

YMH 214 SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

1

12.Hafta

Sayısal Integral

- Trapez(Yamuk) Kuralı
- Simpson Kuralı

Sayısal Integral

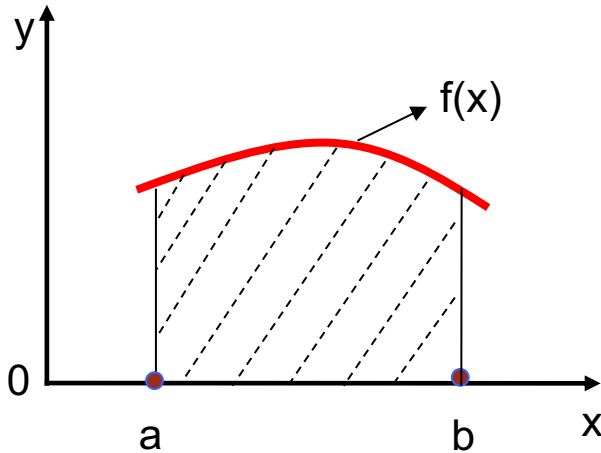
- Sözlük anlamına göre *İntegral Almak* ; *Parçaları bir bütün içerisinde bir araya getirmek* ; *Birleştirmek* *Toplam miktarı göstermek* demektir.
- Basit fonksiyonların (**polinom, üstel ve trigonometrik**) integrali **analitik** olarak hesaplanabilir.
- **Fakat integrali zor olan karmaşık yapıdaki fonksiyonların** analitik olarak hesaplanması ya zor ya da imkansızdır.
- Bu gibi durumlarda **Sayısal İntegralden yararlanılır.**

Sayısal Integral

- Sayısal İntegrasyon verilen herhangi bir integralin değerinin yaklaşık olarak bulunmasıdır.

$$\Rightarrow I = \int_a^b f(x) \cdot dx$$

- İntegralin sınırları olan a ve b sayıları **sabit** ve **fonksiyon** bu aralıkta **sürekli** ise integralin sonucu sabit bir sayıdır.



Bu integralin değeri $x=a$ ve $x=b$ doğruları ile $y=f(x)$ eğrisinin altında kalan **alana** eşittir.

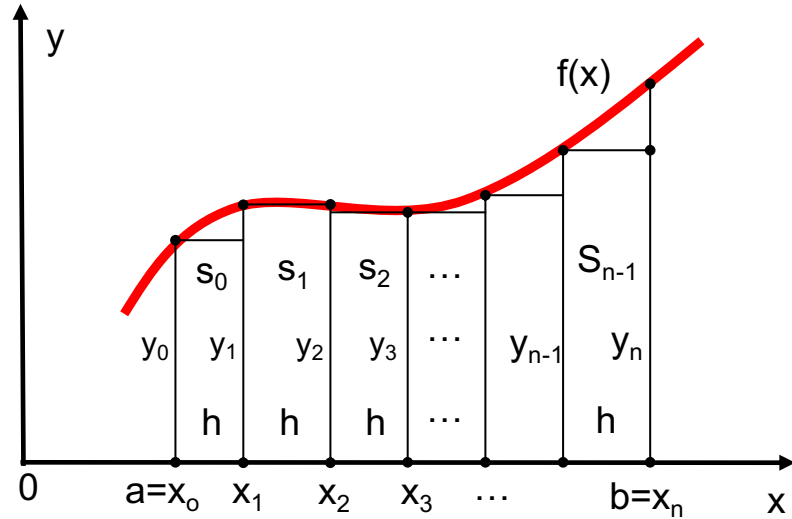
- Sayısal integrasyon **verilen a-b aralığında** **fonksiyon** n parçaya ayrılarak her bir parçanın alanının bulunması yöntemlerini içerir.
- Daha sonra ise **toplam alan** yani **integralin yaklaşık değeri** hesaplanır.

Sayısal Integral

En yaygın olarak kullanılan sayısal integral yöntemleri Newton Cotes formülleridir.

