

Ответы к коллоквиуму по курсу

“Математический анализ”

(1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность “Информатика”)

Определение предельной функции $f(x) \stackrel{X}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ на $(\varepsilon - \delta)$ -языке:

$$\text{для } \forall x \in X \text{ и для } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \nu = \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Для обозначения равномерной сходимости для $f_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$f_n(x) \stackrel{X}{\Rightarrow} f(x). \quad (2)$$

1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

Теорема (Супремальный критерий равномерной сходимости ФП).

$$f_n(x) \stackrel{X}{\Rightarrow} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3)$$

Доказательство. (\Rightarrow) Если выполнена (2), то, учитывая, что в (1) используется $\forall n \geq \nu(\varepsilon)$ и $\forall x \in X$, получаем

$$r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leq r_n \leq \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(\Leftarrow) Пусть выполнена (3), тогда

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall x \in X \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем (1), где ν зависит от $\forall \varepsilon > 0$ и не зависит от конкретного элемента множества X . □

Замечания:

1. Если известно, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ и для $\forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, где (a_n) - б.м.п, то тогда имеем (2). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.

2. Если

$$\exists x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то тогда равномерной сходимости нет, т.е. $f_n(x) \not\stackrel{X}{\Rightarrow} f(x)$. Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

Теорема (*мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР*).

Если ФР имеет на X сходящуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на X .

Доказательство. Доказательство с использованием критерия Коши сходимости числовых последовательностей и критерия Коши сходимости ФР:

Т.к. $\sum a_n$ сходится, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \forall n \geq \nu, \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

Если выполняется неравенство $|u_n(x)| \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$, то для частичных сумм (??) ФР (??) имеем:
 $|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon$, это $\forall n \geq \nu = \nu(\varepsilon), \forall m \in \mathbb{N}$, что в силу (??) даёт (??). \square

Замечания:

1. Принцип Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходимость числовой мажоранты (a_n) либо находится с помощью соответствующих оценок $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \sup_{x \in X} |u_n(x)|$. В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости $\sum a_n$ даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.
2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты - признак равномерной сходимости ФР, используя функцию мажоранты, а именно, если $\exists v_n(x) \geq 0 \mid |u_n(x)| \leq v_n(x) \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall x \in X$ и $\sum v_n(x) \xrightarrow{X}$, то тогда для (??) имеем (??), (??).

3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

Теорема (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП $a_n(x)$ частичные суммы $\sum a_n(x)$ ограничены в совокупности (равномерно на X), т.е.

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall x \in X \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x)| \leq c, \quad (5)$$

где $c = \text{const} > 0$, не зависит ни от n , ни от x . Если $\forall \text{ fix } x \in X (b_n(x))$ - числовая последовательность является монотонной, то в случае

$$(b_n(x)) \xrightarrow{X} 0, \quad (6)$$

имеем $\sum a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{X}$.

Доказательство. Монотонная последовательность $(b_n(x)) \forall \text{ fix } x \in X$ позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (5) оценку Абеля:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2 < ||b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+m}(x)||. \quad (7)$$

Если выполняется (6), то тогда $\forall \varepsilon$ по $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leq \tilde{\varepsilon}$ и $|b_{n+m}(x)| \leq \tilde{\varepsilon}$, поэтому для частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(x)$ в силу (7) $\forall n \geq \nu$ и $\forall m \in \mathbb{N}$ и $\forall x \in X$ имеем: $|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2c(\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}) = 6c\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости ФР следует, что $\sum a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{X}$. \square

Следствие (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если $\forall x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ является монотонной, то в случае $b_n(x) \xrightarrow{X} 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n(x) \xrightarrow{X}$.

Доказательство. Следует из того, что в условии теоремы $a_n = (-1)^n$ не зависит от x , причём $\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq 1 = \text{const}, \forall n \in \mathbb{N}$. \square

Замечание.

По аналогичной схеме доказывается признак Абеля равномерной сходимости ФР: если для ФП $a_n(x) \Rightarrow \sum a_n(x) \xrightarrow{X}$, то в случае, когда $\forall \text{ fix } x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ монотонна и равномерно ограничена (ограничена в совокупности, т.е. $\exists c \geq 0 \mid \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall x \in X \Rightarrow |b_n(x)| \leq c$), то тогда $\sum a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{X}$.

