Geometrik Dağılım

Tanım: Bağımsız Bernoulli denemelerine ilk sonuç bulununcaya kadar devam edilirse yapılan denemelerin sayısına geometrik tesadüfi değişken denir. Her bir bağımsız Bernoulli denemelerinde başarılı sonucun gerçekleşme olasılığı p, gerçekleşmeme olasılığı q ile gösterilirse X geometrik tesadüfi değişkenin alacağı değerler $X = x \; ve \; x \in Z^+$ olmak üzere istenen sonucun gerçekleşmesi için yapılacak olan deneme sayısı en az birdir. Buna göre X geometrik tesadüfi değişeninin olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = p(x) = \begin{Bmatrix} q^{x-1}p, & x \in Z^+ \\ 0, & d.d \end{Bmatrix}$$

Beklenen Değer ve Varyans

$E(X) = \sum_{D_x} xP(X = x)$

$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} xP(X = x)$

$= \sum_{x=1}^{\infty} xq^{x-1}\mathrm{p}$

$= \mathrm{p}\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq} q^x$

$= \mathrm{p}\frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} q^{x}$

$= p\,\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\right)$

$= \mathrm{p}\frac{1}{(1-q)^2}$

$= \frac{1}{p}$

Türevlerin toplamı, toplamların türevine eşittir.

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{d}{dq}=\mathrm{q}^{x} = \frac{d}{dq}\sum_{x=1}^{\infty} q^{x}$$

$\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = \sum_{D_x} x^2\mathrm{P}(\mathrm{X=x})$

$\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = \sum_{x=1}^{\infty} x^2\mathrm{q}^{x-1}\mathrm{p}$

$= \sum_{x=1}^{\infty}(\mathrm{x}(\mathrm{x}-1) + \mathrm{x}]\mathrm{q}^{x-1}\mathrm{p}$

$= pq \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)q^{x-2} + \frac{1}{P}$

$= pq\sum_{x=2}^{\infty} \frac{d^2}{dq^2}\sum_{x=2}^{\infty} q^x + \frac{1}{p}$

$$=\frac{2pq}{p^3}+\frac{1}{p}$$

$$Var\,(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$=\frac{2pq}{p^3}+\frac{1}{\rho}-\frac{1}{p^2}$$

$$=\frac{q}{p^2}$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = \sum_{D_X} e^{tx} P(X = x)$$

$$\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x-1} p$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^x$$

Eğer $|qe^t|$ < 1 ise bulunacak toplam yakınsaktır. Bu koşul altında geometrik dağılımın moment çıkaran fonksiyonu mevcuttur. Böylece

$$M_X(t) = \frac{p}{q}\left(\frac{qe^t}{1-q^{et}}\right)$$

$$= \frac{pe^t}{1-qe^t}$$

elde edilir.

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_X(s) = \sum_{D_X} S^x P(X = x)$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} s^x q^{x-1} p$$

$$= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (sq)^x$$

$$= \frac{sp}{1 - sq}$$

elde edilir.

Geometrik Dağılımın Belleksizlik Özelliği

Geometrik dağılımın belleksizlik özelliği aşağıdaki teorem yardımı ile veriliyor.

Teorem : X tesadüfi değişkeni geometrik dağılıma sahip ve $\forall\, m, n \in Z^+$ olmak üzere

$$P(X > m + n \mid X > m) = P(X > n)$$

olarak yazılır.

İspat. $X \sim Geometrik\ (p)$ iken olasılık fonksiyonu

$$p(x) = \begin{cases} q^{x-1}p, & x = 1,2,\ldots. \\ 0, & d.d \end{cases}$$

ve dağılım fonksiyonu da

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \sum_{s=1}^{x} q^{s-1}\, \mathrm{p}$$

$$= \mathrm{p} \sum_{s=1}^{x} q^{s-1}$$

$$= \mathrm{p}\left(\frac{1-q^x}{1-q}\right)$$

$$= 1 - \mathrm{p}^{\mathrm{x}}$$

olur. Yani

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - q^x, & x = 1,2,\ldots. \\ 1, & x \to \infty \end{cases}$$

olarak elde edilir. Böylece dağılım fonksiyonunun kuyruğu

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - (1 - q^x) = q^x$$

olarak ifade edilir.

