MAT 201 DOĞRUSAL CEBİR İLE İLGİLİ ÖRNEK SORULAR 2

VEKTÖR UZAYI KAVRAMI

1. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{R}$ cismi üstünde derecesi n sayısından büyük olmayan bütün polinomların kümesi V olsun. Başka bir anlatımla

$$V = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n : a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

olsun. V nin $\mathbb{R}$ cismi üstünde bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: V kümesinde toplama işlemi,

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n)& \\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \ldots + (a_n + b_n)x^n&\end{aligned}$$

eşitliğiyle tanımlıdır. Skalarla çarpma işlemi

$$c(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) = ca_0 + (ca_1)x + (ca_2)x^2 + \ldots + (ca_n)x^n$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

$$p = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n \qquad \text{ve} \qquad q = q_0 + q_1x + q_2x^2 + \ldots + q_nx^n$$

olsun. $p + q$ tanımlıdır ve

$$p + q = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2 + \ldots + (p_{n-1} + q_n)x^n$$

dir. $\mathbb{R}$, toplamaya göre kapalı olduğundan (p_0+q_0), (p_1+q_1), (p_2+q_2), $\ldots$, (p_n+q_n) sayıları da reel sayıdır. Buna göre $p+q \in V$ olduğu apaçıktır. Kısaca V kümesi toplamaya göre kapalıdır.

V kümesinde alınan p, q, r polinomları için

$$\begin{aligned}(p + q) + r &= \left[(p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2 + \ldots + (p_{n-1} + q_n)x^n\right] \\ &\quad +(r_0 + r_1x + r_2x^2 + \ldots + r_nx^n) \\ &= [(p_0 + q_0) + r_0] + [(p_1 + q_1) + r_1]\, x + [(p_2 + q_2) + r_2]\, x^2 + \ldots + [(p_n + q_n) + r_n]\, x^n \\ &= [p_0 + (q_0 + r_0)] + [p_1 + (q_1 + r_1)]\, x + [p_2 + (q_2 + r_2)]\, x^2 + \ldots + [p_n + (q_n + r_n)]\, x^n \\ &= (p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots + p_nx^n) + \left[(q_0 + r_0) + (q_1 + r_1)x + (q_2 + r_2)x^2 + \ldots + (q_n + r_n)x^n\right] \\ &= p + (q + r)\end{aligned}$$

olduğundan $(p + q) + r = p + (q + r)$ dır. Buna göre V kümesinde toplamanın birleşme özelliği vardır.

V kümesinde toplama işlemine göre birim eleman vardır ve bu eleman

$$0 + 0x + 0x^2 + \ldots + 0x^n$$

polinomudur. Bu polinomu 0 ile göstereceğiz ve "sıfır polinomu" diye adlandıracağız. Bu polinomun toplamaya göre birim eleman olduğu kolayca görülebilir.

V nin her bir p polinomunun toplamaya göre tersi vardır ve

$$p = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n$$

ise

$$-p = (-p_0) + (-p_1)x + (-p_2)x^2 + \ldots + (-p_n)x^n$$

dır. $p + (-p) = 0$ ve $(-p) + p = 0$ olduğu kolayca görülebilir. $-p$ polinomunun

$$-p = -p_0 - p_1 x - p_2 x^2 - \ldots - p_n x^n$$

eşitliğiyle verilebileceği apaçıktır.

$\mathbb{K}$ cismindeki toplama işleminin değişme özelliği bulunduğundan

$$\begin{aligned} q + p &= (q_0 + p_0) + (q_1 + p_1)x + (q_2 + p_2)x^2 + \ldots + (q_n + p_n)x^n \\ &= (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2 + \ldots + (p_n + q_n)x^n = p + q \end{aligned}$$

olur. Öyleyse, V deki toplamanın değişme özelliği vardır.

Buraya değin, V nin toplamaya göre değişmeli grup olduğu gösterilmiş oldu.

$$\begin{aligned} c(p + q) &= c[(p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)x + (p_2 + q_2)x^2 + \ldots + (p_n + q_n)x^n] \\ &= c(p_0 + q_0) + c(p_1 + q_1)x + c(p_2 + q_2)x^2 + \ldots + c(p_n + q_n)x^n \\ &= (cp_0 + cq_0) + (cp_1 + cq_1)x + (cp_2 + cq_2)x^2 + \ldots + (cp_n + cq_n)x^n = cp + cq \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} (c + d)p &= (c + d)(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n) \\ &= (c + d)p_0 + (c + d)p_1 x + (c + d)p_2 x^2 + \ldots + (c + d)p_n x^n \\ &= (cp_0 + dp_0) + (cp_1 + dp_1)x + (cp_2 + dp_2)x^2 + \ldots + (cp_n + dp_n)x^n \\ &= (cp_0) + (cp_1)x + (cp_2)x^2 + \ldots + (cp_n)x^n + (dp_0) + (dp_1)x + (dp_2)x^2 + \ldots + (dp_n)x^n \\ &= c(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n) + d(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n) = cp + dp \end{aligned}$$

dır.

$$\begin{aligned} (cd)p &= (cd)(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n) = (cd)p_0 + (cd)p_1 x + (cd)p_2 x^2 + \ldots + (cd)p_n x^n \\ &= c(dp_0) + c(dp_1)x + c(dp_2)x^2 + \ldots + c(dp_n)x^n = c\left[(dp_0) + (dp_1)x + (dp_2)x^2 + \ldots + (dp_n)x^n\right] \\ &= c(d(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n)) = c(dp) \end{aligned}$$

dır. Son olarak

$$1p = 1(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots + p_n x^n) = 1p_0 + (1p_1)x + (1p_2)x^2 + \ldots + (1p_n)x^n = p$$

olduğu apaçıktır. □

2. $u = (3, -2)$, $v = (-1, 3)$, $w = (2, 1)$ olduğuna göre $(3u - v) - (u + 2w)$ vektörünün bileşenlerini bulunuz.

Çözüm:
$$\begin{aligned}(3u - v) - (u + 2w) &= 3u - v - u - 2w = 2u - v - 2w \\ &= 2\,(3, -2) - (-1, 3) - 2(2, 1) = (6, -4) + (1, -3) - (4, 2) \\ &= (6 + 1 - 4, \quad -4 - 3 - 2) = (3, -9)\end{aligned}$$

dur. □

ALT VEKTÖR UZAYI

1. $H = \{(t, -5t) : t \in \mathbb{R}\}$ olduğuna göre H kümesinin, $\mathbb{R}^2$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu alt vektör uzayını geometrik olarak açıklayınız.

Çözüm: H kümesi, $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesidir.

$$\begin{aligned}(c \in \mathbb{R},\, u \in H,\, v \in H) \quad &\Rightarrow \quad c \in \mathbb{R},\, u = (t, -5t),\, v = (s, -5s)\\ &\Rightarrow \quad u + cv = (t + cs, \ -5(t + cs))\end{aligned}$$

dir. $t+cs = k$ diyelim. Buna göre $u+cv = (k, -5k)$ olur. k bir reel sayı olduğundan $u+cv \in H$ olduğu apaçıktır. Böylece H nın alt vektör uzayı olduğunu gösterdik.

