

# Ответы к коллоквиуму по курсу

## “Математический анализ”

(1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность “Информатика”)

Обозначение поточечной сходимости:

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \quad (1)$$

Определение (1) на  $(\varepsilon - \delta)$ -языке:

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \text{ и для } \forall \text{ fix } x \in X \exists \nu = \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{ для } \forall n \geq \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Обозначение равномерной сходимости:

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \quad (3)$$

Определение (3) на  $(\varepsilon - \delta)$ -языке:

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{ для } \forall \text{ fix } x \in X \text{ и для } \forall n \geq \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (4)$$

**Краткий план:**

1. Необходимость: по (4), уйдя от  $x : 0 \leq r_n \leq \varepsilon$ .
2. Достаточность: написать (4), вписав  $r_n : |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leq \varepsilon$ .

## 1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

**Теорема** (Супремальный критерий равномерной сходимости ФП).

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (5)$$

*Доказательство.*  $(\Rightarrow)$  Если выполнена (3), то, учитывая, что в (4) используется  $\forall \text{ fix } x \in X$  и  $\forall n \geq \nu(\varepsilon)$ , получаем

$$r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{ для } \forall n \geq \nu \Rightarrow 0 \leq r_n \leq \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$(\Leftarrow)$  Пусть выполнена правая часть (5), тогда

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{ для } \forall n \geq \nu \text{ и для } \forall x \in X \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем (4), где  $\nu$  зависит от  $\forall \varepsilon > 0$  и не зависит от конкретного элемента множества  $X$ . □

**Замечания:**

1. Если известно, что для  $\forall n \in \mathbb{N}$  и для  $\forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ , где  $(a_n)$  - б.м.п, то тогда имеем (3). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.
2. Если

$$\exists x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то тогда равномерной сходимости нет, т.е.  $f_n(x) \not\xrightarrow{X} f(x)$ . Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

Обозначение равномерной сходимости:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X}. \quad (6)$$

Критерий Коши равномерной сходимости ФР:

$$(6) \Leftrightarrow \text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall x \in X \text{ и для } \forall n \geq \nu \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (7)$$

Критерий Коши сходимости ЧР:

$$\sum a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R} : \text{для } \forall n \geq \nu \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+m} - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon \quad (8)$$

Будем говорить, что ЧП  $(a_n)$  является *сходящейся числовой мажорантой* для ФР  $\sum u_n(x)$ , если:

$$1. \text{ ЧР } \sum a_n \text{ сходится,} \quad (9)$$

$$2. \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall x \in X \Rightarrow |u_n(x)| \leq a_n. \quad (10)$$

## 2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

**Теорема** (*мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР*).

Если ФР имеет на  $X$  сходящуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на  $X$ .

**Краткий план:**

1. По def *сходящейся числовой мажоранты*.

$$\text{Расписать (9) по (8): } \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon.$$

Подставить (10) в (7).

**Доказательство.** Доказательство с использованием критерия Коши сходимости ЧП (8) и критерия Коши равномерной сходимости ФР (7):

Т.к.  $\sum a_n$  сходится, то

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon. \quad (11)$$

Если для  $\forall n \in \mathbb{N}$  и для  $\forall x \in X \Rightarrow |u_n(x)| \leq a_n$ , то для частичных сумм ФР  $\sum u_n(x)$  имеем:

$$|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon, \text{ это для } \forall n \geq \nu = \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N},$$

что в силу (7) даёт (6).  $\square$

**Замечания:**

1. Принцип Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходящуюся числовую мажоранту  $(a_n)$  либо находят с помощью соответствующих оценок  $|u_n(x)|$  сверху, либо берут  $a_n = \sup_{x \in X} |u_n(x)|$ . В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости  $\sum a_n$  даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.
2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты - признак равномерной сходимости ФР, используют функцию мажоранты, а именно получаем:

$$\text{если } \exists v_n(x) \geq 0 : |u_n(x)| \leq v_n(x) \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall x \in X \text{ и } \sum v_n(x) \xrightarrow{X},$$

то тогда для ФР  $\sum u_n(x)$  имеем (6).

### Краткий план:

1. Оценка Абеля, взятая с 2-кой для надёжности.
2. def равномерной сходимости для  $(b_n(x))$ :  $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6 \cdot \varepsilon}$ , затем подставить это в def равномерной сходимости для  $\sum a_n(x)b_n(x)$ .

## 3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

**Теорема** (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП  $a_n(x)$  частичные суммы  $\sum a_n(x)$  ограничены в совокупности (равномерно на  $X$ ), т.е.

$$\text{для } \forall x \in X \text{ и для } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x)| \leq c, \quad (12)$$

где  $c = \text{const} > 0$ , не зависит ни от  $n$ , ни от  $x$ . Если  $\forall \text{fix } x \in X \Rightarrow (b_n(x))$  - числовая последовательность является монотонной, то в случае

$$(b_n(x)) \xrightarrow{X} 0, \quad (13)$$

имеем  $\sum a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{X}$ .

*Доказательство.* Монотонная последовательность  $(b_n(x))$  для  $\forall \text{fix } x \in X$  позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (12) оценку Абеля:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2c (|b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+m}(x)|). \quad (14)$$

Если выполняется (13), то тогда имеем:

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \text{ по } \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall x \in X \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leq \tilde{\varepsilon} \text{ и } |b_{n+m}(x)| \leq \tilde{\varepsilon},$$

поэтому для частичных сумм  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(x)$  в силу (14) для  $\forall n \geq \nu(\varepsilon)$  и для  $\forall m \in \mathbb{N}$  и для  $\forall x \in X$  имеем:

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2 \cdot c \cdot (\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}) = 6 \cdot c \cdot \tilde{\varepsilon} = \varepsilon. \text{ Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости}$$

ФР следует, что  $\sum a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{X}$ . □

**Следствие** (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если  $\forall \text{fix } x \in X$  последовательность  $(b_n(x))$  является монотонной, то в случае  $b_n(x) \xrightarrow{X} 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n(x) \xrightarrow{X}$ .

*Доказательство.* Следует из того, что в условии теоремы  $a_n = (-1)^n$  не зависит от  $x$ , причём

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq 1 = \text{const}, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Для обозначения поточечной сходимости  $\Phi P \sum u_n(x)$  на  $X$  будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X} . \quad (15)$$

#### Краткий план:

1. in progress

## 4 Признак Дини равномерной сходимости $\Phi P$ и следствие из него (теорема Дини для $\Phi P$ )

**Теорема** (*Признак Дини равномерно сходящихся  $\Phi P$* ).

Пусть

1. Члены  $\Phi P \sum u_n(x)$  непрерывны и сохраняют один и тот же знак на  $X = [a, b]$ , для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ .

Тогда, если  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  - непрерывная функция на  $[a, b]$ , т.е.  $S(x) \in C([a, b])$ , то  $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим на  $X = [a, b]$  остатки ряда  $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \dots = S(x) - S_n(x)$ . Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. для  $\forall \text{fix } n \in \mathbb{N} \Rightarrow R_n(x)$  - непрерывная функция на  $[a, b]$  как разность двух непрерывных функций.
2. для  $\forall \text{fix } x \in X \Rightarrow \Phi P (R_n(x))$  убывает в случае, когда  $\forall u_n(x) > 0$ , т.к.  
 $R_n(x) = u_n(x) + R_{n+1}(x) \geq R_{n+1}(x)$ , для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
3. Т.к. имеет место (15), то для  $\forall \text{fix } x \in X \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow{X} 0$ .

Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на  $X$   $\Phi P$  не является равномерной сходимостью на  $X$ .

