2. Hafta:

Analitik Ortalamalar

1. Aritmetik Ortalama:

Bir veri setindeki gözlem değerleri $X_1, X_2, \dots, X_n$ olsun.

$$EX = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

2. Tartılı Aritmetik Ortalama:

$$\bar{X}_{tartılı} = \frac{c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}$$

$c_1, \dots, c_n$ verilere ait ağırlık veya tartı değerleri

3. Geometrik Ortalama:

$$G.O. = \sqrt[n]{X_1.X_2 \dots X_n}$$

4. Harmonik Ortalama:

$$H.O. = \frac{n}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots + \frac{1}{X_n}}$$

5. Karesel Ortalama:

$$K.O. = \sqrt{\frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2}{n}}$$

ÖRNEK: (Harmonik Ortalama)

Bir otomobil saatte 80 km hızla 350 km, 100 km hızla 320 km, 90 km hızla 450 km yol gitmiştir. Bu otomobilin saatteki ortalama hızı kaçtır.

X (otomobilin hızı)	f (km sayısı)
80	350
100	320
90	450
	n=1120

Saatteki ortalama hızı bulabilmek için öncelikle otomobilin kaç saat gittiğini bilmeliyiz.

$$Zaman = \frac{350}{80} + \frac{320}{100} + \frac{450}{90} = 12{,}575\ saat$$

Daha sonra toplam yolu zamana bölerek ortalama hızı bulabiliriz.

$$Ortalama\ Hız = \frac{1120}{12{,}575} = 89{,}065$$

Bu işlemi harmonik ortalama ile direkt hesaplayabiliriz.

$$H.O. = \frac{1120}{\frac{350}{80} + \frac{320}{100} + \frac{450}{90}} = 89{,}065$$

Ortalama hız problemi harmonik ortalamanın en karakteristik örneğidir.

ÖRNEK: (Geometrik Ortalama)

X: Laboratuvar ortamında üretilen bakteri miktarı aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

X (milyon)
2
4
8
20
25

Gözlenen bu veri zaman içerisinde hem bakteri sayısını hem de artış miktarını göstermektedir. Veri geometrik serilerde olduğu gibi katlanarak artmaktadır. Örnek farklı ortamlarda üretilen bakteri sayılarını göstermediğinden ortalama bakteri sayısı anlayışı burada hatalı olur. Ancak veri katlanarak arttığı için geometrik ortalamanın hesaplanması ve ortalama artış hızı olarak yorumlanması anlamlı olur.

$$G.O. = \sqrt[5]{2.4.8.20.25} = 7{,}96$$

ÖRNEK: (Tartılı Aritmetik Ortalama)

Bir öğrencinin 4 farklı dersten aldığı notlar ve derslerin kredileri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Dersler	X (Not)	f (Kredi)
İstatistik	67	5
Muhasebe	85	3

İktisat	73	3
Matematik	60	4
		n=15

Öğrencinin ortalama başarı notu;

$$\bar{X}_{tartılı} = \frac{5.67 + 3.85 + 3.73 + 4.60}{15} = 69{,}9$$

<u>Ortalamaların Özellikleri</u>

1. Bir seride aritmetik ortalamadan sapmaların toplamı daima sıfırdır.

   $A.O = \bar{X} = \frac{\sum X_i}{n}$

   Aritmetik ortalamadan sapmalar $X_j - \bar{X} \quad j = 1, 2, \dots, n$

   $$\sum (X_j - \bar{X}) = \sum X_j - n\bar{X}$$
   $$= n\bar{X} - n\bar{X} = 0$$

2. Aritmetik ortalama aşırı uç değerlerden oldukça etkilenir.
3. Geometrik ortalama aritmetik ortalamadan daima küçük veya eşit çıkar.
4. Geometrik ortalama bir geometrik seri gibi katlanarak artan verilerde kullanılır.
5. Harmonik ortalama daima Geometrik ortalamadan küçük veya eşit çıkar.
6. Mod ve medyan analitik bir ortalama olmadığı için aşırı uç değerlerden etkilenmez.
7. Serideki en çok tekrar sayısı iki veya daha fazla ise iki modlu veya daha çok modlu olabilir.
8. Medyan seriyi adet bakımından iki eşit parçaya böler.
9. Medyan benzeri veri 4 eşit parçaya bölünmek istenirse ortalarda kalan değerlere birinci, ikinci, üçüncü kartil denir. Kartil hesabı medyan hesabında olduğu gibidir.

   Analitik Olmayan Ortalamalar

   1. Mod: Bir veri setinde en çok tekrarlanan gözlem değerine mod değeri denir.

   2. Medyan: Bir veri setinde veriyi eşit sayıda ortadan ikiye bölen değere medyan (ortanca) değeri denir.

Not: Medyan değeri gözlem sayısı tek sayı olduğunda veri kümesinin orta değeridir. Gözlem sayısı çift sayı olduğunda ise veri kümesinin ortasında kalan iki gözlem değerinin aritmetik ortalamasıdır.

Mod ve Medyan değerleri verinin sayısal değerine bağlı olmadığından analitik olmayan ortalama olarak adlandırılırlar.

