# Ответы к коллоквиуму по курсу "Математический анализ"
## (1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность "Информатика")

Определение предельной функции $f(x) \overset{X}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ на $(\varepsilon - \delta)$-языке:

$$\text{для } \forall\ fix\ x \in X \text{ и для } \forall\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \nu = \nu(x, \varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Для обозначения равномерной сходимости $f_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x). \tag{2}$$

## 1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

**Теорема** (*Супремальный критерий равномерной сходимости ФП*).

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3}$$

*Доказательство.* $\Rightarrow$ Если выполнена (2), то, учитывая, что в (1) используется $\forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon)$ и $\forall\ fix\ x \in X$, получаем

$$\begin{aligned}
&r_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ т.е.} \\
&\text{для } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leqslant r_n \leqslant \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Пусть выполнена (3), тогда

$$\begin{aligned}
&\text{для } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall\ x \in X \Rightarrow \\
&\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем (1), где $\nu$ зависит от $\forall\ \varepsilon > 0$ и не зависит от конкретного элемента множества $X$. □

**Замечания:**

1. Если известно, что для $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\ x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, где $(a_n)$ - б.м.п, то тогда имеем (2). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.

2. Если
$$\exists\ x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0,$$
то тогда равномерной сходимости нет, т.е. $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$. Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

Для обозначения равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} . \tag{4}$$

Критерий Коши сходимости ФР: (4) $\Leftrightarrow$ для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X \Rightarrow$

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{k=n+m} u_k(x) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Критерий Коши сходимости числовых последовательностей:

$$\tag{6}$$

## 2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

**Теорема** (*мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР*).
Если ФР имеет на $X$ сходяющуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на $X$.

*Доказательство.* Доказательство с использованием критерия Коши сходимости числовых последовательностей и критерия Коши сходимости ФР (5):
Т.к. $\sum a_n$ сходится, то

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Если выполняется неравенство $|u_n(x)| \leqslant a_n,$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$, то для частичных сумм ФР $\sum u_n(x)$ имеем: $|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leqslant \varepsilon$, это для $\forall\, n \geqslant \nu = \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, что в силу (5) даёт (4). $\square$

**Замечания:**

1. Принцип Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходимость числовой мажоранты $(a_n)$ либо находится с помощью соответствующих оценок $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \sup\limits_{x \in X} |u_n(x)|$. В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости $\sum a_n$ даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.

2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты - признак равомерной сходимости ФР, используют функцию мажоранты, а именно получаем:

$$\text{если } \exists\, v_n(x) \geqslant 0\ :\ |u_n(x)| \leqslant v_n(x) \text{ для } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \text{ и } \sum v_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows},$$

то тогда для ФР $\sum u_n(x)$ имеем (4).

# 3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

**Теорема** (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП $a_n(x)$ частичные суммы $\sum a_n(x)$ ограничены в совокупности (равномерно на $X$), т.е.

$$\text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x)| \leqslant c, \tag{8}$$

где $c = const > 0$, *не зависит ни от* $n$, *ни от* $x$. Если $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow (b_n(x))$ - числовая последовательность является монотонной, то в случае

$$(b_n(x)) \overset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{9}$$

имеем $\sum a_n(x) b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

*Доказательство.* Монотонная последовательность $(b_n(x))$ для $\forall\, fix\ x \in X$ позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (8) оценку Абеля:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x) b_k(x) \right| \leqslant 2c \left( |b_{n+1}(x)| + 2\, |b_{n+m}(x)| \right). \tag{10}$$

Если выполняется (9), то тогда имеем:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ по } \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon} \text{ и } |b_{n+m}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon},$$

поэтому для частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(x)$ в силу (10) для $\forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$ имеем: $|S_{n+m}(x) - S_m(x)| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k(m) b_k(x) \right| \leqslant 2 \cdot c \cdot (\tilde{\varepsilon} + 2\tilde{\varepsilon}) = 6 \cdot c \cdot \tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости ФР следует, что $\sum a_n(x) b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. □

**Следствие** (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если $\forall\, fix\ x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ является монотонной, то в случае $b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

*Доказательство.* Следует из того, что в условии теоремы $a_n = (-1)^n$ не зависит от $x$, причём $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant 1 = const$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Для обозначения поточечной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} . \tag{11}$$

# 4 Признак Дини равномерной сходимости ФР и следствие из него (теорема Дини для ФП)

**Теорема** (*Признак Дини равномерно сходящихся ФР*).
Пусть

1. Члены ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны и сохраняют один и тот же знак на $X = [a, b]$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. $\sum u_n(x) \overset{X}{\to} S(x)$.

Тогда, если $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$, т.е. $S(x) \in C([a, b])$, то $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

*Доказательство.* Рассмотрим на $X = [a, b]$ остатки ряда $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \ldots + \ldots = S(x) - S_n(x)$. Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. для $\forall\, fix\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ как разность двух непрерывных функций.
2. для $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow$ ФП $(R_n(x))$ убывает в случае, когда $\forall\, u_n(x) > 0$, т.к.
$R_n(x) = u_n(x) + R_{n+1}(x) \geqslant R_{n+1}(x)$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. Т.к. имеет место (11), то для $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow R_n(x) \overset{X}{\to} 0$.

Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на $X$ ФР не является равномерной сходимостью на $X$.

