YNIE 214 SAYISAL ANALIA

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği



6.Hafta

LİNEER (DOĞRUSAL) DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Lineer Denklemlerin Çözümü

DOĞRUDAN YÖNTEMLER:

- Cramer yöntemi
- Gauss Elimination Yöntemi-Gauss Jordan yöntemi

Doğrudan yöntemlerde, sistem, kolay bir şekilde çözülebilecek eşdeğer denklem sistemine dönüştürülür.

GİRİŞ

- Sayısal çözümlemede çok karşılaşılan doğrusal eşitliklerin çözümü için farklı sayısal çözümleme teknikleri geliştirilmiştir.
- Doğrusal eşitliklerde karşılaşılan değişken sayısı bir olabildiği gibi birden çok fazla da olabilir.
- Doğrusal denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerde genellikle değişken sayısının denklem sayısına eşit olma kuralı aranır.

- Fiziksel uygulamalarda doğrusal denklem takımının çözümü önemlidir.
- Cramer yöntemi, denklem sistemlerinin çözümü için determinant değerlerini kullanmaktadır.
- Birbirlerinden doğrusal olarak bağımsız n bilinmeyenli n denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

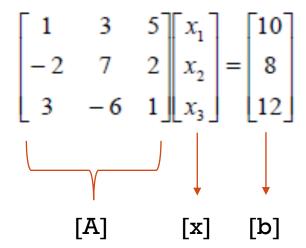
Sorul:

$$x_1+3x_2+5x_3=10$$
 $-2x_1+7x_2+2x_3=8$
 $3x_1-6x_2+x_3=12$

- a) Verilen denklem sistemlerini Cramer yöntemiyle çözünüz.
- b) Sorunun Matlab çözümünü yazınız.

Sorunun çözümü için izlenecek adımlar:

1. Verilen denklem sistemi [A][x]=[b] şeklinde yazılır.



Sorunun çözümü için izlenecek adımlar:

- 2. [A] matrisinin determinantı hesaplanır.
- 3. x_1 değişkeninin değerini bulmak için önce x_1 'i temsil eden 1. sütun yerine [b] matrisinin değerleri yazılır. x_2 ve x_3 için de aynı şekilde matris oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{10} & 3 & 5 \\ \mathbf{8} & 7 & 2 \\ \mathbf{12} & -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}_{2} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{10} & 5 \\ -2 & \mathbf{8} & 2 \\ 3 & \mathbf{12} & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}\mathbf{x}_{3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{10} \\ -2 & 7 & \mathbf{8} \\ 3 & -6 & \mathbf{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{2=} \begin{vmatrix} 1 & 10 & 5 \\ -2 & 8 & 2 \\ 3 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_{3=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -2 & 7 & 8 \\ 3 & -6 & 12 \end{vmatrix}$$

 x_1,x_2 ve x_3 değişken değerlerini bulmak için:

 $x_1 = det(Ax_1)/det(A)$

 $x_2 = det(Ax_2)/det(A)$

 $x_3 = det(Ax_3)/det(A)$

Cramer Yöntemi Matlab Çözümü

Program Çıktısı

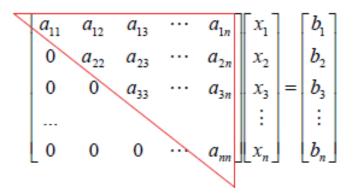
Cramer yöntemini kullanarak 2x + y + z = 3, x-y-z = 0, x + 2y + z = 0 doğrusal denklemlerinin köklerini bulma

```
A =
                                           detA =
     2 1 1
1 -1 -1
1 2 1
                                                 3
Ax =
                                           x =
     3
0
0
                                           y =
Ay =
                                                -2
        3 1
0 -1
0 1
                                           z =
                                                 3
Az =
           1 3
-1 0
2 0
```

- Verilen denklem sistemlerinde denklem sayısı=bilinmeyen sayısı şeklinde olmalıdır.
- *Matrislerin; üst ve alt üçgen ile köşegen gösterimleri temel alınarak sistemler çözülür.

Üst üçgen formu:

Üst üçgen formundaki eşitliğin n bilinmeyen için matris gösterimi, 3.71'de verilmektedir.