Тогда по правилу де Моргана имеем:  $\exists \varepsilon_0 > 0 \mid$  для  $\forall \nu \in \mathbb{R} \exists n(\nu) \geq 0$  и  $\exists x(\nu) \in X \mid R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$ . Для простоты будем считать, что  $\exists x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$ . По принципу выбора из ограниченной последовательности  $x_n$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е.  $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} x_0$ , при этом в силу использования  $X = [a, b]$  - компакт, получаем, что  $x_0 \in X$ . Если зафиксируем  $m \in \mathbb{N}$ , то для  $\forall n_k \geq m \Rightarrow R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$ , по свойствам остаткам будем иметь, что  $R_m(x_{n_k}) \geq R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$ . В неравенстве  $R_m(x_{n_k}) > \varepsilon_0$ , переходя к пределу при  $n_k \rightarrow \infty$  для  $\forall m \in \mathbb{N}$ , получаем в силу непрерывности  $R_n(x) : R_m(x_0) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} R_m(x_{n_k}) \geq x_0$ , что противоречит последнему из свойств остатка, а именно  $R_m(x_0) \xrightarrow{X}$  при  $m \rightarrow \infty$ , поэтому из нашего предположения следует, что выполняется  $R_m(x_0) \rightarrow 0$ , противоречие, т.е. выполняется  $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$ .  $\square$

**Следствие** (*Теорема Дини для  $\Phi P$* ).

Если для  $\Phi P f_n(x), n \in \mathbb{N}$  на  $X = [a, b]$  выполняются свойства:

1. для  $\forall f_n(x) \in C([a, b])$  и для  $\forall \text{fix } x \in X \Rightarrow f_n(x)$  монотонна.
2.  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$ . Тогда, если  $f(n) \in C([a, b])$ , то  $f_n(x) \xrightarrow{X}$ .

*Доказательство.* следует из того, что члены рассматриваемой  $\Phi P f_n(x)$  можно рассматривать как частичные суммы соответствующего  $\Phi P$  с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Действительно,  $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x)$ , для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

А далее к соответствующему  $\Phi P$  применима теорема Дини равномерной сходимости  $\Phi P$ .  $\square$

Пусть  $x_0$  - предельная точка множества сходимости  $X \subset \mathbb{R}$  для ФР  $\sum u_n(x)$ . Будем говорить, что в  $\sum u_n(x)$  возможен почленный предельный переход  $x \rightarrow x_0$ , если

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x), \quad (17)$$

причём получившийся в левой части (17) ЧР является сходящимся.

В частности, если  $x_0 \in X$  и  $\forall u_n(x)$  непрерывен в некоторой окрестности точки  $x_0$ , и значит, для  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = u_n(x_0)$ , то в случае выполнения (17) для суммы  $S(x)$  ФР  $\sum u_n(x)$  при  $x \rightarrow x_0$  имеем:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x), \quad (18)$$

что соответствует непрерывности  $S(x)$  в точке  $x_0 \in X$ .

## 5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

**Теорема** (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР).

Если все члены  $u_n(x), n \in \mathbb{N}$ , ФР  $\sum u_n(x)$  непрерывны на  $X = [a, b]$ , то в случае равномерной сходимости этого ряда на  $[a, b]$  его сумма  $S(x)$  будет непрерывной функцией на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Требуется обосновать (18) для  $\forall x_0 \in [a, b]$ , причём в случае концевых значений  $x_0 = a, x_0 = b$  будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для  $\text{fix } x_0 \in [a, b]$  придадим произвольные приращения  $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$  и рассмотрим соответствующие приращения суммы ФР  $\sum u_n(x)$ :

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР  $\sum u_n(x)$  на  $X = [a, b] \Rightarrow$  для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid$  для  $\forall n \geq \nu$ , и для  $\forall x \in [a, b]$  для частичных сумм  $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$  ряда  $\sum u_n(x)$  имеем:  $|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$ .

Отсюда, в частности, для  $x = x_0 \in X$  и  $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leq \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (19)$$

Далее из непрерывности  $\forall u_n(x)$  в  $x_0 \in [a, b]$  следует непрерывность частичных сумм в  $x_0$  (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для  $\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \text{ для } \forall |\Delta x| \leq \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leq \varepsilon. \quad (20)$$

Таким образом, в силу (19), (20) имеем: для  $\forall \varepsilon > 0$ , выбирая  $n \geq \nu$  и рассматривая  $\forall |\Delta x| \leq \delta$ , имеем:

$$\begin{aligned} |\Delta S(x_0)| &= |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leq \\ &\leq |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому получаем: для  $\forall \varepsilon \exists \delta > 0 : \text{ для } \forall |\Delta x| \leq \delta \Rightarrow |\Delta S(x_0)| \leq M \cdot \varepsilon, M = \text{const} = 3 > 0$ .

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что  $\Delta S(x_0) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ , что на языке приращений равносильно (18). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость ЧР в правой части (18) будет сходящимся.  $\square$

### Замечания:

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.

2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества  $X \subset \mathbb{R}$  на локальную равномерную сходимость. Будем говорить, что ФР  $\sum u_n(x)$  сходится локально равномерно на

$X \subset \mathbb{R}$ , если для  $\forall [a, b] \subset X \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{[a, b]} \text{У}$   $\sum u_n(x)$  может быть локальная равномерная сходимость на  $X$ , но может не быть полной (???) равномерной сходимости на  $X$ . В случае локальной равномерной сходимости  $\sum u_n(x)$  на  $X$  берём  $\forall x_0 \in X$  и заключаем её в некоторый отрезок  $x_0 \in [a, b] \subset X$ . Т.к. есть равномерная сходимость для  $\sum u_n(x)$  на этом отрезке, то по доказанной теореме сумма  $S(x)$  в случае непрерывности  $\forall u_n(x)$  на  $X$  будет непрерывна на  $[a, b] \subset X$  и, в частности, непрерывна в  $x_0 \in X$ , а т.к. это можно сделать для  $\forall x_0 \in X$ , то тем самым получаем непрерывность  $S(x)$  на  $X \subset \mathbb{R}$  даже в случае, когда нет равномерной сходимости ФР на  $X$ .

## 6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

**Теорема** (о почленном интегрировании равномерно сходящихся ФР).

Если  $\forall u_n(x) \in C([a, b])$ ,

для  $n \in \mathbb{N}$ , то в случае, когда  $\sum u_n(x) \xrightarrow{[a, b]}$ , возможно почленное интегрирование этого ряда на  $[a, b]$ , т.е.

$$\exists \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx. \quad (21)$$

*Доказательство.* На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящихся ФР получим, что сумма ряда  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  будет непрерывна на  $[a, b]$ , а значит, интегрируема на  $[a, b]$ .

Используя частичные суммы для  $\sum u_n(x)$ , рассмотрим частичные суммы  $T_n = \int_a^b S_n(x)dx =$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx \text{ для ЧР правой части (21).}$$

Требуется доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b S(x)dx$ .

Из равномерной сходимости  $\sum u_n(x)$  на  $[a, b]$  получим, что для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \mid$  для  $\forall n \geq \nu$  и для  $\forall x \in [a, b] \Rightarrow$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon \quad (22)$$

Отсюда получаем, что  $\left| \int_a^b S(x)dx - I_n \right| = \left| \int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b (S(x) - S_n(x))dx \right| \leq$

$$\leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \leq \int_a^b \varepsilon dx = M\varepsilon, \text{ где } M = b - a = \text{const} \geq 0.$$

Таким образом, для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \mid$  для  $\forall n \geq \nu \Rightarrow \left| \int_a^b S(x)dx - I_n \right| \leq M\varepsilon$ , поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx,$$

что равносильно (21). □

## 7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

**Теорема** (о почленном дифференцировании ФР).

Пусть ФР  $\sum u_n(x)$  на  $X = [a, b]$  удовлетворяет условиям:

1.  $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$ ,
2.  $\exists u'_n(x)$ , непрерывная для  $\forall n \in \mathbb{N}, x \in X$ .

