

Ответы к коллоквиуму по курсу

“Математический анализ”

(1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность “Информатика”)

Обозначение поточечной сходимости:

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \quad (1)$$

Определение (1) на $(\varepsilon - \delta)$ -языке:

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \text{ и для } \forall \text{ fix } x \in X \exists \nu = \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{ для } \forall n \geq \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Обозначение равномерной сходимости:

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \quad (3)$$

Определение (3) на $(\varepsilon - \delta)$ -языке:

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{ для } \forall \text{ fix } x \in X \text{ и для } \forall n \geq \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

Теорема (Супремальный критерий равномерной сходимости ФП).

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5)$$

Доказательство. \Rightarrow Если выполнена (3), то, учитывая, что в (4) используется $\forall n \geq \nu(\varepsilon)$ и $\forall \text{ fix } x \in X$, получаем

$$r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{ для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leq r_n \leq \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

\Leftarrow Пусть выполнена (5), тогда

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{ для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall x \in X \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем (2), где ν зависит от $\forall \varepsilon > 0$ и не зависит от конкретного элемента множества X . \square

Замечания:

1. Если известно, что для $\forall n \in \mathbb{N}$ и для $\forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$, где (a_n) - б.м.п, то тогда имеем (3). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.

2. Если

$$\exists x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то тогда равномерной сходимости нет, т.е. $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$. Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

Для обозначения равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X} . \quad (6)$$

Критерий Коши сходимости ФР: (6) \Leftrightarrow для $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ | для $\forall n \geq \nu$ и для $\forall m \in \mathbb{N}$ и для $\forall x \in X \Rightarrow$

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (7)$$

Критерий Коши сходимости числовых последовательностей:

$$(8)$$

2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

Теорема (мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР).

Если ФР имеет на X сходящуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на X .

Доказательство. Доказательство с использованием критерия Коши сходимости числовых последовательностей и критерия Коши сходимости ФР (7):

Т.к. $\sum a_n$ сходится, то

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon. \quad (9)$$

Если выполняется неравенство $|u_n(x)| \leq a_n$, для $\forall n \in \mathbb{N}$ и для $\forall x \in X$, то для частичных сумм ФР $\sum u_n(x)$ имеем:

$$|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon, \text{ это для } \forall n \geq \nu = \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N},$$

что в силу (7) даёт (6). \square

Замечания:

1. Принцип Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходимость числовой мажоранты (a_n) либо находится с помощью соответствующих оценок $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \sup_{x \in X} |u_n(x)|$. В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости $\sum a_n$ даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.
2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты - признак равномерной сходимости ФР, используют функцию мажоранты, а именно получаем:

$$\text{если } \exists v_n(x) \geq 0 : |u_n(x)| \leq v_n(x) \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall x \in X \text{ и } \sum v_n(x) \xrightarrow{X},$$

то тогда для ФР $\sum u_n(x)$ имеем (6).

3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

Теорема (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП $a_n(x)$ частичные суммы $\sum a_n(x)$ ограничены в совокупности (равномерно на X), т.е.

$$\text{для } \forall x \in X \text{ и для } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x)| \leq c, \quad (10)$$

где $c = \text{const} > 0$, не зависит ни от n , ни от x . Если $\forall \text{fix } x \in X \Rightarrow (b_n(x))$ - числовая последовательность является монотонной, то в случае

$$(b_n(x)) \xrightarrow{X} 0, \quad (11)$$

имеем $\sum a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{X}$.

Доказательство. Монотонная последовательность $(b_n(x))$ для $\forall \text{fix } x \in X$ позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (10) оценку Абеля:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2c (|b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+m}(x)|). \quad (12)$$

Если выполняется (11), то тогда имеем:

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \text{ по } \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \text{для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall x \in X \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leq \tilde{\varepsilon} \text{ и } |b_{n+m}(x)| \leq \tilde{\varepsilon},$$

поэтому для частичных сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(x)$ в силу (12) для $\forall n \geq \nu(\varepsilon)$ и для $\forall m \in \mathbb{N}$ и для $\forall x \in X$ имеем:

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2 \cdot c \cdot (\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}) = 6 \cdot c \cdot \tilde{\varepsilon} = \varepsilon. \text{ Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости}$$

ФР следует, что $\sum a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{X}$. □

Следствие (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если $\forall \text{fix } x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ является монотонной, то в случае $b_n(x) \xrightarrow{X} 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n(x) \xrightarrow{X}$.

Доказательство. Следует из того, что в условии теоремы $a_n = (-1)^n$ не зависит от x , причём

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq 1 = \text{const}, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Для обозначения поточечной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X} . \quad (13)$$

4 Признак Дини равномерной сходимости ФР и следствие из него (теорема Дини для ФП)

Теорема (*Признак Дини равномерно сходящихся ФР*).

Пусть

1. Члены ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны и сохраняют один и тот же знак на $X = [a, b]$, для $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$.

Тогда, если $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$, т.е. $S(x) \in C([a, b])$, то $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$.

Доказательство. Рассмотрим на $X = [a, b]$ остатки ряда $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \dots = S(x) - S_n(x)$. Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. для $\forall \text{ fix } n \in \mathbb{N} \Rightarrow R_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ как разность двух непрерывных функций.
2. для $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow \Phi\P (R_n(x))$ убывает в случае, когда $\forall u_n(x) > 0$, т.к.
 $R_n(x) = u_n(x) + R_{n+1}(x) \geq R_{n+1}(x)$, для $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. Т.к. имеет место (13), то для $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow{X} 0$.

Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на X ФР не является равномерной сходимостью на X .

Тогда по правилу де Моргана имеем: $\exists \varepsilon_0 > 0 \mid \text{ для } \forall \nu \in \mathbb{R} \exists n(\nu) \geq 0 \text{ и } \exists x(\nu) \in X \mid R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$. Для простоты будем считать, что $\exists x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$. По принципу выбора из ограниченной последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} x_0$, при этом в силу использования $X = [a, b]$ - компакт, получаем, что $x_0 \in X$. Если зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, то для $\forall n_k \geq m \Rightarrow R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$, по свойствам остатков будем иметь, что $R_m(x_{n_k}) \geq R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$. В неравенстве $R_m(x_{n_k}) > \varepsilon_0$, переходя к пределу при $n_k \rightarrow \infty$ для $\forall m \in \mathbb{N}$, получаем в силу непрерывности $R_n(x) : R_m(x_0) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} R_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0$, что противоречит последнему из свойств остатка, а именно $R_m(x_0) \xrightarrow{X} 0$ при $m \rightarrow \infty$, поэтому из нашего предположения следует, что выполняется $R_m(x_0) \rightarrow 0$, противоречие, т.е. выполняется $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$. \square

Следствие (*Теорема Дини для ФП*).