- Dikdörtgenler Yöntemi
- Yamuk (Trapez) Yöntemi
- Simpson Yöntemi

Dikdörtgenler Yöntemi



a ve b arasını n adet çubuk ile böldüğümüzde oluşan dikdörtgenlerin alanının hesaplanması amaçlanır.

$$y_0 = f(x_0) \quad \text{ve} \quad y_n = f(x_n)$$

$$s_0 = h \cdot y_0 = h \cdot f(x_0)$$

$$s_1 = h \cdot y_1 = h \cdot f(x_1)$$

\vdots

$$s_{n-1} = h \cdot y_{n-1} = h \cdot f(x_{n-1})$$

$$\Rightarrow S = h \sum_{k=0}^{n-1} y_k$$

$$\Rightarrow h = \frac{x_n - x_0}{n}$$

Dikdörtgenler Yöntemi

Soru 1: $\int_1^8 \frac{x+2}{x^2+2} \cdot dx$ İntegralini $n=6$ için dikdörtgenler yöntemini kullanarak bulunuz.

I. Basamak $x_n=8$ ve $x_0=1$ $f(x) = \frac{x+2}{x^2+2} \Rightarrow h = \frac{x_n - x_o}{n} = \frac{8-1}{6} = 1,16666$

II. Basamak

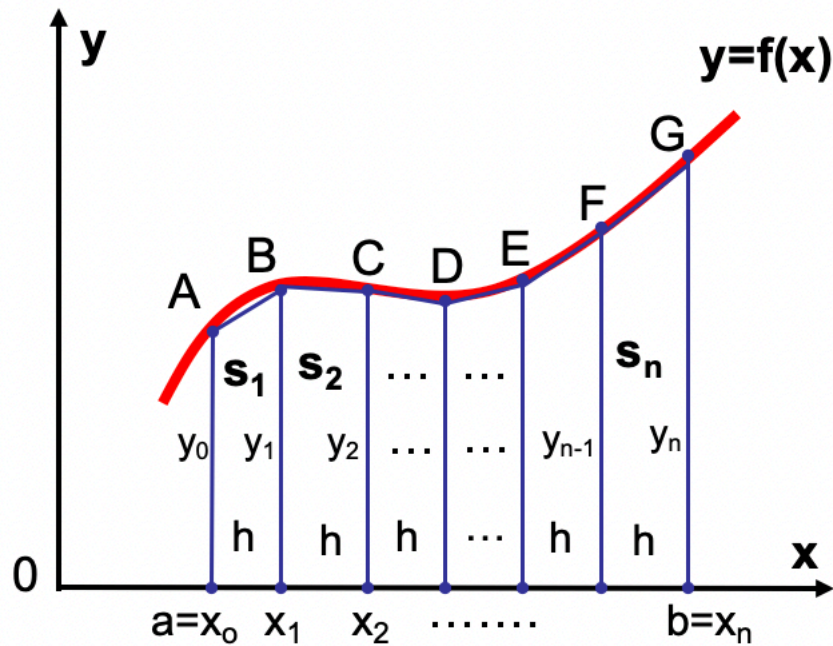
k	x_k	$f(x_k)$
0	1	1
1	2,16666	0,6224
2	3,3333	0,4068
3	4,5	0,2928
4	5,6667	0,2247
5	6,833	0,1814
6	8	0,1515

$$\begin{aligned}\Rightarrow S &= h \sum_{k=0}^{n-1} y_k \\ &= 1,16666 \left[\sum_{k=0}^5 f(x_k) \right] \\ &= 3,182765\end{aligned}$$

Trapez(Yamuk) Yöntemi

$$I = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad \text{İntegralini } [a,b] \text{ aralığında } n \text{ eşit parçaya ayıralım.}$$

Her bölme noktasından dikler çıkılır, bu dikler ile $f(x)$ eğrisinin kesiştiği noktalar birer doğru ile birleştirilir. Bu durumda n adet yamuk elde edilir.



x_0ABx_1 yamuğunun alanı

$$S_1 = (1/2) \cdot h \cdot (y_0 + y_1)$$

$$S_2 = (1/2) \cdot h \cdot (y_1 + y_2)$$

...

$$S_n = (1/2) \cdot h \cdot (y_{n-1} + y_n)$$

Trapez(Yamuk) Yöntemi

Toplam Alan

$$S=S_1+S_2+...+S_n$$

$$S=(1/2) \cdot h \cdot (y_0+y_1)+...+(1/2) \cdot h \cdot (y_{n-1}+y_n)$$

$$S=(1/2) \cdot h \cdot (y_0+2y_1+2y_2+...+2y_{n-1}+y_n)$$

$$S=h \cdot ((y_0+y_n)/2+y_1+y_2+...+y_{n-1})$$

$$\Rightarrow S = h \cdot \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \quad \begin{array}{ll} y_0=f(x_0) & y_n=f(x_n) \\ x_0=a & x_n=b \end{array}$$

$$\Rightarrow h = \Delta x = \frac{x_n - x_0}{n} \quad \text{olarak yeniden düzenlersek}$$

$$\Rightarrow S = \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_0 + k\Delta x) \right) \quad \text{olur}$$

