

# Ответы к коллоквиуму по курсу

## “Математический анализ”

(1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность “Информатика”)

Определение предельной функции  $f(x) \stackrel{X}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  на  $(\varepsilon - \delta)$ -языке:

$$\text{для } \forall x \in X \text{ и для } \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \nu = \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Для обозначения равномерной сходимости  $f_n(x)$  на  $X$  будем использовать запись:

$$f_n(x) \stackrel{X}{\Rightarrow} f(x). \quad (2)$$

## 1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

**Теорема** (Супремальный критерий равномерной сходимости ФП).

$$f_n(x) \stackrel{X}{\Rightarrow} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3)$$

*Доказательство.*  $(\Rightarrow)$  Если выполнена (2), то, учитывая, что в (1) используется  $\forall n \geq \nu(\varepsilon)$  и  $\forall x \in X$ , получаем

$$r_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \text{ т.е.}$$

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leq r_n \leq \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$(\Leftarrow)$  Пусть выполнена (3), тогда

$$\begin{aligned} &\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall x \in X \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем (1), где  $\nu$  зависит от  $\forall \varepsilon > 0$  и не зависит от конкретного элемента множества  $X$ .  $\square$

### Замечания:

1. Если известно, что для  $\forall n \in \mathbb{N}$  и для  $\forall x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq a_n$ , где  $(a_n)$  - б.м.п, то тогда имеем (2). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.

2. Если

$$\exists x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

то тогда равномерной сходимости нет, т.е.  $f_n(x) \not\stackrel{X}{\Rightarrow} f(x)$ . Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

Для обозначения равномерной сходимости ФР  $\sum u_n(x)$  на  $X$  будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X} . \quad (4)$$

Критерий Коши сходимости ФР: (4)  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid$  для  $\forall n \geq \nu$  и для  $\forall m \in \mathbb{N}$  и для  $\forall x \in X \Rightarrow$

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Критерий Коши сходимости числовых последовательностей:

$$(6)$$

## 2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

**Теорема** (мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР).

Если ФР имеет на  $X$  сходящуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на  $X$ .

*Доказательство.* Доказательство с использованием критерия Коши сходимости числовых последовательностей и критерия Коши сходимости ФР (5):

Т.к.  $\sum a_n$  сходится, то

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{ для } \forall n \geq \nu \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon. \quad (7)$$

Если выполняется неравенство  $|u_n(x)| \leq a_n$ , для  $\forall n \in \mathbb{N}$  и для  $\forall x \in X$ , то для частичных сумм ФР  $\sum u_n(x)$  имеем:

$$|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leq \varepsilon, \text{ это для } \forall n \geq \nu = \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N},$$

что в силу (5) даёт (4).  $\square$

**Замечания:**

1. Принцип Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходимость числовой мажоранты ( $a_n$ ) либо находится с помощью соответствующих оценок  $|u_n(x)|$  сверху, либо берут  $a_n = \sup_{x \in X} |u_n(x)|$ . В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости  $\sum a_n$  даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.
2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты - признак равномерной сходимости ФР, используют функцию мажоранты, а именно получаем:

$$\text{если } \exists v_n(x) \geq 0 : |u_n(x)| \leq v_n(x) \text{ для } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall x \in X \text{ и } \sum v_n(x) \xrightarrow{X},$$

то тогда для ФР  $\sum u_n(x)$  имеем (4).

### 3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

**Теорема** (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП  $a_n(x)$  частичные суммы  $\sum a_n(x)$  ограничены в совокупности (равномерно на  $X$ ), т.е.

$$\text{для } \forall x \in X \text{ и для } \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \dots + a_n(x)| \leq c, \quad (8)$$

где  $c = \text{const} > 0$ , не зависит ни от  $n$ , ни от  $x$ . Если  $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow (b_n(x))$  - числовая последовательность является монотонной, то в случае

$$(b_n(x)) \xrightarrow{X} 0, \quad (9)$$

имеем  $\sum a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{X}$ .

*Доказательство.* Монотонная последовательность  $(b_n(x))$  для  $\forall \text{ fix } x \in X$  позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (8) оценку Абеля:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2c (|b_{n+1}(x)| + 2|b_{n+m}(x)|). \quad (10)$$

Если выполняется (9), то тогда имеем:

$$\text{для } \forall \varepsilon > 0 \text{ по } \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0 \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall n \geq \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall m \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall x \in X \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leq \tilde{\varepsilon} \text{ и } |b_{n+m}(x)| \leq \tilde{\varepsilon},$$

поэтому для частичных сумм  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)b_k(x)$  в силу (10) для  $\forall n \geq \nu(\varepsilon)$  и для  $\forall m \in \mathbb{N}$  и для  $\forall x \in X$  имеем:

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x) \right| \leq 2 \cdot c \cdot (\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}) = 6 \cdot c \cdot \tilde{\varepsilon} = \varepsilon. \text{ Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости}$$

ФР следует, что  $\sum a_n(x)b_n(x) \xrightarrow{X}$ . □

**Следствие** (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если  $\forall \text{ fix } x \in X$  последовательность  $(b_n(x))$  является монотонной, то в случае  $b_n(x) \xrightarrow{X} 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n(x) \xrightarrow{X}$ .