Если для ФП $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ на $X = [a, b]$ выполняются свойства:

1. для $\forall f_n(x) \in C([a, b])$ и для $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow f_n(x)$ монотонна.
2. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда, если $f(n) \in C([a, b])$, то $f_n(x) \xrightarrow{X}$.

Доказательство. следует из того, что члены рассматриваемой ФП $f_n(x)$ можно рассматривать как частичные суммы соответствующего ФР с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Действительно, $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x)$, для $\forall n \in \mathbb{N}$.

А далее к соответствующему ФР применима теорема Дини равномерной сходимости ФР. \square

Пусть x_0 - предельная точка множества сходимости $X \subset \mathbb{R}$ для ФР $\sum u_n(x)$. Будем говорить, что в $\sum u_n(x)$ возможен почленный предельный переход $x \rightarrow x_0$, если

$$\exists \lim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim u_n(x), \quad (15)$$

причём получившийся в левой части (15) ЧР является сходящимся.

В частности, если $x_0 \in X$ и $\forall u_n(x)$ непрерывен в некоторой окрестности точки x_0 , и значит, для $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = u_n(x_0)$, то в случае выполнения (15) для суммы $S(x)$ ФР $\sum u_n(x)$ при $x \rightarrow x_0$ имеем:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x), \quad (16)$$

что соответствует непрерывности $S(x)$ в точке $x_0 \in X$.

5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

Теорема (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР).

Если все члены $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны на $X = [a, b]$, то в случае равномерной сходимости этого ряда на $[a, b]$ его сумма $S(x)$ будет непрерывной функцией на $[a, b]$.

Доказательство. Требуется обосновать (16) для $\forall x_0 \in [a, b]$, причём в случае концевых значений $x_0 = a, x_0 = b$ будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для *fix* $x_0 \in [a, b]$ придадим произвольные приращения $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ и рассмотрим соответствующие приращения суммы ФР $\sum u_n(x)$:

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b] \Rightarrow$ для $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid$ для $\forall n \geq \nu$, и для $\forall x \in [a, b]$ для частичных сумм $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ ряда $\sum u_n(x)$ имеем: $|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$.

Отсюда, в частности, для $x = x_0 \in X$ и $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leq \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (17)$$

Далее из непрерывности $\forall u_n(x)$ в $x_0 \in [a, b]$ следует непрерывность частичных сумм в x_0 (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для $\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \text{ для } \forall |\Delta x| \leq \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leq \varepsilon. \quad (18)$$

Таким образом, в силу (17), (18) имеем: для $\forall \varepsilon > 0$, выбирая $n \geq \nu$ и рассматривая $\forall |\Delta x| \leq \delta$, имеем:

$$\begin{aligned} |\Delta S(x_0)| &= |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leq \\ &\leq |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому получаем: для $\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \text{ для } \forall |\Delta x| \leq \delta \Rightarrow |\Delta S(x_0)| \leq M \cdot \varepsilon, M = \text{const} = 3 > 0$.

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что $\Delta S(x_0) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$, что на языке приращений равносильно (16). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость ЧР в правой части (16) будет сходящимся. \square

Замечания:

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.

2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}$ на локальную равномерную сходимость. Будем говорить, что ФР $\sum u_n(x)$ сходится локально равномерно на

$X \subset \mathbb{R}$, если для $\forall [a, b] \subset X \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a, b]} \dots$. $\sum u_n(x)$ может быть локальная равномерная сходимость на X , но может не быть полной (???) равномерной сходимости на X . В случае локальной равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на X берём $\forall x_0 \in X$ и заключаем её в некоторый отрезок $x_0 \in [a, b] \subset X$. Т.к. есть равномерная сходимость для $\sum u_n(x)$ на этом отрезке, то по доказанной теореме сумма $S(x)$ в случае непрерывности $\forall u_n(x)$ на X будет непрерывна на $[a, b] \subset X$ и, в частности, непрерывна в $x_0 \in X$, а т.к. это можно сделать для $\forall x_0 \in X$, то тем самым получаем непрерывность $S(x)$ на $X \subset \mathbb{R}$ даже в случае, когда нет равномерной сходимости ФР на X .

6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

Теорема (о почленном интегрировании равномерно сходящихся ФР).

Если $\forall u_n(x) \in C([a, b])$,

для $n \in \mathbb{N}$, то в случае, когда $\sum u_n(x) \xrightarrow{[a, b]}$, возможно почленное интегрирование этого ряда на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx. \quad (19)$$

Доказательство. На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящихся ФР получим, что сумма ряда $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет непрерывна на $[a, b]$, а значит, интегрируема на $[a, b]$.

Используя частичные суммы для $\sum u_n(x)$, рассмотрим частичные суммы $T_n = \int_a^b S_n(x)dx =$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx \text{ для ЧР правой части (19).}$$

Требуется доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b S(x)dx$.

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на $[a, b]$ получим, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall n \geq \nu$ и для $\forall x \in [a, b] \Rightarrow$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon \quad (20)$$

Отсюда получаем, что $\left| \int_a^b S(x)dx - I_n \right| = \left| \int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b (S(x) - S_n(x))dx \right| \leq$

$$\leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \leq \int_a^b \varepsilon dx = M\varepsilon, \text{ где } M = b - a = \text{const} \geq 0.$$

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall n \geq \nu \Rightarrow \left| \int_a^b S(x)dx - I_n \right| \leq M\varepsilon$, поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx,$$

что равносильно (19). □

7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

Теорема (о почленном дифференцировании ФР).

Пусть ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b]$ удовлетворяет условиям:

1. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$,
2. $\exists u'_n(x)$, непрерывная для $\forall n \in \mathbb{N}, x \in X$.

Тогда, если

$$\sum u'_n(x) \xrightarrow{X} \quad (21)$$

то рассматриваемый ФР $\sum u_n(x)$ можно почленно дифференцировать на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x), \text{ для } \forall x \in X. \quad (22)$$

Доказательство. В силу (21), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР $\sum u'_n(t)$ можно почленно интегрировать на $\forall [a, x] \subset [a, b]$, т.е.

$$\exists \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для $\sum u_n(x)$) получаем, что

$$\exists S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) dt.$$

Используя далее *теорему Барроу* о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$$\exists S'(x) = (const)' + \left(\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$

что соответствует (22). □

Под *степенным рядом* будем подразумевать ФР вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (23)$$

где $x_0 \in \mathbb{R}$ - центр для СтР, а $\forall a_n \in \mathbb{R}$ - соответствующая числовая последовательность (*коэффициенты СтР*).

8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.

Теорема Абеля (*о сходимости степенных рядов*).

