Ответы к коллоквиуму по курсу "Математический анализ"
(1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность "Информатика")

Обозначение поточечной сходимости ФП:

$$f_n(x) \xrightarrow{X} f(x) \text{ или } f_n(x) \xrightarrow{X} . \tag{1}$$

Определение (1) на $(\varepsilon - \delta)$-языке:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ и для } \forall\, fix\ x \in X\ \exists\, \nu = \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

Обозначение равномерной сходимости ФП:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \text{ или } f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} . \tag{3}$$

Определение (3) на $(\varepsilon - \delta)$-языке:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, fix\ x \in X \text{ и для } \forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Краткий план:

1. Формулировка: $+$.
2. Доказательство:
   $\Rightarrow$: $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow r_n = \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant r_n \leqslant \varepsilon,$ т.е. $r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$
   $\Leftarrow$: написать (4), вписав r_n т.е. $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leqslant \varepsilon.$
3. Замечания: достаточные условия равномерной (неравномерной) сходимости ФП.
   $|f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, где (a_n) - б.м.п
   $\exists\, x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

Теорема (*Супремальный критерий равномерной сходимости ФП*).

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{5}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Если выполнена (3), то, учитывая, что в (4) используется $\forall\, fix\ x \in X$ и $\forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon)$, получаем

$$r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ т.е.}$$
$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow 0 \leqslant r_n \leqslant \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

$\Leftarrow$ Пусть выполнена правая часть (5), тогда

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \text{ и для } \forall\, x \in X \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, имеем (4), где ν зависит от $\forall\, \varepsilon > 0$ и не зависит от конкретного элемента множества X. □

Замечания:

1. Если известно, что для $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\ x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, где (a_n) - б.м.п, то тогда имеем (3). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.
2. Если
   $$\exists\, x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
   то тогда равномерной сходимости нет, т.е. $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$. Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

Определение ФП частичных сумм ФР:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x),$$

Обозначение поточечной сходимости ФР:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x) \text{ или } \sum u_n(x) \xrightarrow{X} . \tag{6}$$

Из необходимого условия сходимости ЧР, имеем:

$$u_n(x) \xrightarrow{X} 0 \tag{7}$$

Обозначение равномерной сходимости ФР:

$$\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x) \text{ или } \sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} . \tag{8}$$

Критерий Коши равномерной сходимости ФР:

$$(8) \Leftrightarrow \text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, n \geqslant \nu \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| \leqslant \varepsilon. \tag{9}$$

Критерий Коши сходимости ЧР:

$$\sum a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{R} : \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \ \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow |S_{n+m} - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon. \tag{10}$$

ЧП (a_n) является *сходящейся числовой мажорантой* для ФР $\sum u_n(x)$, если:

$$1.\ \text{ЧР} \sum a_n \text{ сходится,} \tag{11}$$

$$2.\ \text{для } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \Rightarrow |u_n(x)| \leqslant a_n. \tag{12}$$

2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

Теорема (*мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР*).

Если ФР имеет на X сходяющуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на X.

Краткий план:

1. Формулировка: из названия (мажорантный признак РСФР).
2. Доказательство (расписать оба пункта определения сходящейся числовой мажоранты):

   1: $\sum a_n$ сходится: $\Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon.$

   2: $|u_n(x)| \leqslant a_n \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| \leqslant \varepsilon.$

3. Замечания: достаточное условие + функция мажоранты.

   оценить $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \sup\limits_{x \in X} |u_n(x)|$.

   если $\exists\, v_n(x) \geqslant 0\ :\ |u_n(x)| \leqslant v_n(x)$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$ и $\sum v_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Доказательство с использованием критерия Коши сходимости ЧП (10) и критерия Коши равномерной сходимости ФР (9):

Т.к. $\sum a_n$ сходится, то

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon. \tag{13}$$

Если для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X \Rightarrow |u_n(x)| \leqslant a_n$, то для частичных сумм ФР $\sum u_n(x)$ имеем:
$|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon$, это для $\forall\, n \geqslant \nu = \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, что в силу (9) даёт (8). □

Замечания:

1. Признак Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходящуюся числовую мажоранту (a_n) либо находят с помощью соответствующих оценок $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \sup\limits_{x \in X} |u_n(x)|$. В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости $\sum a_n$ даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.

2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты - признак равомерной сходимости ФР, используют функцию мажоранты, а именно получаем:

$$\text{если } \exists\, v_n(x) \geqslant 0 \ : \ |u_n(x)| \leqslant v_n(x) \text{ для } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \text{ и } \sum v_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows},$$

то тогда для ФР $\sum u_n(x)$ имеем (8).

Краткий план:

1. Формулировка: из названия (как и Дирихле для рядов).
2. Доказательство:

   оценка Абеля, взятая с 2-кой для надёжности.

   оценить $|b_{n+1}|$ и $|b_{n+m}|$ по $\widetilde{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{6 \cdot c}$

   def равномерной сходимости для $\sum a_n(x)b_n(x)$.

3. Замечания: как и для рядов ($\sum(-1)^n b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$, Лейбница $\approx$ единица).

3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

Теорема (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП $a_n(x)$ частичные суммы $\sum a_n(x)$ ограничены в совокупности (равномерно на X), т.е.

$$\text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x)| \leqslant c, \tag{14}$$

где $c = const > 0$, *не зависит ни от n, ни от x*. Если $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow (b_n(x))$ - числовая последовательность является монотонной, то в случае

$$b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{15}$$

имеем $\sum a_n(x)b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Монотонная последовательность $(b_n(x))$ для $\forall\, fix\ x \in X$ позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (14) оценку Абеля:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x) \right| \leqslant 2c\,(|b_{n+1}(x)| + 2\,|b_{n+m}(x)|)\,. \tag{16}$$

Если выполняется (15), то тогда имеем:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ по } \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon} \text{ и } |b_{n+m}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon},$$

поэтому для частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x)$ в силу (16) для $\forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$ имеем: $|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k(m)b_k(x)\right| \leqslant 2 \cdot c \cdot (\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}) = 6 \cdot c \cdot \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости ФР следует, что $\sum a_n(x)b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. □

Следствие (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если $\forall\, fix\ x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ является монотонной, то в случае $b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \sum(-1)^n b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Следует из того, что в условии теоремы $a_n = (-1)^n$ не зависит от x, причём $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant 1 = const$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Для обозначения поточечной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X} . \tag{17}$$

Краткий план:

1. Формулировка: *оДини* - один знак, Ди*ни* - непрерывны, Ди*ни* - непрерывны.
2. Доказательство:

   3 свойства остатка ряда $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$: Fun UFO (Fun UFO — функция непрерывна, Fun UFO — функциональная последовательность убывает, Fun UFO — функция к 0).

   дм у пво (де Морган, упрощение, принцип выбора, x_0)

   противоречие с последним свойством остатка.

   $R_m(x_{nk}) \geqslant R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0 \Rightarrow$ [переходя к пределу] $\Rightarrow R_m(x_0) = \lim\limits_{n_k\to\infty} R_m(x_{nk}) \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит последнему из свойств остатка.

3. Теорема: то же самое, только вместо сохранения одного знака члены ФП будут монотонны.

   по доказанному признаку, задав ФР как $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$.

4 Признак Дини равномерной сходимости ФР и следствие из него (теорема Дини для ФП)

Теорема (*Признак Дини равномерной сходимости ФР*).
Пусть

1. Члены ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны и сохраняют один и тот же знак на $X = [a, b]$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$.