H nın her bir u elemanının, $u = t(1, -5)$ biçiminde yazılabildiğini gördünüz mü? Öyleyse geometrik olarak u vektörü, $(1, -5)$ vektörünün bir sayı ile çarpımına eşittir. Buna göre u vektörünü belirten nokta, $(0, 0)$ ve $(1, -5)$ noktalarından geçen doğru üstündedir. Geometrik olarak H kümesi, düzlemde başlangıç noktasından ve $(1, -5)$ noktasından geçen doğrudur. $\square$

2. $H = \{(t + 1, \ 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ olduğuna göre H kümesinin, bir alt vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: H kümesi, $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesidir. Bu kümenin alt vektör uzayı olması için $\mathbb{R}^2$ nin sıfır vektörünü kapsaması gerekir. Burada verilen küme sıfır elemanını içermez. Çünkü $(t + 1, \ 2t) = (0, 0)$ olacak biçimde bir t reel sayısı bulunamaz. Buna göre H kümesi, bir alt vektör uzayı değildir. $\square$

3. $H = \left\{\left(2t, \ 3t^2\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$ olduğuna göre H kümesinin, bir alt vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: H kümesi $\mathbb{R}^2$ vektör uzayının bir alt kümesidir. Bu kümenin alt vektör uzayı olması için toplamaya ve skalarla çarpmaya göre kapalı olması gerekir. H kümesinde t nin farklı iki değeri için elde edilen iki eleman göz önüne alalım. Örneğin $t = 1$ ve $t = 2$ için sırasıyla $u = (2, 3)$ ve $v = (4, 12)$ elde edilir. $u \in H$ ve $v \in H$ dır. $u + v = (6, 15)$ olur. $(6, 15) = \left(2t, \ 3t^2\right)$ olacak biçimde bir t reel sayısı bulunamaz. Buna göre $(6, 15) \notin H$ dır. Böylece H kümesinin toplamaya göre kapalı olmadığını göstermiş olduk. Demek ki H kümesi, bir alt vektör uzayı değildir. $\square$

4. $H = \left\{\begin{bmatrix} -4t \\ 2t - s \\ 5t - 3s \end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{C}\right\}$ olduğuna göre H kümesinin, $\mathbb{C}_1^3$ uzayının bir alt vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: H kümesi, $\mathbb{C}_1^3$ vektör uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesidir. $c \in \mathbb{C}$, $u \in H$,

$v \in H$ olsun. $u = \begin{bmatrix} -4t_1 \\ 2t_1 - s_1 \\ 5t_1 - 3s_1 \end{bmatrix}$ ve $v = \begin{bmatrix} -4t_2 \\ 2t_2 - s_2 \\ 5t_2 - 3s_2 \end{bmatrix}$ biçimindedir.

$$u + cv = \begin{bmatrix} -4(t_1 + ct_2) \\ 2(t_1 + ct_2) - (s_1 + cs_2) \\ 5(t_1 + ct_2) - 3(s_1 + cs_2) \end{bmatrix}$$

dir. $t_1 + ct_2 = k$ ve $s_1 + cs_2 = \lambda$ diyelim. Buna göre $u + cv = \begin{bmatrix} -4k \\ 2k - \lambda \\ 5k - 3\lambda \end{bmatrix}$ olur. λ ve μ birer karmaşık sayıdır. $u + cv$ vektörünün bileşenlerinin yapısına bakıldığında $u + cv \in H$ olduğu hemen görülür. H kümesi, alt vektör uzayıdır. □

5. 3×1 biçimindeki matrislerin kümesi $\mathbb{R}^3_1$ ile gösteriliyor.

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} -t + s \\ -s \\ t - s \end{bmatrix} : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

olduğuna göre H kümesinin, $\mathbb{R}^3_1$ uzayının bir alt vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: H kümesi, $\mathbb{R}^3_1$ vektör uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesidir. $u \in H$, $v \in H$ olsun. $u = \begin{bmatrix} -t_1 + s_1 \\ -s_1 \\ t_1 - s_1 \end{bmatrix}$ ve $v = \begin{bmatrix} -t_2 + s_2 \\ -s_2 \\ t_2 - s_2 \end{bmatrix}$ biçimindedir.

$$u + v = \begin{bmatrix} -t_1 + s_1 \\ -s_1 \\ t_1 - s_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t_2 + s_2 \\ -s_2 \\ t_2 - s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(t_1 + t_2) + (s_1 + s_2) \\ -(s_1 + s_2) \\ (t_1 + t_2) - (s_1 + s_2) \end{bmatrix}$$

dir. $t_1 + t_2 = k$ ve $s_1 + s_2 = \lambda$ diyelim. Buna göre $u + v = \begin{bmatrix} -k + \lambda \\ -\lambda \\ k - \lambda \end{bmatrix}$ olur. λ ve μ birer reel sayıdır. $u + v$ vektörünün bileşenlerinin yapısına bakıldığında $u + v \in H$ olduğu hemen görülür. H kümesi, toplamaya göre kapalıdır.

$c \in \mathbb{R}$, $u \in H$ olsun. $u = \begin{bmatrix} -t_1 + s_1 \\ -s_1 \\ t_1 - s_1 \end{bmatrix}$ biçimindedir. $cu = \begin{bmatrix} -(ct_1) + (cs_1) \\ -(cs_1) \\ (ct_1) - (cs_1) \end{bmatrix}$ dir. $c_1 t_1 = a$ ve $cs_1 = b$ diyelim. Buna göre $cu = \begin{bmatrix} -a + b \\ -a \\ a - b \end{bmatrix}$ olur. a ve b birer reel sayıdır. cu vektörünün bileşenlerinin yapısına bakıldığında $cu \in H$ olduğu hemen görülür. Buna göre H kümesi, skalarla çarpma işlemine göre kapalıdır. H kümesi, toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre kapalı olduğundan bir alt vektör uzayıdır. □

6. $H = \left\{ \begin{bmatrix} t-2k & 0 \\ -t & 3k \end{bmatrix} : t, k \in \mathbb{R} \right\}$ olduğuna göre H kümesinin, $\mathbb{R}_2^2$ uzayının bir alt vektör uzayı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: H kümesi $\mathbb{R}_2^2$ vektör uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesidir. $c \in \mathbb{R}$, $u \in H$, $v \in H$ olsun. $u = \begin{bmatrix} t_1 - 2k_1 & 0 \\ -t_1 & 3k_1 \end{bmatrix}$ ve $v = \begin{bmatrix} t_2 - 2k_2 & 0 \\ -t_2 & 3k_2 \end{bmatrix}$ biçimindedir.

$$u + cv = \begin{bmatrix} (t_1 + ct_2) - (k_1 + ck_2) & 0 \\ -(t_1 + ct_2) & 3(k_1 + ck_2) \end{bmatrix}$$

dir. $t_1 + ct_2 = \lambda$ ve $k_1 + ck_2 = \mu$ diyelim. Buna göre $u + cv = \begin{bmatrix} \lambda - 2\mu & 0 \\ -\lambda & 3\mu \end{bmatrix}$ olur. λ ve μ birer reel sayıdır. $u + cv$ vektörünün bileşenlerinin yapısına bakıldığında $u + cv \in H$ olduğu hemen görülür. H kümesi, alt vektör uzayıdır. □

7. $A \in \mathbb{R}_n^m$ olsun. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere $A\mathbf{x} = 0$ olacak biçimdeki $\mathbf{x}$ matrislerinin kümesi H olsun. H nın bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ olsun. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ve $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ demektir. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ olur. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ eşitliği, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$ olduğunu gösterir. Buna göre H kümesi toplamaya göre kapalıdır.