Если СтР (23) сходится при $x = x_1 \neq x_0$, то он будет сходиться абсолютно для любого x , где

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|. \quad (24)$$

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ следует в силу необходимого условия сходимости ЧР, что $a_n(x_1 - x_0)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, а т.к. \forall ЧП является ограниченной, то $\exists M = \text{const} > 0 : |a_n(x_1 - x_0)^n| \leq M$, для $\forall n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$|a_n| \leq \frac{M}{|x_1 - x_0|^n}. \quad (25)$$

Для $\forall x$, удовлетворяющего (24), в силу (25) получаем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n| |x - x_0|^n \stackrel{(25)}{\leq} \frac{M |x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} = M q^n, \text{ где } q = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \in [0; 1[.$$

Таким образом, мы получили сходящуюся мажоранту, ибо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $q \in [0; 1[$.

По признаку сравнения сходимости ЧР имеем, что для $\forall x$, удовлетворяющего (24), ряд (23) будет сходиться. \square

Замечание.

Из полученных выше результатов следует, что если рассмотреть множество X_0 всех x , удовлетворяющих (24), то имеем, что $X_0 \subset X$, т.е. X_0 - некоторое подмножество множества X сходимости для (23).

9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.

Теорема (формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР).

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (26)$$

то для радиуса сходимости ряда (23) имеем:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (27)$$

Доказательство.

Без ограничения общности будем считать, что в (23) $\forall a_n \neq 0$. Т.к. СтР (23) сходится при $x = x_0$, то рассмотрим случай $x \neq x_0$.

Если $x \in I =]x_0 - R; x_0 + R[$, где $R \geq 0$, то по признаку Даламбера сходимости ЧР для (23) имеем:

$$\exists d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}|}{|a_n(x - x_0)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - x_0| \stackrel{(27)}{=} \frac{|x - x_0|}{R}.$$

В силу того, что $x \in I$ и, значит, $|x - x_0| < R$, получаем, что $d < 1$ и СтР (23) будет сходящимся. Если $d > 1$, т.е. $|x - x_0| > R$, то (23) расходится. Таким образом, (27) будет радиусом сходимости для (23). \square

10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.

Теорема (формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР).

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad (28)$$

то для радиуса сходимости ряда (23) имеем:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (29)$$

Доказательство проведём по той же схеме, что и в предыдущей теореме.

Т.к. случай $x = x_0$ тривиален (в данной точке ряд всегда сходится), то рассмотрим случай $x \neq x_0$.

По признаку Коши сходимости ЧР для (23) получаем:

$$\exists k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{(29)}{=} \frac{|x - x_0|}{R}.$$

Если $k < 1$, т. е. $|x - x_0| < R$, то СтР (23) сходится.

Если $k > 1$, т. е. $|x - x_0| > R$, то СтР (23) расходится.

Таким образом, в силу определения, величина (29) будет радиусом сходимости для (23).

□

Замечания:

1. В силу связи между признаками Даламбера и Коши сходимости ЧР, в случае, когда предел (27) не существует (ни конечный, ни бесконечный), предел (29) может существовать, и в этом смысле формула Коши (29) предпочтительнее, чем (27).
2. Можно показать, что в случае, когда в (29) нет ни конечного, ни бесконечного предела, радиус сходимости для (23) всегда можно вычислить по **формуле Коши-Адамара**, использующей понятие верхнего предела последовательности:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}. \quad (30)$$

Под верхним пределом последовательности подразумевается верхняя грань (supremum) множества конечных пределов всех сходящихся подпоследовательностей рассматриваемой последовательности.

11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).

Теорема (о локальной равномерной сходимости СтР).

Если СтР (23) имеет ненулевой радиус сходимости, то этот ряд (23) сходится равномерно на любом отрезке из интервала сходимости данного ряда.

Доказательство.

Рассмотрим $\forall [a, b] \subset I =]x_0 - R; x_0 + R[$, где $R > 0$ - радиус сходимости СтР (23). Имеем:

$$x_0 - R < a < b < x_0 + R \Rightarrow -R < a - x_0 < b - x_0 < R \Rightarrow \begin{cases} |a - x_0| < R, \\ |b - x_0| < R. \end{cases} \quad (31)$$

Полагая $r = \max \{ |a - x_0|, |b - x_0| \}$, в силу (31) получаем:

$$0 \leq r < R. \quad (32)$$

Отсюда для $\forall x \in [a, b]$ получаем:

$$|x - x_0| \leq \max \{ |a - x_0|, |b - x_0| \} = r,$$

поэтому для $\forall n \in \mathbb{N}_0$ имеем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n| |x - x_0|^n \leq |a_n| r^n = c_n - \text{мажоранта.}$$

Применяя к ряду c_n обобщённый признак Коши сходимости ЧР, получаем:

$$\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \cdot \underbrace{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R}} \stackrel{(30)}{=} \frac{r}{R} \stackrel{(32)}{<} 1,$$

а значит, ряд $\sum c_n$ сходится.

Таким образом, мы получили равномерно сходящуюся числовую мажоранту, и поэтому, по мажорантному признаку Вейерштрасса для ФР, рассматриваемый СтР (23) будет равномерно сходиться на $\forall [a, b] \subset I$. \square

Замечания:

1. Из доказанной теоремы следует, что любой СтР сходится локально равномерно на интервале своей сходимости.
2. Применяя теорему Стокса-Зейделя для ФР и учитывая, что в (23) все слагаемые являются непрерывными функциями на I , в силу локальной равномерной сходимости (23) на I , внутри интервала сходимости сумма любого СтР (23) будет являться непрерывной функцией.

Следствие (о равенстве СтР).

Если для СтР (23) с непрерывной суммой $S_n(x)$ есть степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ с соответствующей суммой $T(x)$, причём $T(x) = S(x)$ в некоторой окрестности центра разложения x_0 , то тогда и сами СтР совпадают, т.е. $a_n = b_n$, для $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Пусть имеем, что

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots = T(x).$$

В силу непрерывности $S(x)$ и $T(x)$ в соответствующей окрестности точки x_0 при $x \rightarrow x_0$, получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} T(x) = b_0, \text{ откуда} \\ a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots &= b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, для $\forall x \neq x_0$ имеем:

$$a_1 + a_2(x - x_0) + \dots = b_1 + b_2(x - x_0) + \dots$$

Используя опять соответствующую окрестность точки x_0 , при $x \rightarrow x_0$, получим, что $a_1 = b_1$ и так далее (по ММИ). \square

12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.

Теорема (о дифференцировании СтР).

Сумма СтР (23) внутри его интервала сходимости является непрерывной дифференцируемой функцией, причём у продифференцированного СтР будет тот же радиус (а, значит, и интервал) сходимости, что и у исходного ряда (23).

