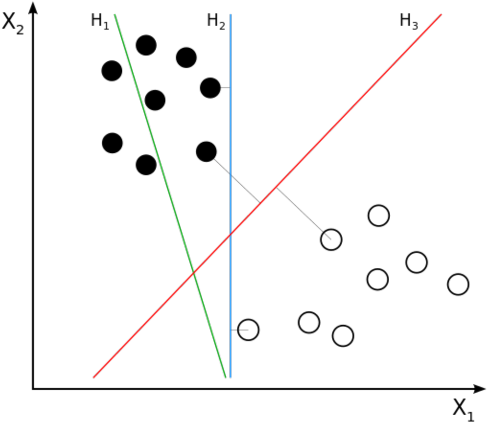
SVM

Выступающий: Павлович Владислав

Минск, 2017

Бинарная классификация



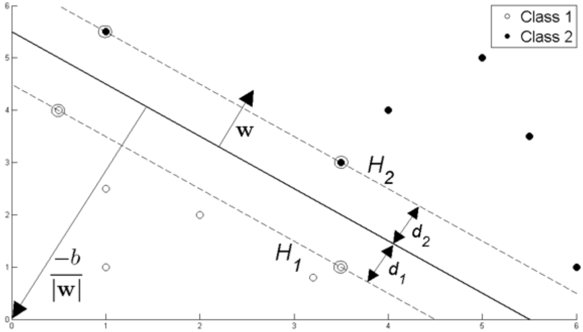
- $\{x_i, y_i\}, i = 1, \ldots \ell, x_i \in \mathbb{R}^D, y_i \in \{-1, 1\}$.

Бинарная классификация

- $\{x_i, y_i\}, i = 1, \dots \ell, x_i \in \mathbb{R}^D, y_i \in \{-1, 1\}$.
- Выборка линейно разделима.

Бинарная классификация

- $\{x_i, y_i\}, i = 1, \dots \ell, x_i \in \mathbb{R}^D, y_i \in \{-1, 1\}$.
- Выборка линейно разделима.
- Будем строить разделяющую гиперплоскость: $w \cdot x + b = 0$.
  - w - вектор нормали.
  - $\frac{b}{||w||}$ - расстояние до начала координат.


Class 1
Class 2
w
H_2
H_1
d_2
d_1
$\frac{-b}{|\mathbf{w}|}$

$$\begin{cases} w \cdot x_i + b \geqslant 1, y_i = 1 \\ w \cdot x_i + b \leqslant -1, y_i = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_i(w \cdot x_i + b) \geqslant 1, i = 1, \ldots, \ell.$$

H_1, H_2 - множества опорных векторов соответствующих классов.

$$\begin{cases} w \cdot x_i + b = 1, i \in H_1 \\ w \cdot x_i + b = -1, i \in H_2 \end{cases}$$

d_1, d_2 - расстояния между гиперплоскостью и опорными векторами.

$$d_1 = d_2 = \frac{1}{||w||}$$

- $\min ||w||$ т.ч. $y_i(x_i \cdot w + b) - 1 \geqslant 0, \forall i = 1, \ldots \ell$.

Бинарная классификация

- $\min ||w||$ т.ч. $y_i(x_i \cdot w + b) - 1 \geqslant 0, \forall i = 1, \dots \ell$.
- $\min \frac{1}{2}||w||^2$ т.ч. $y_i(x_i \cdot w + b) - 1 \geqslant 0$, $\forall i = 1, \dots \ell$ - задача квадратичного программирования.