Тогда, если $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$, т.е. $S(x) \in C([a, b])$, то $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Рассмотрим на $X = [a, b]$ остатки ряда $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \ldots + \ldots = S(x) - S_n(x)$. Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. для $\forall\, fix\; n \in \mathbb{N} \Rightarrow R_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ как разность двух непрерывных функций.
2. для $\forall\, fix\; x \in X \Rightarrow$ ФП $(R_n(x))$ убывает в случае, когда $\forall\, u_n(x) > 0$, т.к. $R_n(x) = u_n(x) + R_{n+1}(x) \geqslant R_{n+1}(x)$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. Т.к. имеет место (17), то для $\forall\, fix\; x \in X \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow{X} 0$.

Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на X ФР не является равномерной сходимостью на X.

Тогда по правилу де Моргана имеем: $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \mid$ для $\forall\, \nu \in \mathbb{R}\; \exists\, n(\nu) \geqslant 0$ и $\exists\, x(\nu) \in X \mid R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$. Для простоты будем считать, что $\exists\, x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$. По принципу выбора из ограниченной последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. $x_{nk} \underset{n_k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, при этом в силу использования $X = [a, b]$ - компакт, получаем, что $x_0 \in X$. Если зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, то для $\forall\, n_k \geqslant m \Rightarrow R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$, по свойствам остаткам будем иметь, что $R_m(x_{nk}) \geqslant R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$. В неравенстве $R_m(x_{nk}) > \varepsilon_0$, переходя к пределу при $n_k \to \infty$ для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, получаем в силу непрерывности $R_n(x)$: $R_m(x_0) = \lim\limits_{n_k\to\infty} R_m(x_{nk}) \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит последнему из свойств остатка, а именно $R_m(x_0) \xrightarrow{X} 0$ при $m \to \infty$, поэтому из нашего предположения следует, что выполняется $R_m(x_0) \not\to 0$, противоречие, т.е. выполняется $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. □

Следствие (*Теорема Дини для ФП*).
Если для ФП $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ на $X = [a, b]$ выполняются свойства:

1. для $\forall\, f_n(x) \in C([a, b])$ и для $\forall\, fix\; x \in X \Rightarrow f_n(x)$ монотонна.
2. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда, если $f(x) \in C([a, b])$, то $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. следует из того, что члены рассматриваемой ФП $f_n(x)$ можно рассматривать как частичные суммы соответствующего ФР с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Действительно, $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x)$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

А далее к соответствующему ФР применима теорема Дини равномерной сходимости ФР. □

Пусть x_0 - предельная точка множества сходимости $X \subset \mathbb{R}$ для ФР $\sum u_n(x)$. Будем говорить, что в $\sum u_n(x)$ *возможен почленный предельный переход* $x \to x_0$, если

$$\exists \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x), \tag{19}$$

причём получившийся в левой части (19) ЧР является сходящимся.

В частности, если $x_0 \in X$ и $\forall\, u_n(x)$ непрерывен в некоторой окрестности точки x_0, и значит, для $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = u_n(x_0)$, то в случае выполнения (19) для суммы $S(x)$ ФР $\sum u_n(x)$ при $x \to x_0$ имеем:

$$\exists \lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x_0), \tag{20}$$

что соответствует непрерывности $S(x)$ в точке $x_0 \in X$.

5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

Краткий план:

1. Формулировка: по названию + каждый член ряда — непрерывная функция (Зейдель $\approx 3 \cdot \varepsilon$).
2. Доказательство:

   Пишем, что нужно обосновать для $\forall\, x_0 \in X$, при этом нужно использовать односторонние пределы для концевых значений.

   Рассматриваем приращение суммы $\Delta S(x_0)$.

   Рассматриваем три разности частичной суммы и полной суммы (с x_0 и $x_0 + \Delta x$).

   Подставляем 3 разности $(1 + 3 - 2)$ и получаем непрерывность по М-лемме.

Теорема (*о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР*).

Если все члены $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны на $X = [a, b]$, то в случае равномерной сходимости этого ряда на $[a, b]$ его сумма $S(x)$ будет непрерывной функцией на $[a, b]$.

Доказательство. Требуется обосновать (20) для $\forall\, x_0 \in [a, b]$, причём в случае концевых значений $x_0 = a,\ x_0 = b$ будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для $fix\ x_0 \in [a, b]$ придадим произвольные приращения $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ и рассмотрим соответствующие приращения суммы ФР $\sum u_n(x)$:

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b] \Rightarrow$ для $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu$, и для $\forall\, x \in [a, b]$ для частичных сумм $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ ряда $\sum u_n(x)$ имеем: $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

Отсюда, в частности, для $x = x_0 \in X$ и $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leqslant \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{21}$$

Далее из непрерывности $\forall\, u_n(x)$ в $x_0 \in [a, b]$ следует непрерывность частичных сумм в x_0 (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta > 0\ :$ для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{22}$$

Таким образом, в силу (21), (22) имеем: для $\forall \varepsilon > 0$, выбирая $n \geqslant \nu$ и рассматривая $\forall\, |\Delta x| \leqslant \delta$, имеем:

$|\Delta S(x_0)| = |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant$
$\leqslant |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon.$

Поэтому получаем: для $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \delta > 0 :$ для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow |\Delta S(x_0)| \leqslant M \cdot \varepsilon, M = const = 3 > 0.$

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что $\Delta S(x_0) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, что на языке приращений равносильно (20). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость ЧР в правой части (20) будет сходящимся. □

Замечания:

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.
2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}$ на локальную равномерную сходимость.

6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

Краткий план:

1. Очевидно, что $S(x)$ - непрерывна, поэтому интегрируема
2. Рассмотрим частичные суммы $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \int u_k(x)dx$.
3. Рассмотрим разницу $\left|T_n - \int\limits_a^b S(x)\right|$ и т.к. $|S(x) - S_n(x)| \leqslant \varepsilon$ получим $\int\limits_a^b (S(x) - S_n(x)) \leqslant M\varepsilon$
4. Доказываем по М-лемме о сходимости ЧП.

Теорема (*о почленном интегрировании равномерно сходящихся ФР*).
Если $\forall\ u_n(x) \in C([a,b])$,
для $n \in \mathbb{N}$, то в случае, когда $\sum u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$, возможно почленное интегрирование этого ряда на $[a,b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx. \tag{23}$$

Доказательство. На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящихся ФР получим, что сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет непрерывна на $[a,b]$, а значит, интегрируема на $[a,b]$.

Используя частичные суммы для $\sum u_n(x)$, рассмотрим частичные суммы $T_n = \int\limits_a^b S_n(x)dx =$

$= \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx$ для ЧР правой части (23).

Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на $[a,b]$ получим, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall\ n \geqslant \nu$ и для $\forall\ x \in [a,b] \Rightarrow$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \varepsilon \tag{24}$$

Отсюда получаем, что $\left|\int\limits_a^b S(x)dx - T_n\right| = \left|\int\limits_a^b S(x)dx - \int\limits_a^b S_n(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b (S(x) - S_n(x))dx\right| \leqslant$

$\leqslant \int\limits_a^b |S(x) - S_n(x)|\, dx \leqslant \int\limits_a^b \varepsilon dx = M\varepsilon$, где $M = b - a = const \geqslant 0$.

Таким образом, для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall\ n \geqslant \nu \Rightarrow \left|\int\limits_a^b S(x)dx - T_n\right| \leqslant M\varepsilon$, поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} T_n = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx,$$

что равносильно (23). $\square$

7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

Теорема (*о почленном дифференцировании ФР*).

Пусть ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b]$ удовлетворяет условиям:

1. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$,
2. $\exists\, u_n^{'}(x)$, непрерывная для $\forall\, n \in \mathbb{N}, x \in X$.