Доказательство. По теореме о почленном дифференцировании ФР и замечанию к ней достаточно показать, что возможно почленное дифференцирование (23) на \forall отрезке $[a, b] \subset I =]x_0 - R; x_0 + R[$.

1. В (23) слагаемые $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями для $\forall x \in [a; b]$ т.к. $\exists u'_n(x) = na_n(x - x_0)^{n-1}$ непрерывная на $[a; b]$.
2. Так как \forall СтР (23) сходится поточечно внутри своего интервала сходимости, то $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow[\text{для } \forall [a; b] \subset I]{} S(x)$.

Осталось показать, что продифференцированный СтР

$$\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n \xrightarrow{[a; b]}.$$

Используя *формулу Коши-Адамара*, имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n+1} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \right)} = \left[\frac{\sqrt[n]{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}}} \right] = \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}}} = \left[\frac{\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R}} \right] = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R. \end{aligned}$$

Значит, у исходного и продифференцированного рядов один и тот же радиус, а, значит, и интервал, сходимости.

Тогда, в силу того, что \forall СтР сходится локально равномерно, получаем, что $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{[a; b]} S'(x)$.

Причём, в силу непрерывности слагаемых, $S(x)$ будет непрерывно дифференцируема на $\forall [a; b] \subset I$, а, значит, и для $\forall x \in I$. \square

Замечания:

1. Применяя последовательно дифференцирование к СтР (23), получим по ММИ, что сумма ряда (23) будет бесконечное число раз дифференцируемой функцией.
2. Можно показать, что дифференцирование СтР хоть и сохраняет интервал сходимости, но в общем случае *не улучшает* его множество сходимости в том смысле, что если, например, исходный ряд (23) находится на каком-то из концов интервала I ($x = x_0 \pm R$), то продифференцированный ряд уже может расходиться на этом конце.

Следствие.

Если на интервале $I =]x_0 - R; x_0 + R[$ бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, для $\forall x \in I$, то для неё СтР (23) будет являться соответствующим рядом Тейлора в окрестности точки x_0 , т. е. для $\forall a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Действительно, дифференцируя почленно n раз равенство

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

в силу доказанной теоремы получим:

$$\exists f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + (n+1)! \cdot a_{n+1}(x - x_0) + \dots$$

Отсюда при $x \rightarrow x_0$ имеем:

$$n! \cdot a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) \Leftrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

т.е. $\forall a_n$ - коэффициент в разложении в ряд Тейлора. \square

13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.

Теорема (о замене переменных в НИ).

Будем одновременно рассматривать как НИ-1, так и НИ-2.

Пусть $f(x)$ определена для $\forall x \in [a; b[$, где либо $b = +\infty$ (НИ-1), либо $f(b-0) = \infty$ (НИ-2).

Если функция $x(t) = \phi(t)$ - непрерывно дифференцируема для $\forall t \in [\alpha; \beta[$ и строго монотонна, то в случае, когда:

$\begin{cases} \phi(\alpha) = a, \\ \phi(\beta-0) = b. \end{cases}$, интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $b = +\infty$ (НИ-1) либо $f(b-0) = +\infty$ (НИ-2), сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt. \quad (33)$$

При этом справедлива формула замены переменных в НИ:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\begin{array}{l} x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t)dt, \\ x|_{a=\phi(\alpha)}^{b=\phi(\beta-0)} \end{array} \right] = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt, \quad (34)$$

причём в правой части (34) может стоять как НИ, так и интеграл Римана.

Доказательство. Следует из соответствующей теоремы о замене переменных в ОИ (интеграле Римана).

Для доказательства, выбирая для $\forall \gamma \in [\alpha; \beta[$, в силу строгой монотонности $\phi(t)$, получаем что $\phi(\gamma) \in [a; b[$. При этом для $\forall c \in [a; b[\exists ! \gamma \in [\alpha; \beta[$.

Тогда по теореме о замене переменных в ОИ имеем:

$$\int_a^c f(x)dx = \left[\begin{array}{l} x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t)dt, \\ x|_{a=\phi(\alpha)}^c \Rightarrow \exists ! \gamma \in [\alpha; \beta[, c = \phi(t) \Rightarrow t|_{\alpha}^{\beta} \end{array} \right] = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что $\gamma \rightarrow \beta-0 \Rightarrow c \rightarrow b-0$, получаем (34). □

Замечание.

Для НИ-2 вида $\int_a^{b-0} f(x)dx$ после замены переменных имеем:

$$t = \frac{1}{b-x} \Big|_{\frac{1}{b-x} > 0}^{+\infty}, \text{ а для } x|_a^{b-0},$$

отсюда получаем: $x = b - \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(b - \frac{1}{t})}{t^2} dt.$

Тем самым мы свели НИ-2 к соответствующему НИ-1. Дальнейшее исследование которого, например, на сходимость, можно проводить с помощью полученных ранее условий сходимости НИ-1.

Аналогично, как и теорема о замене переменных в НИ-2, обосновываются формулы двойной подстановки (аналог формулы Ньютона-Лейбница) и метод интегрирования по частям для НИ-2 и НИ-1.

14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.

Формула Ньютона-Лейбница для НИ.

Пусть для простоты для $f(x)$, определённой для $\forall x \in [a, b[$, где $b = +\infty$ или $f(b-0) = \infty$ существует дифференцируемая первообразная $F(x)$, т.е. $\exists F'(x) = f(x)$, для $\forall x \in [a, b[$. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\substack{c \rightarrow +\infty, b \rightarrow +\infty \\ (c \rightarrow b-0, b \rightarrow -0)}} \int_a^c f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b-0} [F(x)]_a^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow b-0} (F(c) - F(a)) = F(b-0) - F(a) = [F(x)]_a^{b-0}. \end{aligned}$$

При этом исходный интеграл сходится тогда и только тогда, когда значения $F(b-0)$, $F(+\infty)$ конечны.

На практике формулы двойной подстановки используются в том же виде, что и для ОИ: $\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx \right]_a^b$.

Интегрирование по частям в НИ.

Пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$ определены для $\forall x \in [a; b[$ и $f(b) = \infty$.

Если существует конечный предел $\lim_{\substack{x \rightarrow b-0 \\ (x \rightarrow +\infty)}} u(x)v(x) = u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}$.

В случае сходимости одного из использованных ниже интегралов, получаем:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

На практике удобнее использовать:

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Функцию $\phi(x)$, определённую на X будем называть *равномерным частным пределом* $f(x, y)$ при $y \rightarrow y_0$, если

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \text{для } \forall x \in X \text{ и для } \forall y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leq \delta \text{ следует } |f(x, y) - \phi(x)| \leq \varepsilon. \quad (35)$$

В этом случае будем писать

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x). \quad (36)$$

15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.