SORU 2: $I = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

İntegralini

a) Analitik yoldan hesaplayınız.

b) $n=1$ ve $n=2$ için **Yamuk Yöntemini** kullanarak hesaplayınız.

a) $a=1$ ve $b=2$

$$a) \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = \int_1^2 \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + 2 - 1\right) = \mathbf{4.833}$$

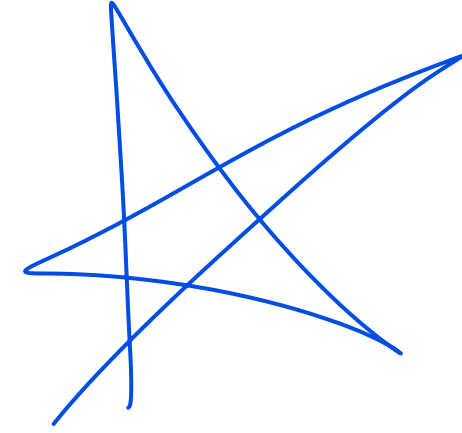
b) $n=1$ $h=(b-a)/n=(2-1)/1=1$

$$h \frac{(f(a)+f(b))}{2} = 1 \cdot \frac{(4 + \frac{25}{4})}{2} = \mathbf{5.125}$$

$n=2$ $h=(b-a)/2=0.5$

$$\int_1^{1.5} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx + \int_{1.5}^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx = 0.5 \cdot [f(1) + f(1.5)]/2 + 0.5 \cdot [f(1.5) + f(2)]/2 = \mathbf{4.909}$$

Matlab Çözümü ile Trapez Yöntemi



```
clear all;close all;clc;
fprintf('f(x)=(x+1/x)^2 fonksiyonun trapez yöntemi ile yaklaşık çözümünü bulma\n');
a=1;
b=2;
n=2;
h=(b-a)/n;
toplamlam=0;
for x=a:h:b-h
    y=(x+1/x)^2;
    toplamlam=toplamlam+h/2*((x+1/x)^2+((x+h)+1/(x+h))^2);
end
disp(' toplamlam');
disp([toplamlam])
```

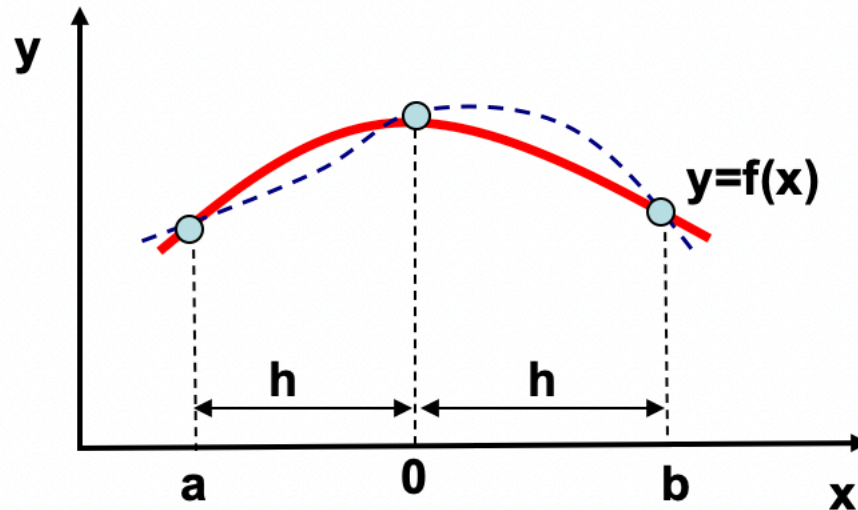
Ekran Çıktısı

```
f(x)=(x+1/x)^2 fonksiyonun trapez yöntemi ile yaklaşık çözümünü bulma  
toplam  
4.9097
```

```
>>
```

