого ряда на $[a, b]$ его сумма $S(x)$ будет непрерывной функцией на $[a, b]$.

Доказательство. Требуется обосновать (14) для $\forall\ x_0 \in [a, b]$, причём в случае концевых значений $x_0 = a,\ x_0 = b$ будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для $fix\ x_0 \in [a, b]$ придадим произвольные приращения $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ и рассмотрим соответствующие приращения суммы ФР $\sum u_n(x)$:

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b] \Rightarrow$ для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu,$ и для $\forall\, x \in [a, b]$ для частичных сумм $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ ряда $\sum u_n(x)$ имеем: $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

Отсюда, в частности, для $x = x_0 \in X$ и $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leqslant \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{15}$$

Далее из непрерывности $\forall\ u_n(x)$ в $x_0 \in [a, b]$ следует непрерывность частичных сумм в x_0 (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta > 0\ :$ для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Таким образом, в силу (15), (16) имеем: для $\forall \varepsilon > 0$, выбирая $n \geqslant \nu$ и рассматривая $\forall\, |\Delta x| \leqslant \delta$, имеем:

$|\Delta S(x_0)| = |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant$
$\leqslant |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon$.

Поэтому получаем: для $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta > 0 :$ для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow |\Delta S(x_0)| \leqslant M \cdot \varepsilon, M = const = 3 > 0$.

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что $\Delta S(x_0) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, что на языке приращений равносильно (14). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость ЧР в правой части (14) будет сходящимся. □

Замечания:

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.
2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}$ на локальную равномерную сходимость. Будем говорить, что ФР $\sum u_n(x)$ сходится локально равномерно на $X \subset \mathbb{R}$, если для $\forall\ [a, b] \subset X \Rightarrow \sum u_n(x)(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$. У $\sum u_n(x)$ может быть локальная равномерная сходимость на X, но может не быть полной (???) равномерной сходимости на X. В случае локальной равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на X берём $\forall x_0 \in X$ и заключаем её в некоторый отрезок $x_0 \in [a, b] \subset X$. Т.к. есть равномерная сходимость для $\sum u_n(x)$ на этом отрезке, то по доказанной теореме сумма $S(x)$ в случае непрерывности $\forall\, u_n(x)$ на X будет непрерывна на $[a, b] \subset X$ и, в частности, непрерывна в $x_0 \in X$, а т.к. это можно сделать для $\forall\, x_0 \in X$, то тем самым получаем непрерывность $S(x)$ на $X \subset \mathbb{R}$ даже в случае, когда нет равномерной сходимости ФР на X.

6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

Теорема (*о почленном интегрировании равномерно сходящихся ФР*).

Если $\forall\ u_n(x) \in C([a,b])$,

для $n \in \mathbb{N}$, то в случае, когда $\sum u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$, возможно почленное интегрирование этого ряда на $[a,b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx. \tag{17}$$

Доказательство. На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящихся ФР получим, что сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет непрерывна на $[a,b]$, а значит, интегрируема на $[a,b]$.

Используя частичные суммы для $\sum u_n(x)$, рассмотрим частичные суммы $T_n = \int\limits_a^b S_n(x)dx =$

$= \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx$ для ЧР правой части (17).

Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на $[a,b]$ получим, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu = \nu(\varepsilon)\ |$ для $\forall\ n \geqslant \nu$ и для $\forall\ x \in [a,b] \Rightarrow$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \varepsilon \tag{18}$$

Отсюда получаем, что $\left|\int\limits_a^b S(x)dx - I_n\right| = \left|\int\limits_a^b S(x)dx - \int\limits_a^b S_n(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b (S(x) - S_n(x))dx\right| \leqslant$

$\leqslant \int\limits_a^b |S(x) - S_n(x)|\, dx \leqslant \int\limits_a^b \varepsilon dx = M\varepsilon$, где $M = b - a = const \geqslant 0$.

Таким образом, для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu = \nu(\varepsilon)\ |\ $ для $\forall\ n \geqslant \nu \Rightarrow \left|\int\limits_a^b S(x)dx - I_n\right| \leqslant M\varepsilon$, поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} I_n = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx,$$

что равносильно (17). □

7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

Теорема (*о почленном дифференцировании ФР*).

