Ответы к коллоквиуму по курсу "Математический анализ"
(1-ый семестр 2015/2016 учебного года, специальность "Информатика")

Определение предельной функции $f(x) \overset{X}{=} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ на $(\varepsilon - \delta)$-языке:

$$\text{для } \forall\ fix\ x \in X \text{ и для } \forall\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists\ \nu = \nu(x,\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Для обозначения равномерной сходимости $f_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x). \tag{2}$$

1 Супремальный критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей (ФП) и замечания к нему

Теорема (*Супремальный критерий равномерной сходимости ФП*).

$$f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x) \Leftrightarrow r_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \tag{3}$$

Доказательство. $\Rightarrow$ Если выполнена (2), то, учитывая, что в (1) используется $\forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon)$ и $\forall\ fix\ x \in X$, получаем

$$\begin{aligned}&r_n = \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \text{ т.е.}\\ &\text{для } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leqslant r_n \leqslant \varepsilon, \text{ т.е. } r_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Пусть выполнена (3), тогда

$$\begin{aligned}&\text{для } \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\ n \geqslant \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall\ x \in X \Rightarrow\\ &\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = r_n \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, имеем (1), где ν зависит от $\forall\ \varepsilon > 0$ и не зависит от конкретного элемента множества X. □

Замечания:

1. Если известно, что для $\forall\ n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\ x \in X \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant a_n$, где (a_n) - б.м.п, то тогда имеем (2). Сформулированное утверждение даёт *мажоритарный признак* (достаточное условие) равномерной сходимости ФП.
2. Если
$$\exists\ x_n \in X \mid g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow g_n(x) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$
то тогда равномерной сходимости нет, т.е. $f_n(x) \overset{X}{\not\rightrightarrows} f(x)$. Это даёт достаточное условие (признак) неравномерной сходимости ФП.

Для обозначения равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} . \tag{4}$$

Критерий Коши сходимости ФР: (4) $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X \Rightarrow$

$$|S_{n+m}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{k=n+m} u_k(x) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Критерий Коши сходимости числовых последовательностей:

$$\tag{6}$$

2 Мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда (ФР) и замечания к нему

Теорема (*мажорантный признак Вейерштрасса равномерной сходимости ФР*).
Если ФР имеет на X сходяющуюся числовую мажоранту, то он равномерно сходится на X.

Доказательство. Доказательство с использованием критерия Коши сходимости числовых последовательностей и критерия Коши сходимости ФР (5):
Т.к. $\sum a_n$ сходится, то

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} a_k \right| \leqslant \varepsilon. \tag{7}$$

Если выполняется неравенство $|u_n(x)| \leqslant a_n,$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$, то для частичных сумм ФР $\sum u_n(x)$ имеем: $|S_{m+n}(x) - S_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} u_k(x)\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} |u_k(x)| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k\right| \leqslant \varepsilon$, это для $\forall\, n \geqslant \nu = \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, что в силу (5) даёт (4). □

Замечания:

1. Принцип Вейерштрасса является лишь достаточным условием равномерной сходимости ФР. На практике сходимость числовой мажоранты (a_n) либо находится с помощью соответствующих оценок $|u_n(x)|$ сверху, либо берут $a_n = \sup\limits_{x \in X} |u_n(x)|$. В последнем случае получаем наиболее точную мажоранту, но в случае расходимости $\sum a_n$ даже для этой самой точной мажоранты ничего о равномерной сходимости ФР сказать нельзя, т.е. требуются дополнительные исследования.

2. Обобщая признак Вейерштрасса, где используется сходимость числовой мажоранты - признак равомерной сходимости ФР, используют функцию мажоранты, а именно получаем:

   $$\text{если } \exists\, v_n(x) \geqslant 0\ :\ |u_n(x)| \leqslant v_n(x) \text{ для } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \text{ и } \sum v_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows},$$

   то тогда для ФР $\sum u_n(x)$ имеем (4).

3 Признак Дирихле равномерной сходимости ФР и следствие из него (признак Лейбница равномерной сходимости ФР)

Теорема (*Признак Дирихле равномерной сходимости ФР*).