$c \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{x} \in H$ olsun. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ demektir. $A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ olur. $A(c\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ eşitliği, $c\mathbf{x} \in H$ olduğunu gösterir. Buna göre H kümesi skalarla çarpmaya göre kapalıdır.

Sonuç olarak H kümesi, $\mathbb{R}_1^n$ uzayının bir alt vektör uzayıdır. □

8. $A \in \mathbb{R}_n^m$ olsun. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ olacak biçimdeki $\mathbf{x}$ matrislerinin kümesi H olsun. H nın bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$ olsun. $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ ve $A\mathbf{y} = \mathbf{y}$ demektir. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ olur. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ eşitliği, $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in H$ olduğunu gösterir. Buna göre H kümesi toplamaya göre kapalıdır.

$c \in \mathbb{R}$ ve $\mathbf{x} \in H$ olsun. $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ demektir. $A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x} = c\mathbf{x}$ olur. $A(c\mathbf{x}) = c\mathbf{x}$ eşitliği, $c\mathbf{x} \in H$ olduğunu gösterir. Buna göre H kümesi skalarla çarpmaya göre kapalıdır.

Sonuç olarak H kümesi, $\mathbb{R}_1^n$ uzayının bir alt vektör uzayıdır. □

9. $A \in \mathbb{R}_n^n$ olsun. $H = \{X : X \in \mathbb{R}_n^n,\ AX = XA\}$ olduğuna göre H kümesinin, $\mathbb{R}_n^n$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $X, Y \in H$ olsun. $AX = XA$ ve $AY = YA$ demektir.

$$A(X+Y) = AX + AY = XA + YA = (X+Y)A$$

olur. $A(X+Y) = (X+Y)A$ eşitliği, $X + Y \in H$ olduğunu gösterir. Buna göre H kümesi toplamaya göre kapalıdır.

$c \in \mathbb{R}$ ve $X \in H$ olsun. $AX = XA$ demektir. $A(cX) = cAX = cXA = (cX)A$ olur. $A(cX) = (cX)A$ eşitliği, $cX \in H$ olduğunu gösterir. Buna göre H kümesi skalarla çarpmaya göre kapalıdır.

Sonuç olarak H kümesi, $\mathbb{R}_n^n$ uzayının bir alt vektör uzayıdır. □

10. $n \times n$ biçimindeki simetrik matrislerin kümesinin, $\mathbb{R}_n^n$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \times n$ biçimindeki simetrik matrislerin kümesi S olsun.

Her $X, Y \in S$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(X + \lambda Y)^T = X^T + (\lambda Y)^T = X^T + \lambda Y^T = X + \lambda Y$$

olduğundan $X + \lambda Y \in S$ olur. Buna göre S kümesi bir alt vektör uzayıdır. □

11. $n \times n$ biçimindeki ters simetrik matrislerin kümesinin, $\mathbb{R}_n^n$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $n \times n$ biçimindeki simetrik matrislerin kümesi H olsun.

Her $X, Y \in H$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$(X + \lambda Y)^T = X^T + (\lambda Y)^T = X^T + \lambda Y^T = -X + \lambda(-Y) = -X + (-\lambda Y) = -(X + \lambda Y)$$

olduğundan $X + \lambda Y \in H$ olur. Buna göre H kümesi bir alt vektör uzayıdır. □

12. $n \times n$ biçiminde, izi sıfır olan matrislerin kümesi H olsun. H kümesinin $\mathbb{R}_n^n$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $A, B \in H$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ biçimindedir. İz tanımına göre $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$ ve $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$ dır. Matrislerdeki toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre $A + \lambda B = [a_{ij} + \lambda b_{ij}]_{n \times n}$ dir.

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+\lambda b_{ii})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}+\lambda\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=0+\lambda 0=0$$

olduğundan $A+\lambda B$ matrisinin izi de sıfırdır. Buna göre $A+\lambda B\in H$ olur. H kümesi bir alt vektör uzayıdır. $\square$

LİNEER BİLEŞİM KAVRAMI

1. $(6,-2)$ vektörü, $(-3,1)$ vektörünün bir lineer bileşimi midir?

Çözüm: $(6,-2) = c_1(-3,1)$ olacak biçimde bir c_1 sayısının bulunduğu hemen görülebilir. $c_1 = -2$ alındığında bu eşitliğin doğru olduğunu gördünüz mü? Demek ki $(6,-2)$ vektörü, $(-3,1)$ vektörünün bir lineer bileşimidir. $\square$

2. $(5,-2)$ vektörü, $(2,1)$ vektörünün bir lineer bileşimi midir?

Çözüm: $(5,-2) = c_1\,(2,1)$ olacak biçimde bir c_1 sayısının bulunup bulunmadığına bakacağız. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} 2c_1 &= 5 \\ c_1 &= -2 \end{aligned} \tag{1}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin genişletilmiş matrisini satırca indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \overset{(-2)R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{9}R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \overset{2R_2+R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sistemi tutarsızdır. Buna göre $(5,-2)$ vektörü, $(2,1)$ vektörünün bir lineer bileşimi değildir. $\square$

3. $(-2,3)$ vektörü, $(0,0)$ vektörünün bir lineer bileşimi midir?

Çözüm: $(-2,3) = c_1\,(0,0)$ olacak biçimde bir c_1 sayısının bulunup bulunmadığına bakacağız. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} 0c_1 &= -2 \\ 0c_1 &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin genişletilmiş matrisini satırca indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{(-\frac{1}{2})R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \overset{(-3)R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sistemi tutarsızdır. Buna göre $(-2,1)$ vektörü, $(0,0)$ vektörünün bir lineer bileşimi değildir. $\square$

4. $(9,-3,12)$ vektörü, $(-3,1,-4)$ vektörünün bir lineer bileşimi midir?

Çözüm: $(9,-3,12) = c_1\,(-3,1,-4)$ olacak biçimde bir c_1 sayısının bulunup bulunmadığına bakacağız. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} -3c_1 &= 9 \\ c_1 &= -3 \\ -4c_1 &= 12 \end{aligned} \qquad (1)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin genişletilmiş matrisini satırca indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \overset{(-\frac{1}{3})R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 \\ 1 & -3 \\ -4 & 12 \end{bmatrix} \underset{4R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-1)R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sistemi tutarlıdır ve çözümü $c_1 = -3$ tür. Demek ki $(9,-3,12)$ vektörü, $(-3,1,-4)$ vektörünün bir lineer bileşimidir. □

5. $(6,5,-3)$ vektörü, $(2,3,-1)$ vektörünün bir lineer bileşimi midir?