Пусть ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b]$ удовлетворяет условиям:

1. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$,
2. $\exists\, u_n^{'}(x)$, непрерывная для $\forall\, n \in \mathbb{N}, x \in X$.

Тогда, если

$$\sum u_n^{'}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \tag{19}$$

то рассматриваемый ФР $\sum u_n(x)$ можно почленно дифференцировать на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{'}(x), \text{для } \forall\, x \in X. \tag{20}$$

Доказательство. В силу (19), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР $\sum u_n^{'}(t)$ можно почленно интегрировать на $\forall\, [a, x] \subset [a, b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n^{'}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(x) - u_n(a)\right).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для $\sum u_n(x)$) получаем, что

$$\exists\, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int\limits_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) dt.$$

Используя далее *теорему Барроу* о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$$\exists\, S^{'}(x) = (const)^{'} + \left(\int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t)\right) dt\right)_x^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x),$$

что соответствует (20). □

Под *степенным рядом* будем подразумевать ФР вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{21}$$

где fix $x_0 \in \mathbb{R}$ - центр для СтР, а $\forall\, a_n \in \mathbb{R}$ - соответствующая числовая последовательность (*коэффициенты СтР*).

8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.

Теорема Абеля (*о сходимости степенных рядов*).

Если СтР (21) сходится при $x = x_1 \neq x_0$, то он будет сходится абсолютно для любого x, где

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|\,. \tag{22}$$

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ следует в силу необходимого условия сходимости ЧР, что $a_n(x_1 - x_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а т.к. $\forall$ ЧП является ограниченной, то $\exists\, M = \text{const} > 0 : |a_n(x_1 - x_0)^n| \leqslant M,$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{|x_1 - x_0|^n}. \tag{23}$$

Для $\forall\, x$, удовлетворяющего (22), в силу (23) получаем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n|\,|x - x_0|^n \overset{(23)}{\leqslant} \frac{M\,|x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} = Mq^n, \text{ где } q = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \in [0; 1[.$$

Таким образом, мы получили сходящуюся мажоранту, ибо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n = M\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $q \in [0; 1[$.

По признаку сравнения сходимости ЧР имеем, что для $\forall\, x$, удовлетворяющего (22), ряд (21) будет сходиться. □

Замечание.

Из полученных выше результатов следует, что если рассмотреть множество X_0 всех x, удовлетворяющих (22), то имеем, что $X_0 \subset X$, т.е. X_0 - некоторое подмножество множества X сходимости для (21).

9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.

Теорема (*формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР*).

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{24}$$

то для радиуса сходимости ряда (21) имеем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{25}$$

Доказательство.

Без ограничения общности будем считать, что в (21) $\forall\, a_n \neq 0$. Т.к. СтР (21) сходится при $x = x_0$, то рассмотрим случай $x \neq x_0$.

Если $x \in I = \left]\, x_0 - R\,;\, x_0 + R\,\right[$, где $R \geqslant 0$, то по признаку Даламбера сходимости ЧР для (21) имеем:

$$\exists\, d=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}\right|}{\left|a_n(x-x_0)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| \overset{(25)}{=} \frac{|x-x_0|}{R}.$$

В силу того, что $x \in I$ и, значит, $|x - x_0| < R$, получаем, что $d < 1$ и СтР (21) будет сходящимся. Если $d > 1$, т.е. $|x - x_0| > R$, то (21) расходится. Таким образом, (25) будет радиусом сходимости для (21). □

10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.

Теорема (*формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР*).
Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{26}$$

то для радиуса сходимости ряда (21) имеем:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{27}$$

Доказательство проведём по той же схеме, что и в предыдущей теореме.
Т.к. случай $x = x_0$ тривиален (в данной точке ряд всегда сходится), то рассмотрим случай $x \neq x_0$.
По признаку Коши сходимости ЧР для (21) получаем:

$$\exists\, k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{(27)}{=} \frac{|x-x_0|}{R}.$$

Если $k < 1$, т. е. $|x - x_0| < R$, то СтР (21) сходится.
Если $k > 1$, т. е. $|x - x_0| > R$, то СтР (21) расходится.
Таким образом, в силу определения, величина (27) будет радиусом сходимости для (21).

□

Замечания:

1. В силу связи между признаками Даламбера и Коши сходимости ЧР, в случае, когда предел (25) не существует (ни конечный, ни бесконечный), предел (27) может существовать, и в этом смысле формула Коши (27) предпочтительнее, чем (25).