Пусть для ФП $a_n(x)$ частичные суммы $\sum a_n(x)$ ограничены в совокупности (равномерно на X), т.е.

$$\text{для } \forall\, x \in X \text{ и для } \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x)| \leqslant c, \tag{8}$$

где $c = const > 0$, *не зависит ни от* n, *ни от* x. Если $\forall\, fix\ x \in X \Rightarrow (b_n(x))$ - числовая последовательность является монотонной, то в случае

$$(b_n(x)) \overset{X}{\rightrightarrows} 0, \tag{9}$$

имеем $\sum a_n(x)b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Монотонная последовательность $(b_n(x))$ для $\forall\, fix\ x \in X$ позволяет так же, как и в ЧР, использовать на основе (8) оценку Абеля:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)b_k(x)\right| \leqslant 2c\left(|b_{n+1}(x)| + 2\,|b_{n+m}(x)|\right). \tag{10}$$

Если выполняется (9), то тогда имеем:

$$\text{для } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ по } \tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{6c} > 0\ \exists\, \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid \text{для } \forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon) \text{ и для } \forall\, m \in \mathbb{N} \text{ и для } \forall\, x \in X \Rightarrow |b_{n+1}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon} \text{ и } |b_{n+m}(x)| \leqslant \tilde{\varepsilon},$$

поэтому для частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(x)$ в силу (10) для $\forall\, n \geqslant \nu(\varepsilon)$ и для $\forall\, m \in \mathbb{N}$ и для $\forall\, x \in X$ имеем: $|S_{n+m}(x) - S_m(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+m} a_k(m)b_k(x)\right| \leqslant 2{\cdot}c{\cdot}(\tilde{\varepsilon}{+}2\tilde{\varepsilon}) = 6{\cdot}c{\cdot}\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Отсюда по критерию Коши равномерной сходимости ФР следует, что $\sum a_n(x)b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. □

Следствие (*Признак Лейбница равномерной сходимости ФР*).

Если $\forall\, fix\ x \in X$ последовательность $(b_n(x))$ является монотонной, то в случае $b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \sum(-1)^n b_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Следует из того, что в условии теоремы $a_n = (-1)^n$ не зависит от x, причём $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant 1 = const$, для $\forall\, n \in \mathbb{N}$. □

Для обозначения поточечной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на X будем использовать запись:

$$\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} . \tag{11}$$

4 Признак Дини равномерной сходимости ФР и следствие из него (теорема Дини для ФП)

Теорема (*Признак Дини равномерно сходящихся ФР*).
Пусть

1. Члены ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны и сохраняют один и тот же знак на $X = [a, b], \text{ для } \forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. $\sum u_n(x) \overset{X}{\to} S(x)$.

Тогда, если $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$, т.е. $S(x) \in C([a, b])$, то $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. Рассмотрим на $X = [a, b]$ остатки ряда $R_n(x) = u_{n+1}(x) + \ldots + \ldots = S(x) - S_n(x)$. Нетрудно видеть, что выполняются следующие свойства:

1. для $\forall\, fix\; n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}_n(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ как разность двух непрерывных функций.
2. для $\forall\, fix\; x \in X \Rightarrow$ ФП $(R_n(x))$ убывает в случае, когда $\forall\, u_n(x) > 0$, т.к.
$R_n(x) = u_n(x) + R_{n+1}(x) \geqslant R_{n+1}(x), \text{ для } \forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. Т.к. имеет место (11), то для $\forall\, fix\; x \in X \Rightarrow R_n(x) \overset{X}{\to} 0$.

Предположим, что рассматриваемая положительная поточечная сходимость на X ФР не является равномерной сходимостью на X.

Тогда по правилу де Моргана имеем: $\exists\, \varepsilon_0 > 0 \mid$ для $\forall\, \nu \in \mathbb{R}\ \exists\, n(\nu) \geqslant 0$ и $\exists\, x(\nu) \in X \mid R_{n\nu}(x_\nu) > \varepsilon_0$. Для простоты будем считать, что $\exists\, x_n \in X \mid R_n(x_n) > \varepsilon_0$. По принципу выбора из ограниченной последовательности x_n можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, т.е. $x_{nk} \underset{n_k \to \infty}{\longrightarrow} x_0$, при этом в силу использования $X = [a, b]$ - компакт, получаем, что $x_0 \in X$. Если зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, то для $\forall\, n_k \geqslant m \Rightarrow R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$, по свойствам остаткам будем иметь, что $R_m(x_{nk}) \geqslant R_{nk}(x_{nk}) > \varepsilon_0$. В неравенстве $R_m(x_{nk}) > \varepsilon_0$, переходя к пределу при $n_k \to \infty$ для $\forall\, m \in \mathbb{N}$, получаем в силу непрерывности $R_n(x) : R_m(x_0) = \lim\limits_{n_k \to \infty} R_m(x_{nk}) \geqslant x_0$, что противоречит последнему из свойств остатка, а именно $R_m(x_0) \xrightarrow{X}$ при $m \to \infty$, поэтому из нашего предположения следует, что выполняется $R_m(x_0) \to 0$, противоречие, т.е. выполняется $\sum u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$. ☐