Тогда по правилу де Моргана имеем: $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \mid$ для $\forall\, \nu \in \mathbb{R}\ \exists\, n(\nu) \geqslant 0$ и $\exists\, x(\nu) \in X \mid R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$. Для простоты будем считать, что $\exists\, x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$. По принципу выбора из ограниченной последовательности $x_n$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. $x_{nk} \underset{n_k \to \infty}{\longrightarrow} x_0$, при этом в силу использования $X = [a, b]$ - компакт, получаем, что $x_0 \in X$. Если зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, то для $\forall\, n_k \geqslant m \Rightarrow R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$, по свойствам остаткам будем иметь, что $R_m(x_{nk}) \geqslant R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$. В неравенстве $R_m(x_{nk}) > \varepsilon_0$, переходя к пределу при $n_k \to \infty$ для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, получаем в силу непрерывности $R_n(x)$ : $R_m(x_0) = \lim\limits_{n_k \to \infty} R_m(x_{nk}) \geqslant x_0$, что противоречит последнему из свойств остатка, а именно $R_m(x_0) \xrightarrow{X}$ при $m \to \infty$, поэтому из нашего предположения следует, что выполняется $R_m(x_0) \to 0$, противоречие, т.е. выполняется $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. □

**Следствие** (*Теорема Дини для ФП*).
Если для ФП $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ на $X = [a, b]$ выполняются свойства:

1. для $\forall\, f_n(x) \in C([a, b])$ и для $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow f_n(x)$ монотонна.
2. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда, если $f(n) \in C([a, b])$, то $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

*Доказательство.* следует из того, что члены рассматриваемой ФП $f_n(x)$ можно рассматривать как частичные суммы соответствующего ФР с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Действительно, $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x)$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

А далее к соответствующему ФР применима теорема Дини равномерной сходимости ФР. □

Пусть $x_0$ - предельная точка множества сходимости $X \subset \mathbb{R}$ для ФР $\sum u_n(x)$. Будем говорить, что в $\sum u_n(x)$ *возможен почленный предельный переход* $x \to x_0$, если

$$\exists\, lim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} lim u_n(x), \tag{13}$$

причём получившийся в левой части (13) ЧР является сходящимся.

В частности, если $x_0 \in X$ и $\forall\, u_n(x)$ непрерывен в некоторой окрестности точки $x_0$, и значит, для $\forall\, n \in \mathbb{N}\, \exists \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = u_n(x_0)$, то в случае выполнения (13) для суммы $S(x)$ ФР $\sum u_n(x)$ при $x \to x_0$ имеем:

$$\exists \lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x), \tag{14}$$

что соответствует непрерывности $S(x)$ в точке $x_0 \in X$.

# 5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

**Теорема** (*о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР*).

Если все члены $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны на $X = [a, b]$, то в случае равномерной сходимости этого ряда на $[a, b]$ его сумма $S(x)$ будет непрерывной функцией на $[a, b]$.

*Доказательство.* Требуется обосновать (14) для $\forall\, x_0 \in [a, b]$, причём в случае концевых значений $x_0 = a,\ x_0 = b$ будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для $fix\ x_0 \in [a, b]$ придадим произвольные приращения $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ и рассмотрим соответствующие приращения суммы ФР $\sum u_n(x)$:

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b] \Rightarrow$ для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu$, и для $\forall\, x \in [a, b]$ для частичных сумм $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ ряда $\sum u_n(x)$ имеем: $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

Отсюда, в частности, для $x = x_0 \in X$ и $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leqslant \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{15}$$

Далее из непрерывности $\forall\, u_n(x)$ в $x_0 \in [a, b]$ следует непрерывность частичных сумм в $x_0$ (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta > 0$ : для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Таким образом, в силу (15), (16) имеем: для $\forall \varepsilon > 0$, выбирая $n \geqslant \nu$ и рассматривая $\forall\, |\Delta x| \leqslant \delta$, имеем:

$|\Delta S(x_0)| = |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant$
$\leqslant |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon.$

Поэтому получаем: для $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta > 0 :$ для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow |\Delta S(x_0)| \leqslant M \cdot \varepsilon, M = const = 3 > 0$.

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что $\Delta S(x_0) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, что на языке приращений равносильно (14). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость ЧР в правой части (14) будет сходящимся. □

**Замечания:**

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.

2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}$ на локальную равномерную сходимость. Будем говорить, что ФР $\sum u_n(x)$ сходится локально равномерно на $X \subset \mathbb{R}$, если для $\forall\, [a, b] \subset X \Rightarrow \sum u_n(x)(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$. У $\sum u_n(x)$ может быть локальная равномерная сходимость на $X$, но может не быть полной (???) равномерной сходимости на $X$. В случае локальной равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на $X$ берём $\forall x_0 \in X$ и заключаём её в некоторый отрезок $x_0 \in [a, b] \subset X$. Т.к. есть равномерная сходимость для $\sum u_n(x)$ на этом отрезке, то по доказанной теореме сумма $S(x)$ в случае непрерывности $\forall\, u_n(x)$ на $X$ будет непрерывна на $[a, b] \subset X$ и, в частности, непрерывна в $x_0 \in X$, а т.к. это можно сделать для $\forall\, x_0 \in X$, то тем самым получаем непрерывность $S(x)$ на $X \subset \mathbb{R}$ даже в случае, когда нет равномерной сходимости ФР на $X$.

## 6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

**Теорема** (*о почленном интегрировании равномерно сходящихся ФР*).

Если $\forall\, u_n(x) \in C([a,b])$,

для $n \in \mathbb{N}$, то в случае, когда $\sum u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$, возможно почленное интегрирование этого ряда на $[a,b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx. \tag{17}$$

*Доказательство.* На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящихся ФР получим, что сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет непрерывна на $[a,b]$, а значит, интегрируема на $[a,b]$.

Используя частичные суммы для $\sum u_n(x)$, рассмотрим частичные суммы $T_n = \int\limits_a^b S_n(x)dx =$

$= \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx$ для ЧР правой части (17).

Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на $[a,b]$ получим, что для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu$ и для $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \varepsilon \tag{18}$$

Отсюда получаем, что $\left|\int\limits_a^b S(x)dx - I_n\right| = \left|\int\limits_a^b S(x)dx - \int\limits_a^b S_n(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b (S(x) - S_n(x))dx\right| \leqslant$

$\leqslant \int\limits_a^b |S(x) - S_n(x)|\, dx \leqslant \int\limits_a^b \varepsilon dx = M\varepsilon$, где $M = b - a = const \geqslant 0$.

Таким образом, для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow \left|\int\limits_a^b S(x)dx - I_n\right| \leqslant M\varepsilon$, поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} I_n = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx,$$

что равносильно (17). $\square$

# 7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

**Теорема** (*о почленном дифференцировании ФР*).
Пусть ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b]$ удовлетворяет условиям:

1. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$,
2. $\exists\, u_n^{'}(x)$, непрерывная для $\forall\, n \in \mathbb{N}, x \in X$.