Теорема (*признак равномерной сходимости Ф2П*).

Если функция $f(x, y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$, являющимся компактом в \mathbb{R}^2 , и $y_0 \in [c, d]$, то имеем:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0, y \in [c, d]]{[a, b]} f(x, y_0). \quad (37)$$

Доказательство. Из теоремы Кантора для ФНП получаем, что рассматриваемая $f(x, y)$ будет равномерно непрерывна для $\forall x \in [a, b]$ и для $\forall y \in [c, d]$, т.е.:

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ такая, что для } \forall \tilde{x}, \bar{x} \in [a, b] \text{ и для } \forall \tilde{y}, \bar{y} \in Y \\ &\text{из } \begin{cases} 0 < |\bar{x} - \tilde{x}| \leq \delta, \\ 0 < |\bar{y} - \tilde{y}| \leq \delta. \end{cases} \Rightarrow |f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{Полагая здесь: } \begin{cases} \tilde{x} = \bar{x} = x \in [a, b], \\ \tilde{y} = y \in [c, d], \\ \bar{y} = y_0 \in [c, d]. \end{cases}, \text{ получаем:}$$

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такая, что для } \forall y \in [c, d] \text{ из } |y - y_0| \leq \delta(\varepsilon), \text{ для } \forall x \in [a, b] \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Т.к. здесь $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от $x \in [a, b]$, то получаем (36), где $\phi(x) = f(x, y_0)$, что соответствует (37). \square

16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.

Теорема (*критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П*).

Для того, чтобы $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall y_n \in Y, y_n \rightarrow y_0, y_n \neq y_0$, где y_0 - предельная точка для множества Y , выполнялось:

$$g_n(x) = f(x, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \phi(x) \quad (38)$$

Доказательство. (\Rightarrow) . Пусть выполняется (36), тогда для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такая, что для $\forall y \in Y$ из $0 < |y - y_0| \leq \delta$, для $\forall x \in X \Rightarrow |f(x, y) - \phi(x)| \leq \varepsilon$.

Рассматривая $\forall (y_n) \in Y$, в пределах точки y_0 по найденному ранее $\delta > 0 \exists \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall n \geq \nu \Rightarrow |y_n - y_0| \leq \delta$.

Окончательно получаем: для $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall n \geq \nu$, для $\forall x \in X \Rightarrow |y_n - y_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x, y_n) - \phi(x)| \leq \varepsilon$, т.е. имеем (38).

(\Leftarrow) . Пусть для $\forall (y_n) \in Y$ в предельной точке выполнено (38). Тогда в силу того, что из равномерной сходимости $g_n(x) = f(x, y_n)$ следует поточечная сходимость ФП $g_n(x)$, получаем, что $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \phi(x)$.

Поэтому в силу критерия Гейне существования предела Ф1П получаем, что:

$$f(x, y_0) = g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \phi(x) \Rightarrow f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x).$$

Предположим, что имеем поточечную сходимость, но равномерной сходимости нет, т.е. получаем:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x).$$

Тогда по *правилу де Моргана*, имеем:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ такое, что для } \forall \delta > 0 \exists y(\delta) \in Y, \exists x(\delta) \in X \text{ такое, что из } 0 < |y(\delta) - y_0| \leq \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x(\delta), y(\delta)) - \phi(x(\delta)) > \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (39)$$

Выбирая для простоты $\delta = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +0$, получаем, что $\left\{ \begin{array}{l} \exists x_n = x\left(\frac{1}{n}\right) \in X, \\ \exists y_n = y\left(\frac{1}{n}\right) \in Y. \end{array} \right.$ такие, что из

$$0 < |y_n - y_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0.$$

Используя условие $f(x_n, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x_n)$, для найденного $\varepsilon_0 > 0$ получаем:

$$\exists \delta_0 > 0 \text{ такая, что для } \forall y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y) - \phi(x_n)| \leq \varepsilon_0.$$

Подставляя $y = y_n$, получаем $0 < |y_n - y_0| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| \leq \varepsilon_0$.

Выбирая теперь $\nu = \frac{1}{\delta_0} \in \mathbb{R}$, для $\forall n \geq \nu \Rightarrow 0 < |y_n - y_0| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\nu} = \delta_0$. Отсюда в силу (39) при $\delta = \frac{1}{n} > 0$ получаем, что для $\forall n \geq \nu$ выполняется $|f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$. Противоречие. \square

Замечания:

1. Доказанная теорема позволяет из соответствующих свойств ФП получить аналогичные свойства для равномерно сходящихся Ф2П, в том числе сформулированный ранее супремальный критерий равномерной сходимости Ф2П и критерий Коши для Ф2П. Кроме того, в силу теоремы Дини для ФП имеем соответствующую теорему Дини для равномерной сходимости Ф2П.

Теорема (*Дини для равномерной сходимости Ф2П*).

Пусть для $\forall \text{ fix } y \in Y, f(x, y)$ непрерывна по $x \in [a, b] = X$, причём при монотонной сходимости $y \rightarrow y_0$ ($y \uparrow y_0$ либо $y \downarrow y_0$) соответственно получаем $f(x, y)$ монотонно сходится к $\phi(x)$ ($f(x, y) \uparrow \downarrow \phi(x)$). Тогда, если предельная функция $\phi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ непрерывна на $X = [a, b]$, то кроме поточечной сходимости будем иметь равномерную сходимость (36).

2. Аналогично получаем теорему Стокса-Зейделя для Ф2П.

Теорема (*Стокса-Зейделя*).

Пусть для $\forall \text{ fix } y \in Y, f(x, y)$ непрерывна по $x \in [a, b] = X$. Тогда, если $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \phi(x)$, где y_0 - предельная точка для Y , то предельная функция будет непрерывной на $[a, b]$.

Предположим, что $f(x, y)$ определена для $\forall y \in Y$ и для $\forall x \in [a, b]$, причём при $\forall \text{fix } y \in Y$ $f(x, y)$ интегрируема по $x \in [a, b]$. В этом случае:

$$\exists F(y) = \int_a^b f(x, y) dx, y \in Y. \quad (40)$$

(40) - *интеграл Римана (собственный)*, зависящий от параметра $y \in Y$.

В дальнейшем интеграл вида (40) будем кратко называть *СИЗОП*.

17 Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.

Теорема (о предельном переходе в СИЗОП).

Пусть определён СИЗОП (40). Тогда, в случае $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \phi(x)$, где, как и в определении СИЗОП (40), предполагая интегрируемость $f(x, y)$ по x , получаем:

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \quad (41)$$

Доказательство. В силу (36) имеем (35), откуда для $I = \int_a^b \phi(x) dx$, получаем:

$$|F(y) - I| \stackrel{(40)}{=} \left| \int_a^b (f(x, y) - \phi(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \phi(x)| dx \stackrel{(35)}{\leq} \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a).$$

Таким образом, получаем, что $\exists M = b - a = \text{const} > 0$ такое, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такая, что для $\forall y \in Y$ из $0 < |y - y_0| \leq \delta \Rightarrow |F(y) - I| \leq M\varepsilon$.