Çözüm: $(6,5,-3) = c_1\,(2,3,-1)$ olacak biçimde bir c_1 sayısının bulunup bulunmadığına bakacağız. Bu eşitlikten

$$\begin{aligned} 2c_1 &= 6 \\ 3c_1 &= 5 \\ -c_1 &= -3 \end{aligned} \qquad (1)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin genişletilmiş matrisini satırca indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 \\ 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \underset{1R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-3)R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-\frac{1}{4})R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 \\ 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-3)R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sistemi tutarsızdır. Buna göre $(6,5,-3)$ vektörü, $(2,3,-1)$ vektörünün bir lineer bileşimi değildir. □

6. $\mathbb{R}^2$ uzayında $\alpha_1 = (5,2)$ ve $\alpha_2 = (3,-1)$ olsun. $(-9,-8)$ vektörü, α_1 ve α_2 vektörlerinin bir lineer bileşimi midir?

Çözüm: $(-9-8) = u$ olsun. u vektörünün α_1 ve α_2 vektörlerinin bir lineer bileşimi olması için $u = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ olacak biçimde c_1 ve c_2 sayılarının bulunabilmesi gerekli ve yeterlidir. $u = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ eşitliği

$$(-9,-8) = c_1\,(5,2) + c_2\,(3,-1)$$

eşitliğine denktir. Buradan

$$\begin{aligned} 5c_1 + 3c_2 &= -9 \\ 2c_1 - c_2 &= -8 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \overset{(-2)R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 5 & 7 \\ 2 & -1 & -8 \end{bmatrix} \overset{(-2)R_1+R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 5 & 7 \\ 0 & -11 & -22 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-\frac{1}{11})R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 5 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix} \overset{(-5)R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminin çözümünün $c_1 = -3$, $c_2 = 2$ olduğu hemen görülmektedir. Öyleyse $u = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ olacak biçimde c_1 ve c_2 sayıları vardır ve $c_1 = -3$, $c_2 = 2$ dir. u vektörü α_1 ve α_2 vektörlerinin bir lineer bileşimidir. □

7. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\alpha_1 = (3,1,2)$ ve $\alpha_2 = (1,-1,0)$ olsun. $(-1,2,4)$ vektörü, α_1 ve α_2 vektörlerinin bir lineer bileşimi midir?

Çözüm: $(-1,2,4) = u$ olsun. u vektörünün α_1 ve α_2 vektörlerinin bir lineer bileşimi olması için $u = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ olacak biçimde c_1 ve c_2 sayılarının bulunabilmesi gerekli ve yeterlidir. $u = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ eşitliği

$$(1,2,4) = c_1\,(3,1,2) + c_2\,(1,-1,0)$$

eşitliğine denktir. Buradan

$$\begin{aligned} 3c_1 + c_2 &= -1 \\ c_1 - c_2 &= 2 \\ 2c_1 + 0c_2 &= 4 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underset{(-2)R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-3)R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 4 & -7 \end{bmatrix} \underset{(-4)R_2+R_3\to R_3}{\overset{1R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-\frac{1}{7})R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \overset{(-2)R_3+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sistemi tutarsız bir denklem sistemidir. Buna göre u vektörü α_1 ve α_2 vektörlerinin bir lineer bileşimi değildir.

8. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\alpha_1 = (0,1,2)$, $\alpha_2 = (2,-1,1)$ ve $\alpha_3 = (1,-1,3)$ olsun. $(7,-6,9)$ vektörü, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesinin bir lineer bileşimi midir?

Çözüm: $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = (7,-6,9)$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} 0c_1 + 2c_2 + c_3 &= 7 \\ c_1 - c_2 - c_3 &= -6 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 &= 9 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \overset{(-2)R_1+R_3 \to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 21 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-1)R_3+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & -1 & -6 \\ 0 & -1 & -4 & -14 \\ 0 & 3 & 5 & 21 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -1 & -1 & -6 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 14 \\ 0 & 3 & 5 & 21 \end{bmatrix} \underset{(-3)R_2+R_3 \to R_3}{\overset{1R_2+R_1 \to R_1}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 8 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 14 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{bmatrix} \overset{(-\frac{1}{7})R_3 \to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 8 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 14 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{bmatrix} \underset{(-4)R_3+R_2 \to R_2}{\overset{(-3)R_3+R_1 \to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sistemi tutarlı bir denklem sistemidir. Çözümü, $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$ dir. Öyleyse $(7,-6,7)$ vektörü, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesinin bir lineer bileşimidir. $\square$

9. $\mathbb{R}^3$ uzayında $H = \{(a-3b, 2a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ eşitliğiyle verilen H kümesinin, bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu alt uzayı üreten bir küme bulunuz.

Çözüm: $(a-3b, 2a, b) = (a, 2a, 0) + (-3b, 0, b) = a\,(1,2,0) + b\,(-3,0,1)$ dir. Bu eşitlikten yararlanarak $H = Sp\,\{(1,2,0), (-3,0,1)\}$ olduğu kolayca görülebilir. V vektör uzayının bir E alt kümesi için SpE kümesinin bir alt vektör uzayı olduğunu ispatlamıştık. Buna göre H kümesi bir alt vektör uzayıdır. $\{(1,2,0), (-3,0,1)\}$ kümesi, H alt uzayının bir üretecidir. $\square$

10. $\mathbb{R}^4$ uzayında $\alpha_1 = (1,2,1)$ ve $\alpha_2 = (-3,2,-1)$ eşitlikleriyle verilen α_1 ve α_2 vektörlerini göz önüne alalım. $H = Sp\,\{\alpha_1, \alpha_2\}$ olsun. $u = (a,b,c)$ olmak üzere u vektörünün H alt uzayında bulunması için a, b, c sayıları arasında hangi ilişkinin bulunması gerekli ve yeterlidir?

