YMH 214 SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

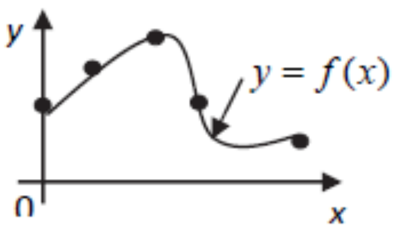
13.Hafta

Eğri Uydurma

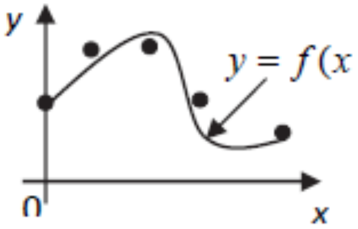
- En Küçük Kareler Regresyonu
- Doğrusal Olmayan Regresyon

Eğri Uydurma

- Eğri uydurma", deneysel çalışmalar sonucunda elde edilen her bir *x* verisine karşılık gelen y verisinin bilinmesi durumunda, bu veriler için en uygun fonksiyonun bulunması yani bir başka deyişle $y = f(x)$ fonksiyonunun bulunması işlemidir.
- Fonksiyon bulunduğunda, fonksiyonun her bir *x* değeri için $f(x)$ değerini sağlaması istenir.



Şekil 7.1 İnterpolasyon
(Eğri, bütün veri noktalarından geçmektedir.)



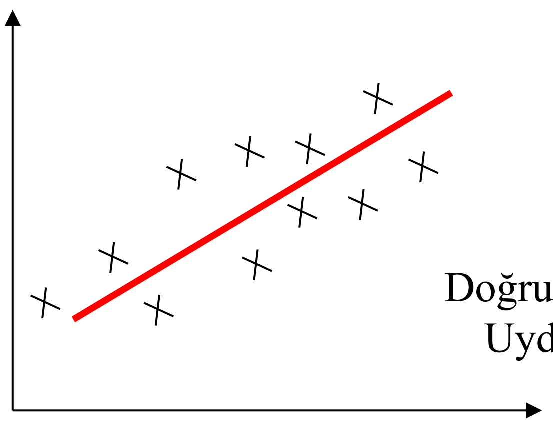
Şekil 7.2 Eğri uydurma
(Eğri, bütün veri noktalarından geçmeyebilir.)

Eğri Uydurma

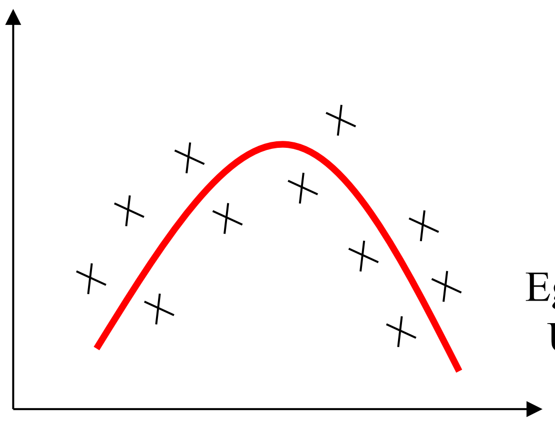
- Eğer deneysel verilerin değerleri tam (kesin) doğru değilse eğri uydurma yaklaşımından yararlanarak ara değerler tahmin edilir.
- Eğri uydurmada her veri noktasından geçen eğri yerine, verilerin genel eğilimini gösteren bir eğri tahmin edilir.
- Çünkü deneylerden elde edilen değerler; ölçme aleti hatası, okuma hatası, deney şartlarının tam olarak kontrol edilememesi gibi sebeplerden dolayı kesin doğru değildir.

Eğri Uydurma

- Bu nedenle tüm veri noktalarından geçen interpolasyon yaklaşımı ile elde edilen değerler hatalı olacaktır.
- Eğri uydurmada her bir noktaya uğramayan, verilerin genel eğilimine uyan bir yaklaşım fonksiyonu türetilir.