$$P(X > m + n \mid X > m) = \frac{P(X > m + n, X > m)}{P(X > m)}$$

olur. Pay'da tanımlanan iki olaydan $(X > m)$ *olayı* $(X > m + n)$ olayını kapsadığı için kesişim değeri $(X > m + n)$ olayına denktir.

$$P(X > m + n \mid X > m) = \frac{P(x_{>} m + n)}{P(X > m)}$$

$$P(X > m + n \mid X > m) = \frac{q^{m+n}}{q^m} = qn = P(X > n)$$

Örnek : Bir okçu hedefi tam 12 den vurana kadar atış yapmaktadır. Bu okçunun hedefi 12 den vurma olasılığı %35 tir. Bu bilgiye göre

a) X~Geometrik (0,35) olduğu bilinirken,

$$P(X = 1) = (0{,}65)1 - 1\ (0{,}35) = 0{,}35\ olur.$$

b) E(X) = $\frac{1}{0{,}35} \cong 2.86$

Örnek : Bir kutuda 12 adet sağlam 15 adet de bozuk elektronik parça bulunmaktadır. İadeli olarak bu kutudan elektronik parça seçilmektedir. Bir sağlam parça seçene kadar iadeli seçime devam edilecektir. İlk sağlam parçayı bulana kadar yapılan seçimlerin sayısı X tesadüfi değişkeni geometrik dağılım göstermektedir.

a) İlk sağlam parçanın yedinci seçimde bulunması olasılığı nedir?
b) $P(X > 25|X > 9) = P(\ X > 16)$ eşitliğinin doğruluğunu sayısal olarak gösteriniz.
c) İlk sağlam parçanın en çok 20 seçimde elde edilmesi olasılığını bulunuz.

Çözüm.

a) $p = \frac{12}{27}$ ve q = $\frac{15}{27}$ olmak üzere

$$P(X = 7) = (\frac{15}{27})^{7-1}\left(\frac{12}{27}\right)$$

b) $P(X\ > 25|X > 9)\ = \frac{P(X>25)}{P(X>9)}$

Dağılım fonksiyonunun kuyruğundan

$$P(X > 25|X > 9)\ = \frac{\left(\frac{15}{27}\right)^{25}}{\left(\frac{15}{27}\right)^{9}} = \left(\frac{15}{27}\right)16$$

olur.

$$P(X > 16) \quad = (15/27)^{16}$$

Olduğundan b)'deki eşitliğin doğruluğu sayısal olarak gösterildi.

c) $$P(X \leq 20)\ = F_X(20)$$

$$=1 - \left(\frac{15}{17}\right)^{20}$$

Negatif Binom Dağılımı

Tanım : Bağımsız Bernoulli denemelerine ilk $k(k \geq 1)$ kez "başarı sonucunun" elde edilmesine kadar devam edilirse, yapılan bu denemelerin sayısına Negatif Binom tesadüfi değişkeni denir. $i = 1,2, \dots, k$ için bağımsız X_i tesadüfi değişkenlerinin her biri $Xi \sim Geometrik$ (p) olmak üzere,

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

X, Negatif Binom dağılımına sahiptir denir ve $X \sim N\ Binom\ (k, p)$ olarak gösterilir, bununla birlikte bu dağılıma eksi iki terimli dağılım veya Pascal dağılımı da denir. X, Negatif Binom tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdadır:

$$P(X = x) = \begin{Bmatrix} \binom{x-1}{k-1} p^k q^{x-k} i & x = k, k+1, \dots \\ 0, & d.d \end{Bmatrix}$$

Beklenen Değer ve Varyans

Negatif binom tesadüfi değişkeni bağımsız $X_i \sim Geometrik\ (p)$ tesadüfi değişkenlerin toplamı olduğundan