Метод множителей Лагранжа

- $L_P = \frac{1}{2}||w||^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i (x_i \cdot w + b) + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i.$

Метод множителей Лагранжа

- $L_P = \frac{1}{2}||w||^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i (x_i \cdot w + b) + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i.$
- $\frac{\partial L_P}{\partial w} = 0 \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i x_i.$

Метод множителей Лагранжа

- $L_P = \frac{1}{2}||w||^2 - \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i (x_i \cdot w + b) + \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i.$
- $\frac{\partial L_P}{\partial w} = 0 \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i x_i.$
- $\frac{\partial L_P}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0.$

Бинарная классификация

$$L_D = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{\ell} \alpha_i \alpha_j y_i y_j x_i \cdot x_j,$$

$$\alpha_i \geqslant 0, \forall i = 1, \ldots \ell, \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0.$$

$$L_D = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i - \frac{1}{2} \alpha^T H \alpha$$

$$\alpha_i \geqslant 0, \forall i = 1, \ldots \ell, \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i y_i = 0.$$

Задача квадратичного программирования:

$$\max_{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i - \frac{1}{2}\alpha^T H\alpha\right]$$

$$\alpha_i \geqslant 0, \forall i = 1, \ldots \ell, \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i = 0.$$

Задача квадратичного программирования:

$$\max_{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i - \frac{1}{2}\alpha^T H\alpha\right]$$

$$\alpha_i \geqslant 0, \forall i = 1, \ldots \ell, \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i = 0.$$

- Находим α.

Задача квадратичного программирования:

$$\max_{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i - \frac{1}{2}\alpha^T H\alpha\right]$$

$$\alpha_i \geqslant 0, \forall i = 1, \ldots \ell, \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i = 0.$$

- Находим α.
- Вычисляем $w = \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i x_i$.

Бинарная классификация

$y_s(x_s \cdot w + b) = 1, x_s$ - опорный вектор

$$y_s \left(\sum_{m \in S} \alpha_m y_m x_m \cdot x_s + b \right) = 1$$

$x_i -$ опорный вектор, если $\alpha_i > 0.$

$$y_s^2 \left(\sum_{m \in S} \alpha_m y_m x_m \cdot x_s + b \right) = y_s$$

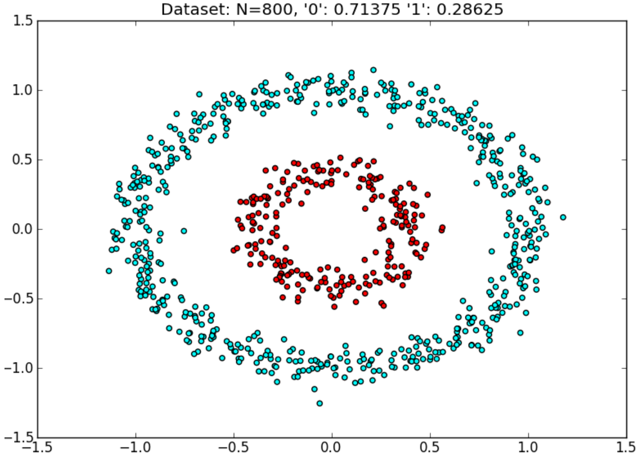
$$b = y_s - \sum_{m \in S} \alpha_m y_m x_m \cdot x_s = y_s - w \cdot x_s$$

$$b = \frac{1}{N_S} \sum_{s \in S} (y_s - w \cdot x_s)$$

Бинарная классификация

$$y' = \mathbf{sgn}(x \cdot w + b)$$

Линейно неразделимые выборки

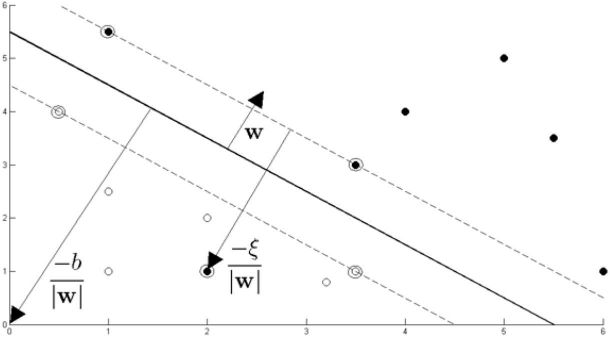


Soft margin

$$\begin{cases} w \cdot x_i + b \geqslant 1 - \xi_i, y_i = 1 \\ w \cdot x_i + b \leqslant -1 + \xi_i, y_i = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_i(w \cdot x_i + b) - 1 + \xi_i \geqslant 0, \xi_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, \ell.$$