2. Можно показать, что в случае, когда в (27) нет ни конечного, ни бесконечного предела, радиус сходимости для (21) всегда можно вычислить по **формуле Коши-Адамара**, использующей понятие верхнего предела последовательности:
$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{28}$$
Под верхним пределом последовательности подразумевается верхняя грань (supremum) множества конечных пределов всех сходящихся подпоследовательностей рассматриваемой последовательности.

11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).

Теорема (*о локальной равномерной сходимости СтР*).

Если СтР (21) имеет ненулевой радиус сходимости, то этот ряд (21) сходится равномерно на любом отрезке из интервала сходимости данного ряда.

Доказательство.

Рассмотрим $\forall\,[a,b] \subset I = \Big]\, x_0 - R\,;\; x_0 + R\,\Big[$, где $R > 0$ - радиус сходимости СтР (21). Имеем:

$$x_0 - R < a < b < x + R \Rightarrow -R < a - x_0 < b - x_0 < R \Rightarrow \begin{cases} |a - x_0| < R, \\ |b - x_0| < R. \end{cases} \tag{29}$$

Полагая $r = \max\Big\{\; |a - x_0|\,,\; |b - x_0|\;\Big\}$, в силу (29) получаем:

$$0 \leqslant r < R. \tag{30}$$

Отсюда для $\forall\, x \in [a,b]$ получаем:

$$|x - x_0| \leqslant \max\Big\{\; |a - x_0|\,,\; |b - x_0|\;\Big\} = r,$$

поэтому для $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ имеем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n|\,|x - x_0|^n \leqslant |a_n|\, r^n = c_n \text{ - мажоранта.}$$

Применяя к ряду c_n обобщённый признак Коши сходимости ЧР, получаем:

$$\exists\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|\, r^n} = r \cdot \underbrace{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R}} \overset{(28)}{=} \frac{r}{R} \overset{(30)}{<} 1,$$

а значит, ряд $\sum c_n$ сходится.

Таким образом, мы получили равномерно сходящуюся числовую мажоранту, и поэтому, по мажорантному признаку Вейерштрасса для ФР, рассматриваемый СтР (21) будет равномерно сходиться на $\forall\,[a,b] \subset I$. □

Замечания:

1. Из доказанной теоремы следует, что любой СтР сходится локально равномерно на интервале своей сходимости.
2. Применяя теорему Стокса-Зейделя для ФР и учитывая, что в (21) все слагаемые являются непрерывными функциями на I, в силу локальной равномерной сходимости (21) на I, внутри интервала сходимости сумма любого СтР (21) будет являться непрерывной функцией.

Следствие (*о равенстве СтР*).

Если для СтР (21) с непрерывной суммой $S_n(x)$ есть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ с соответствующей суммой $T(x)$, причём $T(x) = S(x)$ в некоторой окрестности центра разложения x_0, то тогда и сами СтР совпадают, т.е. $a_n = b_n$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Пусть имеем, что

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots = T(x).$$

В силу непрерывности $S(x)$ и $T(x)$ в соответствующей окрестности точки x_0 при $x \to x_0$, получаем:

$$a_0 = \lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} T(x) = b_0, \text{ отсюда}$$
$$a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Таким образом, для $\forall\, x \neq x_0$ имеем:

$$a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots = b_1 + b_2(x - x_0) + \ldots.$$

Используя опять соответствующую окрестность точки x_0, при $x \to x_0$, получим, что $a_1 = b_1$ и так далее (по ММИ). □

12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.

Теорема (*о дифференцировании СтР*).

Сумма СтР (21) внутри его интервала сходимости является непрерывной дифференцируемой функцией, причём у продифференцированного СтР будет тот же радиус (а, значит, и интервал) сходимости, что и у исходного ряда (21).

Доказательство. По теореме о почленном дифференцировании ФР и замечанию к ней достаточно показать, что возможно почленное дифференцирование (21) на $\forall$ отрезке $[a,b] \subset I = \,]\, x_0 - R\,;\, x_0 + R\,[$.

1. В (21) слагаемые $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями для $\forall\, x \in [a;b]$ т.к. $\exists\, u_n'(x) = na_0(x-x_0)^{n-1}$ непрерывная на $[a;b]$.