Тогда, если

$$\sum u_n^{'}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \tag{19}$$

то рассматриваемый ФР $\sum u_n(x)$ можно почленно дифференцировать на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{'}(x), \text{для } \forall\, x \in X. \tag{20}$$

*Доказательство.* В силу (19), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР $\sum u_n^{'}(t)$ можно почленно интегрировать на $\forall\, [a, x] \subset [a, b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n^{'}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( u_n(x) - u_n(a) \right).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для $\sum u_n(x)$) получаем, что

$$\exists\, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int\limits_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) dt.$$

Используя далее *теорему Барроу* о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$$\exists\, S^{'}(x) = (const)^{'} + \left( \int\limits_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) \right) dt \right)_x^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x),$$

что соответствует (20). □

Под *степенным рядом* будем подразумевать ФР вида

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \tag{21}$$

где fix $x_0 \in \mathbb{R}$ - центр для СтР, а $\forall\, a_n \in \mathbb{R}$ - соответствующая числовая последовательность (*коэффициенты СтР*).

# 8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.

**Теорема Абеля** (*о сходимости степенных рядов*).

Если СтР (21) сходится при $x = x_1 \neq x_0$, то он будет сходится абсолютно для любого $x$, где

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|\,. \tag{22}$$

*Доказательство.* Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1-x_0)^n$ следует в силу необходимого условия сходимости ЧР, что $a_n(x_1-x_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ , а т.к. $\forall$ ЧП является ограниченной, то $\exists\, M = \text{const} > 0 : |a_n(x_1-x_0)^n| \leqslant M,$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{|x_1-x_0|^n}. \tag{23}$$

Для $\forall\, x$, удовлетворяющего (22), в силу (23) получаем:

$$|a_n(x-x_0)^n| = |a_n|\,|x-x_0|^n \overset{(23)}{\leqslant} \frac{M\,|x-x_0|^n}{|x_1-x_0|^n} = Mq^n,\ \text{где } q = \frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|} \in [0;1[.$$

Таким образом, мы получили сходящуюся мажоранту, ибо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n = M\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $q \in [0;1[$.

По признаку сравнения сходимости ЧР имеем, что для $\forall\, x$, удовлетворяющего (22), ряд (21) будет сходиться. □

**Замечание.**

Из полученных выше результатов следует, что если рассмотреть множество $X_0$ всех $x$, удовлетворяющих (22), то имеем, что $X_0 \subset X$, т.е. $X_0$ - некоторое подмножество множества $X$ сходимости для (21).

# 9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.

**Теорема** (*формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР*).

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{24}$$

то для радиуса сходимости ряда (21) имеем:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{25}$$

*Доказательство.*

Без ограничения общности будем считать, что в (21) $\forall\, a_n \neq 0$. Т.к. СтР (21) сходится при $x = x_0$, то рассмотрим случай $x \neq x_0$.

Если $x \in I = \left]\, x_0 - R\, ;\, x_0 + R \,\right[$, где $R \geqslant 0$, то по признаку Даламбера сходимости ЧР для (21) имеем:

$$\exists\, d=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}\right|}{\left|a_n(x-x_0)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x-x_0|\overset{(25)}{=}\frac{|x-x_0|}{R}.$$

В силу того, что $x \in I$ и, значит, $|x - x_0| < R$, получаем, что $d < 1$ и СтР (21) будет сходящимся. Если $d > 1$, т.е. $|x - x_0| > R$, то (21) расходится. Таким образом, (25) будет радиусом сходимости для (21). $\square$

# 10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.

**Теорема** (*формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР*).

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \tag{26}$$

то для радиуса сходимости ряда (21) имеем:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{27}$$

*Доказательство* проведём по той же схеме, что и в предыдущей теореме.

Т.к. случай $x = x_0$ тривиален (в данной точке ряд всегда сходится), то рассмотрим случай $x \neq x_0$.

По признаку Коши сходимости ЧР для (21) получаем:

$$\exists\, k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{(27)}{=} \frac{|x-x_0|}{R}.$$

Если $k < 1$, т. е. $|x-x_0| < R$, то СтР (21) сходится.

Если $k > 1$, т. е. $|x-x_0| > R$, то СтР (21) расходится.

Таким образом, в силу определения, величина (27) будет радиусом сходимости для (21).

□

**Замечания:**

1. В силу связи между признаками Даламбера и Коши сходимости ЧР, в случае, когда предел (25) не существует (ни конечный, ни бесконечный), предел (27) может существовать, и в этом смысле формула Коши (27) предпочтительнее, чем (25).

2. Можно показать, что в случае, когда в (27) нет ни конечного, ни бесконечного предела, радиус сходимости для (21) всегда можно вычислить по **формуле Коши-Адамара**, использующей понятие верхнего предела последовательности:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{28}$$

   Под верхним пределом последовательности подразумевается верхняя грань (supremum) множества конечных пределов всех сходящихся подпоследовательностей рассматриваемой последовательности.

# 11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).

**Теорема** (*о локальной равномерной сходимости СтР*).

Если СтР (21) имеет ненулевой радиус сходимости, то этот ряд (21) сходится равномерно на любом отрезке из интервала сходимости данного ряда.

*Доказательство.*

Рассмотрим $\forall\,[a,b] \subset I = \Big]\, x_0 - R\,;\; x_0 + R\,\Big[$, где $R > 0$ - радиус сходимости СтР (21). Имеем:

$$x_0 - R < a < b < x + R \Rightarrow -R < a - x_0 < b - x_0 < R \Rightarrow \begin{cases} |a - x_0| < R, \\ |b - x_0| < R. \end{cases} \tag{29}$$

Полагая $r = \max\Big\{\; |a - x_0|\,,\; |b - x_0|\;\Big\}$, в силу (29) получаем:

$$0 \leqslant r < R. \tag{30}$$

Отсюда для $\forall\, x \in [a,b]$ получаем:

$$|x - x_0| \leqslant \max\Big\{\; |a - x_0|\,,\; |b - x_0|\;\Big\} = r,$$

поэтому для $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ имеем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n|\,|x - x_0|^n \leqslant |a_n|\,r^n = c_n \text{ - мажоранта.}$$

Применяя к ряду $c_n$ обобщённый признак Коши сходимости ЧР, получаем:

$$\exists\; \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,r^n} = r \cdot \underbrace{\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\frac{1}{R}} \overset{(28)}{=} \frac{r}{R} \overset{(30)}{<} 1,$$

а значит, ряд $\sum c_n$ сходится.