Alt üçgen formu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Köşegen formu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde izlenecek yol:

- 1. Adım: Denklem sistemlerini genişletilmiş katsayılar matrisi şeklinde yazmalıyız.
- 2. Adım: Elementer satır işlemleri ile genişletilmiş katsayılar matrisi üst/alt üçgen şeklinde yapılır. Genellikle üst üçgen tercih edilir.
- 3. Adım: Matrisin 1. satırının 1. elemanı 0 ise o satırı 2. veya 3. satır ile değiştirmemiz gerekir.
- 4. Adım: x,y,z gibi değişken değerleri en alttan başlanarak bulunmuş olur.

Soru 2:

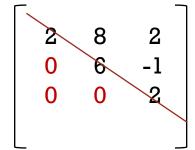
$$2x_1+8x_2+2x_3=14$$

 $x_1+6x_2-x_3=13$
 $2x_1-x_2+2x_3=5$

denklemlerini Gauss Elimination metotu ile çözünüz.

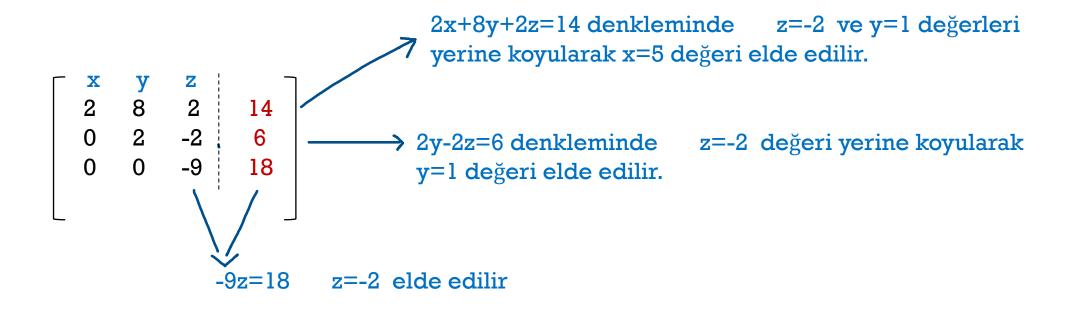
Çözüm:

2. Adım: $S_2-1/2S_1$ ve S_3-S_1 gibi elementer satır işlemleri yapılarak üst üçgen elde edilmesi amaçlanır.



- 3. Adım: Matrisin 1. satırının 1. elemanının 0 olup olmadığı kontrol edilir.
- 4. 2.adım uygulanarak sonuç matrisi elde edilir.

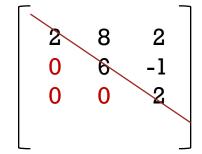
5. adım:



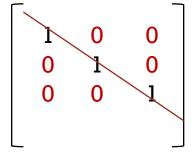
Sonuç olarak x=5, y=1 z=-2 değerleri elde edilerek denklem sistemi çözülür.

Gauss Jordan Yöntemi

Gauss Elimination yöntemi



Gauss Jordan Yöntemi



Gauss Elimination Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc
 fprintf('Gauss Elimination yöntemini kullanarak 2x + 8y + 2z = 14, x+6y-z = 13, 2x -y + 2z = 5 doğrusal denklemlerinin köklerini bulma \n');
 A=[2 8 2;1 6 -1;2 -1 2];
 % 2 -1 2]
 b=[14;13;5];
 [n,\sim]=size(A);
 x=zeros(n,1);
□ for i=1:n-1
     m = A(i+1:n,i)/A(i,i)
     A(i+1:n,:)=A(i+1:n,:)-m*A(i,:)
     b(i+1:n,:)=b(i+1:n,:)-m*b(i,:)
 end
 x(n,:)=b(n,:)/A(n,n);
\Box for i=n-1:-1:1
    x(i,:)=(b(i,:)-A(i,i+1:n)*x(i+1:n,:))/A(i,i);
 end
```

Program Çıktısı

Gauss Elimination yöntemini kullanarak 2x + 8y + 2z = 14, x+6y-z = 13, 2x - y + 2z = 5 doğrusal denklemlerinin köklerini bulma

m =

0.5000 1.0000

A =

A =

b =

m =

-4.5000

A =

b =

18