STANDART MOMENT

Ortalamaya göre ikinci mertebeden momentin Varyans ($\mu_2 = \sigma^2$) pozitif karekökünün Standart Sapma (σ) olduğunu Bölüm 4 den hatırlayınız. Yukarıda görülen momentlerden, sıfıra göre momentler genellikle birer ortalamaya göre momentler de genellikle birer değişkenlik ölçüsü niteliğindedir. Her iki tür ölçü de kullanılan ölçme birimlerinden etkilenirler. Bu yetersizliği gidermek üzere, ortalamaya göre momentler elde edilir. Standart momentler $\propto$ ile gösterilir. σ standart sapma, σ^r de standart sapmanın r inci kuvveti olmak üzere bir r inci mertebeden standart momentin genel formülü,

$$\propto_r = \frac{\mu_r}{\sigma^r}$$

ile verilir. r = 1,2,3,4 mertebeleri için standart momentler sırasıyla:

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\sigma} \qquad \alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} \qquad \alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \qquad \alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

1.mertebenden standart moment, payının sıfır oluşundan dolayı daima sıfır çıkar. 2. Mertebeden moment ise paya ve paydada aynı terimler yer aldığından daima 1 çıkar.

ÖRNEK 3:

Aşağıdaki ara değerleri işe birlikte verilen frekans seri için sıfıra göre, ortalamaya göre ve standart momentleri hesaplayalım. Sıfıra göre moment için ara değerler tablosu

X	**f**	**f X**	**X^2**	**f X^2**	**X^3**	**f X^3**	**X^4**	**f X^4**
10	2	20	100	200	1000	2000	10000	20000
20	5	100	400	2000	8000	40000	160000	800000
30	2	60	900	1800	27000	54000	810000	1620000
40	1	40	1600	1600	64000	64000	2560000	2560000
--	10	220	--	5600	--	160000	--	5000000

Ortalamaya göre momentler için ara değerler tablosu

X	**f**	**(X- μ)**	**f(X- μ)**	**$(X-\mu)^2$**	**f$(X-\mu)^2$**	**$(X-\mu)^3$**	**$f(X-\mu)^3$**	**$(X\,\mu)^4$**	**f $(X-\mu)^4$**
10	2	-12	-24	144	288	-1728	-3456	20736	41472
20	5	-2	-10	4	20	-8	-40	16	80
30	2	8	16	64	128	512	1024	4096	8192
40	1	18	18	324	324	5832	5832	104976	104976
--	10	--	0	--	760	--	3360	--	154720

Sıfıra göre momentler

$$M_1 = \frac{\Sigma f_j X_j}{\Sigma f_j} = \frac{220}{10} = 2$$

$$M_2 = \frac{\Sigma f_j X_j}{\Sigma f_j} = \frac{5600}{10} = 560$$

$$M_3 = \frac{\Sigma f_j X_j}{\Sigma f_j} = \frac{160000}{10} = 16000$$

$$M_4 = \frac{\Sigma f_j X_j}{\Sigma f_j} = \frac{5000000}{10} = 500000$$

Ortalamaya göre momentler

$$\mu_1 = \frac{\Sigma f_j (X_j - \mu)}{\Sigma f_j} = 0$$

$$\mu_2 = \frac{\Sigma f_j (X_j - \mu)^2}{\Sigma f_j} = \frac{760}{10} = 76$$

$$\mu_3 = \frac{\Sigma f_j (X_j - \mu)^3}{\Sigma f_j} = \frac{3360}{10} = 336$$

$$\mu_4 = \frac{\Sigma f_j (X_j - \mu)^4}{\Sigma f_j} = \frac{154720}{10} = 15472$$

Standart sapmanın ilk dört kuvveti:

σ = 8.7 σ^2 = 76 σ^3 = 662.6 σ^4 = 5776

Buna göre standart momentler:

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1}{\sigma} = \frac{0}{8.7} = 0$$

$$\alpha_2 = \frac{\mu_2}{\sigma^2} = \frac{76}{76} = 1$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{336}{662.6} = 0.51$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{15472}{5776} = 2.8$$

Sonuçları tablo ile gösterelim:

Sıfıra Göre Momentler	**Ortalamaya Göre Momentler**	**Standart Momentler**
M_1 = 22	μ_1= 0	α_1 = 0
M_2 = 560	μ_2 = 76	α_2 = 1
M_3 = 16000	μ_3 = 336	α_3 = 0.51
M_4 = 500000	μ_4 = 15472	α_4 = 2.8

Tablodan görüleceği gibi, mertebe arttıkça momentlerin sayısal değeri büyümektedir. Bu büyüme sıfıra göre momentlerde çok hızlıdır. Diğer momentlerin büyüme hızı azalmaktadır.

5.4. MOMENTLER ARASI BAĞINTILAR

Ortalamaya göre moment formüllerinin sağ tarafı açılarak gerekli sadeleştirmeler yapıldığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$\mu_2 = M_2 - M_1^2$

$\mu_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3$

$\mu_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4$

Bu bağıntılar yardımıyla, bir serinin sıfıra göre momentleri bilindiğinde ortalamaya göre momentleri de hesaplanabilir.

ÖRNEK 4:

Yukarıda 3. örnekte son tablo ile verilen moment değerlerini kullanarak momentler arası bağıntıları gerçekleştirelim.

$\mu_2 = M_2 - M_1^2$ = 560 - $(22)^2$

$\mu_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3$= 16000 – 3.22.560 + $2(22)^3$ = 336

$\mu_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4$

= 50000 – 4.22.16000 + 6.$(22)^2$.560 - $3(22)^4$ = 15472

Görüldüğü gibi her üç değer de daha önce bulduğumuz değerlerle uyuşuyor.

5.5. ÇARPIKLIĞIN MOMENTLERLE ÖLÇÜMÜ

Standart momentler çarpıklığın ölçüsü olarak kullanılabilirler. Alfa-3 adı verilen üçüncü mertebeden standart moment serinin simetriğine göre,

Sola çarpık serilerde α_3 < 0

Simetrik serilerde α_3 = 0

Sağa çarpık serilerde α_3 > 0

değerini almaktadır. FORMÜL >0.5 ise, asimetrinin kuvvetli olduğu söylenebilir.

ÖRNEK5:

Yukarıda örnek 3'deki verilerle söz konusu frekans serisi için Alfa-3 standart momenti α_3 = 0.51 > 0 olduğundan sağa doğru (pozitif) çarpıklık olduğu sonucuna varıyoruz

5.5. BASIKLIĞIN MOMENTLERLE ÖLÇÜMÜ

Standart momentler basıklığım ölçüsü olarak da kullanılmaktadır. Alfa-4 adı verilen dördüncü mertebeden standart moment, serinin basıklığına göre,

Basık serilerde $\alpha_4 < 3$

Normal serilerde $\alpha_4 = 3$

Dik serilerde $\alpha_4 > 3$

değerini almaktadır. Örneğin, 3 nolu örnekte yer alan frekans serisi için basıklık ölçüsü olarak Alfa-4, α_4 = 2.8 < 3 olarak bulunmuştu. Bu da söz konusu serinin hafif basık olduğunu göstermektedir.

Herhangi bir seride özel olarak, çarpıklık ölçüsü α_3 = 0 ve basıklık ölçüsü α_4 = 3 çıkarsa böyle serilere *Normal dağılımlı seri* adı verilir. Buna göre, çarpıklık ve basıklık ölçülerinin yukarıda verilen değerlere uyup uymadığına göre bir serinin normal dağılım sahip olup olmadığında kara verilebilir ki, bu işleme *Normallik Testi* adı verilir.