Откуда по M -лемме для сходимости Ф1П, получаем: $F(y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} I$, т.е. имеем (41). \square

Замечания:

1. При доказательстве теоремы неявно предполагалось, что $\phi(x) \in \mathbb{R}([a, b])$. Это условие выполняется в силу критерия Гейне существования равномерного частного предела и соответствующего условия интегрируемости Ф1П.
2. Используя теорему Дини для Ф2П, в силу доказанной теоремы, получаем, что если для $\forall \text{fix } y \in Y \Rightarrow f(x, y)$ непрерывна на $X = [a, b]$, то в случае, когда $f(x, y)$ монотонна по y на $Y = [c, d]$ получаем, что при выполнении условия поточечной сходимости:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \phi(x),$$

то имеем для $\forall y_0 \in [c, d] \Rightarrow (41)$.

3. Если $f(x, y)$ непрерывна для $\forall x \in [a, b]$ и для $\forall y \in [c, d]$, тогда справедливо (41), где $\phi(x) = f(x, y_0)$, для $\forall \text{fix } y_0 \in [c, d]$.

В частности, при указанных условиях СИЗОП (40) является непрерывной функцией на $Y \in [c, d]$, т.к.

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = F(y_0),$$

что равносильно непрерывности (40) в любой точке $y_0 \in [c, d]$, причём на концах отрезка рассматривается односторонняя непрерывность.

18 Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.

Теорема (о почленном дифференцировании СИЗОП).

Пусть $f(x, y)$ непрерывна на $[a, b] \times [c, d]$ и для неё:

$$\exists \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \text{непрерывна на } [a, b] \times [c, d].$$

Тогда СИЗОП (40) будет непрерывно дифференцируемой функцией на $[c, d]$, для которой производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$F'(y) = \left(\int_a^b f(x, y) dx \right)'_y = \int_a^b f'_y(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad (42)$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой об интегрируемости СИЗОП. Рассмотрим функцию

$$G(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad (43)$$

В силу полученных ранее результатов, СИЗОП (43) корректно определён и является непрерывно дифференцируемой функцией на $[c, d]$. Поэтому функция $G(y)$ для $\forall f \text{ и } y \in]c, d[$ будет интегрируемой на $[c, y]$. А значит, получаем:

$$\exists \int_c^y G(t) dt \stackrel{(43)}{=} \int_c^y \left(\int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \right) dt.$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, в силу теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, имеем:

$$\int_c^y G(t) dt = \int_a^b \left(\int_c^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt \right) dx = \int_a^b [f(x, t)]_{t=c}^{t=y} dx = \int_a^b (f(x, y) - f(x, c)) dx \stackrel{(40)}{=} F(y) - c_0,$$

где $c_0 = \int_a^b f(x, c) dx = \text{const.}$

Отсюда получаем, что $F(y) = c_0 + \int_c^y G(t) dt$.

Используя теорему Барроу о дифференцировании интегралов с переменным верхним пределом, получаем:

$$\exists F'(y) = (c_0)'_y + \left(\int_c^y G(t) dt \right)'_y = 0 + G(y) \stackrel{(43)}{=} \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx, \text{ что даёт (42).} \quad \square$$

1. Пусть $f(x, y)$ определена для $\forall x \in [a; +\infty[$ и $\forall y \in Y \subset \mathbb{R}$. Если $\forall \text{fix } y \in Y \Rightarrow$

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{y} . \quad (44)$$

Тогда будет корректно определена функция:

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, y \in Y. \quad (45)$$

2. Пусть НИЗОП (45) сходится на $Y \subset \mathbb{R}$. Если y_0 - предельная точка Y и выполняется

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a; +\infty[} \phi(x),$$

то будем говорить, что в данном НИЗОП *допустим предельный переход*, если

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx. \quad (46)$$

19 Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.

Теорема (*О предельном переходе в НИЗОП*).

Пусть для $\forall \text{fix } y \in Y \Rightarrow f(x, y)$ непрерывна для $\forall x \geq a$ и для предельной точки $y \in Y$ имеем

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{\forall [a; A]} \phi(x), \text{ где } \forall A > a. \quad (47)$$

Если $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{y}$, то тогда возможен предельный переход (46).

Доказательство. Воспользуемся теоремой о предельном переходе в функциональном ряду, для чего, беря произвольную последовательность $(A_n) \uparrow +\infty$, по критерию Гейне существования конечного предела функции для (45) получаем

$$\begin{aligned} \exists \lim_{y \rightarrow y_0} F(y) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \left[\int_a^{+\infty} = \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \left(\int_{A_0}^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \dots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx = [\text{По теореме о предельном переходе в СИЗОП}] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} \phi(x) dx = \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \left(\int_{A_0=a}^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \dots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} \right) = \\ &= \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \int_a^{A_n} \phi(x) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx, \end{aligned}$$

т.е. имеем (46). □

Следствие (*О непрерывности НИЗОП*).

Пусть $f(x, y)$ непрерывная для $\forall x \in [a; +\infty[$ и для $\forall y \in [c; d]$. Если интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{[c; d]}$$

то НИЗОП (45) - непрерывная функция на $[c; d]$, т.е.

$$\text{для } \forall y \in [c; d] \Rightarrow \exists \lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = F(y_0).$$

Доказательство. Из непрерывности $f(x, y)$ на $[a; +\infty[\times [c; d]$ следует, что

$$\text{для } \forall \text{ fix } A \geq a \Rightarrow f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a; A]} f(x, y) = \phi(x) (\text{для } \forall \text{ fix } y_0 \in [c; d])$$

Далее, используя доказательство теоремы в силу (46)

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \int_a^A \phi(x) dx \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx = F(y_0),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание.

Доказанная теорема и следствие справедливы и в отсутствии равномерной сходимости для рассматриваемого НИ-ЗОП, если он сходится локально равномерно на Y ,

$$\text{для } \forall [\alpha; \beta] \subset Y \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{[\alpha; \beta]}$$

Это связано с тем, что свойство непрерывности функции на множестве определено в любой точке из этого множества. Поэтому, выбирая $\forall \text{ fix } y_0 \in Y$ и заключая его в соответствующий отрезок $y_0 \in [\alpha; \beta] \subset Y$, в случае локальной равномерной сходимости получаем, например, что (45) будет непрерывна на $[\alpha; \beta]$, а значит, в точке y_0 . А исходя из этого, получаем непрерывность (45) на всём Y .