Тогда, если

$$\sum u_n^{'}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \tag{25}$$

то рассматриваемый ФР $\sum u_n(x)$ можно почленно дифференцировать на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{'}(x), \text{для } \forall\, x \in X. \tag{26}$$

Доказательство. В силу (25), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР $\sum u_n^{'}(t)$ можно почленно интегрировать на $\forall\, [a, x] \subset [a, b]$, т.е.

$$\exists \int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t)\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u_n^{'}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(x) - u_n(a)\right).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для $\sum u_n(x)$) получаем, что

$$\exists\, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) dt.$$

Используя далее *теорему Барроу* о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$$\exists\, S^{'}(x) = (const)^{'} + \left(\int_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t)\right) dt\right)_x^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x),$$

что соответствует (26). $\square$

Под *степенным рядом* будем подразумевать ФР вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{27}$$

где fix $x_0 \in \mathbb{R}$ - центр для СтР, а $\forall\, a_n \in \mathbb{R}$ - соответствующая числовая последовательность (*коэффициенты СтР*).

8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.

Теорема Абеля (*о сходимости степенных рядов*).
Если СтР (27) сходится при $x = x_1 \neq x_0$, то он будет сходится абсолютно для любого x, где

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|\,. \tag{28}$$

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ следует в силу необходимого условия сходимости ЧР, что $a_n(x_1 - x_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а т.к. $\forall$ ЧП является ограниченной, то $\exists\, M = \mathrm{const} > 0 : |a_n(x_1 - x_0)^n| \leqslant M,$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{|x_1 - x_0|^n}. \tag{29}$$

Для $\forall\, x$, удовлетворяющего (28), в силу (29) получаем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n|\,|x - x_0|^n \overset{(29)}{\leqslant} \frac{M\,|x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} = Mq^n, \text{ где } q = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \in [0; 1[.$$

Таким образом, мы получили сходящуюся мажоранту, ибо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n = M \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $q \in [0; 1[$.

По признаку сравнения сходимости ЧР имеем, что для $\forall\, x$, удовлетворяющего (28), ряд (27) будет сходиться. □

Замечание.
Из полученных выше результатов следует, что если рассмотреть множество X_0 всех x, удовлетворяющих (28), то имеем, что $X_0 \subset X$, т.е. X_0 - некоторое подмножество множества X сходимости для (27).

9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.

Теорема (*формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР*).
Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{30}$$

то для радиуса сходимости ряда (27) имеем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{31}$$

Доказательство.
Без ограничения общности будем считать, что в (27) $\forall\, a_n \neq 0$. Т.к. СтР (27) сходится при $x = x_0$, то рассмотрим случай $x \neq x_0$.

Если $x \in I = \left]\, x_0 - R\,;\, x_0 + R \,\right[$, где $R \geqslant 0$, то по признаку Даламбера сходимости ЧР для (27) имеем:

$$\exists\, d = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}|}{|a_n(x-x_0)^n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0| \overset{(31)}{=} \frac{|x-x_0|}{R}.$$

В силу того, что $x \in I$ и, значит, $|x-x_0| < R$, получаем, что $d < 1$ и СтР (27) будет сходящимся. Если $d > 1$, т.е. $|x-x_0| > R$, то (27) расходится. Таким образом, (31) будет радиусом сходимости для (27). $\square$

10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.

Теорема (*формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР*).

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{32}$$

то для радиуса сходимости ряда (27) имеем:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{33}$$

Доказательство проведём по той же схеме, что и в предыдущей теореме.

Т.к. случай $x = x_0$ тривиален (в данной точке ряд всегда сходится), то рассмотрим случай $x \neq x_0$.

По признаку Коши сходимости ЧР для (27) получаем:

$$\exists\, k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{(33)}{=} \frac{|x-x_0|}{R}.$$

Если $k < 1$, т. е. $|x - x_0| < R$, то СтР (27) сходится.

Если $k > 1$, т. е. $|x - x_0| > R$, то СтР (27) расходится.

Таким образом, в силу определения, величина (33) будет радиусом сходимости для (27).

□

Замечания:

1. В силу связи между признаками Даламбера и Коши сходимости ЧР, в случае, когда предел (31) не существует (ни конечный, ни бесконечный), предел (33) может существовать, и в этом смысле формула Коши (33) предпочтительнее, чем (31).

2. Можно показать, что в случае, когда в (33) нет ни конечного, ни бесконечного предела, радиус сходимости для (27) всегда можно вычислить по **формуле Коши-Адамара**, использующей понятие верхнего предела последовательности:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{34}$$

   Под верхним пределом последовательности подразумевается верхняя грань (supremum) множества конечных пределов всех сходящихся подпоследовательностей рассматриваемой последовательности.

11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).

Теорема (*о локальной равномерной сходимости СтР*).

Если СтР (27) имеет ненулевой радиус сходимости, то этот ряд (27) сходится равномерно на любом отрезке из интервала сходимости данного ряда.

Доказательство.

Рассмотрим $\forall\, [a,b] \subset I = \Big]\, x_0 - R\,;\; x_0 + R\, \Big[$, где $R > 0$ - радиус сходимости СтР (27). Имеем:

$$x_0 - R < a < b < x + R \Rightarrow -R < a - x_0 < b - x_0 < R \Rightarrow \begin{cases} |a - x_0| < R, \\ |b - x_0| < R. \end{cases} \tag{35}$$

Полагая $r = \max\Big\{\ |a - x_0|\,,\ |b - x_0|\ \Big\}$, в силу (35) получаем:

$$0 \leqslant r < R. \tag{36}$$

Отсюда для $\forall\, x \in [a,b]$ получаем:

$$|x - x_0| \leqslant \max\Big\{\ |a - x_0|\,,\ |b - x_0|\ \Big\} = r,$$

поэтому для $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ имеем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n|\, |x - x_0|^n \leqslant |a_n|\, r^n = c_n \text{ - мажоранта.}$$

Применяя к ряду c_n обобщённый признак Коши сходимости ЧР, получаем:

$$\exists\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|\, r^n} = r \cdot \underbrace{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R}} \overset{(34)}{=} \frac{r}{R} \overset{(36)}{<} 1,$$

а значит, ряд $\sum c_n$ сходится.

Таким образом, мы получили равномерно сходящуюся числовую мажоранту, и поэтому, по мажорантному признаку Вейерштрасса для ФР, рассматриваемый СтР (27) будет равномерно сходиться на $\forall\, [a,b] \subset I$. □

Замечания:

1. Из доказанной теоремы следует, что любой СтР сходится локально равномерно на интервале своей сходимости.
2. Применяя теорему Стокса-Зейделя для ФР и учитывая, что в (27) все слагаемые являются непрерывными функциями на I, в силу локальной равномерной сходимости (27) на I, внутри интервала сходимости сумма любого СтР (27) будет являться непрерывной функцией.

Следствие (*о равенстве СтР*).

Если для СтР (27) с непрерывной суммой $S_n(x)$ есть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ с соответствующей суммой $T(x)$, причём $T(x) = S(x)$ в некоторой окрестности центра разложения x_0, то тогда и сами СтР совпадают, т.е. $a_n = b_n$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Пусть имеем, что

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots = T(x).$$

В силу непрерывности $S(x)$ и $T(x)$ в соответствующей окрестности точки x_0 при $x \to x_0$, получаем:

$$a_0 = \lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} T(x) = b_0, \text{ отсюда}$$
$$a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots.$$

Таким образом, для $\forall\, x \neq x_0$ имеем:

$$a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots = b_1 + b_2(x - x_0) + \ldots.$$

Используя опять соответствующую окрестность точки x_0, при $x \to x_0$, получим, что $a_1 = b_1$ и так далее (по ММИ). □

12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.

Теорема (*о дифференцировании СтР*).

Сумма СтР (27) внутри его интервала сходимости является непрерывной дифференцируемой функцией, причём у продифференцированного СтР будет тот же радиус (а, значит, и интервал) сходимости, что и у исходного ряда (27).

Доказательство. По теореме о почленном дифференцировании ФР и замечанию к ней достаточно показать, что возможно почленное дифференцирование (27) на $\forall$ отрезке $[a,b] \subset I = \,]\,x_0 - R\,;\,x_0 + R\,[$.