2. Так как $\forall$ СтР (21) сходится поточечно внутри своего интервала сходимости, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{\text{для } \forall\ [a;b]\subset I} S(x)$.

Осталось показать, что продифференцированный СтР

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} .$$

Используя *формулу Коши-Адамара*, имеем:

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{|a_{n+1}|}\right)} = \left[\begin{array}{c} \sqrt[n]{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \\ \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}}} = \left[\begin{array}{c} \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R} \end{array}\right] = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R.$$

Значит, у исходного и продифференцированного рядов один и тот же радиус, а, значит, и интервал, сходимости. Тогда, в силу того, что $\forall$ СтР сходится локально равномерно, получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} S'(x)$.

Причём, в силу непрерывности слагаемых, S(x) будет непрерывно дифференцируема на $\forall\ [a;b] \subset I$, а, значит, и для $\forall\, x \in I$. $\square$

Замечания:

1. Применяя последовательно дифференцирование к СтР (21), получим по ММИ, что сумма ряда (21) будет бесконечное число раз дифференцируемой функцией.

2. Можно показать, что дифференцирование СтР хоть и сохраняет интервал сходимости, но в общем случае *не улучшает* его множество сходимости в том смысле, что если, например, исходный ряд (21) находится на каком-то из концов интервала I ($x = x_0 \pm R$), то продифференцированный ряд уже может расходиться на этом конце.

Следствие.

Если на интервале $I = \,]\, x_0 - R\,;\, x_0 + R\,[$ бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, для $\forall\, x \in I$, то для неё СтР (21) будет являться соответствующим рядом Тейлора в окрестности точки x_0, т. е. для $\forall\, a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Действительно, дифференцируя почленно n раз равенство

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

в силу доказанной теоремы получим:

$$\exists\, f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + (n+1)! \cdot a_{n+1}(x-x_0) + \ldots$$

Отсюда при $x \to x_0$ имеем:

$$n! \cdot a_n = \lim_{x\to x_0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

т.е. $\forall\, a_n$ - коэффициент в разложении в ряд Тейлора. $\square$

13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.

Теорема (*о замене переменных в НИ*).

Будем одновременно рассматривать как НИ-1, так и НИ-2.

Пусть $f(x)$ определена для $\forall\, x \in [a;b[$, где либо $b=+\infty$ (НИ-1), либо $f(b-0)=\infty$ (НИ-2).

Если функция $x(t)=\phi(t)$ - *непрерывно дифференцируема* для $\forall\, t \in [\alpha;\beta[$ и *строго монотонна*, то в случае, когда: $\begin{cases}\phi(\alpha)=a,\\ \phi(\beta-0)=b.\end{cases}$, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $b=+\infty$ (НИ-1) либо $f(b-0)=+\infty$ (НИ-2), сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt. \tag{31}$$

При этом справедлива формула замены переменных в НИ:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x=\phi(t)\Rightarrow dx=\phi^{'}(t)dt,\\ x|_{a=\phi(\alpha)}^{b=\phi(\beta-0)}. \end{bmatrix} = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt, \tag{32}$$

причём в правой части (32) может стоять как НИ, так и интеграл Римана.

Доказательство. Следует из соответствующей теоремы о замене переменных в ОИ (интеграле Римана).

Для доказательства, выбирая для $\forall\, \gamma \in [\alpha;\beta[$, в силу строгой монотонности $\phi(t)$, получаем что $\phi(\gamma)\in[a;b[$. При этом для $\forall\, c\in[a;b[\ \exists\,!\ \gamma\in[\alpha;\beta[$.

Тогда по *теореме о замене переменных в ОИ* имеем:

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \begin{bmatrix} x=\phi(t)\Rightarrow dx=\phi^{'}(t)dt,\\ x|_{a=\phi(\alpha)}^{c}\Rightarrow \exists\,!\ \gamma\in[\alpha;\beta[, c=\phi(t)\Rightarrow t|_\alpha^\beta. \end{bmatrix} = \int\limits_\alpha^\gamma f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt.$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что $\gamma\to\beta-0\Rightarrow c\to b-0$, получаем (32). ☐

Замечание.