Gruplanmış verilerde her bir verinin sayısal değeri belli olmadığından aşağıdaki formüllerle hesaplanabilir.

$$Mod = \begin{matrix} mod\ sınıfı \\ alt\ değeri \end{matrix} + \frac{\begin{matrix} mod\ sınıfından \\ sonraki\ sınıfın\ frekansı \end{matrix}}{\begin{matrix} mod\ sınıfından \\ önceki\ sınıfın\ frekansı \end{matrix} + \begin{matrix} mod\ sınıfından \\ sonraki\ sınıfın\ frekansı \end{matrix}} (mod\ sınıf\ aralığı)$$

$$Medyan = \begin{matrix} medyan\ sınıfı \\ alt\ değeri \end{matrix} + \frac{\begin{matrix} medyan\ sınıfının \\ aralığı \end{matrix}}{\begin{matrix} medyan\ sınıfının \\ frekansı \end{matrix}} \left(\begin{matrix} gözlem\ sayısının \\ yarısı \end{matrix} - \begin{matrix} medyan\ sınıfından \\ önceki\ sınıfların \\ frekansları\ toplamı \end{matrix} \right)$$

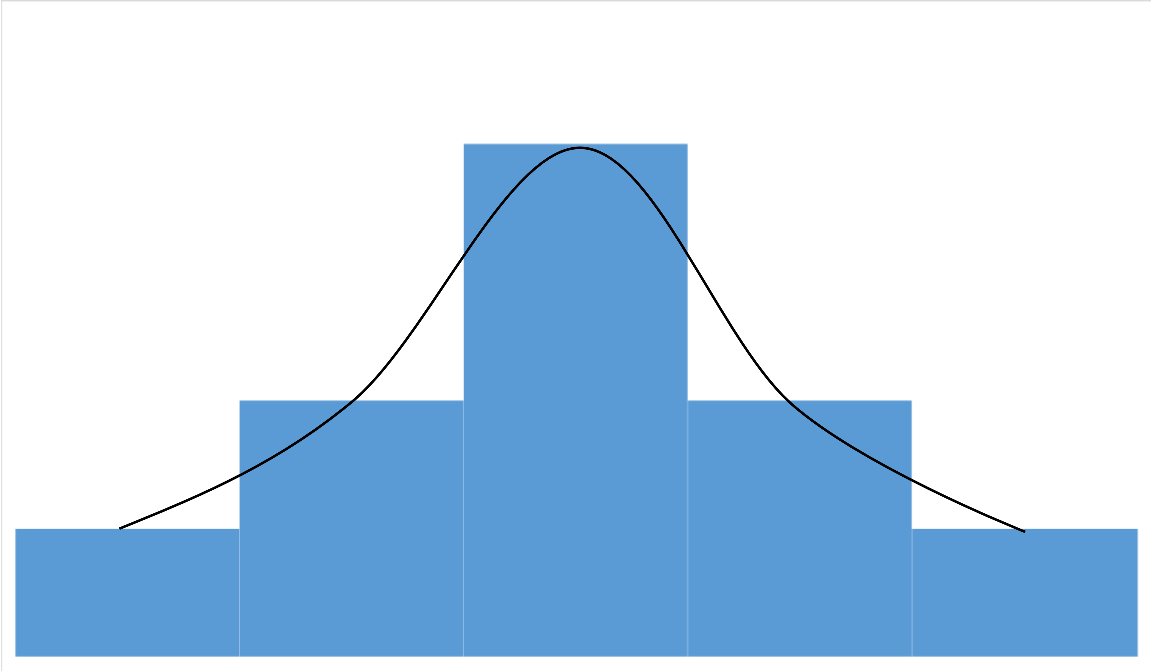
ÖRNEK:

X: Bir öğrencinin harcadığı aylık para miktarı tesadüfi değişkeninin aldığı değerler aşağıdaki tablodadır.

X	f	$\sum f$		
250≤X=625<1000	75	75	1.-75. öğrenciler	
1000≤X=1375<1750	150	225	76.-225. öğrenciler	
1750≤X=2125<2500	275	500	226.-500. Öğrenciler	Mod ve Medyan sınıfı
2500≤X=2875<3250	80	580	501.-580. öğrenciler	
3250≤X=3625≤4000	40	620	581.-620. öğrenciler	
	n=620			

$\bar{X} = 1955$ TL

620 adet öğrenciden oluşmuş bir örneklemden hesaplanan aritmetik ortalama değeri “ öğrenciler aylık ortalama 1955 TL harcıyor “ şeklinde ifade edilir. Aritmetik ortalamanın gerçeği yansıtabilmesi için aritmetik ortalamanın içinde bulunduğu grup ve civarında fazla sayıda gözlem olması gerekmektedir. Bunun için verinin çubuk grafiğinin aşağıdaki şekilde simetrik olması beklenir.



Bu eğriye Normal Eğri adı verilir.

Şimdi verinin medyanını hesaplayalım;

Örneklemde 620 öğrenci olduğundan örneklem iki eşit parçaya bölündüğünde 310 uncu ve 311 inci gözlem değerleri ortada kalır. Bu da tabloda 3 üncü gruba düşer. Medyan sınıfı 3 üncü gruptur.

Bu grupta medyan değerini tahmin edebilmek için sınıf aralığı frekansa bölünerek her bir frekansa kaç birim düştüğü hesaplanır. Daha sonra gözlem sayısının yarısından önceki frekanslar çıkartılarak grup içinde medyan değerine kadar kaç veri olduğu bulunur. Bu değer frekans başına düşen aralık sayısıyla çarpılarak medyan değerinin grup alt değerinden ne kadar fazla olduğu bulunur. Son olarak bulunan değer grup alt değerine eklenerek medyan değeri hesaplanmış olur.

$$Medyan = 1750 + \frac{750}{275}\left(\frac{620}{2} - 225\right) = 1981\ TL$$

Mod değeri en çok tekrar eden olduğundan mod sınıfı frekansı en yüksek olan 3 üncü gruptur. Benzer şekilde Mod değeri hesaplanırsa;

$$Mod = 1750 + \frac{80}{150 + 80}(750) = 2010\ TL$$