1. В (27) слагаемые $u_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями для $\forall\, x \in [a;b]$ т.к. $\exists\, u_n'(x) = na_0(x-x_0)^{n-1}$ непрерывная на $[a;b]$.
2. Так как $\forall$ СтР (27) сходится поточечно внутри своего интервала сходимости, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{\text{для } \forall\, [a;b]\subset I} S(x)$.

Осталось показать, что продифференцированный СтР

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows}.$$

Используя *формулу Коши-Адамара*, имеем:

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|}} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{|a_{n+1}|}\right)} = \left[\begin{array}{c} \sqrt[n]{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \\ \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}} \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}}} = \left[\begin{array}{c} \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R} \end{array}\right] = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R.$$

Значит, у исходного и продифференцированного рядов один и тот же радиус, а, значит, и интервал, сходимости. Тогда, в силу того, что $\forall$ СтР сходится локально равномерно, получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} S'(x)$.

Причём, в силу непрерывности слагаемых, S(x) будет непрерывно дифференцируема на $\forall\,[a;b] \subset I$, а, значит, и для $\forall\, x \in I$. $\square$

Замечания:

1. Применяя последовательно дифференцирование к СтР (27), получим по ММИ, что сумма ряда (27) будет бесконечное число раз дифференцируемой функцией.
2. Можно показать, что дифференцирование СтР хоть и сохраняет интервал сходимости, но в общем случае *не улучшает* его множество сходимости в том смысле, что если, например, исходный ряд (27) находится на каком-то из концов интервала I ($x = x_0 \pm R$), то продифференцированный ряд уже может расходиться на этом конце.

Следствие.

Если на интервале $I = \,]\,x_0 - R\,;\,x_0 + R\,[$ бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, для $\forall\, x \in I$, то для неё СтР (27) будет являться соответствующим рядом Тейлора в окрестности точки x_0, т. е. для $\forall\, a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Действительно, дифференцируя почленно n раз равенство

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

в силу доказанной теоремы получим:

$$\exists\, f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + (n+1)! \cdot a_{n+1}(x-x_0) + \ldots$$

Отсюда при $x \to x_0$ имеем:

$$n! \cdot a_n = \lim_{x\to x_0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

т.е. $\forall\, a_n$ - коэффициент в разложении в ряд Тейлора. $\square$

13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.

Теорема (*о замене переменных в НИ*).

Будем одновременно рассматривать как НИ-1, так и НИ-2.

Пусть $f(x)$ определена для $\forall\, x \in [a;b[$, где либо $b=+\infty$ (НИ-1), либо $f(b-0)=\infty$ (НИ-2).

Если функция $x(t)=\phi(t)$ - *непрерывно дифференцируема* для $\forall\, t\in[\alpha;\beta[$ и *строго монотонна*, то в случае, когда: $\begin{cases}\phi(\alpha)=a,\\ \phi(\beta-0)=b.\end{cases}$, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $b=+\infty$ (НИ-1) либо $f(b-0)=+\infty$ (НИ-2), сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt. \tag{37}$$

При этом справедлива формула замены переменных в НИ:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x=\phi(t)\Rightarrow dx=\phi^{'}(t)dt,\\ x\big|_{a=\phi(\alpha)}^{b=\phi(\beta-0)}. \end{bmatrix} = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt, \tag{38}$$

причём в правой части (38) может стоять как некоторый НИ, так и обычный интеграл Римана.

Доказательство. Следует из соответствующей теоремы о замене переменных в ОИ (интеграле Римана).

Для доказательства, выбирая для $\forall\,\gamma\in[\alpha;\beta[$, в силу строгой монотонности $\phi(t)$, получаем что $c=\phi(\gamma)\in[a;b[$. При этом для $\forall\, c\in[a;b[\ \exists\,!\ \gamma\in[\alpha;\beta[$.

Тогда по *теореме о замене переменных в ОИ* имеем:

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \begin{bmatrix} x=\phi(t)\Rightarrow dx=\phi^{'}(t)dt,\\ x\big|_{a=\phi(\alpha)}^{c}\Rightarrow \exists\,!\ \gamma\in[\alpha;\beta[\ \mid c=\phi(\gamma)\Rightarrow t\big|_\alpha^\gamma. \end{bmatrix} = \int\limits_\alpha^\gamma f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt.$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что $\gamma\to\beta-0\Rightarrow c\to b-0$, получаем (38). □

Замечание.

Для НИ-2 вида $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ после замены переменных имеем:

$$t=\frac{1}{b-x}\Bigg|_{\frac{1}{b-a}>0}^{+\infty},\ \text{а для}\ \ x\big|_a^{b-0},$$

отсюда получаем: $x=b-\dfrac{1}{t}\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{t^2}\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty}\dfrac{f(b-\frac{1}{t})}{t^2}dt.$

Тем самым мы *свели НИ-2 к соответствующему НИ-1*, дальнейшее исследование которого, например, на сходимость, можно проводить с помощью полученных ранее условий сходимости НИ-1.

Аналогично, как и теорема о замене переменных в НИ-2, обосновываются формулы двойной подстановки (аналог формулы Ньютона-Лейбница) и метод интегрирования по частям для НИ-2 и НИ-1.

14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.

Теорема (*Формула Ньютона-Лейбница для НИ.*).

Пусть для $f(x)$, определённой для $\forall\ x \in [a, b[$, где $b = +\infty$ или $f(b-0) = \infty$ существует дифференцируемая первообразная $F(x)$, т.е. $\exists\ F^{'}(x) = f(x)$, для $\forall\ x \in [a, b[$. Тогда имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c\to+\infty \\ c\to b-0}} \int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{c\to b-0} \big[F(x)\big]_a^c =$$
$$= \lim_{c\to b-0} (F(c) - F(a)) = F(b-0) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^{b-0}.$$

При этом используемый интеграл сходится тогда и только тогда, когда значения $F(b-0), F(+\infty)$ конечны.

Доказательство. Для $fix\ x_0 \in [a, b[$ рассмотрим $F_0(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)dt$ - одну из первообразных для $f(x)$, т.к. по теореме Барроу $\exists\ F_0^{'}(x) = f(x)$. Рассмотрим $\forall\ F(x)$ - первообразную $f(x)$ на $[a, b[$. Тогда $\exists\ c_0 = const \mid F(x) = F_0(x) + c_0$, т.е. $F(x) - c_0 = F_0(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)dt$. Полагая здесь $x := a, x := b-0$, имеем:

$$\begin{cases} F(a) - c_0 = \int\limits_{x_0}^a f(t)dt, \\ F(b-0) - c_0 = \int\limits_{x_0}^b f(t)dt. \end{cases} \Rightarrow (F(b-0)-c_0) - (F(a)-c_0) = \int\limits_{x_0}^{b-0} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^a f(t)dt = \int\limits_{x_0}^{b-0} f(t)dt + \int\limits_a^{x_0} f(t)dt = \int\limits_a^{b-0} f(t)dt =$$
$$= F(b-0) - F(a).$$

$\int\limits_a^{b-0} f(t)dt$ сходится $\Leftrightarrow F(b-0)$, т.к. $F(a) = const \in \mathbb{R}$. □

Замечание.

На практике формулы двойной подстановки используются в том же виде, что и для ОИ: $\int\limits_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$.

Теорема (*Интегрирование по частям в НИ.*).