Следствие (*Теорема Дини для ФП*).
Если для ФП $f_n(x), n \in \mathbb{N}$ на $X = [a, b]$ выполняются свойства:

1. для $\forall\, f_n(x) \in C([a, b])$ и для $\forall\, fix\; x \in X \Rightarrow f_n(x)$ монотонна.
2. $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$. Тогда, если $f(n) \in C([a, b])$, то $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows}$.

Доказательство. следует из того, что члены рассматриваемой ФП $f_n(x)$ можно рассматривать как частичные суммы соответствующего ФР с общим членом

$$\begin{cases} u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \\ f_0(x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Действительно, $S_n(x) = f_n(x) - f_0(x) = f_n(x), \text{ для } \forall\, n \in \mathbb{N}$.

А далее к соответствующему ФР применима теорема Дини равномерной сходимости ФР. ☐

Пусть x_0 - предельная точка множества сходимости $X \subset \mathbb{R}$ для ФР $\sum u_n(x)$. Будем говорить, что в $\sum u_n(x)$ *возможен почленный предельный переход* $x \to x_0$, если

$$\exists\, lim \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} lim u_n(x), \tag{13}$$

причём получившийся в левой части (13) ЧР является сходящимся.

В частности, если $x_0 \in X$ и $\forall\, u_n(x)$ непрерывен в некоторой окрестности точки x_0, и значит, для $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) = u_n(x_0)$, то в случае выполнения (13) для суммы $S(x)$ ФР $\sum u_n(x)$ при $x \to x_0$ имеем:

$$\exists \lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = S(x), \tag{14}$$

что соответствует непрерывности $S(x)$ в точке $x_0 \in X$.

5 Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР и замечания к ней

Теорема (*о непрерывности суммы равномерно сходящегося ФР*).

Если все члены $u_n(x), n \in \mathbb{N}$, ФР $\sum u_n(x)$ непрерывны на $X = [a, b]$, то в случае равномерной сходимости этого ряда на $[a, b]$ его сумма $S(x)$ будет непрерывной функцией на $[a, b]$.

Доказательство. Требуется обосновать (14) для $\forall\ x_0 \in [a, b]$, причём в случае концевых значений $x_0 = a,\ x_0 = b$ будем использовать соответствующие односторонние пределы, т.е. рассматривать одностороннюю непрерывность.

Для $fix\ x_0 \in [a, b]$ придадим произвольные приращения $\Delta x \in \mathbb{R} \mid (x_0 + \Delta x) \in [a, b]$ и рассмотрим соответствующие приращения суммы ФР $\sum u_n(x)$:

$$\Delta S(x_0) = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0).$$

Из равномерной сходимости ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b] \Rightarrow$ для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{R} \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu,$ и для $\forall\, x \in [a, b]$ для частичных сумм $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$ ряда $\sum u_n(x)$ имеем: $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

Отсюда, в частности, для $x = x_0 \in X$ и $x = x_0 + \Delta x \in X \Rightarrow$

$$\begin{cases} |S_n(x_0) - S(x_0)| \leqslant \varepsilon, \\ |S_n(x_0 + \Delta x) - S(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon. \end{cases} \tag{15}$$

Далее из непрерывности $\forall\ u_n(x)$ в $x_0 \in [a, b]$ следует непрерывность частичных сумм в x_0 (как конечных сумм непрерывных функций).