Тогда, если

$$\sum u'_n(x) \xrightarrow{X} \quad (23)$$

то рассматриваемый ФР  $\sum u_n(x)$  можно почленно дифференцировать на  $[a, b]$ , т.е.

$$\exists \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x), \text{ для } \forall x \in X. \quad (24)$$

*Доказательство.* В силу (23), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР  $\sum u'_n(t)$  можно почленно интегрировать на  $\forall [a, x] \subset [a, b]$ , т.е.

$$\exists \int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для  $\sum u_n(x)$ ) получаем, что

$$\exists S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) dt.$$

Используя далее *теорему Барроу* о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$$\exists S'(x) = (const)' + \left( \int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x),$$

что соответствует (24). □

Под *степенным рядом* будем подразумевать ФР вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (25)$$

где  $x_0 \in \mathbb{R}$  - центр для СтР, а  $\forall a_n \in \mathbb{R}$  - соответствующая числовая последовательность (*коэффициенты СтР*).

## 8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.

**Теорема Абеля** (*о сходимости степенных рядов*).

Если СтР (25) сходится при  $x = x_1 \neq x_0$ , то он будет сходиться абсолютно для любого  $x$ , где

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|. \quad (26)$$

*Доказательство.* Из сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$  следует в силу необходимого условия сходимости ЧР, что  $a_n(x_1 - x_0)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , а т.к.  $\forall$  ЧП является ограниченной, то  $\exists M = \text{const} > 0 : |a_n(x_1 - x_0)^n| \leq M$ , для  $\forall n \in \mathbb{N}$ , т. е.

$$|a_n| \leq \frac{M}{|x_1 - x_0|^n}. \quad (27)$$

Для  $\forall x$ , удовлетворяющего (26), в силу (27) получаем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n| |x - x_0|^n \stackrel{(27)}{\leq} \frac{M |x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} = M q^n, \text{ где } q = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \in [0; 1[.$$

Таким образом, мы получили сходящуюся мажоранту, ибо ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} M q^n = M \sum_{n=0}^{\infty} q^n$  сходится при  $q \in [0; 1[$ .

По признаку сравнения сходимости ЧР имеем, что для  $\forall x$ , удовлетворяющего (26), ряд (25) будет сходиться.  $\square$

**Замечание.**

Из полученных выше результатов следует, что если рассмотреть множество  $X_0$  всех  $x$ , удовлетворяющих (26), то имеем, что  $X_0 \subset X$ , т.е.  $X_0$  - некоторое подмножество множества  $X$  сходимости для (25).



## 9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.

**Теорема** (формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР).

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \quad (28)$$

то для радиуса сходимости ряда (25) имеем:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (29)$$

*Доказательство.*

Без ограничения общности будем считать, что в (25)  $\forall a_n \neq 0$ . Т.к. СтР (25) сходится при  $x = x_0$ , то рассмотрим случай  $x \neq x_0$ .

Если  $x \in I = ]x_0 - R; x_0 + R[$ , где  $R \geq 0$ , то по признаку Даламбера сходимости ЧР для (25) имеем:

$$\exists d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}|}{|a_n(x - x_0)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - x_0| \stackrel{(29)}{=} \frac{|x - x_0|}{R}.$$

В силу того, что  $x \in I$  и, значит,  $|x - x_0| < R$ , получаем, что  $d < 1$  и СтР (25) будет сходящимся. Если  $d > 1$ , т.е.  $|x - x_0| > R$ , то (25) расходится. Таким образом, (29) будет радиусом сходимости для (25).  $\square$

## 10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.

**Теорема** (формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР).

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \quad (30)$$

то для радиуса сходимости ряда (25) имеем:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (31)$$

*Доказательство* проведём по той же схеме, что и в предыдущей теореме.

Т.к. случай  $x = x_0$  тривиален (в данной точке ряд всегда сходится), то рассмотрим случай  $x \neq x_0$ .

По признаку Коши сходимости ЧР для (25) получаем:

$$\exists k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n(x - x_0)^n|} = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \stackrel{(31)}{=} \frac{|x - x_0|}{R}.$$

Если  $k < 1$ , т. е.  $|x - x_0| < R$ , то СтР (25) сходится.

Если  $k > 1$ , т. е.  $|x - x_0| > R$ , то СтР (25) расходится.

Таким образом, в силу определения, величина (31) будет радиусом сходимости для (25).

□

### Замечания:

1. В силу связи между признаками Даламбера и Коши сходимости ЧР, в случае, когда предел (29) не существует (ни конечный, ни бесконечный), предел (31) может существовать, и в этом смысле формула Коши (31) предпочтительнее, чем (29).
2. Можно показать, что в случае, когда в (31) нет ни конечного, ни бесконечного предела, радиус сходимости для (25) всегда можно вычислить по **формуле Коши-Адамара**, использующей понятие верхнего предела последовательности:

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (32)$$

Под верхним пределом последовательности подразумевается верхняя грань (supremum) множества конечных пределов всех сходящихся подпоследовательностей рассматриваемой последовательности.

# 11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).

**Теорема** (о локальной равномерной сходимости СтР).

Если СтР (25) имеет ненулевой радиус сходимости, то этот ряд (25) сходится равномерно на любом отрезке из интервала сходимости данного ряда.

*Доказательство.*

Рассмотрим  $\forall [a, b] \subset I = ]x_0 - R; x_0 + R[$ , где  $R > 0$  - радиус сходимости СтР (25). Имеем:

$$x_0 - R < a < b < x_0 + R \Rightarrow -R < a - x_0 < b - x_0 < R \Rightarrow \begin{cases} |a - x_0| < R, \\ |b - x_0| < R. \end{cases} \quad (33)$$

Полагая  $r = \max \{ |a - x_0|, |b - x_0| \}$ , в силу (33) получаем:

$$0 \leq r < R. \quad (34)$$

Отсюда для  $\forall x \in [a, b]$  получаем:

$$|x - x_0| \leq \max \{ |a - x_0|, |b - x_0| \} = r,$$

поэтому для  $\forall n \in \mathbb{N}_0$  имеем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n| |x - x_0|^n \leq |a_n| r^n = c_n - \text{мажоранта.}$$

Применяя к ряду  $c_n$  обобщённый признак Коши сходимости ЧР, получаем:

$$\exists \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| r^n} = r \cdot \underbrace{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R}} \stackrel{(32)}{=} \frac{r}{R} \stackrel{(34)}{<} 1,$$

а значит, ряд  $\sum c_n$  сходится.

Таким образом, мы получили равномерно сходящуюся числовую мажоранту, и поэтому, по мажорантному признаку Вейерштрасса для ФР, рассматриваемый СтР (25) будет равномерно сходиться на  $\forall [a, b] \subset I$ .  $\square$

**Замечания:**

1. Из доказанной теоремы следует, что любой СтР сходится локально равномерно на интервале своей сходимости.
2. Применяя теорему Стокса-Зейделя для ФР и учитывая, что в (25) все слагаемые являются непрерывными функциями на  $I$ , в силу локальной равномерной сходимости (25) на  $I$ , внутри интервала сходимости сумма любого СтР (25) будет являться непрерывной функцией.

**Следствие** (о равенстве СтР).

Если для СтР (25) с непрерывной суммой  $S_n(x)$  есть степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$  с соответствующей суммой  $T(x)$ , причём  $T(x) = S(x)$  в некоторой окрестности центра разложения  $x_0$ , то тогда и сами СтР совпадают, т.е.  $a_n = b_n$ , для  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

*Доказательство.* Пусть имеем, что

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots = b_0 + b_1(x - x_0) + \dots = T(x).$$

В силу непрерывности  $S(x)$  и  $T(x)$  в соответствующей окрестности точки  $x_0$  при  $x \rightarrow x_0$ , получаем:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} T(x) = b_0, \text{ откуда} \\ a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots &= b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, для  $\forall x \neq x_0$  имеем:

$$a_1 + a_2(x - x_0) + \dots = b_1 + b_2(x - x_0) + \dots$$

Используя опять соответствующую окрестность точки  $x_0$ , при  $x \rightarrow x_0$ , получим, что  $a_1 = b_1$  и так далее (по ММИ).  $\square$

## 12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.

**Теорема** (о дифференцировании СтР).

Сумма СтР (25) внутри его интервала сходимости является непрерывной дифференцируемой функцией, причём у продифференцированного СтР будет тот же радиус (а, значит, и интервал) сходимости, что и у исходного ряда (25).