Пусть $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на $\forall\ x \in [a; b[$, где $b = +\infty$ или $f(b-0) = \infty$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to b-0 \\ (x\to+\infty)}} u(x)v(x) = u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}$, то тогда в случае сходимости одного из использованных ниже интегралов, получаем:

$$\int\limits_a^b u(x)v^{'}(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int\limits_a^b v(x)u^{'}(x)dx.$$

Доказательство. По формулам двойной подстановки для НИ и интегрирования по частям в ОИ:

$$\int\limits_a^{b-0} u(x)dv(x) = \left[\int u(x)v^{'}(x)dx\right]_a^{b-0} = \left[u(x)v(x) - \int v(x)du(x)\right]_a^{b-0} = \big[u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}\big] =$$
$$= \left(u(b-0)v(b-0) - \int v(b-0)u^{'}(b-0)db\right) - \left(v(a)u(a) - \int v(a)u^{'}(a)da\right) =$$
$$= \big[u(x)v(x)\big]_a^{b-0} - \left[\int v(x)u^{'}(x)dx\right]_a^{b-0} = \big[v(x)u(x)\big]_a^{b-0} - \int\limits_a^{b-0} v(x)du(x).$$

□

Замечание.

На практике удобнее использовать:

$$\int\limits_a^b udv = \big[uv\big]_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Функцию $\phi(x)$, определённую на X будем называть *равномерным частным пределом* $f(x,y)$ при $y \to y_0$, если

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \mid \text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leqslant \delta \text{ следует } |f(x,y) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{39}$$

В этом случае будем писать

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x). \tag{40}$$

15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.

Теорема (*признак равномерной сходимости Ф2П*).

Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$, являющимся компактом в $\mathbb{R}^2$, и $y_0 \in [c,d]$, то имеем:

$$f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0, y \in [c,d]]{[a,b]} f(x,y_0). \tag{41}$$

Доказательство. Из *теоремы* Кантора для ФНП получаем, что рассматриваемая $f(x,y)$ будет равномерно непрерывна для $\forall\, x \in [a,b]$ и для $\forall\, y \in [c,d]$, т.е.:

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \text{для } \forall\, \widetilde{x}, \bar{x} \in [a,b] \text{ и для } \forall\, \widetilde{y}, \bar{y} \in Y \\ &\text{из } \begin{cases} 0 < |\bar{x} - \widetilde{x}| \leqslant \delta, \\ 0 < |\bar{y} - \widetilde{y}| \leqslant \delta. \end{cases} \Rightarrow |f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Полагая здесь: $\begin{cases} \widetilde{x} = \bar{x} = x \in [a,b], \\ \widetilde{y} = y \in [c,d], \\ \bar{y} = y_0 \in [c,d]. \end{cases}$, получаем:

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \text{для } \forall\, y \in [c,d] \text{ из } \ |y - y_0| \leqslant \delta(\varepsilon), \ \text{ для } \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(x,y) - f(x,y_0)| \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Т.к. здесь $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от $x \in [a,b]$, то получаем (40), где $\phi(x) = f(x,y_0)$, что соответствует (41). □

16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.

Теорема (*критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П*).

Для того, чтобы $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\ y_n \in Y$, $y_n \to y_0, y_n \neq y_0$, где y_0 - предельная точка для множества Y, выполнялось:

$$g_n(x) = f(x, y_n) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x) \tag{42}$$

Доказательство. $\Rightarrow$. Пусть выполняется (40), тогда для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$: для $\forall\ y \in Y$ из $0 < |y - y_0| \leqslant \delta$, для $\forall\ x \in X \Rightarrow |f(x,y) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon$.

Рассматривая $\forall\ (y_n) \in Y$, в пределах точки y_0 по найденному ранее $\delta > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall\ n \geqslant \nu \Rightarrow |y_n - y_0| \leqslant \delta$.

Окончательно получаем: для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall\ n \geqslant \nu$, для $\forall\ x \in X \Rightarrow \Rightarrow |y_n - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x, y_n) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon$, т.е. имеем (42).

$\Leftarrow$. Пусть для $\forall\ (y_n) \in Y$ в предельной точке выполнено (42). Тогда в силу того, что из равномерной сходимости $g_n(x) = f(x, y_n)$ следует поточечная сходимость ФП $g_n(x)$, получаем, что $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} \phi(x)$.

Поэтому в силу критерия Гейне существования предела Ф1П получаем, что:

$$f(x, y_0) = g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} \phi(x) \Rightarrow f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{X} \phi(x).$$

Предположим, что имеем поточечную сходимость, но равномерной сходимости нет, т.е. получаем:

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\not\rightrightarrows}} \phi(x).$$

Тогда по *правилу де Моргана*, имеем:

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0 \text{ такое, что для } \forall\ \delta > 0\ \exists\ y(\delta) \in Y, \exists\ x(\delta) \in X \text{ такое, что из } 0 < |y(\delta) - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(x(\delta), y(\delta)\right) - \phi(x(\delta)) > \varepsilon_0. \tag{43}$$

Выбирая для простоты $\delta = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +0$, получаем, что $\begin{cases} \exists\ x_n = x\left(\dfrac{1}{n}\right) \in X, \\ \exists\ y_n = y\left(\dfrac{1}{n}\right) \in Y. \end{cases}$ такие, что из $0 < |y_n - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$.

Используя условие $f(x_n, y) \xrightarrow[y\to y_0]{X} \phi(x_n)$, для найденного $\varepsilon_0 > 0$ получаем:

$$\exists\ \delta_0 > 0 \text{ такая, что для } \forall\ y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leqslant \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y) - \phi(x_n)| \leqslant \varepsilon_0.$$

Подставляя $y = y_n$, получаем $0 < |y_n - y_0| \leqslant \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| \leqslant \varepsilon_0$.

Выбирая теперь $\nu = \dfrac{1}{\delta_0} \in \mathbb{R}$, для $\forall\ n \geqslant \nu \Rightarrow 0 < |y_n - y_0| \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{\nu}$. Отсюда в силу (43) при $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$ получаем, что для $\forall\ n \geqslant \nu$ выполняется $|f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$. Противоречие. □

Замечания:

1. Доказанная теорема позволяет из соответствующих свойств ФП получить аналогичные свойства для равномерно сходящихся Ф2П, в том числе сформулированный ранее супремальный критерий равномерной сходимости Ф2П и критерий Коши для Ф2П. Кроме того, в силу теоремы Дини для ФП имеем соответствующую теорему Дини для равномерной сходимости Ф2П.

   Теорема (*Дини для равномерной сходимости Ф2П*).

   Пусть для $\forall\ fix\ y \in Y, f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a,b] = X$, причём при монотонной сходимости $y \to y_0$ ($y \uparrow y_0$ либо $y \downarrow y_0$) соответственно получаем $f(x,y)$ монотонно сходится к $\phi(x)$ ($f(x,y) \uparrow\downarrow \phi(x)$). Тогда, если предельная функция $\phi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ непрерывна на $X = [a,b]$, то кроме поточечной сходимости будем иметь равномерную сходимость (40).

2. Аналогично получаем теорему Стокса-Зейделя для Ф2П.

   Теорема (*Стокса-Зейделя*).

   Пусть для $\forall\ fix\ y \in Y, f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a,b] = X$. Тогда, если $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, где y_0 - предельная точка для Y, то предельная функция будет непрерывной на $[a,b]$.

Предположим, что $f(x,y)$ определена для $\forall\ y \in Y$ и для $\forall\ x \in [a,b]$, причём при $\forall\ fix\ y \in Y$ $f(x,y)$ интегрируема по $x \in [a,b]$. В этом случае:

$$\exists\ F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx, y \in Y. \tag{44}$$

(44) - *интеграл Римана (собственный)*, зависящий от параметра $y \in Y$.

В дальнейшем интеграл вида (44) будем кратко называть *СИЗОП*.

17 Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.

Теорема (*о предельном переходе в СИЗОП*).