4 Признак Дини равномерной сходимости ФР и следствие из него (теорема Дини для ФП)

Теорема (Признак Дини равномерно сходящихся ФР).

Пусть

1. Члены ФР (??) непрерывны и сохраняют один и тот же знак на $X = [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$.

2. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$.

Тогда, если $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$, т.е. $S(x) \in C([a, b])$, то $\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$.

Доказательство. Рассмотрим на $X = [a, b]$ остатки ряда $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \dots = S(x) - S_n(x)$. Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. $\forall \text{ fix } n \in \mathbb{N} \Rightarrow R_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ как разность двух непрерывных функций.

2. $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow \text{ФП } (R_n(x))$ убывает в случае, когда $\forall u_n(x) > 0$, т.к. $R_n(x) = u_n(x) + R_{n+1}(x) \geq R_{n+1}(x), \forall n \in \mathbb{N}$.

3. Т.к. имеет место (??), то $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow{X} 0$.

Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на X ФР не является равномерной сходимостью на X .

Тогда по правилу де Моргана имеем: $\exists \varepsilon_0 > 0 \mid \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n(\nu) \geq 0, \exists x(\nu) \in X \mid R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$. Для простоты будем считать, что $\exists x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$. По принципу выбора из ограниченной последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} x_0$, при этом в силу использования $x = [a, b]$ - компакт, получаем, что $x_0 \in X$. Если зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, то $\forall n_k \geq m \Rightarrow R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$, по свойствам остаткам будем иметь, что $R_m(x_{n_k}) \geq R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$. В неравенстве $R_m(x_{n_k}) > \varepsilon_0$, переходя к пределу при $n_k \rightarrow \infty \forall m \in \mathbb{N}$, получаем в силу непрерывности $R_n(x) : R_m(x_0) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} R_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0$, что противоречит последнему из свойств остатка, а именно $R_m(x_0) \xrightarrow{X} 0$ при $m \rightarrow \infty$, поэтому из нашего предположения следует, что выполняется $R_m(x_0) \rightarrow 0$, противоречие, т.е. выполняется $\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$. \square

Следствие (Теорема Дини для ФП).

Если для ФП $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ на $X = [a, b]$ выполняются свойства:

1. $\forall f_n(x) \in C([a, b])$ и $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow f_n(x)$ монотонна.

2. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда, если $f(n) \in C([a, b])$, то $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$.

Доказательство. следует из того, что члены рассматриваемой ФП $f_n(x)$ можно рассматривать как частичные суммы соответствующего ФР с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Действительно, $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x), \forall n \in \mathbb{N}$.

А далее к соответствующему ФР применима теорема Дини равномерно сходящихся ФР. \square

Замечания:

1. В дальнейшем связь (8) будем использовать для переформулирования соответствующих результатов, полученных для ФР с помощью перехода на соответствующую ФП. Такие ряды и последовательности, связанные с (8), будем называть ассоциированными между собой.

2. Теорема Дини, с одной стороны, даёт одно из достаточных условий равномерной сходимости ФР, а, с другой стороны, даёт признак неравномерной сходимости ФР, а именно: если у знакопостоянного поточечно сходящегося $\sum u_n(x)$ на $[a, b]$ сумма $S(x)$ является функцией разрывной, то этот ряд сходится неравномерно на $[a, b]$ (то же самое для ФП).

5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

Теорема (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР).

Если все члены $u_n(x), n \in \mathbb{N}$ ФР (??) непрерывны на $X = [a, b]$, то в случае равномерной сходимости этого ряда на $[a, b]$ его сумма $S(x)$ будет непрерывной функцией на $[a, b]$.

Доказательство. Требуется обосновать (??) $\forall x_0 \in [a, b]$, причём в случае концевых значений $x_0 = a, x_0 = b$ будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для *fix* $x_0 \in [a, b]$ придадим произвольные приращения $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ и рассмотрим соответствующие приращения суммы (??) ФР (??):

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР (??) на $X = [a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \nu, \forall x \in [a, b]$ для частичных сумм $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ ряда (??) имеем: $|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$.