Çözüm: $u \in H$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $x_1\,(1,2,1) + x_2\,(-3,2,-1) = u$ olacak biçimde x_1, x_2 sayılarının bulunabilmesidir.

$$x_1(1,2,1) + x_2(-3,2,-1) = (a,b,c) \tag{1}$$

eşitliği, $(x_1 - 3x_2,\ 2x_1 + 2x_2,\ x_1 - x_2) = (a,b,c)$ eşitliğine denktir. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= a \\ 2x_1 + 2x_2 &= b \\ x_1 - x_2 &= c \end{aligned} \tag{2}$$

lineer denklem sistemini verir. Bu denklem sistemi tutarlı olacak biçimdeki (a,b,c) üçlülerinin kümesini arıyoruz. (2) denklem sisteminin genişletilmiş matrisini satırca indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 & a \\ 2 & 2 & b \\ 1 & -1 & c \end{bmatrix} \overset{(-2)R_1+R_2 \to R_2}{\underset{(-1)R_1+R_3 \to R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 & a \\ 0 & 8 & -2a+b \\ 0 & 2 & -a+c \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{8}R_2 \to R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 & a \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{-2a+b}{8} \\ 0 & 2 & -a+c \end{bmatrix} \overset{3R_2+R_1 \to R_1}{\underset{(-2)R_2+R_3 \to R_3}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \frac{2a+3b}{8} \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{-2a+b}{8} \\ 0 & 0 & \frac{-2a-b+4c}{4} \end{bmatrix}$$

dır. En sondaki indirgenmiş matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminin tutarlı olması için

$$-2a - b + 4c = 0 \tag{3}$$

olması gerekli ve yeterlidir. (3) denklem sisteminin çözümü olan (a,b,c) üçlülerinin kümesi H alt uzayıdır. □

11. $\mathbb{R}^3$ uzayında $H = \{(5t,\ t-k,\ -2t+3k) : t,k \in \mathbb{R}\}$ eşitliğiyle verilen H kümesinin, bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu alt uzayı üreten bir küme bulunuz.

Çözüm: $(5t,\ t-k,\ -2t+3k) = (5t,\ t,\ -2t) + (0,\ -k,\ 3k) = t(5,1,-2) + k(0,-1,3)$ dir. Bu eşitlikten yararlanarak $H = Sp\{(5,1,-2),(0,-1,3)\}$ olduğu kolayca görülebilir. V vektör uzayının bir E alt kümesi için SpE kümesinin bir alt vektör uzayı olduğunu ispatlamıştık. Buna göre H kümesi bir alt vektör uzayıdır. $\{(5,1,-2),(0,-1,3)\}$ kümesi, H alt uzayının bir üretecidir. □

12. $H = \left\{ \begin{bmatrix} 3t \\ 7t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ olsun. H kümesinin, $\mathbb{R}^2_1$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu alt uzayını geren bir alt küme bulunuz.

Çözüm: $\begin{bmatrix} 3t \\ 7t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ tür. Bu eşitlikten yararlanarak $H = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ olduğu kolayca görülebilir. V vektör uzayının bir E alt kümesi için SpE kümesinin bir alt vektör uzayı olduğunu ispatlamıştık. Buna göre H kümesi bir alt vektör uzayıdır. $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$ kümesi, H alt uzayını geren bir alt kümedir. Başka bir anlatımla $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}\right\}$ kümesi, H alt uzayının bir üretecidir. □

13. $H = \left\{\begin{bmatrix} 2a \\ b \\ a-3b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ olsun. H kümesinin, $\mathbb{R}^3_1$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu alt uzayını geren bir alt küme bulunuz.

Çözüm: $\begin{bmatrix} 2a \\ b \\ a-3b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ -3b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ dir. Bu eşitlikten yararlanarak $H = Sp\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$ olduğu kolayca görülebilir. Buna göre H kümesi bir alt vektör uzayıdır. $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$ kümesi, H alt uzayını geren bir alt kümedir. Başka bir anlatımla $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$ kümesi, H alt uzayının bir üretecidir. □

14. $H = \left\{\begin{bmatrix} a & 3b & -a \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ olsun. H kümesinin, $\mathbb{R}^2_3$ uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu alt uzayın bir üretecini bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{bmatrix} a & 3b & -a \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3b & 0 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bu eşitlikten yararlanarak $H = Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ olduğu kolayca görülebilir. Buna göre H kümesi bir alt vektör uzayıdır. $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ kümesi, H alt uzayının bir üretecidir. Başka bir anlatımla $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ kümesi, H alt uzayını geren bir alt kümedir. □

15. $\mathbf{P}_2$ vektör uzayında verilen $1+5x-x^2$ polinomu, $\left\{2-x^2,\ 1-x,\ 1+3x-x^2\right\}$ kümesinin lineer bileşimi olur mu?

Çözüm: $\left\{2-x^2,\ 1-x,\ 1+3x-x^2\right\}$ kümesinin elemanlarını sırasıyla p_1, p_2, p_3 ile gösterelim. $1+5x-x^2=u$ diyelim. $c_1p_1+c_2p_2+c_3p_3=u$ eşitliği açık olarak yazılıp düzenlendiğinde

$$(2c_1+c_2+c_3)+(0c_1-c_2+3c_3)\,x+(-c_1+0c_2-c_3)\,x^2=1+5x-x^2 \qquad (1)$$

eşitliğine dönüşür. İki polinomun eşit olması için karşılıklı katsayılarının eşit olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre (1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 2c_1+c_2+c_3&=1\\ 0c_1-c_2+3c_3&=5\\ -c_1+0c_2-c_3&=-1 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 5\\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{1R_3+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 5\\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{1R_1+R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1\\ 0 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \underset{1R_2+R_3\to R_3}{\overset{(-1)R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_3\to R_3}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -1\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix} \underset{1R_3+R_2\to R_2}{\overset{(-1)R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1\\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1\\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sistemi tutarlı bir denklem sistemidir. Çözümü, $c_1=-1$, $c_2=1$, $c_3=2$ dir. Öyleyse u vektörü, $\{p_1,p_2,p_3\}$ kümesinin bir lineer bileşimidir. □

16. $\left\{a_0x^2+a_1x+2a_0 : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\right\}$ kümesinin $\mathbf{P}_2$ polinomlar uzayının bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu alt uzayı üreten bir alt küme bulunuz.

Çözüm: $a_0x^2+a_1x+2a_0=\left(a_0x^2+2a_0\right)+(a_1x)=a_0\left(x^2+2\right)+a_1x$ dir. Bu eşitlikten yararlanarak $H=Sp\left\{x^2+2,\ x\right\}$ olduğu kolayca görülebilir. V vektör uzayının bir E alt kümesi için SpE kümesinin bir alt vektör uzayı olduğunu ispatlamıştık. Buna göre H kümesi bir alt vektör uzayıdır. $\left\{x^2+2,\ x\right\}$ kümesi, H alt uzayını geren (üreten) bir alt kümedir. Başka bir anlatımla $\left\{x^2+2,\ x\right\}$ kümesi, H alt uzayının bir üretecidir. □

17. soru: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 0 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ olsun. $u=\begin{bmatrix} 8 & a\\ -3 & -2\end{bmatrix}$

olduğuna göre u matrisi, A, B, C matrislerinin bir lineer bileşimi olacak biçimde bir a sayısı varsa bu sayıyı bulunuz. Sonra u vektörünü, A, B, C matrislerinin bir lineer bileşimi olarak yazınız.

