İç Çarpım Uzayları

Tanım: V, $\mathbb{R}$ de bir vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$$

dönüşümüne V de bir iç-çarpım denir.

cebirsel olarak.

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$$
$$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \in \mathbb{R}$$

şeklinde reel bir sayıdır.

Tanım: Bir $\vec{x} \in V$ vektörünün normu (boyu) diye

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle}$$
$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \in \mathbb{R}.$$

dır

İki vektör Arasındaki Açı

Başlangıç noktaları aynı arasındaki açı θ olan $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörleri için,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} \quad (*)$$

formülü vardır.

Örnek

$\vec{x} = (1,2,3)$, $\vec{y} = (0,-1,4)$ vektörleri arasındaki açıyı bulunuz.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$$

$$\|\vec{y}\| = \sqrt{0^2+1^2+4^2} = \sqrt{17}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (1,2,3),(0,-1,4) \rangle = 0-2+12 = 10$$

Bu değerleri $(*)$ da yerine yazarak

$$\cos\theta = \frac{10}{\sqrt{14}\,\sqrt{17}} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{10}{\sqrt{14 \cdot 17}}\right)$$

olarak bulunur.

Tanım: Yukarıdaki formülü tekrar gözönüne alırsak,

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = 0$$

olması $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$, o halde iki vektörün birbirine dik olma şartı

$$\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0}$$ olacaktır.

Tanım: Normu 1 olan vektöre birim vektör denir. $(\|\vec{x}\| = 1)$.

Eğer verilen bir vektörü birim vektör yapmak için verilen vektörün normunu bileşenlerine bölerek elde ederiz

$$\vec{x} = (1,2,3) \Rightarrow \|\vec{x}\| = \sqrt{14}$$

bunu birim vektör yapmak istersek

$$\vec{y} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \frac{(1,2,3)}{\sqrt{14}} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

$\Rightarrow \|\vec{y}\| = 1$ olur.

Tanım : V, n- boyutlu bir vektör uzayı olsun. Eğer birbirinden farklı herhangi iki vektörler $\langle \vec{x}_i , \vec{x}_j \rangle = 0$ ise V'nin $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ sistemi ortogonaldir (Birbirine diktir).

Eğer ortogonalliğinin yanında $\forall \vec{x}_i$ için $\|\vec{x}_i\| = 1$ ise $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ sistemi ortonormaldir denir.

ORTONORMALLEŞTİRME YÖNTEMİ

(Gram-Schmidth metodu).

Uzaya serpiştirilmiş n- tane vektör $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ olsun. Bu vektörleri aşağıda vereceğimiz metodla $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ için $\longrightarrow$ $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ ortonormal sistemini elde edeceğiz.

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1$$

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \vec{y}_1$$

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle} \vec{y}_2$$

$\vdots$

$$\vec{y}_n = \vec{x}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \vec{x}_n, \vec{y}_i \rangle}{\langle \vec{y}_i, \vec{y}_i \rangle} \vec{y}_i$$

formülleri ile ede edilir.

Örnek :

$\vec{x}_1 = (0,1,1)$, $\vec{x}_2 = (1,0,1)$, $\vec{x}_3 = (-1,1,0)$ vektörleri

için ortonormal baz bulalım;

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (0,1,1)$$

$$\vec{y}_2 = (1,0,1) - \frac{\langle (1,0,1),(0,1,1) \rangle}{2} (0,1,1)$$

$$= (1,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1) = (1,0,1) + \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$= \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

kontrol edelim.

$$\langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle = \left\langle (0,1,1), \left(1, \frac{-1}{2}, 1/2\right) \right\rangle = 0 \text{ doğru}$$

$$\overline{y}_3 = (-1,1,0) - \frac{\langle(-1,1,0),(0,1,1)\rangle}{2}(0,1,1) - \frac{\langle(-1,1,0),(1,-1/2,1/2)\rangle}{3\cancel{6}/\cancel{4}\,2}$$

$(1,-1/2,1/2)$

$$= (-1,1,0) - \frac{1}{2}(0,1,1) - \cancel{\frac{3}{2}}\left(\cancel{-\frac{2}{3}}\right)\cdot(1,-1/2,1/2)$$

$$= (-1,1,0) + (0,-1/2,-1/2) + (1,-1/2,1/2)$$

$= (0,0,0)$ olur ki

$$\langle \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_2 \rangle = 0 = \langle \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_3 \rangle = \langle \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{y}_3 \rangle$$

$\{\overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{y}_3\}$ ortogonal sistem elde edilir.

$$\overrightarrow{e}_1 = \frac{\overrightarrow{y}_1}{\|\overrightarrow{y}_1\|} = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{2}} = \left(0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$$

$$\overrightarrow{e}_2 = \frac{\overrightarrow{y}_2}{\|\overrightarrow{y}_2\|} =$$

$$\overrightarrow{e}_3 = \frac{\overrightarrow{y}_3}{\|\overrightarrow{y}_3\|}$$

$\{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$ ortonormal sistemi elde edilir.

Hem dik, hem birim olur.