Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{Dx} e^{tx} f(x)dx$$

$$M_x(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_0^{\infty} e^{x(t-\lambda)} dx$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

Örnek : Bir elektronik parçanın ömrü, yıl olarak aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonu ile verilmiştir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.d \end{cases}$$

Bu elektronik parçanın

a) En çok 4 yıl dayanması olasılığı nedir?
b) En az 3 yıl dayanması olasılığı nedir?
c) Beklenen ömrü kaç yıldır?
d) Ömrünün standart sapması nedir?

Çözüm:

a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x > 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{3}x} & , x \geq 0 \\ 1 & , x \to \infty \end{cases}$$

$$P(X \leq 4) = F(4) = 1 - e^{-\frac{4}{3}} = 0{,}7364$$

b)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = e^{-1} = 0{,}3678$$

c)

$$E(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

d)

$$Var(X) = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9 \; ise \; \sigma_X = 3$$

$$SS = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9} = 3 \; olarak \; elde \; edilir.$$

$X \sim Üstel(\lambda) tesadüfi \; değişkeni \; için \; aşağıdaki \; eşitlikler \; mevcuttur.$

$$P(X \geq a) = P(X > a) = e^{-\lambda a}$$

$$P(X \leq a) = 1 - P(X > a) = 1 - e^{-\lambda a}$$

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

Üstel Dağılımın Belleksizlik Özelliği:

Üstel dağılım sürekli dağılımlar arasında belleksizlik özelliğine sahip tek dağılımdır. $X \sim Üstel(\lambda) tesadüfi \; değişkeni \; iken$

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t) eşitliği \; mevcuttur.$$

İspat

$$P(X > s + t \mid X > s) = \frac{P(X > s + t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)}$$

$$\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t) olark \; ispat \; tamamlanmış \; olur.$$

Örnek : Bir radyonun çalışma ömrü (yıl) $\lambda = \frac{1}{10}$ ortalamalı üstel dağılıma sahiptir. Bir radyo satın alındığında,

a) En az on yıl kullanma olasılığı nedir?
b) On yıl kullandıktan sonra 8 yıl daha kullanılması olasılığı nedir?

Çözüm:

a)

$$P(X \geq 10) = e^{-\left(\frac{1}{10}\right)10} = 0{,}3678$$

b)

$$P(X > 18 \mid X > 10)$$

Üstel dağılımın belleksizlik özelliğinden

$$P(X > 18 \mid X > 10) = P(X > 8) = e^{-\left(\frac{1}{10}\right)8} = 0{,}4493$$

Örnek : Eğer $X, \frac{1}{\lambda}$ *ortalamalı üstel bir tesadüfi değişken ise,*

$$E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}, \quad n = 1,2, \ldots$$

olduğunu gösteririz.

Çözüm:

1.yol:

Tümevarım yöntemini kullanalım.

$n = 1$ *için üstel dağılımın beklenen değerinden*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

eşitlik doğrulanır.

$$n = k - 1 \text{ için}$$

$$E\left(X^{k-1}\right) = \frac{(k-1)!}{\lambda^{(k-1)}}$$

olduğunu kabul edelim;

$$n = k \text{ için}$$

$$E(X^k) = \int_0^\infty x^k \lambda e^{-\lambda x} dx$$

kısmi integralinden

$$E(X^k) = \underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty}_{0} + \int_0^\infty kx^{k-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$E(X^k) = k\int_0^\infty x^{k-1}e^{-\lambda x}dx = \frac{k}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty x^{k-1}\lambda e^{-\lambda x}dx}_{E(x^{k-1})}$$

$$E(X^k) = \frac{k}{\lambda}\frac{(k-1)!}{\lambda^{(k-1)}} = \frac{k!}{\lambda^k}$$

olarak bulunur.

2.yol:

Moment çıkaran fonksiyon yardımı ile

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{1}{1 - t/\lambda}$$

$$\left|\frac{t}{\lambda}\right| < 1 \text{ olmak üzere}$$

$$M_x(t) = 1 + \frac{t}{\lambda} + \left(\frac{t}{\lambda}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{t}{\lambda}\right)^n + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\frac{n!}{\lambda^n}$$

olarak bulunur. Moment çıkaran fonksiyon genel olarak

$$M_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n)$$

olduğundan;

$$E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Bulunur.