Çözüm: $c_1A + c_2B + c_3C = u$ eşitliğinden,

$$\begin{aligned} c_1 - 2c_2 + 0c_3 &= 8 \\ -c_1 + 0c_2 - c_3 &= -3 \\ 2c_1 + c_2 + c_3 &= a \\ 0c_1 + c_2 + c_3 &= -2 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{(-2)R_1+R_3\to R_3}{\overset{1R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & a-16 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2\leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 & 8 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & a-16 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 2R_2+R_1\to R_1 \\ \sim \\ (-5)R_2+R_3\to R_3 \\ 2R_2+R_4\to R_4 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & a-6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3\leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & -4 & a-6 \end{bmatrix} \begin{array}{c} (-2)R_3+R_1\to R_1 \\ \sim \\ (-1)R_3+R_2\to R_2 \\ 4R_3+R_4\to R_4 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminin tutarlı bir denklem sistemi olması için $a - 2 = 0$ olması gerekli ve yeterlidir. Öyleyse $a = 2$ için u vektörü A, B, C vektörlerinin bir lineer bileşimidir ve $u = 2A - 3B + C$ dir. □

18. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\alpha_1 = (3, -1, 2)$ ve $\alpha_2 = (1, 1, 3)$ olsun. $(-1, 0, 1)$ vektörü, α_1 ve α_2 vektörlerinin bir lineer bileşimi midir?

Çözüm: $(-1, 0, 1) = u$ olsun. u vektörünün α_1 ve α_2 vektörlerinin bir lineer bileşimi olması için $u = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ olacak biçimde c_1 ve c_2 sayılarının bulunabilmesi gerekli ve yeterlidir. $u = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ eşitliği

$$(-1, 0, 1) = c_1 (3, -1, 2) + c_2 (1, 1, 3)$$

eşitliğine denktir. Buradan

$$\begin{aligned} 3c_1 + c_2 &= -1 \\ -c_1 + c_2 &= 0 \\ 2c_1 + 3c_2 &= 1 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{2R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{(-2)R_1+R_3\to R_3}{\overset{1R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\overset{1R_3+R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \underset{3R_2+R_3\to R_3}{\overset{(-3)R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -7 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{9}R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -7 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \underset{(-2)R_3+R_2\to R_2}{\overset{7R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

olur. En sağdaki matrisin gösterdiği lineer denklem sistemi tutarsız bir denklem sistemidir. Buna göre u vektörü α_1 ve α_2 vektörlerinin bir lineer bileşimi değildir.

19. $\mathbb{R}^3$ uzayında $H = \{(a-b, 2a, -3a+b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ eşitliğiyle verilen H kümesinin, bir alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu alt uzayı üreten bir küme bulunuz.

Çözüm: $(a-b, 2a, -3a+b) = (a, 2a, -3a) + (-b, 0, b) = a(1, 2, -3) + b(-1, 0, 1)$ dir. Bu eşitlikten yararlanarak $H = Sp\{(1, 2, -3), (-1, 0, 1)\}$ olduğu kolayca görülebilir. V vektör uzayının bir E alt kümesi için SpE kümesinin bir alt vektör uzayı olduğunu ispatlamıştık. Buna göre H kümesi bir alt vektör uzayıdır. $\{(1, 2, -3), (-1, 0, 1)\}$ kümesi, H alt uzayının bir üretecidir. □

20. $\mathbb{R}^4$ uzayında $\alpha_1 = (1, 2, -1)$ ve $\alpha_2 = (2, -2, 1)$ eşitlikleriyle verilen α_1 ve α_2 vektörlerini göz önüne alalım. $H = Sp\{\alpha_1, \alpha_2\}$ olsun. $u = (a, b, c)$ olmak üzere u vektörünün H alt uzayında bulunması için a, b, c sayıları arasında hangi ilişkinin bulunması gerekli ve yeterlidir?

Çözüm: $u \in H$ olması için gerekli ve yeterli koşul, $x_1(1, 2, -1) + x_2(2, -2, 1) = u$ olacak biçimde x_1, x_2 sayılarının bulunabilmesidir.

$$x_1(1, 2, -1) + x_2(2, -2, 1) = (a, b, c) \tag{1}$$

eşitliği, $(x_1 + 2x_2,\ 2x_1 - 2x_2,\ -x_1 + x_2) = (a, b, c)$ eşitliğine denktir. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= a \\ 2x_1 - 2x_2 &= b \\ -x_1 + x_2 &= c \end{aligned} \tag{2}$$

lineer denklem sistemini verir. Bu denklem sistemi tutarlı olacak biçimdeki (a, b, c) üçlülerinin kümesini arıyoruz. (2) denklem sisteminin genişletilmiş matrisini satırca indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & a \\ 2 & -2 & b \\ -1 & 1 & c \end{bmatrix} \underset{1R_1+R_3\to R_3}{\overset{(-2)R_1+R_2\to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & a \\ 0 & -6 & -2a+b \\ 0 & 3 & a+c \end{bmatrix} \overset{(-\frac{1}{6})R_2\to R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & a \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{2a-b}{6} \\ 0 & 3 & a+c \end{bmatrix} \underset{(-3)R_2+R_3\to R_3}{\overset{(-2)R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \frac{a+b}{3} \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{2a-b}{6} \\ 0 & 0 & \frac{b+2c}{2} \end{bmatrix}$$

dır. En sondaki indirgenmiş matrisin gösterdiği lineer denklem sisteminin tutarlı olması için

$$b + 2c = 0 \qquad (3)$$

olması gerekli ve yeterlidir. (3) denkleminin çözümü olan (a, b, c) üçlülerinin kümesi H alt uzayıdır. □

LİNEER BAĞIMSIZLIK

1. $\mathbb{R}^2$ uzayında $\alpha_1 = (5, -1)$, $\alpha_2 = (-1, 3)$ olmak üzere $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\alpha_1 = (5, -1), \alpha_2 = (-1, 3)$ diyelim. $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfır olmayan c_1, c_2 sayılarının bulunup bulunmadığını arayacağız. $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliği, $(5c_1 - c_2, \; -c_1 + 3c_2) = (0, 0)$ eşitliğine denktir. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} 5c_1 - c_2 &= 0 \\ -c_1 + 3c_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

denklem sistemini verir. (1) denklem sisteminin genişletilmiş matrisini elementer satır işlemleriyle indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-5)R_1 + R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 & 0 \\ 0 & 14 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{14}R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \overset{3R_2 + R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

olur. En son elde edilen satırca indirgenmiş matrisin gösterdiği denklem sistemi göz önüne alındığında $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olduğu görülür. (1) denklem sistemini sağlayan sayılar yalnızca $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ dır. $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliği sağlanacak biçimde en az biri sıfır olmayan c_1 ve c_2 sayıları bulunamadığından $\{(3, -1), (1, 3)\}$ kümesi lineer bağımsız bir kümedir.

(1) denklem sisteminin bir tek $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ çözümünün bulunduğunu şöyle de görebilirdik: Bu denklem sisteminde bilinmeyen sayısı denklem sayısına eşittir. Ayrıca katsayılar determinantı 10 dur. Katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğundan bu matris, tersinir bir matristir. Cramer yöntemine göre (1) denklem sisteminin bir ve yalnız bir çözümü vardır. Bu çözümün $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ olduğu hemen görülebilir.