Пусть определён СИЗОП (44). Тогда, в случае $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, где, как и в определении СИЗОП (44), предполагая интегрируемость $f(x,y)$ по x, получаем:

$$\exists \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \phi(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx. \tag{45}$$

Доказательство. В силу (40) имеем (39), откуда для $I = \int\limits_a^b \phi(x)dx$, получаем:

$$|F(y) - I| \overset{(44)}{=} \left| \int\limits_a^b (f(x,y) - \phi(x))\, dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,y) - \phi(x)|\, dx \overset{(39)}{\leqslant} \int\limits_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a).$$

Таким образом, получаем, что $\exists\ M = b - a = const > 0$ такое, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такая, что для $\forall\ y \in Y$ из $0 < |y - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |F(y) - I| \leqslant M\varepsilon$.

Откуда по M-лемме для сходимости Ф1П, получаем: $F(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} I$, т.е. имеем (45). □

Замечания:

1. При доказательстве теоремы неявно предполагалось, что $\phi(x) \in \mathbb{R}([a,b])$. Это условие выполняется в силу критерия Гейне существования равномерного частного предела и соответствующего условия интегрируемости Ф1П.

2. Используя теорему Дини для Ф2П, в силу доказанной теоремы, получаем, что если для $\forall\ fix\ y \in Y \Rightarrow f(x,y)$ непрерывна на $X = [a,b]$, то в случае, когда $f(x,y)$ монотонна по y на $Y = [c,d]$ получаем, что при выполнении условия поточечной сходимости:
$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x),$$
то имеем для $\forall\ y_0 \in [c,d] \Rightarrow$ (45).

3. Если $f(x,y)$ непрерывна для $\forall\ x \in [a,b]$ и для $\forall\ y \in [c,d]$, тогда справедливо (45), где $\phi(x) = f(x,y_0)$, для $\forall\ fix\ y_0 \in [c,d]$.

   В частности, при указанных условиях СИЗОП (44) является непрерывной функцией на $Y \in [c,d]$, т.к.
$$\exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)dx = F(y_0),$$
   что равносильно непрерывности (44) в любой точке $y_0 \in [c,d]$, причём на концах отрезка рассматривается односторонняя непрерывность.

18 Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.

Теорема (*о почленном дифференцировании СИЗОП*).
Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$ и для неё:

$$\exists\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \text{непрерывна на } [a,b]\times[c,d].$$

Тогда СИЗОП (44) будет непрерывно дифференцируемой функцией на $[c,d]$, для которой производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$F^{'}(y) = \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)^{'}_y = \int\limits_a^b f^{'}_y(x,y)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \tag{46}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой об интегрируемости СИЗОП. Рассмотрим функцию

$$G(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \tag{47}$$

В силу полученных ранее результатов, СИЗОП (47) корректно определён и является непрерывно дифференцируемой функцией на $[c,d]$. Поэтому функция $G(y)$ для $\forall\ fix\ y\in\ ]c,d[$ будет интегрируемой на $[c,y]$. А значит, получаем:

$$\exists \int\limits_c^y G(t)dt \overset{(47)}{=} \int\limits_c^y \left(\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx\right)dt.$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, в силу теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, имеем:

$$\int\limits_c^y G(t)dt = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt\right)dx = \int\limits_a^b \left[f(x,t)\right]_{t=c}^{t=y}dx = \int\limits_a^b \left(f(x,y)-f(x,c)\right)dx \overset{(44)}{=} F(y)-c_0,$$

где $c_0 = \int\limits_a^b f(x,c)dx = const.$

Отсюда получаем, что $F(y) = c_0 + \int\limits_c^y G(t)dt.$

Используя теорему Барроу о дифференцировании интегралов с переменным верхним пределом, получаем:

$\exists\ F^{'}(y) = (c_0)^{'}_y + \left(\int\limits_c^y G(t)dt\right)^{'}_y = 0 + G(y) \overset{(47)}{=} \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$, что даёт (46). $\square$

1. Пусть $f(x,y)$ определена для $\forall x \in [a;+\infty[$ и $\forall y \in Y \subset \mathbb{R}$. Если $\forall \text{fix } y \in Y \Rightarrow$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y) = dx \xrightarrow{y} . \tag{48}$$

Тогда будет корректно определена функция:

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx, y \in Y. \tag{49}$$

2. Пусть НИЗОП (49) сходится на $Y \subset \mathbb{R}$. Если y_0 - предельная точка Y и выполняется

$$f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0]{[a;+\infty[} \phi(x),$$

то будем говорить, что в данном НИЗОП *допустим предельный переход*, если

$$\exists \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx. \tag{50}$$

19 Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.

Теорема (*О предельном преходе в НИЗОП*).
Пусть для $\forall$ fix $y \in Y \Rightarrow f(x,y)$ непрерывна для $\forall\, x \geqslant a$ и для предельной точки $y \in Y$ имеем

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{\forall\ [a;A]}{\rightrightarrows}} \phi(x), \text{ где } \forall\ A > a. \tag{51}$$

Если $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{y}{\rightrightarrows}$, то тогда возможен предельный переход (50).

Доказательство. Воспользуемся *теоремой о предельном переходе в функциональном ряду*, для чего, беря произвольную последовательность $(A_n) \uparrow +\infty$, по критерию Гейне существования конечного предела функции для (49) получаем

$$\exists \lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \left[\int\limits_a^{+\infty} = \lim_{An \to +\infty} \left(\int\limits_{A_0}^{A_1} + \int\limits_{A_1}^{A_2} + \ldots + \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{y \to y_0} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx = \big[\text{По теореме о предельном переходе в СИЗОП}\big] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \lim_{y \to y_0} f(x,y)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \phi(x)dx = \lim_{An \to +\infty} \left(\int\limits_{A_0 = a}^{A_1} + \int\limits_{A_1}^{A_2} + \ldots + \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \right) =$$

$$= \lim_{An \to +\infty} \int\limits_a^{A_n} \phi(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx,$$

т.е. имеем (50). ☐

Следствие (*О непрерывности НИЗОП*).
Пусть $f(x,y)$ непрерывная для $\forall\, x \in [a;+\infty[$ и для $\forall\, y \in [c;d]$. Если интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$$

то НИЗОП (49) - непрерывная функция на $[c;d]$, т.е.

$$\text{для } \forall\, y \in [c;d] \Rightarrow \exists \lim_{y \to y_0} F(y) = \lim_{y \to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = F(y_0).$$

Доказательство. Из непрерывности $f(x,y)$ на $[a;+\infty[\ \times\ [c;d]$ следует, что

$$\text{для } \forall \text{ fix } A \geqslant a \Rightarrow f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a;A]}{\rightrightarrows}} f(x,y) = \phi(x) (\text{для } \forall \text{ fix } y_0 \in [c;d]\,)$$

Далее, используя доказательство теоремы в силу (50)

$$\exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \int\limits_a^A \phi(x)dx \int\limits_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = F(y_0),$$

что и требовалось доказать. □

Замечание.

Доказанная теорема и следствие справедливы и в отсутствии равномерной сходимости для рассматриваемого НИЗОП, если он сходится локально равномерно на Y,

$$\text{для } \forall\ [\alpha;\beta] \subset Y \Rightarrow \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[\alpha;\beta]}{\rightrightarrows}$$

Это связано с тем, что свойство непрерывности функции на множестве определено в любой точке из этого множества. Поэтому, выбирая $\forall$ fix $y_0 \in Y$ и заключая его в соответствующий отрезок $y_0 \in [\alpha;\beta] \subset Y$, в случае локальной равномерной сходимости получаем, например, что (49) будет непрерывна на $[\alpha;\beta]$, а значит, в точке y_0. А исходя из этого, получаем непрерывность (49) на всём Y.

20 Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.