Таким образом, мы получили равномерно сходящуюся числовую мажоранту, и поэтому, по мажорантному признаку Вейерштрасса для ФР, рассматриваемый СтР (21) будет равномерно сходиться на $\forall\,[a,b] \subset I$. □

**Замечания:**

1. Из доказанной теоремы следует, что любой СтР сходится локально равномерно на интервале своей сходимости.
2. Применяя теорему Стокса-Зейделя для ФР и учитывая, что в (21) все слагаемые являются непрерывными функциями на $I$, в силу локальной равномерной сходимости (21) на $I$, внутри интервала сходимости сумма любого СтР (21) будет являться непрерывной функцией.

**Следствие** (*о равенстве СтР*).

Если для СтР (21) с непрерывной суммой $S_n(x)$ есть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$ с соответствующей суммой $T(x)$, причём $T(x) = S(x)$ в некоторой окрестности центра разложения $x_0$, то тогда и сами СтР совпадают, т.е. $a_n = b_n$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

*Доказательство.* Пусть имеем, что

$$S(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots = T(x).$$

В силу непрерывности $S(x)$ и $T(x)$ в соответствующей окрестности точки $x_0$ при $x \to x_0$, получаем:

$$\begin{aligned} &a_0 = \lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} T(x) = b_0, \text{ отсюда} \\ &a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots = b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \ldots. \end{aligned}$$

Таким образом, для $\forall\, x \neq x_0$ имеем:

$$a_1 + a_2(x - x_0) + \ldots = b_1 + b_2(x - x_0) + \ldots.$$

Используя опять соответствующую окрестность точки $x_0$, при $x \to x_0$, получим, что $a_1 = b_1$ и так далее (по ММИ). □

# 12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.

**Теорема** (*о дифференцировании СтР*).

Сумма СтР (21) внутри его интервала сходимости является непрерывной дифференцируемой функцией, причём у продифференцированного СтР будет тот же радиус (а, значит, и интервал) сходимости, что и у исходного ряда (21).

*Доказательство.* По теореме о почленном дифференцировании ФР и замечанию к ней достаточно показать, что возможно почленное дифференцирование (21) на $\forall$ отрезке $[a,b] \subset I = \,]\, x_0 - R\,;\, x_0 + R\,[$.

1. В (21) слагаемые $u_n(x) = a_n(x-x_0)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями для $\forall\, x \in [a;b]$ т.к. $\exists\, u_n'(x) = na_0(x-x_0)^{n-1}$ непрерывная на $[a;b]$.

2. Так как $\forall$ СтР (21) сходится поточечно внутри своего интервала сходимости, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{\text{для } \forall\, [a;b]\subset I} S(x)$.

Осталось показать, что продифференцированный СтР

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n \overset{[a;b]}{\rightrightarrows}.$$

Используя *формулу Коши-Адамара*, имеем:

$$\widetilde{R} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\sqrt[n]{n+1}\,\sqrt[n]{|a_{n+1}|}\right)} = \begin{bmatrix} \sqrt[n]{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \\ \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|}\right)^{\frac{n+1}{n}}} = \begin{bmatrix} \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \\ \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{R}} = R.$$

Значит, у исходного и продифференцированного рядов один и тот же радиус, а, значит, и интервал, сходимости. Тогда, в силу того, что $\forall$ СтР сходится локально равномерно, получаем, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n'(x) \overset{[a;b]}{\rightrightarrows} S'(x)$.

Причём, в силу непрерывности слагаемых, S(x) будет непрерывно дифференцируема на $\forall\ [a;b] \subset I$, а, значит, и для $\forall\, x \in I$. □

**Замечания:**

1. Применяя последовательно дифференцирование к СтР (21), получим по ММИ, что сумма ряда (21) будет бесконечное число раз дифференцируемой функцией.

2. Можно показать, что дифференцирование СтР хоть и сохраняет интервал сходимости, но в общем случае *не улучшает* его множество сходимости в том смысле, что если, например, исходный ряд (21) находится на каком-то из концов интервала I ($x = x_0 \pm R$), то продифференцированный ряд уже может расходиться на этом конце.

**Следствие**.

Если на интервале $I = \,]\, x_0 - R\,;\, x_0 + R\,[$ бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ представляется в виде $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, для $\forall\, x \in I$, то для неё СтР (21) будет являться соответствующим рядом Тейлора в окрестности точки $x_0$, т. е. для $\forall\, a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

*Доказательство.* Действительно, дифференцируя почленно $n$ раз равенство

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

в силу доказанной теоремы получим:

$$\exists\, f^{(n)}(x) = n! \cdot a_n + (n+1)! \cdot a_{n+1}(x-x_0) + \ldots$$

Отсюда при $x \to x_0$ имеем:

$$n! \cdot a_n = \lim_{x\to x_0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},$$

т.е. $\forall\, a_n$ - коэффициент в разложении в ряд Тейлора. □

# 13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.

**Теорема** (*о замене переменных в НИ*).

Будем одновременно рассматривать как НИ-1, так и НИ-2.

Пусть $f(x)$ определена для $\forall\, x \in [a; b[$, где либо $b = +\infty$ (НИ-1), либо $f(b-0) = \infty$ (НИ-2).

Если функция $x(t) = \phi(t)$ - *непрерывно дифференцируема* для $\forall\, t \in [\alpha; \beta[$ и *строго монотонна*, то в случае, когда: $\begin{cases} \phi(\alpha) = a, \\ \phi(\beta - 0) = b. \end{cases}$, интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $b = +\infty$ (НИ-1) либо $f(b-0) = +\infty$ (НИ-2), сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt. \tag{31}$$

При этом справедлива формула замены переменных в НИ:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi^{'}(t)dt, \\ x|_{a=\phi(\alpha)}^{b=\phi(\beta-0)}. \end{bmatrix} = \int\limits_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt, \tag{32}$$

причём в правой части (32) может стоять как НИ, так и интеграл Римана.

