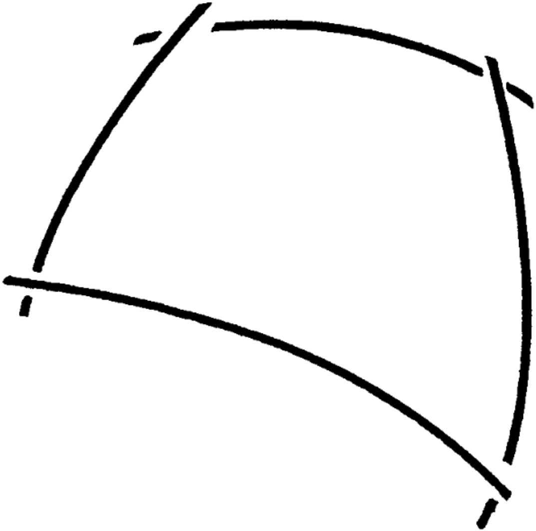
Поверхности Кунса

Выступающий: Павлович Владислав

Минск, 2017

Условие совместимости



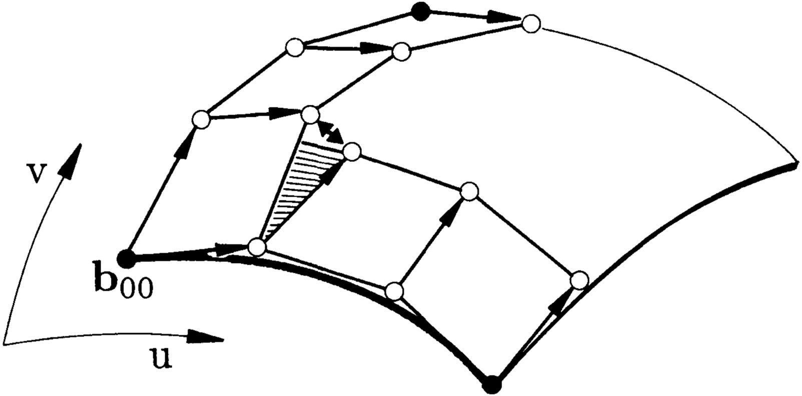
Условие совместимости

$$\mathbf{h}_{cd}(u,v) = \begin{bmatrix} H_0^3(u) & H_1^3(u) & H_2^3(u) & H_3^3(u) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{x}(0,0) & \mathbf{x}_v(0,0) & \mathbf{x}_v(0,1) & \mathbf{x}(0,1) \\ \mathbf{x}_u(0,0) & \mathbf{x}_{uv}(0,0) & \mathbf{x}_{uv}(0,1) & \mathbf{x}_u(0,1) \\ \mathbf{x}_u(1,0) & \mathbf{x}_{uv}(1,0) & \mathbf{x}_{uv}(1,1) & \mathbf{x}_u(1,1) \\ \mathbf{x}(1,0) & \mathbf{x}_v(1,0) & \mathbf{x}_v(1,1) & \mathbf{x}(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0^3(v) \\ H_1^3(v) \\ H_2^3(v) \\ H_3^3(v) \end{bmatrix}$$

Коэффициенты изгиба не обязяательно равны.

$$\mathbf{x}_{vu}(0, 0) = \lim_{u \to 0} \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}_v(u, 0),$$

$$\mathbf{x}_{uv}(0, 0) = \lim_{v \to 0} \frac{\partial}{\partial v} \mathbf{x}_u(0, v).$$


v
u
b_{00}

- Выбрав одно из значений получаем частичную интерполяцию.
- Получится ещё хуже, если подставим нули вместе всех коэффициентов изгиба.

Условие совместимости

Методы решения:

- Корректировка исходных кривых и избавление от несовместимостей.
- Квадрат Грегори: замена постоянных коэффициентов изгиба на переменные.

Условие совместимости. Квадрат Грегори

$$\mathbf{x}_{uv}(0,0) = \frac{u\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{x}_u(0,0) + v\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}_v(0,0)}{u+v},$$

$$\mathbf{x}_{uv}(0,1) = \frac{-u\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{x}_u(0,1) + (v-1)\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}_v(0,1)}{-u+v-1},$$

$$\mathbf{x}_{uv}(1,0) = \frac{(1-u)\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{x}_u(1,0) + v\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}_v(1,0)}{1-u+v},$$

$$\mathbf{x}_{uv}(1,1) = \frac{(u-1)\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{x}_u(1,1) + (v-1)\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{x}_v(1,1)}{u-1+v-1}.$$

Условие совместимости

Методы решения:

- Изгиб не является непрерывным.
- Разные значения в зависимости от того, с какой стороны подходить к углу.