*Доказательство.* По теореме о почленном дифференцировании ФР и замечанию к ней достаточно показать, что возможно почленное дифференцирование (25) на  $\forall$  отрезке  $[a, b] \subset I = ]x_0 - R; x_0 + R[$ .

1. В (25) слагаемые  $u_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  являются непрерывно дифференцируемыми функциями для  $\forall x \in [a; b]$  т.к.  $\exists u'_n(x) = na_n(x - x_0)^{n-1}$  непрерывная на  $[a; b]$ .
2. Так как  $\forall$  СтР (25) сходится поточечно внутри своего интервала сходимости, то  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow[\text{для } \forall [a; b] \subset I]{} S(x)$ .

Осталось показать, что продифференцированный СтР

$$\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x - x_0)^n \xrightarrow{[a; b]}.$$

Используя *формулу Коши-Адамара*, имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{R} &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{n+1} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} \right)} = \left[ \frac{\sqrt[n]{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,}{\sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \left( \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}}} \right] = \\ &= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}}} = \left[ \frac{\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R}} \right] = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R. \end{aligned}$$

Значит, у исходного и продифференцированного рядов один и тот же радиус, а, значит, и интервал, сходимости.

Тогда, в силу того, что  $\forall$  СтР сходится локально равномерно, получаем, что  $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) \xrightarrow{[a; b]} S'(x)$ .

Причём, в силу непрерывности слагаемых,  $S(x)$  будет непрерывно дифференцируема на  $\forall [a; b] \subset I$ , а, значит, и для  $\forall x \in I$ .  $\square$

**Замечания:**

1. Применяя последовательно дифференцирование к СтР (25), получим по ММИ, что сумма ряда (25) будет бесконечное число раз дифференцируемой функцией.
2. Можно показать, что дифференцирование СтР хоть и сохраняет интервал сходимости, но в общем случае *не улучшает* его множество сходимости в том смысле, что если, например, исходный ряд (25) находится на каком-то из концов интервала  $I$  ( $x = x_0 \pm R$ ), то продифференцированный ряд уже может расходиться на этом конце.

**Следствие.**

Если на интервале  $I = ]x_0 - R; x_0 + R[$  бесконечно дифференцируемая функция  $f(x)$  представляется в виде  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ , для  $\forall x \in I$ , то для неё СтР (25) будет являться соответствующим рядом Тейлора в окрестности

точки  $x_0$ , т. е. для  $\forall a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ .

*Доказательство.* Действительно, дифференцируя почленно  $n$  раз равенство

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

в силу доказанной теоремы получим:

$$\exists f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + (n+1)! \cdot a_{n+1}(x - x_0) + \dots$$

Отсюда при  $x \rightarrow x_0$  имеем:

$$n! \cdot a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) \Leftrightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

т.е.  $\forall a_n$  - коэффициент в разложении в ряд Тейлора.  $\square$

### 13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.

**Теорема** (о замене переменных в НИ).

Будем одновременно рассматривать как НИ-1, так и НИ-2.

Пусть  $f(x)$  определена для  $\forall x \in [a; b]$ , где либо  $b = +\infty$  (НИ-1), либо  $f(b-0) = \infty$  (НИ-2).

Если функция  $x(t) = \phi(t)$  - непрерывно дифференцируема для  $\forall t \in [\alpha; \beta]$  и строго монотонна, то в случае, когда:

$\begin{cases} \phi(\alpha) = a, \\ \phi(\beta-0) = b. \end{cases}$ , интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , где  $b = +\infty$  (НИ-1) либо  $f(b-0) = +\infty$  (НИ-2), сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt. \quad (35)$$

При этом справедлива формула замены переменных в НИ:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[ \begin{matrix} x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t)dt, \\ x|_{a=\phi(\alpha)}^{b=\phi(\beta-0)}. \end{matrix} \right] = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt, \quad (36)$$

причём в правой части (36) может стоять как некоторый НИ, так и обычный интеграл Римана.

*Доказательство.* Следует из соответствующей теоремы о замене переменных в ОИ (интеграле Римана).

Для доказательства, выбирая для  $\forall \gamma \in [\alpha; \beta]$ , в силу строгой монотонности  $\phi(t)$ , получаем что  $c = \phi(\gamma) \in [a; b]$ . При этом для  $\forall c \in [a; b]$   $\exists ! \gamma \in [\alpha; \beta]$ .

Тогда по теореме о замене переменных в ОИ имеем:

$$\int_a^c f(x)dx = \left[ \begin{matrix} x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi'(t)dt, \\ x|_{a=\phi(\alpha)}^c \Rightarrow \exists ! \gamma \in [\alpha; \beta] \mid c = \phi(\gamma) \Rightarrow t|_{\alpha}^{\gamma}. \end{matrix} \right] = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что  $\gamma \rightarrow \beta-0 \Rightarrow c \rightarrow b-0$ , получаем (36). □

**Замечание.**

Для НИ-2 вида  $\int_a^{b-0} f(x)dx$  после замены переменных имеем:

$$t = \frac{1}{b-x} \Big|_{\frac{1}{b-a} > 0}^{+\infty}, \text{ а для } x|_a^{b-0},$$

отсюда получаем:  $x = b - \frac{1}{t} \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \frac{f(b - \frac{1}{t})}{t^2} dt.$

Тем самым мы свели НИ-2 к соответствующему НИ-1, дальнейшее исследование которого, например, на сходимость, можно проводить с помощью полученных ранее условий сходимости НИ-1.

Аналогично, как и теорема о замене переменных в НИ-2, обосновываются формулы двойной подстановки (аналог формулы Ньютона-Лейбница) и метод интегрирования по частям для НИ-2 и НИ-1.

## 14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.

**Теорема** (Формула Ньютона-Лейбница для НИ.).

Пусть для  $f(x)$ , определённой для  $\forall x \in [a, b]$ , где  $b = +\infty$  или  $f(b-0) = \infty$  существует дифференцируемая первообразная  $F(x)$ , т.е.  $\exists F'(x) = f(x)$ , для  $\forall x \in [a, b]$ . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\substack{c \rightarrow +\infty \\ c \rightarrow b-0}} \int_a^c f(x)dx = \lim_{c \rightarrow b-0} [F(x)]_a^c = \\ &= \lim_{c \rightarrow b-0} (F(c) - F(a)) = F(b-0) - F(a) = [F(x)]_a^{b-0}. \end{aligned}$$

При этом используемый интеграл сходится тогда и только тогда, когда значения  $F(b-0)$ ,  $F(+\infty)$  конечны.

*Доказательство.* Для  $\forall x_0 \in [a, b]$  рассмотрим  $F_0(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$  - одну из первообразных для  $f(x)$ , т.к. по теореме

Барроу  $\exists F_0'(x) = f(x)$ . Рассмотрим  $\forall F(x)$  - первообразную  $f(x)$  на  $[a, b]$ . Тогда  $\exists c_0 = \text{const} \mid F(x) = F_0(x) + c_0$ , т.е.

$F(x) - c_0 = F_0(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$ . Полагая здесь  $x := a$ ,  $x := b-0$ , имеем:

$$\begin{cases} F(a) - c_0 = \int_{x_0}^a f(t)dt, \\ F(b-0) - c_0 = \int_{x_0}^{b-0} f(t)dt. \end{cases} \Rightarrow (F(b-0) - c_0) - (F(a) - c_0) = \int_{x_0}^{b-0} f(t)dt - \int_{x_0}^a f(t)dt = \int_{x_0}^{b-0} f(t)dt + \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_a^{b-0} f(t)dt = \\ = F(b-0) - F(a). \\ \int_a^{b-0} f(t)dt \text{ сходится} \Leftrightarrow F(b-0), \text{ т.к. } F(a) = \text{const} \in \mathbb{R}. \quad \square$$

**Замечание.**

На практике формулы двойной подстановки используются в том же виде, что и для ОИ:  $\int_a^b f(x)dx = \left[ \int f(x)dx \right]_a^b$ .