*Доказательство.* Следует из соответствующей теоремы о замене переменных в ОИ (интеграле Римана).

Для доказательства, выбирая для $\forall\, \gamma \in [\alpha; \beta[$, в силу строгой монотонности $\phi(t)$, получаем что $\phi(\gamma) \in [a; b[$. При этом для $\forall\, c \in [a; b[\ \exists\,!\ \gamma \in [\alpha; \beta[$.

Тогда по *теореме о замене переменных в ОИ* имеем:

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \phi(t) \Rightarrow dx = \phi^{'}(t)dt, \\ x|_{a=\phi(\alpha)}^{c} \Rightarrow \exists\,!\ \gamma \in [\alpha; \beta[, c = \phi(t) \Rightarrow t|_\alpha^\beta. \end{bmatrix} = \int\limits_\alpha^\gamma f(\phi(t))\phi^{'}(t)dt.$$

Отсюда, переходя к пределу и учитывая, что $\gamma \to \beta - 0 \Rightarrow c \to b - 0$, получаем (32). ☐

**Замечание.**

Для НИ-2 вида $\int\limits_a^{b-0} f(x)dx$ после замены переменных имеем:

$$t = \frac{1}{b-x}\Bigg|_{\frac{1}{b-x}>0}^{+\infty}, \text{ а для } x|_a^{b-0},$$

отсюда получаем: $x = b - \dfrac{1}{t} \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{t^2} \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} \dfrac{f(b-\frac{1}{t})}{t^2}dt.$

Тем самым мы *свели НИ-2 к соответствующему НИ-1.* Дальнейшее исследование которого, например, на сходимость, можно проводить с помощью полученных ранее условий сходимости НИ-1.

Аналогично, как и теорема о замене переменных в НИ-2, обосновываются формулы двойной подстановки (аналог формулы Ньютона-Лейбница) и метод интегрирования по частям для НИ-2 и НИ-1.

# 14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.

*Формула Ньютона-Лейбница для НИ.*

Пусть для простоты для $f(x)$, определённой для $\forall\ x \in [a, b[$, где $b = +\infty$ или $f(b-0) = \infty$ существует дифференцируемая первообразная $F(x)$, т.е. $\exists\ F^{'}(x) = f(x)$, для $\forall\ x \in [a, b[$. Тогда имеем:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c\to+\infty, b\to+\infty \\ (c\to b-0, b\to-0)}} \int\limits_a^c f(x)dx = \lim_{c\to b-0} \big[F(x)\big]_a^c =$$
$$= \lim_{c\to b-0} (F(c) - F(a)) = F(b-0) - F(a) = \big[F(x)\big]_a^{b-0}.$$

При этом исходный интеграл сходится тогда и только тогда, когда значения $F(b-0), F(+\infty)$ конечны.

На практике формулы двойной подстановки используются в том же виде, что и для ОИ: $\int\limits_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx\right]_a^b$.

*Интегрирование по частям в НИ.*

Пусть $u = u(x), v = v(x)$ определены для $\forall\ x \in [a; b[$ и $f(b) = \infty$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to b-0 \\ (x\to+\infty)}} u(x)v(x) = u(b-0)v(b-0) \in \mathbb{R}$.

В случае сходимости одного из использованных ниже интегралов, получаем:

$$\int\limits_a^b u(x)v^{'}(x)dx = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int\limits_a^b u^{'}(x)v(x)dx.$$

На практике удобнее использовать:

$$\int\limits_a^b udv = \big[uv\big]_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Функцию $\phi(x)$, определённую на $X$ будем называть *равномерным частным пределом* $f(x,y)$ при $y \to y_0$, если

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \mid \text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, y \in Y \text{ из } 0 < |y - y_0| \leqslant \delta \text{ следует } |f(x,y) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{33}$$

В этом случае будем писать

$$f(x,y) \underset{y \to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x). \tag{34}$$

# 15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.

**Теорема** (*признак равномерной сходимости Ф2П*).
Если функция $f(x,y)$ непрерывна на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$, являющимся компактом в $\mathbb{R}^2$, и $y_0 \in [c,d]$, то имеем:

$$f(x,y) \xrightarrow[y \to y_0, y \in [c,d]]{[a,b]} f(x,y_0). \tag{35}$$

*Доказательство.* Из *теоремы* Кантора для ФНП получаем, что рассматриваемая $f(x,y)$ будет равномерно непрерывна для $\forall\, x \in [a,b]$ и для $\forall\, y \in [c,d]$, т.е.:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \text{ такая, что для } \forall\, \widetilde{x}, \bar{x} \in [a,b] \text{ и для } \forall\, \widetilde{y}, \bar{y} \in Y$$
$$\text{из } \begin{cases} 0 < |\bar{x} - \widetilde{x}| \leqslant \delta, \\ 0 < |\bar{y} - \widetilde{y}| \leqslant \delta. \end{cases} \Rightarrow |f(\widetilde{x}, \widetilde{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant \varepsilon.$$

Полагая здесь: $\begin{cases} \widetilde{x} = \bar{x} = x \in [a,b], \\ \widetilde{y} = y \in [c,d], \\ \bar{y} = y_0 \in [c,d]. \end{cases}$, получаем:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \text{ такая, что для } \forall\, y \in [c,d] \text{ из } |y - y_0| \leqslant \delta(\varepsilon), \text{ для } \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x,y) - f(x,y_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Т.к. здесь $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ не зависит от $x \in [a,b]$, то получаем (34), где $\phi(x) = f(x,y_0)$, что соответствует (35). □

# 16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.

**Теорема** (*критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П*).

Для того, чтобы $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \quad y_n \in Y$, $y_n \to y_0, y_n \neq y_0$, где $y_0$ - предельная точка для множества $Y$, выполнялось:

$$g_n(x) = f(x, y_n) \underset{n\to\infty}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x) \tag{36}$$

*Доказательство.* $\Rightarrow$ . Пусть выполняется (34), тогда для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такая, что для $\forall\, y \in Y$ из $0 < |y - y_0| \leqslant \delta$, для $\forall\, x \in X \Rightarrow |f(x,y) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon$.