Для НИ-2 вида $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ после замены переменных имеем:

$$t=\frac{1}{b-x}\Bigg|_{\frac{1}{b-x}>0}^{+\infty},\ \text{а для}\ \ x|_a^{b-0},$$

отсюда получаем: $x=b-\dfrac{1}{t}\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{t^2}\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\dfrac{f(b-\frac{1}{t})}{t^2}dt.$

Тем самым мы *свели НИ-2 к соответствующему НИ-1*. Дальнейшее исследование которого, например, на сходимость, можно проводить с помощью полученных ранее условий сходимости НИ-1.

Аналогично, как и теорема о замене переменных в НИ-2, обосновываются формулы двойной подстановки (аналог формулы Ньютона-Лейбница) и метод интегрирования по частям для НИ-2 и НИ-1.

14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.

Формула Ньютона-Лейбница для НИ.

Пусть для простоты для $f(x)$, определённой для $\forall\ x \in [a, b[$, где $b = +\infty$ или $f(b-0) = \infty$ существует дифференцируемая первообразная $F(x)$, т.е. $\exists\ F^{'}(x) = f(x)$, для $\forall\ x \in [a, b[$. Тогда имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c \to +\infty, b \to +\infty \\ (c \to b-0, b \to -0)}} \int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \big[F(x)\big]_a^c =$$
$$= \lim_{c \to b-0} (F(c) - F(a)) = F(b-0) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^{b-0}.$$

При этом исходный интеграл сходится тогда и только тогда, когда значения $F(b-0), F(+\infty)$ конечны.

На практике формулы двойной подстановки используются в том же виде, что и для ОИ: $\int\limits_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$.

Интегрирование по частям в НИ.

Пусть $u = u(x), v = v(x)$ определены для $\forall\ x \in [a; b[$ и $f(b) = \infty$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to b-0 \\ (x \to +\infty)}} u(x)v(x) = u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}$.

В случае сходимости одного из использованных ниже интегралов, получаем:

$$\int\limits_a^b u(x)v^{'}(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int\limits_a^b u^{'}(x)v(x)dx.$$

На практике удобнее использовать:

$$\int\limits_a^b udv = \big[uv\big]_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Функцию $\phi(x)$, определённую на X будем называть *равномерным частным пределом* $f(x,y)$ при $y \to y_0$, если

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \mid \text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leqslant \delta \text{ следует } |f(x,y) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon.$$

В этом случае будем писать

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x). \tag{33}$$

15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.

Теорема (*признак равномерной сходимости Ф2П*).

Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$, являющимся компактом в $\mathbb{R}^2$, и $y_0 \in [c,d]$, то имеем:

$$f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0, y \in [c,d]]{[a,b]} f(x,y_0). \tag{34}$$

Доказательство. Из *теоремы* Кантора для ФНП получаем, что рассматриваемая $f(x,y)$ будет равномерно непрерывна для $\forall\, x \in [a,b]$ и для $\forall\, y \in [c,d]$, т.е.:

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ такая, что для } \forall\, \widetilde{x}, \bar{x} \in [a,b] \text{ и для } \forall\, \widetilde{y}, \bar{y} \in Y \\ &\text{из } \begin{cases} 0 < |\bar{x} - \widetilde{x}| \leqslant \delta, \\ 0 < |\bar{y} - \widetilde{y}| \leqslant \delta. \end{cases} \quad \Rightarrow |f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Полагая здесь: $\begin{cases} \widetilde{x} = \bar{x} = x \in [a,b], \\ \widetilde{y} = y \in [c,d], \\ \bar{y} = y_0 \in [c,d]. \end{cases}$, получаем:

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такая, что для } \forall\, y \in [c,d] \text{ из } |y - y_0| \leqslant \delta(\varepsilon), \text{ для } \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x,y) - f(x,y_0)| \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Т.к. здесь $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от $x \in [a,b]$, то получаем (33), где $\phi(x) = f(x,y_0)$, что соответствует (34). $\square$

16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.

Теорема (*критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П*).

Для того, чтобы $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\ y_n \in Y$, $y_n \to y_0, y_n \neq y_0$, где y_0 - предельная точка для множества Y, выполнялось:

$$g_n(x) = f(x, y_n) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x) \tag{35}$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть выполняется (33), тогда для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такая, что для $\forall\ y \in Y$ из $0 < |y - y_0| \leqslant \delta$, для $\forall\ x \in X \Rightarrow |f(x,y) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon$.