Отсюда, в частности, для $x = x_0 \in X$ и $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leq \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (9)$$

Далее из непрерывности $\forall u_n(x)$ в $x_0 \in [a, b]$ следует непрерывность частичных сумм в x_0 (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для $\forall \varepsilon, \exists \delta > 0, \forall |\Delta x| \leq \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leq \varepsilon. \quad (10)$$

Таким образом, в силу (9), (10) имеем: $\forall \varepsilon > 0$, выбирая $n \geq \nu$ и рассматривая $\forall |\Delta x| \leq \delta$, имеем:

$$\begin{aligned} |\Delta S(x_0)| &= |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leq \\ &\leq |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Вследствие этого: $\forall \varepsilon \exists \delta > 0, \forall |\Delta x| \leq \delta \Rightarrow |\Delta S(x_0)| \leq M \cdot \varepsilon, M = \text{const} = 3 > 0$.

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что $\Delta S(x_0) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$, что на языке приращений равносильно (??). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость ЧР в правой части (??) будет сходящимся. \square

Замечания:

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.
2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}$ на локальную равномерную сходимость.

6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

Теорема (о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР).

Если $\forall u_n(x) \in C([a, b])$,

$n \in \mathbb{N}$, то в случае, когда $\sum u_n(x) \xrightarrow{[a, b]}$, возможно почленное интегрирование этого ряда на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx. \quad (11)$$

Доказательство. На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР получим, что сумма ряда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет непрерывна на $[a, b]$, а значит, интегрируема на $[a, b]$.

Используя частичные суммы (??) для (??), рассмотрим частичные суммы $T_n = \int_a^b S_n(x)dx =$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx \text{ для ЧР правой части (11).}$$

Требуется доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b S(x)dx$.

Из равномерной сходимости (??) на $[a, b]$ получим, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \mid \forall n \geq \nu \text{ и } \forall x \in [a, b] \Rightarrow$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon \quad (12)$$

Отсюда получаем, что $\left| \int_a^b S(x)dx - I_n \right| = \left| \int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b (S(x) - S_n(x))dx \right| \leq$

$$\leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \leq \int_a^b \varepsilon dx = M\varepsilon, \text{ где } M = b - a = \text{const} \geq 0. \text{ Таким образом, } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \mid \forall n \geq \nu \Rightarrow$$

$$\left| \int_a^b S(x)dx - I_n \right| \leq M\varepsilon, \text{ поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx,$$

что равносильно (11). □

Замечание.

Если на множестве сходимости $X \subset \mathbb{R}$ для (??) нет равномерной сходимости, но есть локальная равномерная сходимость, то в случае непрерывности $\forall u_n(x)$ на X можно почленно интегрировать ФР (??) на $\forall [a, b] \subset X$.

7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

Теорема (о почленном дифференцировании ФР).

Пусть ФР (??) на $X = [a, b]$ удовлетворяет условиям:

1. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$,
2. $\exists u'_n(x)$, непрерывная для $\forall n \in \mathbb{N}, x \in X$.

Тогда, если

$$\sum u'_n(x) \xrightarrow{X} \quad (13)$$

то рассмотренный ФР (??) можно почленно дифференцировать на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{k=n}^{\infty} u'_n(x), \forall x \in X. \quad (14)$$

Доказательство. В силу (13), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР $\sum u'_n(t)$ можно почленно интегрировать на $\forall[a, x] \subset [a, b]$, т.е.

$$\exists \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для (??)) получаем, что

$$\exists S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) dt.$$

Используя далее теорему Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$$\exists S'(x) = (const)' + \left(\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \text{ что соответствует (14).}$$

□

- 8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.
- 9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.
- 10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.
- 11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).
- 12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.
- 13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.
- 14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.
- 15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.
- 16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.
- 17 Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.
- 18 Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.
- 19 Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.
- 20 Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.
- 21 Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.
- 22 Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.
- 23 Лемма Фруллани.
- 24 Первая теорема Фруллани.
- 25 Вторая теорема Фруллани.
- 26 Третья теорема Фруллани.