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_k)$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p} = \frac{k}{p}$$

bulunur.

$$Var(X) = Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)$$

$$= Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_k)$$

$$= \frac{q}{p^2} + \frac{q}{p^2} + \dots + \frac{q}{p^2} = \frac{kq}{p^2}$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$\mathrm{M_X(t) = E(e^{tX})}$$

$$= \mathrm{E}(e^{t(X_1 + X_2 + \cdots + X_k)})$$

$$= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots . E(e^{tX_k})$$

$$= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots . . M_{X_k}(t)$$

$$= \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)\cdots\left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)$$

$$= \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^{k}$$

Negatif Binom dağılımında istenen sonuç sayısı sabit deneme sayısı tesadüfi değişken iken binom dağılımında ise istenen sonuç sayısı tesadüfi değişken deneme sayısı sabittir.

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_X(s) = E(s^X)$$

$$= E(s^{(X_1+X_2+\cdots..+X_k)})$$

$$= E(s^{X_1})E(s^{X_2})\ldots..E(s^{X_k})$$

$$= g_{X_1}(s)g_{X_2}(s)\ldots..g_{X_k}(s)$$

$$= \left(\frac{sp}{1-sq}\right)\left(\frac{sp}{1-sq}\right)\ldots..\left(\frac{sp}{1-sq}\right)$$

$$= \left(\frac{sp}{1-sq}\right)^{k}$$

Örnek : Örnek 5.3'teki iki petrol kuyusu bulmak için

a) Şirketin iki petrol kuyusuna rastlaması için 30 sondaj açma olasılığı nedir?
b) 3 doğal gaz kuyusuna rastlaması için 50 sondaj açması olasılığı nedir?
c) 100 sondaj yapıldığında beklenilen petrol kuyusu sayısı nedir?
d) 10 petrol kuyusu bulana kadar yapılan denemelerin beklenen sayısı nedir?

Çözüm

Petrol çıkma olasılığı: $p_{pet.} = 0{,}08$

Doğal gaz çıkarma olasılığı: $p_{dg.} = 0{,}13$

Kuyunun kuru çıkma olasılığı: $p_{kuru.} = 0{,}79$

a) $k = 2,\ x = 30$ olduğunda

$P(X = 30) = \binom{29}{1}(0{,}08)^2(0{,}92)^{28}$

$= 0{,}0179$

b) $P(X = 50) = \binom{49}{2}(0{,}13)^3(0{,}87)^{47}$

$=0{,}00371$

c) Burada Y~Binom (100; 0,08) olduğundan

$$E(Y) = np = 100(0{,}08) = 8 \text{ petrol kuyusu}$$

d) Burada ise $X \sim N\ Binom$ (10; 0,08) olduğundan

$$E(X) = \frac{10}{0{,}08} = 125\ kuyu$$

Örnek : Bir kutuda 10 yeşil 5 mavi bilye vardır. Kutudan tesadüfi ve iadeli olarak bilye çekildiğinde

a) 2 yeşil bilyenin en az 10. çekilişte bulunma olasılığı nedir?
b) 1 mavi bilyenin 4. çekilişte bulunulması olasılığı nedir?
c) 3 mavi bilyenin çekilmesi beklendiğinde kaç denemeye ihtiyaç vardır?

Çözüm: 10 yeşil 5 mavi bilye vardır.

Yeşil bilye çekilme olasılığı: p_y = 2/3

Mavi bilye çekilme olasılığı: p_m = 1/3

a) $k = 2,\ X$ yapılan denemede sayısı olmak üzere

$$P\ (X \leq 10) = \sum_{x=2}^{10} \binom{x \quad -1}{2 \quad -1} \left(\frac{2}{3}\right)^{1} \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$$

$$= 0{,}9997$$

b) $k = 1, x = 4$ için,

$$P(X = 4) = \binom{4-1}{1-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$$

$$= 0{,}024691$$

c) $k = 3$

$$E(X) = \frac{k}{pm} = \frac{3}{\frac{1}{3}} = 9$$

9 denemeye ihtiyaç vardır.