Bu soru şu teoremden yararlanarak da çözülebilirdi:

"$\mathbb{R}^m$ uzayında, α_1, α_2, ..., α_m vektörlerinin lineer bağımsız olması için

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \neq 0$$

olması gerekli ve yeterlidir."

Burada verilen $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi, $\mathbb{R}^2$ uzayının 2 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1, \alpha_2) = \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 16$$

dur. $\det(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$ olduğundan $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi lineer bağımsızdır. □

2. $\mathbb{R}^2$ uzayında $\alpha_1 = (7, -2)$, $\alpha_2 = (3, 1)$, $\alpha_3 = (5, 6)$ olmak üzere $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$ eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfır olmayan c_1, c_2, c_3 sayılarının bulunup bulunmadığını arayacağız. Yukarıdaki eşitlik

$$(7c_1 + 3c_2 + 5c_3, \quad -2c_1 + c_2 + 6c_3) = (0, 0) \tag{1}$$

eşitliğine denktir. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} 7c_1 + 3c_2 + 5c_3 &= 0 \\ -2c_1 + c_2 + 6c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sistemini verir.

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 & 0 \\ -2 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \overset{3R_2+R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 6 & 23 & 0 \\ -2 & 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \overset{2R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 6 & 23 & 0 \\ 0 & 13 & 52 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{13}R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 6 & 23 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-6)R_2+R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Son matrisin gösterdiği denklem sisteminde $c_3 = t$ alınarak $c_1 = t$, $c_2 = -4t$ bulunur. Buna göre (1) eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfırdan farklı olan c_1, c_2, c_3 sayıları bulunabilir. Örneğin $t = 1$ için elde edilen $c_1 = 1$, $c_2 = -4$, $c_3 = 1$ sayıları böyle sayılardır. Bu sayıların dışında da (1) eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfırdan farklı olan c_1, c_2, c_3 sayılarının bulunabileceği apaçıktır. En az biri sıfırdan farklı olan böyle c_1, c_2, c_3 sayılarının bulunabilmesi, $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesinin lineer bağımlı bir küme olduğunu gösterir.

Bu soru şu teoremden yararlanarak da çözülebilirdi:

"$\mathbb{R}^m$ uzayında α_1, α_2, ... , α_n vektörleri verilsin. $m < n$ ise $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ kümesi lineer bağımlıdır."

Burada verilen $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi, $\mathbb{R}^2$ uzayının 3 elemanlı bir alt kümesidir. $2 < 3$ olduğundan $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımlıdır. □

3. $\mathbb{R}^2$ uzayında $\{(2, -1)\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $c\,(2, -1) = 0$ eşitliğini doğrulayan c sayısı yalnızca sıfır sayısıdır. Bu eşitliği doğrulayan ve sıfırdan farklı olan bir c sayısı bulunamaz. Bundan dolayı $\{(2, -1)\}$ kümesi, lineer bağımsız bir kümedir. □

4. $\mathbb{R}^2$ uzayında $\{(3, -2), (-6, 4)\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\alpha_1 = (3, -2)\,, \alpha_2 = (-6, 4)$ diyelim. $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfır olmayan c_1, c_2 sayılarının bulunup bulunmadığını arayacağız. $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliği, $(3c_1 - 6c_2, \; -2c_1 + 4c_2) = (0, 0)$ eşitliğine denktir. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} 3c_1 - 6c_2 &= 0 \\ -2c_1 + 4c_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

denklem sistemini verir.

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \overset{2R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. En son elde edilen satırca indirgenmiş matrisin gösterdiği denklem sisteminde $c_2 = t$ alınarak $c_1 = 2t$ bulunur. Buna göre (1) eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfırdan farklı olan c_1, c_2 sayıları bulunabilir. Örneğin $t = 1$ için elde edilen $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ sayıları böyle sayılardır. Bu sayıların dışında da (1) eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfırdan farklı olan c_1, c_2 sayılarının bulunabileceği apaçıktır. En az biri sıfırdan farklı olan böyle c_1, c_2 sayılarının bulunabilmesi, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesinin lineer bağımlı bir küme olduğunu gösterir.

Bu soru şu teoremden yararlanarak da çözülebilirdi:

"$\mathbb{R}^m$ uzayında, α_1, α_2, $\ldots$, α_m vektörlerinin lineer bağımsız olması için

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \neq 0$$

olması gerekli ve yeterlidir."

Burada verilen $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi, $\mathbb{R}^2$ uzayının 2 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1, \alpha_2) = \det \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = 0$$

dur. $\det(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ olduğundan $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi lineer bağımsız değildir. Lineer bağımlıdır. □

5. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\alpha_1 = (3, -2, 1)$, $\alpha_2 = (-9, 6, -3)$ eşitlikleriyle verilen α_1 ve α_2 vektörlerinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\alpha_1 = (3, -2, 1), \alpha_2 = (-9, 6, -3)$ diyelim. $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfır olmayan c_1, c_2 sayılarının bulunup bulunmadığını arayacağız. $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliği, $(3c_1 - 9c_2, \ -2c_1 + 6c_2, , \ c_1 - 3c_2) = (0, 0, 0)$ eşitliğine denktir. Bu eşitlik

$$\begin{aligned} 3c_1 - 9c_2 &= 0 \\ -2c_1 + 6c_2 &= 0 \\ c_1 - 3c_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

denklem sistemini verir.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 & 0 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \underset{(-1)R_1+R_3 \to R_3}{\overset{2R_1+R_2 \to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. $c_2 = t$ seçilirse $c_1 = 3t$ bulunur. Demek ki $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfır olmayan c_1, c_2 sayıları bulunabiliyor. Örneğin $t = 1$ için $c_1 = 3$, $c_2 = 1$ elde edilir. En az biri sıfırdan farklı olan böyle c_1, c_2 sayılarının bulunabilmesi, $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesinin lineer bağımlı bir küme olduğunu gösterir. $\square$

6. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\{(5,-3,1),(0,2,1),(3,1,2)\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: Burada verilen $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayının 3 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \det \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

dir. $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ olduğundan $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımlıdır. $\square$

7. $\mathbb{R}^3$ uzayında $\{(3,-5,2)\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\{(3,-5,2)\}$ kümesi bağımsız bir alt kümesidir. Çünkü $c(3,-5,2) = (0,0,0)$ eşitliğini doğrulayan c sayısı yalnızca sıfır sayısıdır. $\square$

8. $\mathbb{R}^3$ uzayında aşağıdaki vektör kümelerinden hangileri lineer bağımlıdır?

(a) $\{(1,0,-2),(-2,0,4)\}$ **(b)** $\{(3,-1,0),(0,-1,0),(3,1,2),(1,-1,3)\}$

(c) $\{(4,1,2),(1,-1,0),(2,1,-2)\}$ **(ç)** $\{(-3,2,0),(1,1,2),(-5,5,2)\}$

Çözüm: (a) $\{(1,0,-2),(-2,0,4)\}$ kümesindeki ikinci vektör, birinci vektörün lineer bileşimi olduğundan bu küme lineer bağımlıdır.