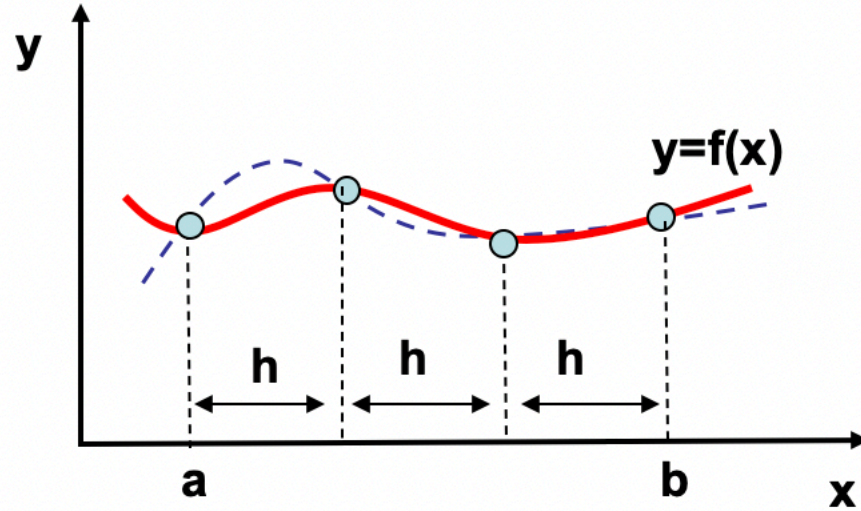
Simpson 1/3 Kuralı

- Yamuk Yönteminde **hatayı azaltmak için** aralık sayısı artırılır.
- İntegrali daha doğru hesaplamanın diğer bir yolu ise **noktaları bir doğru ile birleştirmek yerine** daha **yüksek dereceli polinomlar** kullanmaktır.
- Örneğin, $x=a$ ve $x=b$ noktaları arasında bir nokta daha **varsa** bu üç nokta **2. derece bir polinom ile birleştirilebilir.**



Ya da $x=a$ ve $x=b$ arasında eşit aralıklı iki nokta varsa bu dört nokta

3. derece bir polinom ile birleştirilebilir.



$$S=(b-a) \cdot \frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6}$$

Hem 2. dereceden hem de 3. dereceden polinomlar altında kalan alanları veren formüllere SIMPSON Kuralları denilir.

SORU 3: $I = \int_{-1}^3 (x^3 + 1) dx$

İntegralini

a) Analitik yoldan hesaplayınız.

b) $n=1$ ve $n=2$ için Simpson 1/3 Yöntemini kullanarak hesaplayınız.

a) $a=-1$ ve $b=3$

a) $\int_{-1}^3 (\frac{x^4}{4} + x) = (\frac{3^4}{4} + 3) - (\frac{1^4}{4} + (-1)) = \frac{80}{4} + 4 = 24$

b) $n=1$ $(b-a) = (3 - (-1)) = 4$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 (x^3 + 1) dx &= (b-a) \cdot \frac{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)}{6} \\ &= (3 - (-1)) \cdot \frac{f(-1) + 4f(\frac{-1+3}{2}) + f(3)}{6} \\ &= 4 \cdot \frac{f(-1) + 4f(1) + f(3)}{6} \\ &= 4 \cdot (\frac{0+8+28}{6}) = 24\end{aligned}$$

$$n=2 \quad h=(b-a)/n=(3-(-1))/2=2$$

$$\int_{-1}^1 (x^3 + 1)dx + \int_1^3 (x^3 + 1)dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^1 (x^3 + 1)dx = (b-a) \cdot \frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6} + \int_1^3 (x^3 + 1)dx = (b-a) \cdot \frac{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)}{6} \\ &= (1-(-1)) \frac{f(-1)+4f\left(\frac{-1+1}{2}\right)+f(1)}{6} + (3-1) \frac{f(1)+4f\left(\frac{3+1}{2}\right)+f(3)}{6} \\ &= 2 \cdot \frac{f(-1)+4f(0)+f(1)}{6} + 2 \cdot \frac{f(1)+4f(2)+f(3)}{6} \\ &= 2 + 22 \\ &= 24 \end{aligned}$$

Matlab ile Çözümü

```
clear all;close all;clc;
fprintf('f(x)=(x^3+1) fonksiyonun Simpson yöntemi ile yaklaşık çözümünü bulma\n');
a=-1;
b=3;
n=2;
h=(b-a)/n;
toplama=0;
for x0=a:h:b-h
    x1=(x0+(x0+h))/2;
    x2=x0+h;
    fx0=(x0^3+1);
    fx1=(x1^3+1);
    fx2=(x2^3+1);
    toplam=toplama+h/6*(fx0+4*fx1+fx2)
end
disp(' toplam');
disp([toplama])
```

Ekran Çıktısı

```
f(x)=(x^3+1) fonksiyonun Simpson yöntemi ile yaklaşık çözümünü bulma
```

```
toplam =
```

```
2
```

```
toplam =
```

```
24
```

```
toplam  
24
```

```
>>
```