20 Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.

Теорема (Об интегрировании НИЗОП).

Пусть $f(x, y)$ непрерывная на декартовом произведении $[a; +\infty[\times [c; d]$. Если интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[c; d]}{\Rightarrow},$$

то тогда НИЗОП (45) является интегрируемой на $[c; d]$ функцией, для которой

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (48)$$

Доказательство. По той же схеме, что и в предыдущей теореме, рассмотрим произвольную последовательность $(A_n) \uparrow +\infty (A_0 = a)$ и используем критерий Гейне на основании теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, получаем:

$$\begin{aligned} \exists \int_c^d F(y) dy &= \int_c^d \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \right) dy = \left[\begin{array}{l} u_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \text{ непрерывна на } [c; d] \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[c; d]}{\Rightarrow} \end{array} \right] = \\ &= \int_c^d \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d u_n(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d \left(\int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \left(\int_{A_0=a}^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \dots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} \right) = \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \int_a^{A_n} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy \end{aligned}$$

□

Замечания:

1. Доказанная теорема справедлива не только для случаев $x \in [a; +\infty[$, $y \in [c; d]$, но и для случая $x \in]a; +\infty[$, $y \in [c; d]$, при условии, что дополнительно ко всем условиям указанной теоремы выполняется, что точка $x = a$ не является точкой разрыва второго рода для $g(x, y)$, т.е.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x, y) \in \mathbb{R}$$

В этом случае, доопределяя функцию $f(x, y)$ в точке $x = a$, т.е. рассматривая функцию

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x > a, y \in [c; d] \\ \lim_{x \rightarrow a+0} f(x, y), & y \in [c; d] \end{cases}$$

Получаем её непрерывность в точке $x = a$ справа. А далее, учитывая, что рассмотренные интегралы от $f(x, y)$ и $g(x, y)$ совпадают используя доказанную теорему.

2. Можно показать, что наряду с интегрируемым НИЗОП по конечному промежутку возможно его почленное интегрирование по бесконечному промежутку $[c; +\infty[$, если

(а) $f(x, y)$ непрерывна на $[a; +\infty[\times [c; +\infty[$

$$(б) \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[c; +\infty[}{\Rightarrow}, \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[a; +\infty[}{\Rightarrow}$$

3. $\exists \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ - существуют повторные интегралы.

21 Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.

Теорема (О почленном дифференцировании НИЗОП).

Пусть $f(x, y)$ - непрерывна на $[a; +\infty[\times [c; d]$, $\exists f'_y(x, y)$ - непрерывная на $[a; +\infty[\times [c; d]$. Тогда если

1. $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{[a; +\infty[}$
2. $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \xrightarrow{[a; +\infty[}$,

то тогда НИЗОП (45) - функция почленно дифференцируема на $[a; +\infty[$, и её производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$\exists F'(y) \stackrel{(45)}{=} \left(\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right)'_y = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

Доказательство. Для $\forall \text{ fix } y \in [c; d]$ корректно определяем СИЗОП

$$\Phi(y) = \int_c^y \left(\int_a^{+\infty} f'_y(x, t) dx \right) dt$$

В силу выполнения всех условий почленного интегрирования СИЗОП можем изменить порядок интегрирования

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_a^{+\infty} \left(\int_c^y f'_y(x, t) dt \right) dx = \int_a^{+\infty} [f(x, t)]_{t=c}^{t=y} dx = \int_a^{+\infty} \left(\int_c^y f(x, y) - f(x, c) \right) dx = \\ &= \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, c) dx = F(y) - F(c) \end{aligned}$$

Отсюда, используя теорему Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$\begin{aligned} \exists F'(y) &= (\Phi(y) + F(c))'_y = \left(\int_c^y \left(\int_a^{+\infty} f'_y(x, t) dt \right) dx \right)'_y = \\ &= \left[\int_0^{+\infty} f'_y(x, t) dx \right]_{t=y} = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \Leftrightarrow (21) \end{aligned}$$

□

Замечание.

Так же, как и в условии непрерывности НИЗОП в доказательстве теоремы о почленном дифференцировании вместо равномерной сходимости рассмотрим НИЗОП используя локальную равномерную сходимость соответствующего НИЗОП.

Интегралом Дирихле называется интеграл:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (49)$$

22 Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.

В данном случае $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \in \mathbb{R}$, поэтому $x = 0$ - точка устранимого разрыва, и интеграл (49) представляет собой НИ-1:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{сходится как интеграл Римана}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{сходится по признаку Дирихле для НИ-1}}.$$

В данном случае сходимость будет условной.

Для получения значения (49) рассмотрим при фикс $a > 0$ НИЗОП-1:

$$\begin{cases} F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(xy) dx, \\ y = [0; +\infty[. \end{cases} \quad (50)$$

В (50) подынтегральная функция $f(x, y) = e^{-ax} \cos(xy)$, во-первых, является непрерывной для $\forall x \geq 0$ и $\forall y \geq 0$, а, во-вторых, в силу неравенства $|f(x, y)| = e^{-ax} |\cos(xy)| \leq e^{-ax} = \varphi(x)$, где $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \left[-e^{-ax} \frac{1}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ - сходится, по мажорантному признаку Вейерштрасса получаем, что $F(y) \xrightarrow{[0; +\infty[}$.

В связи с этим, возможно почленное интегрирование этого НИЗОП, например, по $y \in [0; 1]$. Имеем:

$$\begin{aligned} \exists G(a) &= \int_0^1 F(y) dy \stackrel{(50)}{=} \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(xy) dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 e^{-ax} \cos(xy) dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[e^{-ax} \cdot \frac{\sin(xy)}{x} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

С другой стороны, интеграл вида (50) был вычислен нами ранее, и для него было получено значение

$$F(y) = [\text{Демидович, № 1828}] = \left[\frac{y \sin(xy) - a \cos xy}{a^2 + y^2} e^{-ax} \right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{a}{a^2 + y^2}, \quad \forall \text{ фикс } a > 0.$$

Таким образом:

$$G(a) = \int_0^1 F(y) dy = \int_0^1 \frac{a dy}{a^2 + y^2} = \left[\arctg \frac{y}{a} \right]_0^1 = \arctg \frac{1}{a}, \quad a > 0.$$

Ранее на основании признака Абеля было показано, что $G(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{a \in [0; +\infty[}$.

А так как в данном случае $g(x, a) = e^{-ax} \frac{\sin x}{x}$ - непрерывна для $\forall x \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ и выполняется $g(x, a) \xrightarrow{x \rightarrow +0} 1 \in \mathbb{R}$, то $G(a)$ будет непрерывна для НИЗОП-2 как функция от $a \geq 0$. В связи с этим:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} G(a) &= G(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \bigg|_{a=0}^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I, \\ I &= \lim_{a \rightarrow +0} G(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \left(\arctg \frac{1}{a} \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (49). \end{aligned}$$

Следствие (обобщение интеграла Дирихле).