*Доказательство.* Следует из того, что в условии теоремы  $a_n = (-1)^n$  не зависит от  $x$ , причём

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq 1 = \text{const}, \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Для обозначения поточечной сходимости ФР  $\sum u_n(x)$  на  $X$  будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \xrightarrow{X} . \quad (11)$$

## 4 Признак Дини равномерной сходимости ФР и следствие из него (теорема Дини для ФП)

**Теорема** (*Признак Дини равномерно сходящихся ФР*).

Пусть

1. Члены ФР  $\sum u_n(x)$  непрерывны и сохраняют один и тот же знак на  $X = [a, b]$ , для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
2.  $\sum u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$ .

Тогда, если  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  - непрерывная функция на  $[a, b]$ , т.е.  $S(x) \in C([a, b])$ , то  $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим на  $X = [a, b]$  остатки ряда  $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \dots = S(x) - S_n(x)$ . Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. для  $\forall \text{ fix } n \in \mathbb{N} \Rightarrow R_n(x)$  - непрерывная функция на  $[a, b]$  как разность двух непрерывных функций.
2. для  $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow \Phi\P (R_n(x))$  убывает в случае, когда  $\forall u_n(x) > 0$ , т.к.  
 $R_n(x) = u_n(x) + R_{n+1}(x) \geq R_{n+1}(x)$ , для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
3. Т.к. имеет место (11), то для  $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow R_n(x) \xrightarrow{X} 0$ .

Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на  $X$  ФР не является равномерной сходимостью на  $X$ .

Тогда по правилу де Моргана имеем:  $\exists \varepsilon_0 > 0 \mid$  для  $\forall \nu \in \mathbb{R} \exists n(\nu) \geq 0$  и  $\exists x(\nu) \in X \mid R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$ . Для простоты будем считать, что  $\exists x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$ . По принципу выбора из ограниченной последовательности  $x_n$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е.  $x_{n_k} \xrightarrow{n_k \rightarrow \infty} x_0$ , при этом в силу использования  $x = [a, b]$  - компакт, получаем, что  $x_0 \in X$ . Если зафиксируем  $m \in \mathbb{N}$ , то для  $\forall n_k \geq m \Rightarrow R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$ , по свойствам остатков будем иметь, что  $R_m(x_{n_k}) \geq R_{n_k}(x_{n_k}) > \varepsilon_0$ . В неравенстве  $R_m(x_{n_k}) > \varepsilon_0$ , переходя к пределу при  $n_k \rightarrow \infty$  для  $\forall m \in \mathbb{N}$ , получаем в силу непрерывности  $R_n(x) : R_m(x_0) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} R_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0$ , что противоречит последнему из свойств остатка, а именно  $R_m(x_0) \xrightarrow{X} 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , поэтому из нашего предположения следует, что выполняется  $R_m(x_0) \rightarrow 0$ , противоречие, т.е. выполняется  $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$ .  $\square$

**Следствие** (*Теорема Дини для ФП*).

Если для ФП  $f_n(x), n \in \mathbb{N}$  на  $X = [a, b]$  выполняются свойства:

1. для  $\forall f_n(x) \in C([a, b])$  и для  $\forall \text{ fix } x \in X \Rightarrow f_n(x)$  монотонна.
2.  $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$ . Тогда, если  $f(n) \in C([a, b])$ , то  $f_n(x) \xrightarrow{X}$ .

*Доказательство.* следует из того, что члены рассматриваемой ФП  $f_n(x)$  можно рассматривать как частичные суммы соответствующего ФР с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Действительно,  $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x)$ , для  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

А далее к соответствующему ФР применима теорема Дини равномерной сходимости ФР.  $\square$

## 5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

**Теорема** (о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР).

Если все члены  $u_n(x), n \in \mathbb{N}$  ФР (??) непрерывны на  $X = [a, b]$ , то в случае равномерной сходимости этого ряда на  $[a, b]$  его сумма  $S(x)$  будет непрерывной функцией на  $[a, b]$ .

*Доказательство.* Требуется обосновать (??)  $\forall x_0 \in [a, b]$ , причём в случае концевых значений  $x_0 = a, x_0 = b$  будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для *fix*  $x_0 \in [a, b]$  придадим произвольные приращения  $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$  и рассмотрим соответствующие приращения суммы (??) ФР (??):

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР (??) на  $X = [a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq \nu, \forall x \in [a, b]$  для частичных сумм  $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$  ряда (??) имеем:  $|S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon$ .