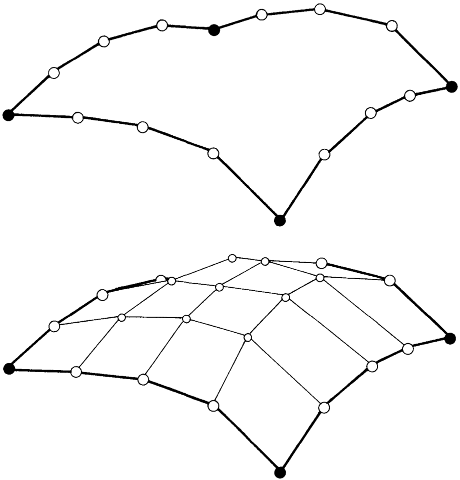
Дано:

- 4 граничные кривые (B-сплайн или кривая Безье).
- Противоположные кривые имеют одинаковую степеньи определены одной и той же последовательностью узловых точек.

Задача:

- Найти контрольную сеть, которая распологается между граничными кривыми,.

Контрольные сети



Контрольные сети

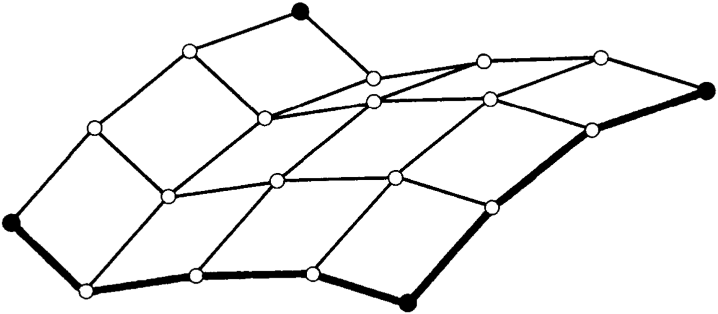
- Интерпретируем границы как кусочно-линейные кривые.
- Вычисляем билинейно смешанную поверхность Кунса, которая их интерполирует.
- Полученная поверхность будет кусочно-билинейной.

Трансляционные поверхности

$c_1(u), c_2(u)$ - кривые с общей точкой пересечения a.

$$t(u,v) = c_1(u) + c_2(v) - a$$
$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} t(u,v) = 0$$

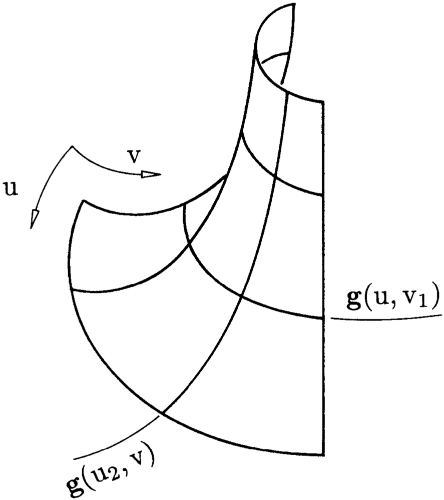
Трансляционные поверхности



Выпуклая комбинация - взвешенная сумма четырёх поверхностей.

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{00}(u,v) & \mathbf{t}_{01}(u,v) \\ \mathbf{t}_{10}(u,v) & \mathbf{t}_{11}(u,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-v \\ v \end{bmatrix}$$

Поверхности Гордона



$$\mathbf{g}_1(u, v) = \sum_{i=0}^{m} \mathbf{g}(u_i, v) L_i^m(u).$$

$$\mathbf{g}_2(u, v) = \sum_{j=0}^{n} \mathbf{g}(u, v_j) L_j^n(v).$$

$$\mathbf{g}_{12}(u, v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \mathbf{g}(u_i, v_j) L_i^m(u) L_j^n(v)$$