Для $\forall b \in \mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} b = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & b > 0, \\ 0, & b = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & b < 0. \end{cases} \quad (51)$$

Доказательство. Действительно, если $b > 0$, то, делая замену $t = bx \Big|_0^{+\infty}$, получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\left(\frac{t}{b}\right)} \cdot \frac{dt}{b} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Если же $b < 0$, то аналогичным образом получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-bx)}{x} dx \stackrel{-b \geq 0}{=} -\frac{\pi}{2}.$$

Случай $b = 0$ проверяется непосредственной подстановкой. □

Интегралами Фруллани будем называть интегралы вида

$$\Phi(a; b) = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad (52)$$

где $a, b = \text{const} > 0$.

В зависимости от свойств подынтегральной функции в (52), рассмотрим три основные формулы для вычисления интеграла Фруллани. Для этого нам понадобится следующая

23 Лемма Фруллани.

Лемма Фруллани.

Если для функции $f(x)$, определённой для $\forall x > 0$, функция $\frac{f(x)}{x}$ интегрируема на любом конечном промежутке из $]0; +\infty[$, то тогда для $\forall a, b, \alpha, \beta = \text{const} > 0$ верно равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx \quad (53)$$

Доказательство.

Используя аддитивность интеграла Римана, после соответствующей замены имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(bx)}{x} dx = \begin{bmatrix} 1) & t = ax |_{\alpha a}^{\beta a} \\ 2) & t = bx |_{\alpha b}^{\beta b} \end{bmatrix} = \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{\frac{t}{a}} \cdot \frac{dt}{a} - \int_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{\frac{t}{b}} \cdot \frac{dt}{b} = \\ &= \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \left(\int_{\alpha a}^{\alpha b} + \int_{\alpha b}^{\beta a} \right) - \left(\int_{\alpha b}^{\beta a} + \int_{\beta a}^{\beta b} \right) = \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \\ &= [\text{Some comments here :)}] = \int_a^b \frac{f(\alpha x)}{\alpha x} \alpha dx - \int_a^b \frac{f(\beta x)}{\beta x} \beta dx = \int_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx. \end{aligned}$$

□

24 Первая теорема Фруллани.

Первая теорема Фруллани. Если $f(x)$ непрерывна для $\forall x \geq 0$ и $\exists f(+\infty) \in \mathbb{R}$, то

$$\Phi(a, b) = \left(f(0) - f(+\infty) \right) \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (54)$$

Доказательство. В силу леммы Фруллани для (52), имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(a, b) &= \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \stackrel{(53)}{=} \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(\alpha x)}{x} dx - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{По теореме о среднем для ОИ:} \\ 1) \exists c_1 \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b \frac{f(\alpha x)}{x} dx = f(\alpha c_1) \int_a^b \frac{dx}{x} = f(\alpha c_1) \ln \frac{b}{a} \\ 2) \exists c_2 \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx = f(\beta c_2) \int_a^b \frac{dx}{x} = f(\beta c_2) \ln \frac{b}{a} \end{array} \right] = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +\infty}} \left(f(\alpha c_1) - f(\beta c_2) \right) \ln \frac{b}{a} = \\ &= \left[\begin{array}{l} 1) \alpha a \leq \alpha c_1 \leq \alpha b \Rightarrow [\alpha \rightarrow +0, \alpha c_1 \rightarrow 0] \Rightarrow f(\alpha c_1) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +0} f(0) \\ 2) \beta a \leq \beta c_2 \leq \beta b \Rightarrow [\beta \rightarrow +\infty, \beta c_2 \rightarrow \infty] \Rightarrow f(\beta c_2) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} f(+\infty) \end{array} \right] = \left(f(0) - f(+\infty) \right) \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

□

25 Вторая теорема Фруллани.

Вторая теорема Фруллани.

Пусть $f(x)$ непрерывна для $\forall x \geq 0$ и $\forall A > 0 \Rightarrow \exists \int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \in \mathbb{R}$ - сходится.

Тогда:

$$\Phi(a, b) \stackrel{(52)}{=} f(0) \ln \frac{b}{a}. \quad (55)$$

Доказательство. Действуя как в предыдущей теореме, получим:

$$\begin{aligned} \Phi(a, b) &\stackrel{(52)}{=} \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \dots = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} 1) \exists c \in [\alpha a; \alpha b] \Rightarrow \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(\alpha t)}{t} dt = f(c) \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{dt}{t} = f(c) \ln \frac{b}{a} \\ 2) \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{A>0}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{A>0}^{\beta a} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{A>0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int_{A>0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt}_{\text{сходится}} = 0 \end{array} \right] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} f(c) \ln \frac{b}{a} = \left[\alpha a \leq c \leq \beta b \right]_{\alpha \rightarrow +0, c \rightarrow 0} = f(0) \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

□

26 Третья теорема Фруллани.

Третья теорема Фруллани.

Пусть $f(x)$ непрерывна для $\forall x > 0$ и $\exists f(+\infty) \in \mathbb{R}$.

Тогда, если для $\forall A > 0 \Rightarrow \int_0^A \frac{f(x)}{x} dx$ сходится, то

$$\Phi(a, b) \stackrel{(52)}{=} -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}. \quad (56)$$

Доказательство. Рассмотрим $f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, непрерывную для $\forall t > 0$.

Во-первых, $\exists f_0(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$, поэтому f_0 можно доопределить в точке $t = 0$, приняв $f_0(0) = f_0(+0) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$.

Во-вторых, для $\forall A_0 > 0 \Rightarrow \exists \int_{A_0}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{t} dt = \left[\begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ A = \frac{1}{A_0} > 0 \end{array} \right] = \dots = \int_0^A \frac{f(x)}{x} dx \in \mathbb{R}$ сходится.

Таким образом, в силу второй теоремы Фруллани, имеем:

$$\Phi(a_0, b_0) = \left[\begin{array}{c} a_0 = \frac{1}{a} > 0 \\ b_0 = \frac{1}{b} > 0 \end{array} \right] = f_0(0) \cdot \ln \frac{b_0}{a_0} = f(+\infty) \ln \left(\frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)} \right) = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

С другой стороны, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_0(a_0, b_0) &= \int_0^{+\infty} \frac{f_0(a_0 t) - f_0(b_0 t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(f_0\left(\frac{a}{t}\right) - f_0\left(\frac{b}{t}\right) \right) \cdot \frac{1}{t} dt = \left[t = \frac{1}{x} \right] = \dots = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \stackrel{(52)}{=} \Phi(a, b). \end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi(a, b) = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}$. □