Рассматривая $\forall\ (y_n) \in Y$, в пределах точки y_0 по найденному ранее $\delta > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall\ n \geqslant \nu \Rightarrow |y_n - y_0| \leqslant \delta$.

Окончательно получаем: для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall\ n \geqslant \nu$, для $\forall\ x \in X \Rightarrow$ $\Rightarrow |y_n - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x, y_n) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon$, т.е. имеем (35).

$\Leftarrow$. Пусть для $\forall\ (y_n) \in Y$ в предельной точке выполнено (35). Тогда в силу того, что из равномерной сходимости $g_n(x) = f(x, y_n)$ следует поточечная сходимость ФП $g_n(x)$, получаем, что $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} \phi(x)$.

Поэтому в силу критерия Гейне существования предела Ф1П получаем, что:

$$f(x, y_0) = g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} \phi(x) \Rightarrow f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{X} \phi(x).$$

Предположим, что имеем поточечную сходимость, но равномерной сходимости нет, т.е. получаем:

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\not\rightrightarrows}} \phi(x).$$

Тогда по *правилу де Моргана*, имеем:

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0 \text{ такое, что для } \forall\ \delta > 0\ \exists\ y(\delta) \in Y, \exists\ x(\delta) \in X \text{ такое, что из } 0 < |y(\delta) - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(x(\delta), y(\delta)\right) - \phi(x(\delta)) > \varepsilon_0. \tag{36}$$

Выбирая для простоты $\delta = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +0$, получаем, что $\begin{cases} \exists\ x_n = x\left(\dfrac{1}{n}\right) \in X, \\ \exists\ y_n = y\left(\dfrac{1}{n}\right) \in Y. \end{cases}$ такие, что из $0 < |y_n - y_0| \leqslant\leqslant \delta \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$.

Используя условие $f(x_n, y) \xrightarrow[y\to y_0]{X} \phi(x_n)$, для найденного $\varepsilon_0 > 0$ получаем:

$$\exists\ \delta_0 > 0 \text{ такая, что для } \forall\ y \in Y \text{ из } 0 < |y_n - y_0| \leqslant \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| \leqslant \varepsilon_0.$$

Подставляя $y = y_n$, получаем $0 < |y_n - y_0| \leqslant \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| \leqslant \varepsilon_0$.

Выбирая теперь $\nu = \dfrac{1}{\delta_0} \in \mathbb{R}$, для $\forall\ n \geqslant \nu \Rightarrow 0 < |y_n - y_0| \leqslant \dfrac{1}{\nu} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Отсюда в силу (36) при $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$ получаем, что для $\forall\ n \geqslant \nu$ выполняется $|f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$. Противоречие. □

Замечания:

1. Доказанная теорема позволяет из соответствующих свойств ФП получить аналогичные свойства для равномерно сходящихся Ф2П, в том числе сформулированный ранее супремальный критерий равномерной сходимости Ф2П и критерий Коши для Ф2П. Кроме того, в силу теоремы Дини для ФП имеем соответствующую теорему Дини для равномерной сходимости Ф2П.

   Теорема (*Дини для равномерной сходимости Ф2П*).

   Пусть для $\forall\ fix\ y \in Y, f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a,b] = X$, причём при монотонной сходимости $y \to y_0$ ($y \uparrow y_0$ либо $y \downarrow y_0$) соответственно получаем $f(x,y)$ монотонно сходится к $\phi(x)$ ($f(x,y) \uparrow\downarrow \phi(x)$). Тогда, если предельная функция $\phi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ непрерывна на $X = [a,b]$, то кроме поточечной сходимости будем иметь равномерную сходимость (33).

2. Аналогично получаем теорему Стокса-Зейделя для Ф2П.

   Теорема (*Стокса-Зейделя*).

   Пусть для $\forall\ fix\ y \in Y, f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a,b] = X$. Тогда, если $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, где y_0 - предельная точка для Y, то предельная функция будет непрерывной на $[a,b]$.

17 **Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.**

18 **Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.**

19 **Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.**

20 **Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.**

21 **Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.**

22 **Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.**

23 **Лемма Фруллани.**

24 **Первая теорема Фруллани.**

25 **Вторая теорема Фруллани.**

26 **Третья теорема Фруллани.**