1. KOMPLEKS SAYILAR

1.1. Kompleks Sayıların Cebirsel ve Geometrik Özellikleri

Tanım 1. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere (x, y) sıralı ikililerine kompleks sayı denir. Burada x, z nin reel kısmı, ve y, z nin imajiner kısmıdır,

$$Rez = x$$

ve

$$Imz = y$$

şeklinde gösterilir. Kompleks sayılar kümesi üzerinde sırasıyla eşitlik, toplama ve çarpma işlemleri

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2, \;\; y_1 = y_2,$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

şeklinde tanımlanır.

Kompleks sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemleriyle bir cisim oluşturur ve kompleks sayılarda çarpma işleminin tanımına göre

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0.1 + 1.0) = (-1, 0) = -1$$

bulunur. Buna göre z kompleks sayısı

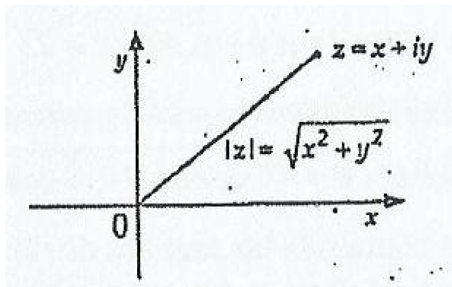
$$\begin{aligned} z = (x, y) &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (0, 1)(y, 0) \\ &= x + iy \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Kompleks sayılar kümesi

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

şeklinde gösterilir.

Geometrik olarak bir $z = x + iy$ kompleks sayısını $\mathbb{R}^2$ veya xy-düzleminde bir (x, y) noktasıyla eşleyebiliriz veya orijinden (x, y) noktasına uzanan bir vektör ile gösteririz. Bu durumda xy-düzlemine z- düzlemi veya kompleks düzlem, x eksenine reel eksen, y eksenine imajiner eksen adı verilir.



Tanım 2. $z = x + iy$ herhangi bir kompleks sayı olsun. Bu sayının eşleniği (konjugesi) $\overline{z}$ simgesiyle gösterilir ve $\overline{z} = x - iy$ olarak tanımlanır. z ve $\overline{z}$ sayıları x- eksenine göre simetriktir.

Tanım 3 (Mutlak değer). z nin mutlak değeri (modülü) z vektörünün boyunu veya $z = (x, y)$ noktasının orijine olan uzaklığını gösterir.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(Rez)^2 + (Imz)^2}$$

şeklindedir.

Soru 1. Aşağıdaki eşitlikleri elde ediniz.
1) $|z| = |\bar{z}|$

2)$z\bar{z} = z^2$.

3)$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

4) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$.

5) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$.

6) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Çözüm.

1) $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ve $\overline{z} = x - iy$, $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ şeklindedir.
Buradan, $|z| = |\bar{z}|$ elde edilir.

2) $z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$.

3) $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)} \\
&= \overline{x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)} \\
&= x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) \\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4)

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} \\
&= \overline{x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)} \\
&= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\overline{z_1}\,\overline{z_2} &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\
&= x_1x_2 - ix_1y_2 - ix_2y_1 - y_1y_2 \\
&= x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

olur ve (1.1) ve (1.2) den istenilen eşitlik elde edilir.

5)

$$\begin{aligned}
\overline{z^{-1}} &= \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)} \\
&= \overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)} = \overline{\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right)} \\
&= \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x+iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{1}{x-iy} = \frac{1}{\overline{z}}
\end{aligned}$$

bulunur.

6)

$$\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{z_1 z_2^{-1}} = \overline{z_1}\,\overline{z_2^{-1}} \\
&= \overline{z_1 z_2}^{-1} = \overline{z_1}\frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Soru 2. Aşağıdaki ifadelerin doğruluğunu gösteriniz.

1)$|z| \geq |Rez| \geq Rez.$

2)$|z| \geq |Imz| \geq Imz.$

3)$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|.$

4)$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$

5) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$

6) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$

Çözüm.

1) $|z| = \sqrt{(Rez)^2 + (Imz)^2} \geq |Rez| \geq Rez$ bulunur.

2) $|z| = \sqrt{(Rez)^2 + (Imz)^2} \geq |Imz| \geq Imz$ bulunur.

3)

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)| \\ &= |x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)| \\ &= \sqrt{(x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} |z_1||z_2| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)} \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + y_1^2 y_2^2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

olur ve (1.3) ve (1.4) den istenilen eşitlik elde edilir.

4)

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Her iki tarafın karekökü alınırsa $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ elde edilir.

5) $|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ eşitsizliğinden $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$ bulunur. Diğer yandan $|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|$ eşitsizliğinden $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$ olur. Bu yapılanlardan, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ elde edilir.

6) Öncelikle $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z}\right| &= \left|\frac{1}{x+iy}\right| = \left|\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right| \\ &= \sqrt{\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{|z|}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |z_1 z_2^{-1}| = |z_1||z_2|^{-1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

elde edilir.

Soru 3. $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 - z_2)\overline{(z_1 - z_2)} + (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) + (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= 2\left(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2}\right) \\ &= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)\end{aligned}$$

bulunur.