Отсюда, в частности, для  $x = x_0 \in X$  и  $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leq \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (13)$$

Далее из непрерывности  $\forall u_n(x)$  в  $x_0 \in [a, b]$  следует непрерывность частичных сумм в  $x_0$  (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для  $\forall \varepsilon, \exists \delta > 0, \forall |\Delta x| \leq \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leq \varepsilon. \quad (14)$$

Таким образом, в силу (13), (14) имеем:  $\forall \varepsilon > 0$ , выбирая  $n \geq \nu$  и рассматривая  $\forall |\Delta x| \leq \delta$ , имеем:

$$\begin{aligned} |\Delta S(x_0)| &= |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leq \\ &\leq |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Вследствие этого:  $\forall \varepsilon \exists \delta > 0, \forall |\Delta x| \leq \delta \Rightarrow |\Delta S(x_0)| \leq M \cdot \varepsilon, M = \text{const} = 3 > 0$ .

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что  $\Delta S(x_0) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$ , что на языке приращений равносильно (??). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость ЧР в правой части (??) будет сходящимся.  $\square$

### Замечания:

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.
2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества  $X \subset \mathbb{R}$  на локальную равномерную сходимость.

## 6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

**Теорема** (о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР).

Если  $\forall u_n(x) \in C([a, b])$ ,

$n \in \mathbb{N}$ , то в случае, когда  $\sum u_n(x) \xrightarrow{[a, b]}$ , возможно почленное интегрирование этого ряда на  $[a, b]$ , т.е.

$$\exists \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx. \quad (15)$$

*Доказательство.* На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР получим, что сумма ряда  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  будет непрерывна на  $[a, b]$ , а значит, интегрируема на  $[a, b]$ .

Используя частичные суммы (??) для (??), рассмотрим частичные суммы  $T_n = \int_a^b S_n(x)dx =$

$$= \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x)dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x)dx \text{ для ЧР правой части (15).}$$

Требуется доказать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b S(x)dx$ .

Из равномерной сходимости (??) на  $[a, b]$  получим, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \mid \forall n \geq \nu$  и  $\forall x \in [a, b] \Rightarrow$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon \quad (16)$$

Отсюда получаем, что  $\left| \int_a^b S(x)dx - I_n \right| = \left| \int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx \right| = \left| \int_a^b (S(x) - S_n(x))dx \right| \leq$

$$\leq \int_a^b |S(x) - S_n(x)| dx \leq \int_a^b \varepsilon dx = M\varepsilon, \text{ где } M = b - a = \text{const} \geq 0. \text{ Таким образом, } \forall \varepsilon > 0 \exists \nu = \nu(\varepsilon) \mid \forall n \geq \nu \Rightarrow$$
$$\left| \int_a^b S(x)dx - I_n \right| \leq M\varepsilon, \text{ поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что}$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left( \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right) dx,$$

что равносильно (15). □

### Замечание.

Если на множестве сходимости  $X \subset \mathbb{R}$  для (??) нет равномерной сходимости, но есть локальная равномерная сходимость, то в случае непрерывности  $\forall u_n(x)$  на  $X$  можно почленно интегрировать ФР (??) на  $\forall [a, b] \subset X$ .

## 7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

**Теорема** (о почленном дифференцировании ФР).

Пусть ФР (??) на  $X = [a, b]$  удовлетворяет условиям:

1.  $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$ ,
2.  $\exists u'_n(x)$ , непрерывная для  $\forall n \in \mathbb{N}, x \in X$ .

Тогда, если

$$\sum u'_n(x) \xrightarrow{X} \quad (17)$$

то рассмотренный ФР (??) можно почленно дифференцировать на  $[a, b]$ , т.е.

$$\exists \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{k=n}^{\infty} u'_n(x), \forall x \in X. \quad (18)$$

*Доказательство.* В силу (17), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР  $\sum u'_n(t)$  можно почленно интегрировать на  $\forall[a, x] \subset [a, b]$ , т.е.

$$\exists \int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x u'_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n(x) - u_n(a)).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для (??)) получаем, что

$$\exists S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) dt.$$

Используя далее теорему Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$$\exists S'(x) = (const)' + \left( \int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \right) dt \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \text{ что соответствует (18).}$$

□



- 8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.
- 9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.
- 10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.
- 11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).
- 12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.
- 13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.
- 14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.
- 15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.
- 16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.
- 17 Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.
- 18 Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.
- 19 Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.
- 20 Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.
- 21 Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.
- 22 Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.
- 23 Лемма Фруллани.
- 24 Первая теорема Фруллани.
- 25 Вторая теорема Фруллани.
- 26 Третья теорема Фруллани.