Теорема (*Об интегрировании НИЗОП*).
Пусть $f(x,y)$ непрерывная на декартовом произведении $[a;+\infty[\times[c;d]$. Если интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c;d]}{\rightrightarrows},$$

то тогда НИЗОП (49) является интегрируемой на $[c;d]$ функцией, для которой

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \tag{52}$$

Доказательство. По той же схема, что и в предыдущей теореме, рассмотрим произвольную последовательность $(A_n)\uparrow +\infty (A_0 = a)$ и используем критерий Гейне на основании теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, получаем:

$$\exists \int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx\right) dy = \left[\begin{array}{c} u_n(y) = \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx \text{ непрерывна на } [c;d] \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y) \overset{[c;d]}{\rightrightarrows} \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_c^d \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_c^d u_n(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_c^d \left(\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)dx\right) dy =$$

$$= \lim_{A_n\to+\infty} \left(\int\limits_{A_0=a}^{A_1} + \int\limits_{A_1}^{A_2} + \ldots + \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n}\right) = \lim_{A_n\to+\infty} \int\limits_a^{A_n} \left(\int\limits_c^d f(x,y)dx\right) dy = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy$$

□

Замечания:

1. Доказанная теорема справедлива не только для случае $x\in[a;+\infty[$, $y\in[c;d]$, но и для случая $x\in]a;+\infty[$, $y\in[c;d]$, при условии, что дополнительно ко всем условиям указанной теоремы выполняется, что точка $x=a$ не является точкой разрыва второго рода для $g(x,y)$, т.е.

   $$\exists \lim_{x\to a+0} f(x,y)\in\mathbb{R}$$

   В этом случае, доопределяя функцию $f(x,y)$ в точке $x=a$, т.е. рассматривая функцию

   $$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y), x>a, y\in[c;d] \\ \lim\limits_{x\to a+0} f(x,y), y\in[c;d] \end{cases}$$

   Получаем её непрерывность в точке $x=a$ справа. А далее, учитывая, что рассмотренные интегралы от $f(x,y)$ и $g(x,y)$ совпадают используя доказанную теорему.

2. Можно показать, что наряду с интегрируемым НИЗОП по конечному промежутку возможно его почленное интегрирование по бесконечному промежутку $[c;+\infty[$, если

   (a) $f(x,y)$ непрерывна на $[a;+\infty[\times[c;+\infty[$

   (б) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c;+\infty[}{\rightrightarrows}$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[a;+\infty[}{\rightrightarrows}$

3. $\exists \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy)$ - существуют повторные интегралы.

21 Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.

Теорема (*О почленном дифференцировании НИЗОП*).

Пусть $f(x,y)$ - непрерывна на $[a;+\infty[\ \times\ [c;d]$, $\exists\ f'_y(x,y)$ - непрерывная на $[a;+\infty[\ \times\ [c;d]$. Тогда если

1. $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \xrightarrow{[a;+\infty[}$

2. $\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \overset{[a;+\infty[}{\rightrightarrows}$,

то тогда НИЗОП (49) - функция почленно дифференцируема на $[a;+\infty[$, и её производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$\exists\ F'(y) \overset{(49)}{=} \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)'_y = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

Доказательство. Для $\forall$ fix $y \in [c;d]$ корректно определяем СИЗОП

$$\Phi(y) = \int\limits_c^y \left(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,t)dx\right) dt$$

В силу выполнения всех условий почленного интегрирования СИЗОП можем изменить порядок интегрирования

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c^y f'_y(x,t)\right) dx = \int\limits_a^{+\infty} \big[f(x,t)\big]_{t=c}^{t=y} dx = \int\limits_a^{+\infty} \left(\int\limits_c f(x,y) - f(x,c)\right) dx =$$
$$= \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,c)dx = F(y) - F(c)$$

Отсюда, используя теорему Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$\exists F'(y) = (\Phi(y) + F(c))'_y = \left(\int\limits_c^y \left(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,t)dt\right) dx\right)'_y =$$
$$= \left[\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,t)dx\right]_{t=y} = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \Leftrightarrow (21)$$

□

Замечание.

Так же, как и в условии непрерывности НИЗОП в доказательстве теоремы о почленном дифференцировании вместо равномерной сходимости рассмотрим НИЗОП используя локальную равномерную сходимость соответствующего НИЗОП.

Интегралом Дирихле называется интеграл:

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \tag{53}$$

22 Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.

В данном случае $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \in \mathbb{R}$, поэтому $x = 0$ - точка устранимого разрыва, и интеграл (53) представляет собой НИ-1:

$$I = \underbrace{\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx}_{\substack{\text{сходится как}\\ \text{интеграл Римана}}} + \underbrace{\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx}_{\substack{\text{сходится по признаку}\\ \text{Дирихле для НИ-1}}}.$$

В данном случае сходимость будет условной.

Для получения значения (53) рассмотрим при fix $a > 0$ НИЗОП-1:

$$\begin{cases} F(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(xy)\, dx, \\ y = [0; +\infty[. \end{cases} \tag{54}$$

В (54) подынтегральная функция $f(x, y) = e^{-ax}\cos(xy)$, во-первых, является непрерывной для $\forall x \geqslant 0$ и $\forall y \geqslant 0$, а, во-вторых, в силу неравенства $|f(x, y)| = e^{-ax}|\cos(xy)| \leqslant e^{-ax} = \varphi(x)$, где $\int\limits_0^{+\infty}\varphi(x)\, dx = \left[-e^{-ax}\frac{1}{a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ - сходится, по мажорантному признаку Вейерштрасса получаем, что $F(y) \overset{[0;+\infty[}{\rightrightarrows}$.

В связи с этим, возможно почленное интегрирование этого НИЗОП, например, по $y \in [0; 1]$. Имеем:

$$\exists\, G(a) = \int\limits_0^1 F(y)\, dy \overset{(54)}{=} \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(xy)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} dx \int\limits_0^1 e^{-ax}\cos(xy)\, dy =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left[e^{-ax}\cdot\frac{\sin(xy)}{x}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cdot\frac{\sin x}{x}\, dx.$$

С другой стороны, интеграл вида (54) был вычислен нами ранее, и для него было получено значение

$$F(y) = \big[\text{Демидович, № 1828}\big] = \left[\frac{y\sin(xy) - a\cos xy}{a^2 + y^2}e^{-ax}\right]_{x=0}^{x=+\infty} = \frac{a}{a^2 + y^2},\ \forall \text{fix}\ a > 0.$$

Таким образом:

$$G(a) = \int\limits_0^1 F(y)\, dy = \int\limits_0^1 \frac{a\, dy}{a^2 + y^2} = \left[\operatorname{arctg}\frac{y}{a}\right]_0^1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{a},\ a > 0.$$

Ранее на основании признака Абеля было показано, что $G(a) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\frac{\sin x}{x}\, dx \overset{a\in[0;+\infty[}{\rightrightarrows}$.

А так как в данном случае $g(x, a) = e^{-ax}\dfrac{\sin x}{x}$ - непрерывна для $\forall\, x \neq 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$ и выполняется $g(x, a) \xrightarrow[x\to+0]{} 1 \in \mathbb{R}$, то $G(a)$ будет непрерывна для НИЗОП-2 как функция от $a \geqslant 0$. В связи с этим:

$$\lim_{a\to+0} G(a) = G(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\,\frac{\sin x}{x}\, dx\,\Bigg|_{a=0} = \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x} dx = I,$$

$$I = \lim_{a\to+0} G(a) = \lim_{a\to+0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{a}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (53).$$

Следствие (*обобщение интеграла Дирихле*).

Для $\forall\, b \in \mathbb{R}$ существует интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(bx)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} b = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & b > 0, \\ 0, & b = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & b < 0. \end{cases} \tag{55}$$

Доказательство. Действительно, если $b > 0$, то, делая замену $t = bx \Big|_0^{+\infty}$, получим:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\left(\frac{t}{b}\right)} \cdot \frac{dt}{b} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Если же $b < 0$, то аналогичным образом получаем:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin bx}{x} dx = -\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(-bx)}{x}\, dx \overset{-b > 0}{=} -\frac{\pi}{2}.$$

Случай $b = 0$ проверяется непосредственной подстановкой. $\square$

Интегралами Фруллани будем называть интегралы вида

$$\Phi(a;b) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx, \tag{56}$$

где $a, b = \text{const} > 0$.

