YMH 214 SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

6.Hafta

LİNEER (DOĞRUSAL) DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Lineer Denklemlerin Çözümü

DOĞRUDAN YÖNTEMLER:

- Cramer yöntemi
- Gauss Elimination Yöntemi-Gauss Jordan yöntemi

Doğrudan yöntemlerde, sistem, kolay bir şekilde çözülebilecek eşdeğer denklem sistemine dönüştürülür.

GİRİŞ

- Sayısal çözümlemede çok karşılaşılan doğrusal eşitliklerin çözümü için farklı sayısal çözümleme teknikleri geliştirilmiştir.
- Doğrusal eşitliklerde karşılaşılan değişken sayısı bir olabildiği gibi birden çok fazla da olabilir.
- Doğrusal denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemlerde genellikle değişken sayısının denklem sayısına eşit olma kuralı aranır.

Cramer Yöntemi

- Fiziksel uygulamalarda doğrusal denklem takımının çözümü önemlidir.
- Cramer yöntemi, denklem sistemlerinin çözümü için determinant değerlerini kullanmaktadır.
- Birbirlerinden doğrusal olarak bağımsız n bilinmeyenli n denklem aşağıdaki gibi yazılır:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Cramer Yöntemi

Soru1:

$$x_1+3x_2+5x_3=10$$

$$-2x_1+7x_2+2x_3=8$$

$$3x_1-6x_2+x_3=12$$

a) Verilen denklem sistemlerini Cramer yöntemiyle çözünüz.

b) Sorunun Matlab çözümünü yazınız.

Cramer Yöntemi

Sorunun çözümü için izlenecek adımlar:

1. Verilen denklem sistemi [A][x]=[b] şeklinde yazılır.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}}_{[A]} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{[x]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}}_{[b]}$$

Cramer Yöntemi

Sorunun çözümü için izlenecek adımlar:

2. [A] matrisinin determinantı hesaplanır.

3. x_1 değişkeninin değerini bulmak için önce x_1'i temsil eden 1. sütun yerine [b] matrisinin değerleri yazılır. x_2 ve x_3 için de aynı şekilde matris oluşturulur.

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 5 \\ 8 & 7 & 2 \\ 12 & -6 & 1 \end{bmatrix} \qquad Ax_2 = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 \\ -2 & 8 & 2 \\ 3 & 12 & 1 \end{bmatrix} \qquad Ax_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 \\ -2 & 7 & 8 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

Cramer Yöntemi

x_1, x_2 ve x_3 değişken değerlerini bulmak için:

$x_1 = det(Ax_1)/det(A)$

$x_2 = det(Ax_2)/det(A)$

$x_3 = det(Ax_3)/det(A)$

Cramer Yöntemi Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc
fprintf('Cramer yöntemini kullanarak 2x + y + z = 3,   x-y-z = 0,   x + 2y + z = 0 doğrusal denklemlerinin köklerini bulma \n');
A = [2 1 1; 1 -1 -1; 1 2 1]
b = [3; 0; 0]
Ax = [3 1 1 ; 0 -1 -1;0 2 1 ]
Ay = [2 3 1; 1 0 -1; 1 0 1]
Az = [2 1 3; 1 -1 0; 1 2 0]
detA=det(A)
x = det(Ax)/detA
y = det(Ay)/detA
z = det(Az)/detA
```

Program Çıktısı

```
Cramer yöntemini kullanarak 2x + y + z = 3,   x-y-z = 0,   x + 2y + z = 0 doğrusal denklemlerinin köklerini bulma