Doğrusal Eğri Uydurma



Eğrisel Eğri Uydurma

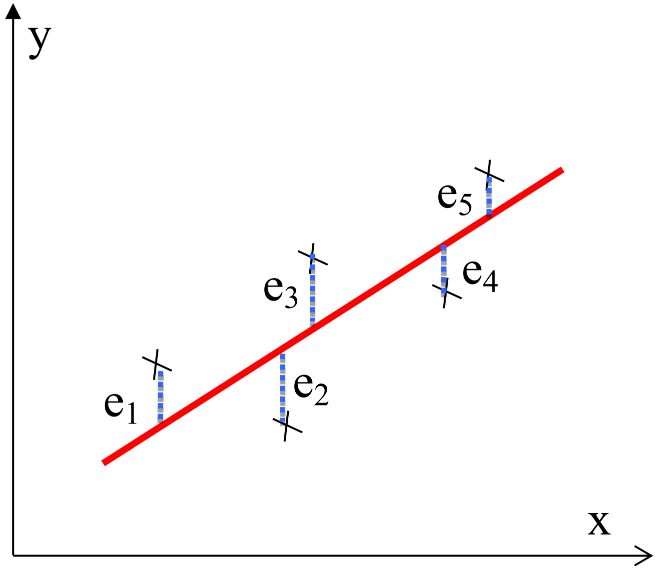
Eğri Uydurma

- Fakat verilerin arasından çok sayıda Doğru yada Eğri çizilebilir. Bunların hepsi de bu verilerin genel eğilimini göstermektedir denilemez.

- Bu nedenle eğri uydurmada en doğru eğrinin belirlenmesini sağlayan bir KRİTER'e ihtiyaç vardır.

- Birçok kriter tanımlanabilir. **Fakat en uygun kriter** gerçek veri değeri ile türetilen fonksiyonun değeri arasında kalan **hata değerinin kullanılmasıdır**.

Bu kriteri kullanan ve yaygın bir kullanımı olan yöntem '**En Küçük Kareler**' yöntemidir.



e= Hata değeri

En Küçük Kareler Yöntemi

- Çözümü olmayan bir lineer denklem sistemine yaklaşık bir çözüm bulma arayışından bu metot ortaya çıkmıştır.
- En küçük kareler yönteminin en basit örneği bir deney verileri için **doğru uydurmaktır.**

- Deneyler sonucunda (x_1,y_1), (x_2,y_2) …(x_n, y_n) değerleri bulunsun. Bu noktalardan geçen en uygun doğrunun denklemi :

$$y = a_0 + a_1 x_1 + e$$

<u>Burada</u>

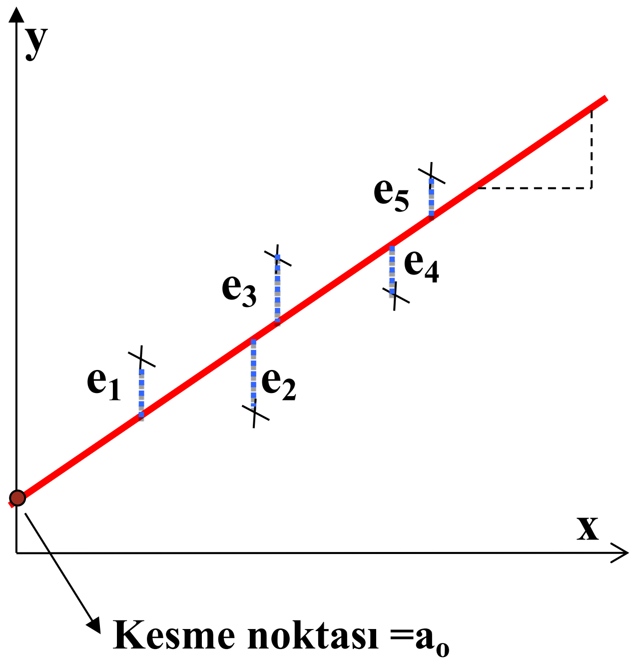
y : Gerçek değer,

x : Bağımsız değişken,

e : Gerçek değer ile tahmin edilen değer arasındaki **hatayı** gösterir.

a_o : Eğrinin y eksenini kesme noktasını ve

a_1: Eğrinin eğimi gösterir.



Soru1:

$x_1 - x_2 = 4$, $3x_1 + 2x_2 = 1$, $-2x_1 + 4x_2 = 3$ denklemlerinin;

a) En küçük kareler yöntemi ile yaklaşık çözümünü bulunuz.

b) En küçük kareler hata vektörü ve hatayı bulunuz.