Линейно неразделимые выборки



Линейно неразделимые выборки

$$\min \frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i$$

т.ч. $y_i(x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i \geqslant 0, \xi_i \geqslant 0, \forall i = 1, \ldots \ell$

Линейно неразделимые выборки

- $L_P = \frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i - \sum_{i=1}^{\ell}\mu_i\xi_i -$

  $- \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i[y_i(x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i].$

Линейно неразделимые выборки

- $L_P = \frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i - \sum_{i=1}^{\ell}\mu_i\xi_i -$

  $- \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i[y_i(x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i].$
- $\frac{\partial L_P}{\partial w} = 0 \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i x_i.$

- $L_P = \frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i - \sum_{i=1}^{\ell}\mu_i\xi_i -$
  $- \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i[y_i(x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i].$
- $\frac{\partial L_P}{\partial w} = 0 \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i x_i.$
- $\frac{\partial L_P}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i = 0.$

Линейно неразделимые выборки

- $L_P = \frac{1}{2}||w||^2 + C\sum_{i=1}^{\ell}\xi_i - \sum_{i=1}^{\ell}\mu_i\xi_i -$
  $- \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i[y_i(x_i \cdot w + b) - 1 + \xi_i].$
- $\frac{\partial L_P}{\partial w} = 0 \Rightarrow w = \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i x_i.$
- $\frac{\partial L_P}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i = 0.$
- $\frac{\partial L_P}{\partial \xi_i} = 0 \Rightarrow C = \mu_i + \alpha_i.$

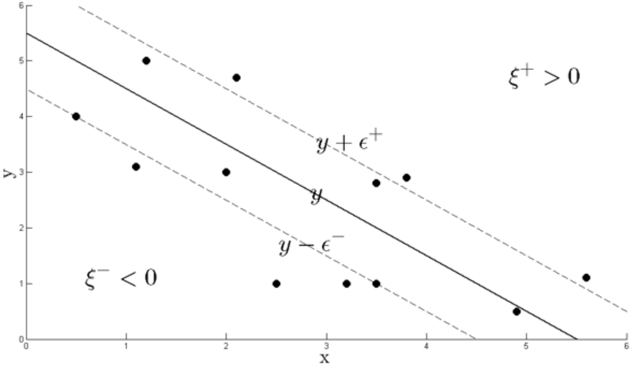
Линейно неразделимые выборки

$$\max_{\alpha}\left[\sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i - \frac{1}{2}\alpha^T H\alpha\right]$$

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant C, \forall i = 1, \ldots \ell, \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i y_i = 0.$$

- $\{x_i, y_i\}, i = 1, \ldots \ell, x_i \in \mathbb{R}^D, y_i \in \mathbb{R}$.

- $\{x_i, y_i\}, i = 1, \ldots \ell, x_i \in \mathbb{R}^D, y_i \in \mathbb{R}$.
- $y_i = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x_i} + b$.


$\xi^+ > 0$
$y + \epsilon^+$
y
$y - \epsilon^-$
$\xi^- < 0$
x
y

Интервалы для исходных значений

$$\begin{cases} t_i \leqslant y_i + \varepsilon + \xi_i^+ \\ t_i \geqslant y_i - \varepsilon - \xi_i^- \end{cases}$$