**Теорема** (Интегрирование по частям в НИ.).

Пусть  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $\forall x \in [a; b]$ , где  $b = +\infty$  или  $f(b-0) = \infty$ .

Если существует конечный предел  $\lim_{\substack{x \rightarrow b-0 \\ (x \rightarrow +\infty)}} u(x)v(x) = u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}$ , то тогда в случае сходимости одного из использованных ниже интегралов, получаем:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^{b-0} - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

*Доказательство.* По формулам двойной подстановки для НИ и интегрирования по частям в ОИ:

$$\begin{aligned} \int_a^{b-0} u(x)dv(x) &= \left[ \int u(x)v'(x)dx \right]_a^{b-0} = \left[ u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \right]_a^{b-0} = [u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}] = \\ &= \left( u(b-0)v(b-0) - \int v(b-0)u'(b-0)db \right) - \left( v(a)u(a) - \int v(a)u'(a)da \right) = \\ &= [u(x)v(x)]_a^{b-0} - \left[ \int v(x)u'(x)dx \right]_a^{b-0} = [v(x)u(x)]_a^{b-0} - \int_a^{b-0} v(x)du(x). \quad \square \end{aligned}$$

**Замечание.**

На практике удобнее использовать:

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

Функцию  $\phi(x)$ , определённую на  $X$  будем называть *равномерным частным пределом*  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow y_0$ , если

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \mid \text{для } \forall x \in X \text{ и для } \forall y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leq \delta \text{ следует } |f(x, y) - \phi(x)| \leq \varepsilon. \quad (37)$$

В этом случае будем писать

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x). \quad (38)$$

## 15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.

**Теорема** (*признак равномерной сходимости Ф2П*).

Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на прямоугольнике  $[a, b] \times [c, d]$ , являющимся компактом в  $\mathbb{R}^2$ , и  $y_0 \in [c, d]$ , то имеем:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0, y \in [c, d]]{[a, b]} f(x, y_0). \quad (39)$$

*Доказательство.* Из теоремы Кантора для ФНП получаем, что рассматриваемая  $f(x, y)$  будет равномерно непрерывна для  $\forall x \in [a, b]$  и для  $\forall y \in [c, d]$ , т.е.:

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ такая, что для } \forall \tilde{x}, \bar{x} \in [a, b] \text{ и для } \forall \tilde{y}, \bar{y} \in Y \\ &\text{из } \begin{cases} 0 < |\bar{x} - \tilde{x}| \leq \delta, \\ 0 < |\bar{y} - \tilde{y}| \leq \delta. \end{cases} \Rightarrow |f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{Полагая здесь: } \begin{cases} \tilde{x} = \bar{x} = x \in [a, b], \\ \tilde{y} = y \in [c, d], \\ \bar{y} = y_0 \in [c, d]. \end{cases}, \text{ получаем:}$$

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такая, что для } \forall y \in [c, d] \text{ из } |y - y_0| \leq \delta(\varepsilon), \text{ для } \forall x \in [a, b] \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Т.к. здесь  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  не зависит от  $x \in [a, b]$ , то получаем (38), где  $\phi(x) = f(x, y_0)$ , что соответствует (39).  $\square$

## 16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.

**Теорема** (*критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П*).

Для того, чтобы  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x)$  необходимо и достаточно, чтобы для  $\forall y_n \in Y, y_n \rightarrow y_0, y_n \neq y_0$ , где  $y_0$  - предельная точка для множества  $Y$ , выполнялось:

$$g_n(x) = f(x, y_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \phi(x) \quad (40)$$

*Доказательство.*  $(\Rightarrow)$ . Пусть выполняется (38), тогда для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такая, что для  $\forall y \in Y$  из  $0 < |y - y_0| \leq \delta$ , для  $\forall x \in X \Rightarrow |f(x, y) - \phi(x)| \leq \varepsilon$ .

Рассматривая  $\forall (y_n) \in Y$ , в пределах точки  $y_0$  по найденному ранее  $\delta > 0 \exists \nu \in \mathbb{R}$  такое, что для  $\forall n \geq \nu \Rightarrow |y_n - y_0| \leq \delta$ .

Окончательно получаем: для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu \in \mathbb{R}$  такое, что для  $\forall n \geq \nu$ , для  $\forall x \in X \Rightarrow |y_n - y_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x, y_n) - \phi(x)| \leq \varepsilon$ , т.е. имеем (40).

$(\Leftarrow)$ . Пусть для  $\forall (y_n) \in Y$  в предельной точке выполнено (40). Тогда в силу того, что из равномерной сходимости  $g_n(x) = f(x, y_n)$  следует поточечная сходимость ФП  $g_n(x)$ , получаем, что  $g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \phi(x)$ .

Поэтому в силу критерия Гейне существования предела Ф1П получаем, что:

$$f(x, y_0) = g_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} \phi(x) \Rightarrow f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x).$$

Предположим, что имеем поточечную сходимость, но равномерной сходимости нет, т.е. получаем:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x).$$

Тогда по *правилу де Моргана*, имеем:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon_0 > 0 \text{ такое, что для } \forall \delta > 0 \exists y(\delta) \in Y, \exists x(\delta) \in X \text{ такое, что из } 0 < |y(\delta) - y_0| \leq \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x(\delta), y(\delta)) - \phi(x(\delta)) > \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (41)$$

Выбирая для простоты  $\delta = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +0$ , получаем, что  $\left\{ \begin{array}{l} \exists x_n = x\left(\frac{1}{n}\right) \in X, \\ \exists y_n = y\left(\frac{1}{n}\right) \in Y. \end{array} \right.$  такие, что из

$$0 < |y_n - y_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0.$$

Используя условие  $f(x_n, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{X} \phi(x_n)$ , для найденного  $\varepsilon_0 > 0$  получаем:

$$\exists \delta_0 > 0 \text{ такая, что для } \forall y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y) - \phi(x_n)| \leq \varepsilon_0.$$

Подставляя  $y = y_n$ , получаем  $0 < |y_n - y_0| \leq \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| \leq \varepsilon_0$ .

Выбирая теперь  $\nu = \frac{1}{\delta_0} \in \mathbb{R}$ , для  $\forall n \geq \nu \Rightarrow 0 < |y_n - y_0| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\nu} = \delta_0$ . Отсюда в силу (41) при  $\delta = \frac{1}{n} > 0$  получаем, что для  $\forall n \geq \nu$  выполняется  $|f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$ . Противоречие.  $\square$

**Замечания:**

1. Доказанная теорема позволяет из соответствующих свойств ФП получить аналогичные свойства для равномерно сходящихся Ф2П, в том числе сформулированный ранее супремальный критерий равномерной сходимости Ф2П и критерий Коши для Ф2П. Кроме того, в силу теоремы Дини для ФП имеем соответствующую теорему Дини для равномерной сходимости Ф2П.

**Теорема** (*Дини для равномерной сходимости Ф2П*).

Пусть для  $\forall \text{ fix } y \in Y, f(x, y)$  непрерывна по  $x \in [a, b] = X$ , причём при монотонной сходимости  $y \rightarrow y_0$  ( $y \uparrow y_0$  либо  $y \downarrow y_0$ ) соответственно получаем  $f(x, y)$  монотонно сходится к  $\phi(x)$  ( $f(x, y) \uparrow \downarrow \phi(x)$ ). Тогда, если предельная функция  $\phi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$  непрерывна на  $X = [a, b]$ , то кроме поточечной сходимости будем иметь равномерную сходимость (38).