Рассматривая $\forall\ (y_n) \in Y$, в пределах точки $y_0$ по найденному ранее $\delta > 0\ \exists\, \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow |y_n - y_0| \leqslant \delta$.

Окончательно получаем: для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu \in \mathbb{R}$ такое, что для $\forall\ n \geqslant \nu$, для $\forall\ x \in X \Rightarrow$ $\Rightarrow |y_n - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x, y_n) - \phi(x)| \leqslant \varepsilon$, т.е. имеем (36).

$\Leftarrow$ . Пусть для $\forall\ (y_n) \in Y$ в предельной точке выполнено (36). Тогда в силу того, что из равномерной сходимости $g_n(x) = f(x, y_n)$ следует поточечная сходимость ФП $g_n(x)$, получаем, что $g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} \phi(x)$.

Поэтому в силу критерия Гейне существования предела Ф1П получаем, что:

$$f(x, y_0) = g_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{X} \phi(x) \Rightarrow f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{X} \phi(x).$$

Предположим, что имеем поточечную сходимость, но равномерной сходимости нет, т.е. получаем:

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{X}{\rightrightarrows}} \phi(x).$$

Тогда по *правилу де Моргана*, имеем:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \text{ такое, что для } \forall\, \delta > 0\ \exists\, y(\delta) \in Y, \exists\, x(\delta) \in X \text{ такое, что из } 0 < |y(\delta) - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(x(\delta), y(\delta)\right) - \phi(x(\delta)) > \varepsilon_0. \tag{37}$$

Выбирая для простоты $\delta = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +0$, получаем, что $\begin{cases} \exists\, x_n = x\left(\dfrac{1}{n}\right) \in X, \\ \exists\, y_n = y\left(\dfrac{1}{n}\right) \in Y. \end{cases}$ такие, что из $0 < |y_n - y_0| \leqslant\leqslant \delta \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$.

Используя условие $f(x_n, y) \xrightarrow[y\to y_0]{X} \phi(x_n)$, для найденного $\varepsilon_0 > 0$ получаем:

$$\exists\, \delta_0 > 0 \text{ такая, что для } \forall\, y \in Y \text{ из } 0 < |y_n - y_0| \leqslant \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| \leqslant \varepsilon_0.$$

Подставляя $y = y_n$, получаем $0 < |y_n - y_0| \leqslant \delta_0 \Rightarrow |f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| \leqslant \varepsilon_0$.

Выбирая теперь $\nu = \dfrac{1}{\delta_0} \in \mathbb{R}$, для $\forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow 0 < |y_n - y_0| \leqslant \dfrac{1}{\nu} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Отсюда в силу (37) при $\delta = \dfrac{1}{n} > 0$ получаем, что для $\forall\, n \geqslant \nu$ выполняется $|f(x_n, y_n) - \phi(x_n)| > \varepsilon_0$. Противоречие. $\square$

**Замечания:**

1. Доказанная теорема позволяет из соответствующих свойств ФП получить аналогичные свойства для равномерно сходящихся Ф2П, в том числе сформулированный ранее супремальный критерий равномерной сходимости Ф2П и критерий Коши для Ф2П. Кроме того, в силу теоремы Дини для ФП имеем соответствующую теорему Дини для равномерной сходимости Ф2П.

   **Теорема** (*Дини для равномерной сходимости Ф2П*).

   Пусть для $\forall\ fix\ y \in Y, f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a,b] = X$, причём при монотонной сходимости $y \to y_0$ ($y \uparrow y_0$ либо $y \downarrow y_0$) соответственно получаем $f(x,y)$ монотонно сходится к $\phi(x)$ ($f(x,y) \uparrow\downarrow \phi(x)$). Тогда, если предельная функция $\phi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ непрерывна на $X = [a,b]$, то кроме поточечной сходимости будем иметь равномерную сходимость (34).

2. Аналогично получаем теорему Стокса-Зейделя для Ф2П.

   **Теорема** (*Стокса-Зейделя*).

   Пусть для $\forall\ fix\ y \in Y, f(x,y)$ непрерывна по $x \in [a,b] = X$. Тогда, если $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, где $y_0$ - предельная точка для $Y$, то предельная функция будет непрерывной на $[a,b]$.

Предположим, что $f(x,y)$ определена для $\forall\ y \in Y$ и для $\forall\ x \in [a,b]$, причём при $\forall\ fix\ y \in Y\ f(x,y)$ интегрируема по $x \in [a,b]$. В этом случае:

$$\exists\ F(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx, y \in Y. \tag{38}$$

(38) - *интеграл Римана (собственный)*, зависящий от параметра $y \in Y$.

В дальнейшем интеграл вида (38) будем кратко называть *СИЗОП*.

## 17 Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.

**Теорема** (*о предельном переходе в СИЗОП*).

Пусть определён СИЗОП (38). Тогда, в случае $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x)$, где, как и в определении СИЗОП (38), предполагая интегрируемость $f(x,y)$ по $x$, получаем:

$$\exists \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \phi(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx. \tag{39}$$

*Доказательство.* В силу (34) имеем (33), откуда для $I = \int\limits_a^b \phi(x)dx$, получаем:

$$|F(y) - I| \overset{(38)}{=} \left| \int\limits_a^b \left(f(x,y) - \phi(x)\right) dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x,y) - \phi(x)|\, dx \overset{(33)}{\leqslant} \int\limits_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a).$$

Таким образом, получаем, что $\exists\ M = b - a = const > 0$ такое, что для $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ такая, что для $\forall\ y \in Y$ из $0 < |y - y_0| \leqslant \delta \Rightarrow |F(y) - I| \leqslant M\varepsilon$.

Откуда по $M$-лемме для сходимости Ф1П, получаем: $F(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} I$, т.е. имеем (39). □

**Замечания:**

1. При доказательстве теоремы неявно предполагалось, что $\phi(x) \in \mathbb{R}([a,b])$. Это условие выполняется в силу критерия Гейне существования равномерного частного предела и соответствующего условия интегрируемости Ф1П.