В силу этого, для $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta > 0$: для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Таким образом, в силу (15), (16) имеем: для $\forall \varepsilon > 0$, выбирая $n \geqslant \nu$ и рассматривая $\forall\, |\Delta x| \leqslant \delta$, имеем:

$|\Delta S(x_0)| = |S_n(x_0) - S(x_0) + S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0) + S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant$
$\leqslant |S_n(x_0) - S(x_0)| + |S_n(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0)| + |S(x_0 + \Delta x) - S_n(x_0 + \Delta x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3 \cdot \varepsilon.$

Поэтому получаем: для $\forall\, \varepsilon\ \exists\, \delta > 0$: для $\forall\ |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow |\Delta S(x_0)| \leqslant M \cdot \varepsilon, M = const = 3 > 0$.

Отсюда по М-лемме для Ф1П следует, что $\Delta S(x_0) \underset{\Delta x \to 0}{\to} 0$, что на языке приращений равносильно (14). При этом, т.к. из равномерной сходимости следует поточечная сходимость ЧР в правой части (14) будет сходящимся. □

Замечания:

1. Доказанную теорему часто называют теоремой Стокса-Зейделя или теоремой Стокса-Зайделя.

2. В условии доказанной теоремы равномерную сходимость можно заменить для произвольного множества $X \subset \mathbb{R}$ на локальную равномерную сходимость. Будем говорить, что ФР $\sum u_n(x)$ сходится локально равномерно на $X \subset \mathbb{R}$, если для $\forall\ [a, b] \subset X \Rightarrow \sum u_n(x)(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$. У $\sum u_n(x)$ может быть локальная равномерная сходимость на X, но может не быть полной (???) равномерной сходимости на X. В случае локальной равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на X берём $\forall x_0 \in X$ и заключаем её в некоторый отрезок $x_0 \in [a, b] \subset X$. Т.к. есть равномерная сходимость для $\sum u_n(x)$ на этом отрезке, то по доказанной теореме сумма $S(x)$ в случае непрерывности $\forall\, u_n(x)$ на X будет непрерывна на $[a, b] \subset X$ и, в частности, непрерывна в $x_0 \in X$, а т.к. это можно сделать для $\forall\, x_0 \in X$, то тем самым получаем непрерывность $S(x)$ на $X \subset \mathbb{R}$ даже в случае, когда нет равномерной сходимости ФР на X.

6 Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ФР

Теорема (*о почленном интегрировании равномерно сходящихся ФР*).
Если $\forall\, u_n(x) \in C([a,b])$,

для $n \in \mathbb{N}$, то в случае, когда $\sum u_n(x) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows}$, возможно почленное интегрирование этого ряда на $[a,b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx. \tag{17}$$

Доказательство. На основании теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящихся ФР получим, что сумма ряда $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ будет непрерывна на $[a,b]$, а значит, интегрируема на $[a,b]$.

Используя частичные суммы для $\sum u_n(x)$, рассмотрим частичные суммы $T_n = \int\limits_a^b S_n(x)dx =$

$= \int\limits_a^b \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)dx = \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_a^b u_k(x)dx$ для ЧР правой части (17).

Требуется доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = \int\limits_a^b S(x)dx$.

Из равномерной сходимости $\sum u_n(x)$ на $[a,b]$ получим, что для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu$ и для $\forall\, x \in [a,b] \Rightarrow$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \leqslant \varepsilon \tag{18}$$

Отсюда получаем, что $\left|\int\limits_a^b S(x)dx - I_n\right| = \left|\int\limits_a^b S(x)dx - \int\limits_a^b S_n(x)dx\right| = \left|\int\limits_a^b (S(x) - S_n(x))dx\right| \leqslant$

$\leqslant \int\limits_a^b |S(x) - S_n(x)|\, dx \leqslant \int\limits_a^b \varepsilon dx = M\varepsilon$, где $M = b - a = const \geqslant 0$.

Таким образом, для $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \nu = \nu(\varepsilon) \mid$ для $\forall\, n \geqslant \nu \Rightarrow \left|\int\limits_a^b S(x)dx - I_n\right| \leqslant M\varepsilon$, поэтому по М-лемме сходимости ЧП следует, что

$$\exists \lim_{n\to\infty} I_n = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right) dx,$$

что равносильно (17). $\square$

7 Теорема о почленном дифференцировании ФР

Теорема (*о почленном дифференцировании ФР*).

Пусть ФР $\sum u_n(x)$ на $X = [a, b]$ удовлетворяет условиям:

1. $\sum u_n(x) \xrightarrow{X}$,
2. $\exists\, u_n^{'}(x)$, непрерывная для $\forall\, n \in \mathbb{N}, x \in X$.