Функционал ошибки

$$C \sum_{i=1}^{\ell} (\xi_i^- + \xi_i^+) + \frac{1}{2} ||w||^2$$

$$L_P = C\sum_{i=1}^{\ell}(\xi_i^- + \xi_i^+) + \frac{1}{2}||w||^2$$
$$- \sum_{i=1}^{\ell}(\mu_i^-\xi_i^- + \mu_i^+\xi_i^+)$$
$$- \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i^+(\varepsilon + \xi_i^+ + y_i - t_i)$$
$$- \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i^-(\varepsilon + \xi_i^- - y_i + t_i)$$

$$L_P = C\sum_{i=1}^{\ell}(\xi_i^- + \xi_i^+) + \frac{1}{2}||w||^2$$
$$- \sum_{i=1}^{\ell}(\mu_i^-\xi_i^- + \mu_i^+\xi_i^+)$$
$$- \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i^+(\varepsilon + \xi_i^+ + \mathbf{w}\cdot\mathbf{x_i} + b - t_i)$$
$$- \sum_{i=1}^{\ell}\alpha_i^-(\varepsilon + \xi_i^- - \mathbf{w}\cdot\mathbf{x_i} - b + t_i)$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial \mathbf{w}} = 0 \Rightarrow \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i^+ - \alpha_i^-)\mathbf{x_i}$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial b} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i^+ - \alpha_i^-) = 0$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial \xi_i^+} = 0 \Rightarrow C = \alpha_i^+ + \mu_i^+$$

$$\frac{\partial L_P}{\partial \xi_i^-} = 0 \Rightarrow C = \alpha_i^- + \mu_i^-$$

$$L_D = \sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i^+ - \alpha_i^-)t_i - \varepsilon \sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i^+ - \alpha_i^-)$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\ell}(\alpha_i^+ - \alpha_i^-)(\alpha_j^+ - \alpha_j^-)\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$$

Задача квадратичного программирования

$$\max_{\alpha^-,\alpha^+}\Bigg[\sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i^+-\alpha_i^-)t_i-\varepsilon\sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i^+-\alpha_i^-)$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{\ell}(\alpha_i^+-\alpha_i^-)(\alpha_j^+-\alpha_j^-)\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{x}_j\Bigg],$$

$$0\leqslant\alpha_i^-,\alpha_i^+\leqslant C,\sum_{i=1}^{\ell}(\alpha_i^+-\alpha_i^-)=0.$$

$$b = \frac{1}{N_S} \sum_{s \in S} \left(t_i - \varepsilon - \sum_{m=1}^{\ell} (\alpha_i^+ - \alpha_i^-) \mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_m) \right)$$

$$y' = \sum_{i=1}^{\ell} (\alpha_i^+ - \alpha_i^-)\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x} + b$$

$$\mathbf{H} : H_{ij} = y_i y_j k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j.$$

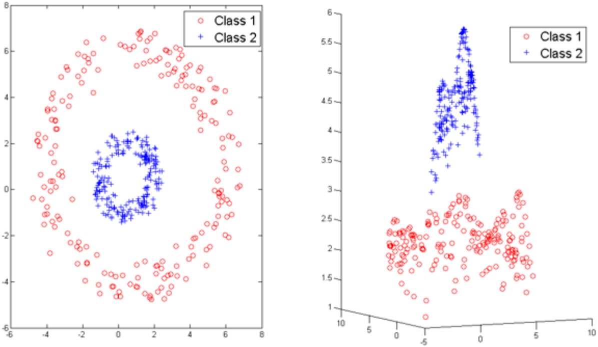
$$\mathbf{H} : H_{ij} = y_i y_j k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j.$$

- k - ядро.

$$\mathbf{H} : H_{ij} = y_i y_j k(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j.$$

- k - ядро.
- $\mathbf{K} : K_{ij} = k(\mathbf{x_i}, \mathbf{x_j})$ - положительно полуопределённая матрица: $\sum_{i,j} g_i K_{ij} g_j \geqslant 0, \forall g.$

- Polynomial: $k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (1 + \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^k$
- Sigmoid: $k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \tanh(\alpha \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \beta)$
- Gaussian RBF: $k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = e^{-\left(\frac{||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||^2}{2\sigma^2}\right)}$


Class 1
Class 2
Class 1
Class 2