2. Используя теорему Дини для Ф2П, в силу доказанной теоремы, получаем, что если для $\forall\ fix\ y \in Y \Rightarrow f(x,y)$ непрерывна на $X = [a,b]$, то в случае, когда $f(x,y)$ монотонна по $y$ на $Y = [c,d]$ получаем, что при выполнении условия поточечной сходимости:
$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a,b]}{\rightrightarrows}} \phi(x),$$
то имеем для $\forall\ y_0 \in [c,d] \Rightarrow$ (39).

3. Если $f(x,y)$ непрерывна для $\forall\ x \in [a,b]$ и для $\forall\ y \in [c,d]$, тогда справедливо (39), где $\phi(x) = f(x,y_0)$, для $\forall\ fix\ y_0 \in [c,d]$.

   В частности, при указанных условиях СИЗОП (38) является непрерывной функцией на $Y \in [c,d]$, т.к.
$$\exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^b f(x,y)dx = \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^b f(x,y_0)dx = F(y_0),$$
   что равносильно непрерывности (38) в любой точке $y_0 \in [c,d]$, причём на концах отрезка рассматривается односторонняя непрерывность.

# 18 Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.

**Теорема** (*о почленном дифференцировании СИЗОП*).

Пусть $f(x,y)$ непрерывна на $[a,b]\times[c,d]$ и для неё:

$$\exists\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \text{непрерывна на } [a,b]\times[c,d].$$

Тогда СИЗОП (38) будет непрерывно дифференцируемой функцией на $[c,d]$, для которой производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$F'(y) = \left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)'_y = \int\limits_a^b f'_y(x,y)dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \tag{40}$$

*Доказательство.* Для доказательства воспользуемся теоремой об интегрируемости СИЗОП. Рассмотрим функцию

$$G(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx. \tag{41}$$

В силу полученных ранее результатов, СИЗОП (41) корректно определён и является непрерывно дифференцируемой функцией на $[c,d]$. Поэтому функция $G(y)$ для $\forall\ fix\ y\in\ ]c,d[$ будет интегрируемой на $[c,y]$. А значит, получаем:

$$\exists\int\limits_c^y G(t)dt \overset{(41)}{=} \int\limits_c^y\left(\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dx\right)dt.$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, в силу теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, имеем:

$$\int\limits_c^y G(t)dt = \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^y \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}dt\right)dx = \int\limits_a^b \left[f(x,t)\right]_{t=c}^{t=y}dx = \int\limits_a^b \left(f(x,y)-f(x,c)\right)dx \overset{(38)}{=} F(y)-c_0,$$

где $c_0 = \int\limits_a^b f(x,c)dx = const.$

Отсюда получаем, что $F(y) = c_0 + \int\limits_c^y G(t)dt.$

Используя теорему Барроу о дифференцировании интегралов с переменным верхним пределом, получаем:

$\exists\ F'(y) = (c_0)'_y + \left(\int\limits_c^y G(t)dt\right)'_y = 0 + G(y) \overset{(41)}{=} \int\limits_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$, что даёт (40). □

1. Пусть $f(x,y)$ определена для $\forall x \in [a;+\infty[$ и $\forall y \in Y \subset \mathbb{R}$. Если $\forall \text{fix } y \in Y \Rightarrow$

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y) = dx \xrightarrow{y} . \tag{42}$$

Тогда будет корректно определена функция:

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx, y \in Y. \tag{43}$$

2. Пусть НИЗОП (43) сходится на $Y \subset \mathbb{R}$. Если $y_0$ - предельная точка $Y$ и выполняется

$$f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{[a;+\infty[} \phi(x),$$

то будем говорить, что в данном НИЗОП *допустим предельный переход*, если

$$\exists \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx. \tag{44}$$

# 19 Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.

**Теорема** (*О предельном преходе в НИЗОП*).
Пусть для $\forall$ fix $y \in Y \Rightarrow f(x,y)$ непрерывна для $\forall\, x \geqslant a$ и для предельной точки $y \in Y$ имеем

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{\forall\ [a;A]}{\rightrightarrows}} \phi(x), \text{ где } \forall\, A > a. \tag{45}$$

Если $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{y}{\rightrightarrows}$, то тогда возможен предельный переход (44).

*Доказательство.* Воспользуемся *теоремой о предельном переходе в функциональном ряду*, для чего, беря произвольную последовательность $(A_n) \uparrow +\infty$, по критерию Гейне существования конечного предела функции для (43) получаем

$$\exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \left[\int\limits_a^{+\infty} = \lim_{An\to+\infty} \left(\int\limits_{A_0}^{A_1} + \int\limits_{A_1}^{A_2} + \ldots + \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{y\to y_0} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx = \big[\text{По теореме о предельном переходе в СИЗОП}\big] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \lim_{y\to y_0} f(x,y)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} \phi(x)dx = \lim_{An\to+\infty} \left(\int\limits_{A_0=a}^{A_1} + \int\limits_{A_1}^{A_2} + \ldots + \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n}\right) =$$

$$= \lim_{An\to+\infty} \int\limits_a^{A_n} \phi(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} \phi(x)dx,$$

т.е. имеем (44). □

**Следствие** (*О непрерывности НИЗОП*).
Пусть $f(x,y)$ непрерывная для $\forall\, x \in [a;+\infty[$ и для $\forall\, y \in [c;d]$. Если интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c;d]}{\rightrightarrows}$$

то НИЗОП (43) - непрерывная функция на $[c;d]$, т.е.

$$\text{для } \forall\, y \in [c;d] \Rightarrow \exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \lim_{y\to y_0} \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = F(y_0).$$

*Доказательство.* Из непрерывности $f(x,y)$ на $[a;+\infty[\ \times\ [c;d]$ следует, что

$$\text{для } \forall \text{ fix } A \geqslant a \Rightarrow f(x,y) \underset{y\to y_0}{\overset{[a;A]}{\rightrightarrows}} f(x,y) = \phi(x) (\text{для } \forall \text{ fix } y_0 \in [c;d])$$

Далее, используя доказательство теоремы в силу (44)

$$\exists \lim_{y\to y_0} F(y) = \int_a^A \phi(x)dx \int_a^{+\infty} f(x,y_0)dx = F(y_0),$$

что и требовалось доказать. □

**Замечание.**

Доказанная теорема и следствие справедливы и в отсутствии равномерной сходимости для рассматриваемого НИЗОП, если он сходится локально равномерно на $Y$,

$$\text{для } \forall\ [\alpha;\beta] \subset Y \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[\alpha;\beta]}{\rightrightarrows}$$

Это связано с тем, что свойство непрерывности функции на множестве определено в любой точке из этого множества. Поэтому, выбирая $\forall$ fix $y_0 \in Y$ и заключая его в соответствующий отрезок $y_0 \in [\alpha;\beta] \subset Y$, в случае локальной равномерной сходимости получаем, например, что (43) будет непрерывна на $[\alpha;\beta]$, а значит, в точке $y_0$. А исходя из этого, получаем непрерывность (43) на всём $Y$.