Тогда, если

$$\sum u_n^{'}(x) \overset{X}{\rightrightarrows} \tag{19}$$

то рассматриваемый ФР $\sum u_n(x)$ можно почленно дифференцировать на $[a, b]$, т.е.

$$\exists \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{'}(x), \text{для } \forall\, x \in X. \tag{20}$$

Доказательство. В силу (19), по условию 2 рассматриваемой теоремы получаем, что по теореме об интегрировании ФР $\sum u_n^{'}(t)$ можно почленно интегрировать на $\forall\, [a, x] \subset [a, b]$, т.е.

$$\exists \int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^x u_n^{'}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n]_{t=a}^{t=x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n(x) - u_n(a) \right).$$

Отсюда в силу условия 1 (поточечная сходимость для $\sum u_n(x)$) получаем, что

$$\exists\, S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) + \int\limits_a^x \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) dt.$$

Используя далее *теорему Барроу* о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от непрерывной подынтегральной функции, получаем:

$$\exists\, S^{'}(x) = (const)^{'} + \left(\int\limits_a^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(t) \right) dt \right)_x^{'} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(x),$$

что соответствует (20). □

Под *степенным рядом* будем подразумевать ФР вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \tag{21}$$

где fix $x_0 \in \mathbb{R}$ - центр для СтР, а $\forall\, a_n \in \mathbb{R}$ - соответствующая числовая последовательность (*коэффициенты СтР*).

8 Теорема Абеля о сходимости степенного ряда (СтР) и замечание к ней.

Теорема Абеля (*о сходимости степенных рядов*).

Если СтР (21) сходится при $x = x_1 \neq x_0$, то он будет сходится абсолютно для любого x, где

$$|x - x_0| < |x_1 - x_0|\,. \tag{22}$$

Доказательство. Из сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ следует в силу необходимого условия сходимости ЧР, что $a_n(x_1 - x_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а т.к. $\forall$ ЧП является ограниченной, то $\exists\, M = \text{const} > 0 : |a_n(x_1 - x_0)^n| \leqslant M,$ для $\forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{|x_1 - x_0|^n}. \tag{23}$$

Для $\forall\, x$, удовлетворяющего (22), в силу (23) получаем:

$$|a_n(x - x_0)^n| = |a_n|\,|x - x_0|^n \overset{(23)}{\leqslant} \frac{M\,|x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n} = Mq^n, \text{ где } q = \frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} \in [0; 1[.$$

Таким образом, мы получили сходящуюся мажоранту, ибо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} Mq^n = M \sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $q \in [0; 1[$.

По признаку сравнения сходимости ЧР имеем, что для $\forall\, x$, удовлетворяющего (22), ряд (21) будет сходиться. □

Замечание.

Из полученных выше результатов следует, что если рассмотреть множество X_0 всех x, удовлетворяющих (22), то имеем, что $X_0 \subset X$, т.е. X_0 - некоторое подмножество множества сходимости для (21).

9 Формула Даламбера для вычисления радиуса сходимости СтР.

10 Формула Коши для вычисления радиуса сходимости СтР и замечания к ней.

11 Теорема о локальной равномерной сходимости СтР, замечания к ней и следствие из неё (о равенстве степенных рядов).

12 Теорема о дифференцировании СтР, замечания и следствие из неё.

13 Теорема о замене переменной в несобственных интегралах (НИ) и замечание к ней.

14 Формула двойной подстановки для НИ и интегрирование по частям в НИ.

15 Признак существования равномерного частного предела для непрерывных Ф2П.

16 Критерий Гейне равномерной сходимости Ф2П и замечания к нему.

17 Теорема о предельном переходе в собственных интегралах, зависящих от параметра (СИЗОП) и замечания к ней.

18 Теорема о почленном дифференцировании СИЗОП.

19 Теорема о предельном переходе в несобственных интегралах, зависящих от параметра (НИЗОП), следствие из неё и замечание к ней.

20 Теорема об интегрировании НИЗОП и замечания к ней.

21 Теорема о почленном дифференцировании НИЗОП и замечание к ней.

22 Вычисление интеграла Дирихле и его обобщения.

23 Лемма Фруллани.

24 Первая теорема Фруллани.

25 Вторая теорема Фруллани.

26 Третья теорема Фруллани.