В зависимости от свойств подынтегральной функции в (56), рассмотрим три основные формулы для вычисления интеграла Фруллани. Для этого нам понадобится с следующая

23 Лемма Фруллани.

Лемма Фруллани.

Если для функции $f(x)$, определённой для $\forall\ x > 0$, функция $\dfrac{f(x)}{x}$ интегрируема на любом конечном промежутке из $\left]\,0; +\infty\,\right[$, то тогда для $\forall\ a, b, \alpha, \beta = \text{const} > 0$ верно равенство

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx \tag{57}$$

Доказательство.

Используя аддитивность интеграла Римана, после соответствующей замены имеем:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax)}{x} dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f(bx)}{x} dx = \begin{bmatrix} 1)\ t = ax\big|_{\alpha a}^{\beta a} \\ 2)\ t = bx\big|_{\alpha b}^{\beta b} \end{bmatrix} = \int\limits_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{\frac{t}{a}} \cdot \frac{dt}{a} - \int\limits_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{\frac{t}{b}} \cdot \frac{dt}{b} =$$

$$= \int\limits_{\alpha a}^{\beta a} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{\alpha b}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt = \left(\int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} + \int\limits_{\alpha b}^{\beta a} \right) - \left(\int\limits_{\alpha b}^{\beta a} + \int\limits_{\beta a}^{\beta b} \right) = \int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt - \int\limits_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt =$$

$$= \left[\text{Some comments here :)}\right] = \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\alpha x)}{\alpha x}\ \alpha\ dx - \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\beta x)}{\beta x}\ \beta\ dx = \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} dx.$$

$\square$

24 Первая теорема Фруллани.

Первая теорема Фруллани. Если $f(x)$ непрерывна для $\forall\, x \geqslant 0$ и $\exists f(\infty) \in \mathbb{R}$, то

$$\Phi(a,b) = \Big(f(0) - f(+\infty) \Big) \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{58}$$

Доказательство. В силу леммы Фруллани для (56), имеем:

$$\Phi(a,b) = \lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+\infty}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx \overset{(57)}{=} \lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\alpha x)-f(\beta x)}{x}\,dx =$$

$$= \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\alpha x)}{x}\,dx - \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_{a}^{b} \frac{f(\beta x)}{x}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{По теореме о среднем для ОИ:} \\ 1)\ \exists\, c_1 \in [a;b] \Rightarrow \displaystyle\int\limits_a^b \frac{f(\alpha x)}{x}dx = f(\alpha c_1)\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = f(\alpha c_1)\ln\frac{b}{a} \\ 2)\ \exists\, c_2 \in [a;b] \Rightarrow \displaystyle\int\limits_a^b \frac{f(\beta x)}{x}dx = f(\beta c_2)\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = f(\beta c_2)\ln\frac{b}{a} \end{bmatrix} = \lim_{\substack{\alpha\to+0\\ \beta\to+\infty}} \Big(f(\alpha c_1) - f(\beta c_2) \Big) \ln\frac{b}{a} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1)\ \alpha a \leqslant \alpha c_1 \leqslant \alpha b \Rightarrow \big[\alpha \to +0,\ \alpha c_1 \to 0\big] \Rightarrow f(\alpha c_1) \xrightarrow[\alpha\to+0]{} f(0) \\ 2)\ \beta a \leqslant \beta c_2 \leqslant \beta b \Rightarrow \big[\beta \to +\infty,\ \beta c_2 \to \infty\big] \Rightarrow f(\beta c_2) \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} f(+\infty) \end{bmatrix} = \Big(f(0) - f(+\infty) \Big) \ln\frac{b}{a}.$$

□

25 Вторая теорема Фруллани.

Вторая теорема Фруллани.

Пусть $f(x)$ непрерывна для $\forall\ x \geqslant 0$ и $\forall\ A > 0 \Rightarrow \exists \int\limits_{A}^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} dx \in \mathbb{R}$ - сходится.

Тогда:

$$\Phi(a, b) \overset{(56)}{=} f(0) \ln \frac{b}{a}. \tag{59}$$

Доказательство. Действуя как в предыдущей теореме, получим:

$$\Phi(a, b) \overset{(56)}{=} \lim_{\substack{\alpha \to +0 \\ \beta \to +\infty}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\, dx = \ldots = \lim_{\alpha \to +0} \int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} \frac{f(t)}{t} dt - \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_{\beta a}^{\beta b} \frac{f(t)}{t} dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} 1)\ \exists\ c \in [\alpha a; \alpha b] \Rightarrow \int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} \dfrac{f(\alpha t)}{t} dt = f(c) \int\limits_{\alpha a}^{\alpha b} \dfrac{dt}{t} = f(c) \ln \dfrac{b}{a} \\ 2) \int\limits_{\beta a}^{\beta b} \dfrac{f(t)}{t} dt = \int\limits_{A > 0}^{\beta b} \dfrac{f(t)}{t} dt\ - \int\limits_{A > 0}^{\beta a} \dfrac{f(t)}{t} dt \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} \underbrace{\int\limits_{A > 0}^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t} dt}_{\text{сходится}} - \underbrace{\int\limits_{A > 0}^{+\infty} \dfrac{f(t)}{t} dt}_{\text{сходится}} = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \lim_{\alpha \to +0} f(c) \ln \frac{b}{a} = \begin{bmatrix} \alpha a \leqslant c \leqslant \beta b \\ \alpha \to +0,\ c \to 0 \end{bmatrix} = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$

$\square$

26 Третья теорема Фруллани.

Третья теорема Фруллани.

Пусть $f(x)$ непрерывна для $\forall\, x > 0$ и $\exists\, f(+\infty) \in \mathbb{R}$.

Тогда, если для $\forall\, A > 0 \Rightarrow \int\limits_0^A \frac{f(x)}{x} dx$ сходится, то

$$\Phi(a,b) \overset{(56)}{=} -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}. \tag{60}$$

Доказательство. Рассмотрим $f_0(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, непрерывную для $\forall\, t > 0$.

Во-первых, $\exists\, f_0(+0) = \lim\limits_{t\to+0} f\left(\frac{1}{t}\right) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$, поэтому f_0 можно доопределить в точке $t = 0$, приняв $f_0(0) = f_0(+0) = f(+\infty) \in \mathbb{R}$.

Во-вторых, для $\forall\, A_0 > 0 \Rightarrow \exists \int\limits_{A_0}^{+\infty} \frac{f_0(t)}{t} dt = \begin{bmatrix} t = \frac{1}{x} \\ A = \frac{1}{A_0} > 0 \end{bmatrix} = \ldots = \int\limits_0^A \frac{f(x)}{x} dx \in \mathbb{R}$ сходится.

Таким образом, в силу второй теоремы Фруллани, имеем:

$$\Phi(a_0, b_0) = \begin{bmatrix} a_0 = \frac{1}{a} > 0 \\ b_0 = \frac{1}{b} > 0 \end{bmatrix} = f_0(0) \cdot \ln \frac{b_0}{a_0} = f(+\infty) \ln \left(\frac{\left(\frac{1}{b}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)} \right) = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

С другой стороны, получаем:

$$\Phi_0(a_0, b_0) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{f_0(a_0 t) - f_0(b_0 t)}{t} dt = \int\limits_0^{+\infty} \left(f_0\left(\frac{a}{t}\right) - f_0\left(\frac{b}{t}\right) \right) \cdot \frac{1}{t}\, dt = \left[t = \frac{1}{x} \right] = \ldots =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \overset{(56)}{=} \Phi(a,b).$$

Таким образом, $\Phi(a,b) = -f(+\infty)\ \ln \frac{b}{a}$. □