## 20 Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.

**Теорема** (*Об интегрировании НИЗОП*).

Пусть $f(x,y)$ непрерывная на декартовом произведении $[a;+\infty[\times[c;d]$. Если интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c;\,d]}{\rightrightarrows},$$

то тогда НИЗОП (43) является интегрируемой на $[c;d]$ функцией, для которой

$$\int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \tag{46}$$

*Доказательство.* По той же схема, что и в предыдущей теореме, рассмотрим произвольную последовательность $(A_n)\uparrow +\infty (A_0=a)$ и используем критерий Гейне на основании теоремы о почленном интегрировании СИЗОП, получаем:

$$\exists \int\limits_c^d F(y)dy = \int\limits_c^d \left(\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx\right)dy = \left[\begin{array}{c} u_n(y)=\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx \text{ непрерывна на } [c;d] \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x,y) \overset{[c;\,d]}{\rightrightarrows} \end{array}\right] =$$

$$= \int\limits_c^d \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^d u_n(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_c^d \left(\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n} f(x,y)dx\right)dy = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{A_{n-1}}^{A_n}\left(\int\limits_c^d f(x,y)dx\right)dy =$$

$$= \lim_{A_n\to+\infty}\left(\int\limits_{A_0=a}^{A_1} + \int\limits_{A_1}^{A_2} + \ldots + \int\limits_{A_{n-1}}^{A_n}\right) = \lim_{A_n\to+\infty}\int\limits_a^{A_n}\left(\int\limits_c^d f(x,y)dx\right)dy = \int\limits_a^{+\infty} dx\int\limits_c^d f(x,y)dy$$

□

**Замечания:**

1. Доказанная теорема справедлива не только для случае $x\in[a;+\infty[$, $y\in[c;d]$, но и для случая $x\in\,]a;+\infty[$, $y\in[c;d]$, при условии, что дополнительно ко всем условиям указанной теоремы выполняется, что точка $x=a$ не является точкой разрыва второго рода для $g(x,y)$, т.е.

   $$\exists \lim_{x\to a+0} f(x,y)\in\mathbb{R}$$

   В этом случае, доопределяя функцию $f(x,y)$ в точке $x=a$, т.е. рассматривая функцию

   $$g(x,y)=\begin{cases} f(x,y), x>a, y\in[c;d] \\ \lim\limits_{x\to a+0} f(x,y), y\in[c;d]\end{cases}$$

   Получаем её непрерывность в точке $x=a$ справа. А далее, учитывая, что рассмотренные интегралы от $f(x,y)$ и $g(x,y)$ совпадают используя доказанную теорему.

2. Можно показать, что наряду с интегрируемым НИЗОП по конечному промежутку возможно его почленное интегрирование по бесконечному промежутку $[c;+\infty[$, если

   (а) $f(x,y)$ непрерывна на $[a;+\infty[\times[c;+\infty[$

   (б) $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[c;+\infty[}{\rightrightarrows}$, $\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \overset{[a;+\infty[}{\rightrightarrows}$

3. $\exists \int\limits_c^{+\infty} dy \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x,y)dy)$ - существуют повторные интегралы.

# 21 Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.

**Теорема** (*О почленном дифференцировании НИЗОП*).
Пусть $f(x,y)$ - непрерывна на $[a;+\infty[\times[c;d]$, $\exists\, f'_y(x,y)$ - непрерывная на $[a;+\infty[\times[c;d]$. Тогда если

1. $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx \xrightarrow{[a;+\infty[}$
2. $\displaystyle\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \overset{[a;+\infty[}{\rightrightarrows}$,

то тогда НИЗОП (43) - функция почленно дифференцируема на $[a;+\infty[$, и её производная вычисляется по правилу Лейбница:

$$\exists\, F'(y) \overset{(43)}{=} \left(\int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx\right)'_y = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx$$

*Доказательство.* Для $\forall$ fix $y\in[c;d]$ корректно определяем СИЗОП

$$\Phi(y) = \int\limits_c^y \left(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,t)dx\right)dt$$

В силу выполнения всех условий почленного интегрирования СИЗОП можем изменить порядок интегрирования

$$\Phi(y) = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^y f'_y(x,t)\right)dx = \int\limits_a^{+\infty}\big[f(x,t)\big]_{t=c}^{t=y}dx = \int\limits_a^{+\infty}\left(\int\limits_c^y f(x,y)-f(x,c)\right)dx =$$
$$= \int\limits_a^{+\infty} f(x,y)dx - \int\limits_a^{+\infty} f(x,c)dx = F(y)-F(c)$$

Отсюда, используя теорему Барроу о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом имеем

$$\exists F'(y) = (\Phi(y)+F(c))'_y = \left(\int\limits_c^y\left(\int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,t)dt\right)dx\right)'_y =$$
$$= \left[\int\limits_0^{+\infty} f'_y(x,t)dx\right]_{t=y} = \int\limits_a^{+\infty} f'_y(x,y)dx \Leftrightarrow (21)$$

□

**Замечание.**
Так же, как и в условии непрерывности НИЗОП в доказательстве теоремы о почленном дифференцировании вместо равномерной сходимости рассмотрим НИЗОП используя локальную равномерную сходимость соответствующего НИЗОП.

# 22 Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.

# 23 Лемма Фруллани.

# 24 Первая теорема Фруллани.

# 25 Вторая теорема Фруллани.

# 26 Третья теорема Фруллани.