2. Аналогично получаем теорему Стокса-Зейделя для Ф2П.

**Теорема** (*Стокса-Зейделя*).

Пусть для  $\forall \text{ fix } y \in Y, f(x, y)$  непрерывна по  $x \in [a, b] = X$ . Тогда, если  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \phi(x)$ , где  $y_0$  - предельная точка для  $Y$ , то предельная функция будет непрерывной на  $[a, b]$ .



Предположим, что  $f(x, y)$  определена для  $\forall y \in Y$  и для  $\forall x \in [a, b]$ , причём при  $\forall \text{fix } y \in Y$   $f(x, y)$  интегрируема по  $x \in [a, b]$ . В этом случае:

$$\exists F(y) = \int_a^b f(x, y) dx, y \in Y. \quad (42)$$

(42) - интеграл Римана (собственный), зависящий от параметра  $y \in Y$ .

В дальнейшем интеграл вида (42) будем кратко называть СИЗОП.

## 17 Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.

**Теорема** (о предельном переходе в СИЗОП).

Пусть определён СИЗОП (42). Тогда, в случае  $f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \phi(x)$ , где, как и в определении СИЗОП (42), предполагая интегрируемость  $f(x, y)$  по  $x$ , получаем:

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \phi(x) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \quad (43)$$

*Доказательство.* В силу (38) имеем (37), откуда для  $I = \int_a^b \phi(x) dx$ , получаем:

$$|F(y) - I| \stackrel{(42)}{=} \left| \int_a^b (f(x, y) - \phi(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - \phi(x)| dx \stackrel{(37)}{\leq} \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b - a).$$

Таким образом, получаем, что  $\exists M = b - a = \text{const} > 0$  такое, что для  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такая, что для  $\forall y \in Y$  из  $0 < |y - y_0| \leq \delta \Rightarrow |F(y) - I| \leq M\varepsilon$ .

Откуда по  $M$ -лемме для сходимости Ф1П, получаем:  $F(y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{} I$ , т.е. имеем (43).  $\square$

### Замечания:

1. При доказательстве теоремы неявно предполагалось, что  $\phi(x) \in \mathbb{R}([a, b])$ . Это условие выполняется в силу критерия Гейне существования равномерного частного предела и соответствующего условия интегрируемости Ф1П.
2. Используя теорему Дини для Ф2П, в силу доказанной теоремы, получаем, что если для  $\forall \text{fix } y \in Y \Rightarrow f(x, y)$  непрерывна на  $X = [a, b]$ , то в случае, когда  $f(x, y)$  монотонна по  $y$  на  $Y = [c, d]$  получаем, что при выполнении условия поточечной сходимости:

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a, b]} \phi(x),$$

то имеем для  $\forall y_0 \in [c, d] \Rightarrow (43)$ .

3. Если  $f(x, y)$  непрерывна для  $\forall x \in [a, b]$  и для  $\forall y \in [c, d]$ , тогда справедливо (43), где  $\phi(x) = f(x, y_0)$ , для  $\forall \text{fix } y_0 \in [c, d]$ .

В частности, при указанных условиях СИЗОП (42) является непрерывной функцией на  $Y \in [c, d]$ , т.к.

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx = F(y_0),$$

что равносильно непрерывности (42) в любой точке  $y_0 \in [c, d]$ , причём на концах отрезка рассматривается односторонняя непрерывность.

## 18 Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.

**Теорема** (о почленном дифференцировании СИЗОП).

Пусть  $f(x, y)$  непрерывна на  $[a, b] \times [c, d]$  и для неё:

$$\exists \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - \text{непрерывна на } [a, b] \times [c, d].$$

Тогда СИЗОП (42) будет непрерывно дифференцируемой функцией на  $[c, d]$ , для которой производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$F'(y) = \left( \int_a^b f(x, y) dx \right)'_y = \int_a^b f'_y(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad (44)$$

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся теоремой об интегрируемости СИЗОП. Рассмотрим функцию

$$G(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx. \quad (45)$$

В силу полученных ранее результатов, СИЗОП (45) корректно определён и является непрерывно дифференцируемой функцией на  $[c, d]$ . Поэтому функция  $G(y)$  для  $\forall f \text{ и } y \in ]c, d[$  будет интегрируемой на  $[c, y]$ . А значит, получаем:

$$\exists \int_c^y G(t) dt \stackrel{(45)}{=} \int_c^y \left( \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx \right) dt.$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, в силу теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, имеем:

$$\int_c^y G(t) dt = \int_a^b \left( \int_c^y \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dt \right) dx = \int_a^b [f(x, t)]_{t=c}^{t=y} dx = \int_a^b (f(x, y) - f(x, c)) dx \stackrel{(42)}{=} F(y) - c_0,$$

где  $c_0 = \int_a^b f(x, c) dx = \text{const.}$

Отсюда получаем, что  $F(y) = c_0 + \int_c^y G(t) dt$ .

Используя теорему Барроу о дифференцировании интегралов с переменным верхним пределом, получаем:

$$\exists F'(y) = (c_0)'_y + \left( \int_c^y G(t) dt \right)'_y = 0 + G(y) \stackrel{(45)}{=} \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx, \text{ что даёт (44).} \quad \square$$

1. Пусть  $f(x, y)$  определена для  $\forall x \in [a; +\infty[$  и  $\forall y \in Y \subset \mathbb{R}$ . Если  $\forall \text{fix } y \in Y \Rightarrow$

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{y} . \quad (46)$$

Тогда будет корректно определена функция:

$$F(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, y \in Y. \quad (47)$$

2. Пусть НИЗОП (47) сходится на  $Y \subset \mathbb{R}$ . Если  $y_0$  - предельная точка  $Y$  и выполняется

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a; +\infty[} \phi(x),$$

то будем говорить, что в данном НИЗОП *допустим предельный переход*, если

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx. \quad (48)$$

## 19 Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.

**Теорема** (*О предельном переходе в НИЗОП*).

Пусть для  $\forall \text{fix } y \in Y \Rightarrow f(x, y)$  непрерывна для  $\forall x \geq a$  и для предельной точки  $y \in Y$  имеем

$$f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{\forall [a; A]} \phi(x), \text{ где } \forall A > a. \quad (49)$$

Если  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{y}$ , то тогда возможен предельный переход (48).

*Доказательство.* Воспользуемся теоремой о предельном переходе в функциональном ряду, для чего, беря произвольную последовательность  $(A_n) \uparrow +\infty$ , по критерию Гейне существования конечного предела функции для (47) получаем

$$\begin{aligned} \exists \lim_{y \rightarrow y_0} F(y) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \left[ \int_a^{+\infty} = \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \left( \int_{A_0}^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \dots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \right] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx = [\text{По теореме о предельном переходе в СИЗОП}] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} \phi(x) dx = \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \left( \int_{A_0=a}^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \dots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} \right) = \\ &= \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \int_a^{A_n} \phi(x) dx = \int_a^{+\infty} \phi(x) dx, \end{aligned}$$

т.е. имеем (48). □

**Следствие** (*О непрерывности НИЗОП*).

Пусть  $f(x, y)$  непрерывная для  $\forall x \in [a; +\infty[$  и для  $\forall y \in [c; d]$ . Если интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{[c; d]}$$

то НИЗОП (47) - непрерывная функция на  $[c; d]$ , т.е.

$$\text{для } \forall y \in [c; d] \Rightarrow \exists \lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = F(y_0).$$

*Доказательство.* Из непрерывности  $f(x, y)$  на  $[a; +\infty[ \times [c; d]$  следует, что

$$\text{для } \forall \text{ fix } A \geq a \Rightarrow f(x, y) \xrightarrow[y \rightarrow y_0]{[a; A]} f(x, y) = \phi(x) (\text{для } \forall \text{ fix } y_0 \in [c; d])$$

Далее, используя доказательство теоремы в силу (48)

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} F(y) = \int_a^A \phi(x) dx \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx = F(y_0),$$

что и требовалось доказать. □

**Замечание.**

Доказанная теорема и следствие справедливы и в отсутствии равномерной сходимости для рассматриваемого НИ-ЗОП, если он сходится локально равномерно на  $Y$ ,

$$\text{для } \forall [\alpha; \beta] \subset Y \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{[\alpha; \beta]}$$

Это связано с тем, что свойство непрерывности функции на множестве определено в любой точке из этого множества. Поэтому, выбирая  $\forall \text{ fix } y_0 \in Y$  и заключая его в соответствующий отрезок  $y_0 \in [\alpha; \beta] \subset Y$ , в случае локальной равномерной сходимости получаем, например, что (47) будет непрерывна на  $[\alpha; \beta]$ , а значит, в точке  $y_0$ . А исходя из этого, получаем непрерывность (47) на всём  $Y$ .

