**Tanım 9.15.** Determinantı $0$ a eşit olan matrislere singüler matris, $0$ dan farklı olan matrislere de **regüler matris** adı verilir.

**Tanım 9.16.** Bir $A$ matrisinin determinantı $0$ dan farklı olan en yüksek mertebeden alt matrisinin mertebesine $A$ matrisinin **rankı** adı verilir.

**UYARI:** $n$. mertebeden bir $A$ matrisinin rankı en fazla $"n"$ olur.

**Örnek 9.13.**

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}_{4\times4} \Rightarrow \det A = 0$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} \Rightarrow |\dot{A}_1| = -2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(2+2) = -8$$

$$rank A = 3$$

**Örnek 9.14.**

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ -3 & -6 & 3 & 6\end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad B_1=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 3 & 6\end{bmatrix}=18-3=15\neq 0$$

$$rankB=2$$

## Elemanter Operasyonla Rank Tayini

Verilen matrise bir dizi satır veya sütun operasyonu yapılarak aşağıda örnekleri vereceğimiz eşolon formlarına dönüştürerek bu eşolon formlarındaki mertebesi en büyük olan birim matrisin mertebesi verilen matrisin rankı olacaktır.

Eşolon form örnekleri;

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}_{5\times 4},\ \begin{bmatrix}0&1&0&a\\0&0&1&b\\0&0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

**Örnek 9.15.**

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&1&-2&1\\2&4&2&-2\\0&1&2&0\end{bmatrix}_{4\times 4}\underset{\approx}{H_{31^{(-2)}}}\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\\0&1&2&0\end{bmatrix}\underset{\approx}{H_{34}}\begin{bmatrix}1&2&1&-1\\0&1&-2&1\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}H_{12^{(-2)}}\\ \approx\\ H_{32^{(-1)}}\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&5&-3\\0&1&-2&1\\0&0&4&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}H_{34}\\ \approx\\ H_{3^{(-1)}}\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&-3&5\\0&1&1&-2\\0&0&1&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}H_{13^{(3)}}\\ \approx\\ H_{23^{(-1)}}\end{matrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3\times 3}\\ 0\ 0\ 0\ 0\end{bmatrix}$$

$$rankA=3$$

**Örnek 9.16.**

$\begin{bmatrix}1&2&-1&-2\\0&1&3&1\\-3&-6&3&6\end{bmatrix}$ matrisinin rankının 2 olduğunu gösteriniz.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ -3 & -6 & 3 & 6\end{bmatrix} \underset{\approx}{H_{31^{(3)}}} \begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \underset{\approx}{H_{31^{(-2)}}} \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}_{2\times 2} & \\ 0\ 0 & 0\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow rankB=2$$

**Tanım 9.17.** Verilen bir $A$ matrisinin satırlarını sütuna, sütunlarını da satıra yazmak suretiyle elde edilen matrise verilen matrisin **transpozu** adı verilir, $A^T$ ile gösterilir,

**Örnek 9.17.**

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{bmatrix}_{m\times n} \Rightarrow A^T\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & a_{m2}\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn}\end{bmatrix}_{n\times m}$$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

**Transpoz İşleminin Özellikleri**

$A$ ve $B$ ayrı tipten iki matris $k \in R$ veya $R$ olmak üzere

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(kA)^T = kA^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

**Tanım 9.18.** $A$ herhangi bir karesel matris, $A$ matrisinin $a_{ij}$ elemanlarının kofaktörleri $A_{ij}$ ler olmak üzere $A$ matrisinin **adjoint matrisi** diye

$$adjA = [A_{ij}]^T = [A_{ji}] \text{ ye denir.}$$

**Örnek 9.18.**

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{21}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3 \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-3$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{32}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=6 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

**Örnek 9.19.**

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad B_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 \qquad B_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$$

$$B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \qquad B_{32} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \qquad B_{33} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8 \qquad B_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$adjB = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -6 \\ -2 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$$

**Adjoint Matrisin Özellikleri**

$A$ ve $B$ aynı tipten iki matris olmak üzere

1. $A(adjA) = |A|.I_n$

2. $adj(A.B) = (adjB).(adjA)$

1 nolu özelliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{12} \dots a_{2n} \\ . & \\ . & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A(adjA) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \dots A_{1n} \\ A_{12} & A_{22} \dots A_{2n} \\ A_{n1} & A_{n2} \dots A_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ A & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A|.I_n$$