A =

     2     1     1
     1    -1    -1
     1     2     1


Ax =

     3     1     1
     0    -1    -1
     0     2     1


Ay =

     2     3     1
     1     0    -1
     1     0     1


Az =

     2     1     3
     1    -1     0
     1     2     0
```

```
detA =

     3


x =

     1


y =

    -2


z =

     3
```

Gauss Elimination Yöntemi

- Verilen denklem sistemlerinde denklem sayısı=bilinmeyen sayısı şeklinde olmalıdır.
- Matrislerin; üst ve alt üçgen ile köşegen gösterimleri temel alınarak sistemler çözülür.

Üst üçgen formu:

Üst üçgen formundaki eşitliğin *n* bilinmeyen için matris gösterimi, 3.71'de verilmektedir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination Yöntemi

Alt üçgen formu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Köşegen formu:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination Yöntemi

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde izlenecek yol:

1. Adım: Denklem sistemlerini genişletilmiş katsayılar matrisi şeklinde yazmalıyız.

2. Adım: Elementer satır işlemleri ile genişletilmiş katsayılar matrisi üst/alt üçgen şeklinde yapılır. Genellikle üst üçgen tercih edilir.

3. Adım: Matrisin 1. satırının 1. elemanı 0 ise o satırı 2. veya 3. satır ile değiştirmemiz gerekir.

4. Adım: x,y,z gibi değişken değerleri en alttan başlanarak bulunmuş olur.

Gauss Elimination Yöntemi

Soru 2:

$$2x_1+8x_2+2x_3=14$$

$$x_1+6x_2-x_3=13$$

$$2x_1-x_2+2x_3=5$$

denklemlerini Gauss Elimination metotu ile çözünüz.

Çözüm:

1. Adım:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 1 & 6 & -1 & 13 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

2. Adım: $S_2 - 1/2S_1$-------- S_2 ve S_3-S_1--------- S_3 gibi elementer satır işlemleri yapılarak üst üçgen elde edilmesi amaçlanır.

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Adım: Matrisin 1. satırının 1. elemanının 0 olup olmadığı kontrol edilir.
4. 2.adım uygulanarak sonuç matrisi elde edilir.

5. adım:

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 2 & 14 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -9 & 18 \end{array}\right]$$

2x+8y+2z=14 denkleminde z=-2 ve y=1 değerleri yerine koyularak x=5 değeri elde edilir.

2y-2z=6 denkleminde z=-2 değeri yerine koyularak y=1 değeri elde edilir.

-9z=18 z=-2 elde edilir

Sonuç olarak x=5, y=1 z=-2 değerleri elde edilerek denklem sistemi çözülür.

Gauss Jordan Yöntemi

Gauss Elimination yöntemi

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Gauss Jordan Yöntemi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gauss Elimination Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc
fprintf('Gauss Elimination yöntemini kullanarak 2x + 8y + 2z = 14,   x+6y-z = 13,   2x -y + 2z = 5 doğrusal denklemlerinin köklerini bulma \n');
A=[2 8 2;1 6 -1;2 -1 2];
%[2   8   2
% 1   6  -1
% 2  -1   2]
b=[14;13;5];
[n,~]=size(A);
x=zeros(n,1);
A
for i=1:n-1
    m= A(i+1:n,i)/A(i,i)
    A(i+1:n,:)=A(i+1:n,:)-m*A(i,:)
    b(i+1:n,:)=b(i+1:n,:)-m*b(i,:)

end

x(n,:)=b(n,:)/A(n,n);
for i=n-1:-1:1
   x(i,:)=(b(i,:)-A(i,i+1:n)*x(i+1:n,:))/A(i,i);
end
x
```

Program Çıktısı

```
Gauss Elimination yöntemini kullanarak 2x + 8y + 2z = 14,   x+6y-z = 13,   2x -y + 2z = 5 doğrusal denklemlerinin köklerini bulma

A =

     2     8     2
     1     6    -1
     2    -1     2


m =

    0.5000
    1.0000


A =

     2     8     2
     0     2    -2
     0    -9     0


b =

    14
     6
    -9

m =

   -4.5000


A =

     2     8     2
     0     2    -2
     0     0    -9


b =

    14
     6
    18


x =

     5
     1
    -2
```