## 20 Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.

**Теорема** (Об интегрировании НИЗОП).

Пусть  $f(x, y)$  непрерывная на декартовом произведении  $[a; +\infty[ \times [c; d]$ . Если интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[c; d]}{\Rightarrow},$$

то тогда НИЗОП (47) является интегрируемой на  $[c; d]$  функцией, для которой

$$\int_c^d F(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (50)$$

*Доказательство.* По той же схеме, что и в предыдущей теореме, рассмотрим произвольную последовательность  $(A_n) \uparrow +\infty (A_0 = a)$  и используем критерий Гейне на основании теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, получаем:

$$\begin{aligned} \exists \int_c^d F(y) dy &= \int_c^d \left( \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \right) dy = \left[ \begin{array}{l} u_n(y) = \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \text{ непрерывна на } [c; d] \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[c; d]}{\Rightarrow} \end{array} \right] = \\ &= \int_c^d \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d u_n(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^d \left( \int_{A_{n-1}}^{A_n} f(x, y) dx \right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_{n-1}}^{A_n} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \\ &= \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \left( \int_{A_0=a}^{A_1} + \int_{A_1}^{A_2} + \dots + \int_{A_{n-1}}^{A_n} \right) = \lim_{A_n \rightarrow +\infty} \int_a^{A_n} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy \end{aligned}$$

□

### Замечания:

1. Доказанная теорема справедлива не только для случаев  $x \in [a; +\infty[, y \in [c; d]$ , но и для случая  $x \in ]a; +\infty[, y \in [c; d]$ , при условии, что дополнительно ко всем условиям указанной теоремы выполняется, что точка  $x = a$  не является точкой разрыва второго рода для  $g(x, y)$ , т.е.

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x, y) \in \mathbb{R}$$

В этом случае, доопределяя функцию  $f(x, y)$  в точке  $x = a$ , т.е. рассматривая функцию

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & x > a, y \in [c; d] \\ \lim_{x \rightarrow a+0} f(x, y), & y \in [c; d] \end{cases}$$

Получаем её непрерывность в точке  $x = a$  справа. А далее, учитывая, что рассмотренные интегралы от  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  совпадают используя доказанную теорему.

2. Можно показать, что наряду с интегрируемым НИЗОП по конечному промежутку возможно его почленное интегрирование по бесконечному промежутку  $[c; +\infty[$ , если

(а)  $f(x, y)$  непрерывна на  $[a; +\infty[ \times [c; +\infty[$

$$(б) \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[c; +\infty[}{\Rightarrow}, \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \stackrel{[a; +\infty[}{\Rightarrow}$$

3.  $\exists \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  - существуют повторные интегралы.

## 21 Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.

**Теорема** (О почленном дифференцировании НИЗОП).

Пусть  $f(x, y)$  - непрерывна на  $[a; +\infty[ \times [c; d]$ ,  $\exists f'_y(x, y)$  - непрерывная на  $[a; +\infty[ \times [c; d]$ . Тогда если

1.  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \xrightarrow{[a; +\infty[}$
2.  $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \xrightarrow{[a; +\infty[}$ ,

то тогда НИЗОП (47) - функция почленно дифференцируема на  $[a; +\infty[$ , и её производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$\exists F'(y) \stackrel{(47)}{=} \left( \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \right)'_y = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

*Доказательство.* Для  $\forall \text{ fix } y \in [c; d]$  корректно определяем СИЗОП

$$\Phi(y) = \int_c^y \left( \int_a^{+\infty} f'_y(x, t) dx \right) dt$$

В силу выполнения всех условий почленного интегрирования СИЗОП можем изменить порядок интегрирования

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \int_a^{+\infty} \left( \int_c^y f'_y(x, t) dt \right) dx = \int_a^{+\infty} [f(x, t)]_{t=c}^{t=y} dx = \int_a^{+\infty} \left( \int_c^y f(x, y) - f(x, c) \right) dx = \\ &= \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, c) dx = F(y) - F(c) \end{aligned}$$

Отсюда, используя теорему Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$\begin{aligned} \exists F'(y) &= (\Phi(y) + F(c))'_y = \left( \int_c^y \left( \int_a^{+\infty} f'_y(x, t) dt \right) dx \right)'_y = \\ &= \left[ \int_0^{+\infty} f'_y(x, t) dx \right]_{t=y} = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \Leftrightarrow (21) \end{aligned}$$

□

**Замечание.**

Так же, как и в условии непрерывности НИЗОП в доказательстве теоремы о почленном дифференцировании вместо равномерной сходимости рассмотрим НИЗОП используя локальную равномерную сходимость соответствующего НИЗОП.

Интегралом Дирихле называется интеграл:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (51)$$

## 22 Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.

В данном случае  $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \in \mathbb{R}$ , поэтому  $x = 0$  - точка устранимого разрыва, и интеграл (51) представляет собой НИ-1:

$$I = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{сходится как интеграл Римана}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx}_{\text{сходится по признаку Дирихле для НИ-1}}.$$

В данном случае сходимость будет условной.

Для получения значения (51) рассмотрим при фикс  $a > 0$  НИЗОП-1:

$$\begin{cases} F(y) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(xy) dx, \\ y = [0; +\infty[. \end{cases} \quad (52)$$

В (52) подынтегральная функция  $f(x, y) = e^{-ax} \cos(xy)$ , во-первых, является непрерывной для  $\forall x \geq 0$  и  $\forall y \geq 0$ , а, во-вторых, в силу неравенства  $|f(x, y)| = e^{-ax} |\cos(xy)| \leq e^{-ax} = \varphi(x)$ , где  $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = \left[ -e^{-ax} \frac{1}{a} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$  - сходится, по мажорантному признаку Вейерштрасса получаем, что  $F(y) \xrightarrow{[0; +\infty[}$ .

В связи с этим, возможно почленное интегрирование этого НИЗОП, например, по  $y \in [0; 1]$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \exists G(a) &= \int_0^1 F(y) dy \stackrel{(52)}{=} \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos(xy) dx = \int_0^{+\infty} dx \int_0^1 e^{-ax} \cos(xy) dy = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[ e^{-ax} \cdot \frac{\sin(xy)}{x} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cdot \frac{\sin x}{x} dx. \end{aligned}$$

С другой стороны, интеграл вида (52) был вычислен нами ранее, и для него было получено значение

$$F(y) = [\text{Демидович, № 1828}] = \left[ \frac{y \sin(xy) - a \cos xy}{a^2 + y^2} e^{-ax} \right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{a}{a^2 + y^2}, \quad \forall \text{ фикс } a > 0.$$

Таким образом:

$$G(a) = \int_0^1 F(y) dy = \int_0^1 \frac{a dy}{a^2 + y^2} = \left[ \text{arctg} \frac{y}{a} \right]_0^1 = \text{arctg} \frac{1}{a}, \quad a > 0.$$

Ранее на основании признака Абеля было показано, что  $G(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{a \in [0; +\infty[}$ .