Çözüm:

1. adım: Denklem sistemleri Ax=b şeklinde yazılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Soru1:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. adım: $A^T.A.x=A^Tb$ denklemin her iki tarafı, A matrisinin transpozu ile çarpılır. Bunun çözümünde x matrisi $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ en küçük kareler çözümünü verir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b}$$

Soru1:

$$\begin{bmatrix} 14 & -3 \\ -3 & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$14x_1-3x_2=1$

$-3x_1+21x_2=10$

$X_1=0.178$

$X_2=0.501$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.178 \\ 0.501 \end{bmatrix}$$

3. adım: b-Ax en küçük kareler hata vektörünü verir.

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{b} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} 0.178 \\ 0.501 \end{bmatrix}}_{x}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.322 \\ 1.526 \\ 1.649 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.322 \\ -0.540 \\ 1.350 \end{bmatrix}$$

4. adım: ||b-Ax|| en küçük kareler hatasını verir.

4. adım: ||b-Ax|| en küçük kareler hatasını verir.

$$\begin{bmatrix} 4.322 \\ -0.540 \\ 1.350 \end{bmatrix}$$

En küçük kareler hatası= ||b-Ax||

$$= \sqrt{(4.322)^2 + (-0.540)^2 + (1.350)^2}$$

=4.56

Lineer(Doğrusal Regresyon)

Regresyon bir bağımlı değişken ile diğer bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi belirler. Regresyon analizi, bağımsız değişkenlerin bazıları değiştiğinde bağımlı değişkenin nasıl değiştiğinin anlaşılmasıdır. Kısaca iki ya da daha çok nicel değişken arasındaki ilişkiyi ölçmek için kullanılan analiz metodudur.

Lineer(Doğrusal Regresyon)

Bir mühendisin basınç ve sıcaklık, bir ekonomistin gelir ve tüketim miktarı, bir eğitimcinin ise öğrencilerin devamsızlık sayıları ve başarı dereceleri arasındaki ilişkiyi belirlemesi regresyon çalışma alanına girmektedir. Regresyon, iki (ya da daha çok) değişken arasındaki doğrusal ilişkinin fonksiyonel şeklini, biri bağımlı diğeri bağımsız değişken olarak bir doğru denklemi olarak göstermekle kalmaz, değişkenlerden birinin değeri bilindiğinde diğeri hakkında kestirim yapılmasını sağlar.

Lineer(Doğrusal Regresyon)

Regresyonda, değişkenlerden biri bağımlı diğerleri bağımsız değişken olmalıdır. Buradaki mantık eşitliğin solunda yer alan değişkenin sağında yer alan değişkenlerden etkilenmesidir. Sağda yer alan değişkenlerse diğer değişkenlerden etkilenmemektedir. Doğrusal korelasyon ve doğrusal regresyon, iki değişken arasındaki doğrusal ilişkiyi inceleyen istatistiksel yöntemlerdir. Aralarındaki fark ise; korelasyon, iki değişkenin ne kadar ilişkili olduğunu gösterirken, doğrusal regresyon, iki değişken arasındaki ilişkiye dayanarak bir değişkenin değerini, diğer değişkenden tahmin etmeyi sağlayan bir denklem (model) oluşturmayı içerir.

Doğrusal Olmayan Regresyon

Bir veya birden fazla bağımsız değişkenin bulunduğu deneysel veya gözlemsel verilerin kullanılarak geliştirildiği regresyon analizi türüdür. Logaritmik, üstel ve polinomal modeller olarak incelenmektedirler.

Eğri Uydurma Matlab Çözümü

```
clear all;clc;close all;
x=[5 10 15 20 25 30 35 40 45 50];  y=[16 25 32 33 38 36 39 40 42 42];
a2=polyfit(x,y,2);  % 2.dereceden polinomun katsayıları bulunur
disp('a2 Katsayıları:'), disp(a2)

xi=linspace(5,50,101); % x aralığı
yi2=polyval(a2,xi);   %2.dereceden pol.un aldığı değerler hesaplanıyor

plot(x,y,'ro','linewidth',2), hold on % verilen datalar çizdiriliyor
plot(xi,yi2,'b','linewidth',2)          % uydurlan eğri çizdiriliyor
grid on
xlabel('x'), ylabel('y'), title('y=-0.0155X^2+1.3458x+12.1667')
```

Command Window

```
a2 Katsayıları:
   -0.0155    1.3458   12.1667

fx >>
```