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_{12}.$$

Булевы суммы

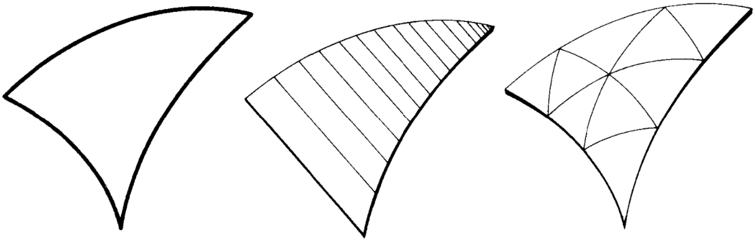
$$[\mathcal{P}_1\mathbf{x}](u,v) = (1-v)\mathbf{x}(u,0) + v\mathbf{x}(u,1).$$

$$[\mathcal{P}_2\mathbf{x}](u,v) = (1-u)\mathbf{x}(0,v) + u\mathbf{x}(1,v).$$

$$\mathcal{P}\mathbf{x} = \mathcal{P}_1\mathbf{x} + \mathcal{P}_2(\mathbf{x} - \mathcal{P}_1\mathbf{x}).$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \bigoplus \mathcal{P}_2.$$

Треугольные поверхности Кунса



Треугольные поверхности Куна

$$\boldsymbol{x}(0,v,w), \boldsymbol{x}(u,0,w), \boldsymbol{x}(u,v,0)$$

$$P_1\boldsymbol{x(u)} = (1-r)\boldsymbol{x}(u,0,w) + r\boldsymbol{x}(u,v,0), r = \frac{v}{v+w}$$

$$P_2\boldsymbol{x(u)} = (1-s)\boldsymbol{x}(u,v,0) + s\boldsymbol{x}(0,v,w), s = \frac{w}{v+w}$$

$$P_3\boldsymbol{x(u)} = (1-t)\boldsymbol{x}(u,0,w) + t\boldsymbol{x}(0,v,w), t = \frac{v}{v+u}$$

Рациональны по u, v, w и линейны по r, s, t.

Треугольные поверхности Кунса

Возможные комбинации:

- $P = P_1 \oplus P_2$.
- $P = uP_1x + vP_2x + wP_3x$.

Треугольные поверхности Кунса

$$\boldsymbol{x}(0,v,w), \boldsymbol{x}(u,0,w), \boldsymbol{x}(u,v,0)$$

$$P_1\boldsymbol{x(u)} = H_0^3(r)\boldsymbol{x}(u,0,w) + H_1^3(r)\boldsymbol{x}_1(u,0,w)$$
$$+ H_2^3(r)\boldsymbol{x}_1(u,v,0) + H_3^3(r)\boldsymbol{x}(u,v,0)$$

$$P_1\boldsymbol{x(u)} = H_0^3(r)\boldsymbol{x}(u,v,0) + H_1^3(r)\boldsymbol{x}_2(u,v,0)$$
$$+ H_2^3(r)\boldsymbol{x}_1(0,v,w) + H_3^3(r)\boldsymbol{x}(0,v,w)$$

$$P_1\boldsymbol{x(u)} = H_0^3(r)\boldsymbol{x}(u,0,w) + H_1^3(r)\boldsymbol{x}_1(u,0,w)$$
$$+ H_2^3(r)\boldsymbol{x}_1(u,0,w) + H_3^3(r)\boldsymbol{x}(0,v,w)$$

Треугольные поверхности Кунса

$$x_1(u) = (v + w)D_{e2-e3}x(u)$$
$$x_2(u) = (u + w)D_{e3-e1}x(u)$$
$$x_2(u) = (u + v)D_{e2-e1}x(u)$$

Треугольные поверхности Кунса

$$P_1\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = u\boldsymbol{x}(1,0,0) + (1-u)\boldsymbol{x}(0,r,1-r); r = \frac{v}{v+w}$$

$$P_2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = v\boldsymbol{x}(0,1,0) + (1-v)\boldsymbol{x}(1-s,0,s); s = \frac{u}{u+w}$$

$$P_3\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u}) = w\boldsymbol{x}(0,0,1) + (1-w)\boldsymbol{x}(1-t,t,0); t = \frac{u}{u+v}$$

$$
\begin{aligned}
P &= P_1 \oplus P_2 \oplus P_3 \\
&= P_1 + P_2 + P_3 - P_1 P_2 - P_2 P_3 - P_1 P_3 + P_1 P_2 P_3
\end{aligned}
$$

Треугольные поверхности Кунса. Подход Нельсона