Soru 4. $z = x + iy$ olmak üzere $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $|x| + |y| > \sqrt{2}|z|$ olduğunu kabul edelim.

Bu durumda $(|x| + |y|)^2 > 2(x^2 + y^2)$ olur. Buradan $|x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| > 2x^2 + 2y^2$ ve böylece $x^2 + y^2 - 2|x||y| = (|x| - |y|)^2 < 0$ bulunur ki bu çelişkidir.

O halde $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$ olmalıdır.

Soru 5. Gösteriniz ki z nin reel olması için gerek ve yeter şart $z = \overline{z}$ olmasıdır.

Çözüm. ($\Rightarrow$) Kabul edelim ki z reel olsun. Bu durumda $z = x(y = 0)$ olur. Dolayısıyla $z = \overline{z}$ dir.

($\Leftarrow$) $z = \overline{z}$ olsun. O halde $x + iy = x - iy$ ve buradan $y = 0$ bulunur. Dolasıyla $z = x$ olup z reeldir.

Soru 6. Gösteriniz ki z nin reel ya da imajiner olması için gerek ve yeter şart $z^2 = (\overline{z})^2$ olmasıdır.

Çözüm.($\Rightarrow$) Kabul edelim ki z reel olsun. Bu durumda $z = x(y = 0)$ olur. Bu durumda $z = \overline{z}$ dir ve $z^2 = (\overline{z})^2$ olur. z imajiner olsun. $z = iy$ ve $\overline{z} = -iy$ dir. Buradan $z^2 = (iy)^2 = (-iy)^2 = (\overline{z})^2$ bulunur.

($\Leftarrow$) $z^2 = (\overline{z})^2$ olsun. $(x-iy)^2 = (x+iy)^2$ olur ve buradan $x^2-y^2-2ixy = x^2 - y^2 + 2ixy$ elde edilir. Buradan $-xy = xy$ ve $xy = 0$ olmalıdır. Sonuç olarak $x = 0$ veya $y = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla z reel veya imajinerdir.

Soru 7. $z = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}i$ sayısının çarpmaya göre tersinin modülünü bulunuz.

Çözüm. z sayısının çarpmaya göre tersi $\frac{1}{z}$ dir. Buradan

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}i}\right| = \frac{1}{|\frac{1}{4}-\frac{1}{3}i|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{9}}} = \frac{12}{5}$$

bulunur.

Soru 8. $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = -i$ olmak üzere $|z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}|$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}|z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}| &= |(4-3i)(i)+(-i)(4+3i)| = |4i-3i^2-4i-3i^2| \\ &= |-3(-1)-3(-1)| = |3+3| = 6\end{aligned}$$

bulunur.

Soru 9. $\frac{(1+\sqrt{3}i)^2(2-i)}{(1+2i)^3}$ sayısının modülünü hesaplayınız.

Çözüm.

$$\begin{aligned}|z| &= \left|\frac{(1+\sqrt{3}i)^2(2-i)}{(1+2i)^3}\right| = \frac{|(1+\sqrt{3}i)^2(2-i)|}{|(1+2i)^3|} \\ &= \frac{|(1+\sqrt{3}i)^2||2-i|}{|(1+2i)^3|} = \frac{|1+\sqrt{3}i|^2|2-i|}{|1+2i|^3} \\ &= \frac{(\sqrt{3+1})^2\sqrt{4+1}}{(\sqrt{4+1})^3} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

bulunur.

Soru 10. z_0 merkezli ve R yarıçaplı çemberin denklemi $|z-z_0| = R$ dir. Bu denklemin $|z|^2 - 2Re(z\overline{z_0}) + |z_0|^2 = R^2$ biçiminde yazılabileceğini gösteriniz.

Çözüm.

$$\begin{aligned}|z-z_0|^2 &= (z-z_0)(\overline{z-z_0}) \\ &= (z-z_0)(\overline{z}-\overline{z_0}) \\ &= z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 + z_0\overline{z_0} \\ &= |z|^2 - (z\overline{z_0} + \overline{z\overline{z_0}}) + |z_0|^2 \\ &= |z|^2 - 2Re(z\overline{z_0}) + |z_0|^2 = R^2\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırmalar

1) Aşağıdaki sayıların reel ve imajiner kısımlarını bulunuz.

a) $\frac{1+i}{2-i}$ **b)**z^3

2) Aşağıdaki sayıları önce $x + iy$ biçiminde yazınız ve sonra da mutlak değerlerini, normlarını ve eşleniklerini bulunuz.

a) $\frac{5+5i}{2i-1}$ **b)**$(8 - 6i) - (2i - 7)$

3) $Re(iz) = -Imz$ ve $Im(iz) = Rez$ olduğunu gösteriniz.

4) $z^2 - iz + 1 = 0$ ise, bu durumda $z^4 + z^3 + 3z^2 + 2z + 1 + i = 0$ olduğunu gösteriniz.

5) $z, w \in \mathbb{C}$ ve $\overline{z}w \neq 1$ olsun. Bu durumda $|z| = 1$ ise $\left|\frac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| = 1$ olduğunu gösteriniz.