А так как в данном случае  $g(x, a) = e^{-ax} \frac{\sin x}{x}$  - непрерывна для  $\forall x \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$  и выполняется  $g(x, a) \xrightarrow{x \rightarrow +0} 1 \in \mathbb{R}$ , то  $G(a)$  будет непрерывна для НИЗОП-2 как функция от  $a \geq 0$ . В связи с этим:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +0} G(a) &= G(0) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin x}{x} dx \bigg|_{a=0} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = I, \\ I &= \lim_{a \rightarrow +0} G(a) = \lim_{a \rightarrow +0} \left( \text{arctg} \frac{1}{a} \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (51). \end{aligned}$$

**Следствие (обобщение интеграла Дирихле).**

Для  $\forall b \in \mathbb{R}$  существует интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(bx)}{x} dx = \frac{\pi}{2} \text{sgn } b = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & b > 0, \\ 0, & b = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & b < 0. \end{cases} \quad (53)$$

*Доказательство.* Действительно, если  $b > 0$ , то, делая замену  $t = bx \Big|_0^{+\infty}$ , получим:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\left(\frac{t}{b}\right)} \cdot \frac{dt}{b} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Если же  $b < 0$ , то аналогичным образом получаем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-bx)}{x} dx \stackrel{-b \geq 0}{=} -\frac{\pi}{2}.$$

Случай  $b = 0$  проверяется непосредственной подстановкой. □



Интегралами Фруллани будем называть интегралы вида

$$\Phi(a; b) = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \quad (54)$$

где  $a, b = \text{const} > 0$ .

В зависимости от свойств подынтегральной функции в (54), рассмотрим три основные формулы для вычисления интеграла Фруллани. Для этого нам понадобится следующая

## 23 Лемма Фруллани.

**Лемма Фруллани.**

Если для функции  $f(x)$ , определённой для  $\forall x > 0$ , функция  $\frac{f(x)}{x}$  интегрируема на любом конечном промежутке из  $]0; +\infty[$ , то тогда для  $\forall a, b, \alpha, \beta = \text{const} > 0$  верно равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx \quad (55)$$

*Доказательство.*

Используя аддитивность интеграла Римана, после соответствующей замены имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(bx)}{x} dx = \begin{bmatrix} 1) & t = ax |_{\alpha a}^{\beta a} \\ 2) & t = bx |_{\alpha b}^{\beta b} \end{bmatrix} = \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{\frac{t}{a}} \cdot \frac{dt}{a} - \int_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{\frac{t}{b}} \cdot \frac{dt}{b} = \\ &= \int_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \left( \int_{\alpha a}^{\alpha b} + \int_{\alpha b}^{\beta a} \right) - \left( \int_{\alpha b}^{\beta a} + \int_{\beta a}^{\beta b} \right) = \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \\ &= [\text{Some comments here :)}] = \int_a^b \frac{f(\alpha x)}{\alpha x} \alpha dx - \int_a^b \frac{f(\beta x)}{\beta x} \beta dx = \int_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx. \end{aligned}$$

□

## 24 Первая теорема Фруллани.

**Первая теорема Фруллани.** Если  $f(x)$  непрерывна для  $\forall x \geq 0$  и  $\exists f(\infty) \in \mathbb{R}$ , то

$$\Phi(a, b) = \left( f(0) - f(+\infty) \right) \ln \left( \frac{b}{a} \right). \quad (56)$$

*Доказательство.* В силу леммы Фруллани для (54), имеем:

$$\begin{aligned} \Phi(a, b) &= \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \stackrel{(55)}{=} \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_a^b \frac{f(\alpha x)}{x} dx - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx = \\ &= \left[ \begin{array}{l} \text{По теореме о среднем для ОИ:} \\ 1) \exists c_1 \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b \frac{f(\alpha x)}{x} dx = f(\alpha c_1) \int_a^b \frac{dx}{x} = f(\alpha c_1) \ln \frac{b}{a} \\ 2) \exists c_2 \in [a; b] \Rightarrow \int_a^b \frac{f(\beta x)}{x} dx = f(\beta c_2) \int_a^b \frac{dx}{x} = f(\beta c_2) \ln \frac{b}{a} \end{array} \right] = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +\infty}} \left( f(\alpha c_1) - f(\beta c_2) \right) \ln \frac{b}{a} = \\ &= \left[ \begin{array}{l} 1) \alpha a \leq \alpha c_1 \leq \alpha b \Rightarrow [\alpha \rightarrow +0, \alpha c_1 \rightarrow 0] \Rightarrow f(\alpha c_1) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +0} f(0) \\ 2) \beta a \leq \beta c_2 \leq \beta b \Rightarrow [\beta \rightarrow +\infty, \beta c_2 \rightarrow \infty] \Rightarrow f(\beta c_2) \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} f(+\infty) \end{array} \right] = \left( f(0) - f(+\infty) \right) \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

□

## 25 Вторая теорема Фруллани.

### Вторая теорема Фруллани.

Пусть  $f(x)$  непрерывна для  $\forall x \geq 0$  и  $\forall A > 0 \Rightarrow \exists \int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx \in \mathbb{R}$  - сходится.

Тогда:

$$\Phi(a, b) \stackrel{(54)}{=} f(0) \ln \frac{b}{a}. \quad (57)$$

*Доказательство.* Действуя как в предыдущей теореме, получим:

$$\begin{aligned} \Phi(a, b) &\stackrel{(54)}{=} \lim_{\substack{\alpha \rightarrow +0 \\ \beta \rightarrow +\infty}} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \dots = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \\ &= \left[ \begin{array}{l} 1) \exists c \in [\alpha a; \alpha b] \Rightarrow \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(\alpha t)}{t} dt = f(c) \int_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{dt}{t} = f(c) \ln \frac{b}{a} \\ 2) \int_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \int_{A>0}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{A>0}^{\beta a} \frac{f(t)}{t} dt \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_{A>0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int_{A>0}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt}_{\text{сходится}} = 0 \end{array} \right] = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} f(c) \ln \frac{b}{a} = \left[ \alpha a \leq c \leq \beta b \right]_{\alpha \rightarrow +0, c \rightarrow 0} = f(0) \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

□

## 26 Третья теорема Фруллани.

### Третья теорема Фруллани.

Пусть  $f(x)$  непрерывна для  $\forall x > 0$  и  $\exists f(+\infty) \in \mathbb{R}$ .

Тогда, если для  $\forall A > 0 \Rightarrow \int_0^A \frac{f(x)}{x} dx$  сходится, то

$$\Phi(a, b) \stackrel{(54)}{=} -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}. \quad (58)$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ , непрерывную для  $\forall t > 0$ .

Во-первых,  $\exists f_0(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$ , поэтому  $f_0$  можно доопределить в точке  $t = 0$ , приняв  $f_0(0) = f_0(+0) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$ .

Во-вторых, для  $\forall A_0 > 0 \Rightarrow \exists \int_{A_0}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{t} dt = \left[ \begin{array}{c} t = \frac{1}{x} \\ A = \frac{1}{A_0} > 0 \end{array} \right] = \dots = \int_0^A \frac{f(x)}{x} dx \in \mathbb{R}$  сходится.

Таким образом, в силу второй теоремы Фруллани, имеем:

$$\Phi(a_0, b_0) = \left[ \begin{array}{c} a_0 = \frac{1}{a} > 0 \\ b_0 = \frac{1}{b} > 0 \end{array} \right] = f_0(0) \cdot \ln \frac{b_0}{a_0} = f(+\infty) \ln \left( \frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)} \right) = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

С другой стороны, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_0(a_0, b_0) &= \int_0^{+\infty} \frac{f_0(a_0 t) - f_0(b_0 t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left( f_0\left(\frac{a}{t}\right) - f_0\left(\frac{b}{t}\right) \right) \cdot \frac{1}{t} dt = \left[ t = \frac{1}{x} \right] = \dots = \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \stackrel{(54)}{=} \Phi(a, b). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\Phi(a, b) = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}$ . □