(b) $\{(3,-1,0),(0,-1,0),(3,1,2),(1,-1,3)\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayının 4 elemanlı bir alt kümesidir. $3 < 4$ olduğundan bu küme lineer bağımlıdır.

(c) $\{(4,1,2),(1,-1,0),(2,1,-2)\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayının 3 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \det \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 16$$

dır. $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$ olduğundan $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

(ç) $\{(-3,2,0),(1,1,2),(-5,5,2)\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayının 3 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \det \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

dir. $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ olduğundan $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımlıdır. $\square$

9. $\mathbb{R}^4$ uzayında $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(2,-1,-1,2),(1,0,1,0)\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,-1,-1,0),(1,0,1,0)\}$ kümesi, $\mathbb{R}^4$ uzayının 4 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

dır. $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 0$ olduğundan $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}$ kümesi lineer bağımlıdır. $\square$

10. $\mathbb{R}^1$ uzayında $\{1\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $c1 = 0$ eşitliğini doğrulayan ve sıfırdan farklı olan bir c sayısı bulunmadığından $\{1\}$ kümesi $\mathbb{R}^1$ uzayının lineer bağımsız bir alt kümesidir. $\square$

11. $\mathbb{R}^n$ uzayında

$e_1 = (1,0,\ldots,0,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,\ldots,0)$, $\ldots$, $e_n = (0,0,\ldots,0,1)$

olmak üzere $\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n = 0$ eşitliği açık olarak yazılıp düzenlendiğinde

$$(c_1,c_2,\ldots,c_n) = (0,0,\ldots,0)$$

eşitliğine dönüşür. Bu eşitlikten c_1, c_2, $\ldots$, c_n sayılarının tümünün sıfır olduğu sonucu çıkar. Öyleyse $\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır. $\square$

12. $\mathbf{P}_2$ uzayında $p_1 = 5$, $p_2 = 2-x$, $p_3 = 3+x^2$ olduğuna göre $\{p_1,p_2,p_3\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = 0$ eşitliği açık olarak yazılıp düzenlendiğinde

$$(5c_1 + 2c_2 + 3c_3) + (0c_1 - c_2 + 0c_3)\,x + (0c_1 + 0c_2 + 3c_3)\,x^2 = 0 \tag{1}$$

eşitliğine dönüşür. Bir polinomun sıfır polinomuna eşit olması için bütün katsayılarının sıfır olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre (1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 5c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 0c_1 - c_2 + 0c_3 &= 0 \\ 0c_1 + 0c_2 + 3c_3 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{3}R_3 \to R_3}{\overset{(-2)R_2+R_1 \to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-3)R_3+R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{5}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix}$$

dir. En son elde edilen satırca indirgenmiş matrisin gösterdiği denklem sisteminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 0$ dır. Buna göre $\{p_1, p_2, p_3\}$ kümesi lineer bağımsız bir kümedir. □

13. İkinci dereceden reel katsayılı polinomların $\mathbf{P}_2$ ile gösteriliyor. $\mathbf{P}_2$ uzayında

$$p_1 = 1 + x, \quad p_2 = 2x - 3x^2, \quad p_3 = -2 + 4x - 9x^2$$

olduğuna göre $\{p_1, p_2, p_3\}$ kümesinin lineer bağımlı olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $c_1p_1 + c_2p_2 + c_3p_3 = 0$ eşitliği açık olarak yazılıp düzenlendiğinde

$$(c_1 + 0c_2 - 2c_3) + (c_1 + 2c_2 + 4c_3)\,x + (0c_1 - 3c_2 - 9c_3)\,x^2 = 0 \qquad (1)$$

eşitliğine dönüşür. Bir polinomun sıfır polinomuna eşit olması için bütün katsayılarının sıfır olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre (1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} c_1 + 0c_2 - 2c_3 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 &= 0 \\ 0c_1 - 3c_2 - 9c_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_1+R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}R_2 \to R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{bmatrix} \overset{3R_2+R_3 \to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. En son elde edilen satırca indirgenmiş matrisin gösterdiği denklem sisteminde $c_3 = t$ seçilirse $c_1 = 2t$ ve $c_2 = -3t$ bulunur. Demek ki $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$ eşitliğini doğrulayan ve en az biri sıfır olmayan c_1, c_2, c_3 sayıları bulunabiliyor. Örneğin $t = 1$ için $c_1 = 2$, $c_2 = -3$, $c_3 = 1$ elde edilir. En az biri sıfırdan farklı olan böyle c_1, c_2, c_3 sayılarının bulunabilmesi, $\{p_1, p_2, p_3\}$ kümesinin lineer bağımlı bir küme olduğunu gösterir. □

14. $\mathbb{R}_2^2$ uzayında, $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ olduğuna göre $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

Çözüm: $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 0$ eşitliği açık olarak yazılıp düzenlendiğinde

$$\begin{bmatrix} 5c_1 + 0c_2 & c_1 + 2c_2 \\ -c_1 + 3c_2 & 2c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1}$$

eşitliğine dönüşür. İki matrisin eşit olması için karşılıklı bileşenlerinin eşit olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre (1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 5c_1 + 0c_2 &= 0 \\ -c_1 + 3c_2 &= 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 0 \\ 2c_1 + c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{5}R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle 1R_1+R_2 \to R_2} \\ \sim \\ {\scriptstyle (-1)R_1+R_3 \to R_3} \\ {\scriptstyle (-2)R_1+R_4 \to R_4} \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 \leftrightarrow R_4}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle (-2)R_2+R_3 \to R_3} \\ \sim \\ {\scriptstyle (-3)R_2+R_4 \to R_4} \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. En son elde edilen satırca indirgenmiş matrisin gösterdiği denklem sisteminin bir tek çözümü vardır ve bu çözüm, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ dır. Buna göre $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi lineer bağımsız bir kümedir. □

15. Bir V alt uzayının $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ alt kümesinin lineer bağımsız olduğu biliniyor. Aşağıdaki kümelerin her birinin lineer bağımsız olup olmadığını gösteriniz.

(a) $\{\alpha_1\}$ **(b)** $\{\alpha_1, \alpha_3\}$ **(c)** $\{\alpha_1 - 3\alpha_2,\ \alpha_1\}$ **(ç)** $\{\alpha_1 - \alpha_3,\ \alpha_2 - \alpha_3\}$

(d) $\{\alpha_1 + 3\alpha_2,\ \alpha_1 - \alpha_3,\ 3\alpha_2 + \alpha_3\}$ **(e)** $\{3\alpha_1 - \alpha_2,\ 4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_3 - \alpha_1\}$

Çözüm: **(a)** Lineer bağımsız bir kümenin her alt kümesi de lineer bağımsız olduğundan $\{\alpha_1\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

(b) Lineer bağımsız bir kümenin her alt kümesi de lineer bağımsız olduğundan $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

(c) $c_1(\alpha_1 - 3\alpha_2) + c_2\alpha_1 = 0$ eşitliği düzenlendiğinde $(c_1 + c_2)\alpha_1 - 3c_2\alpha_2 = 0$ eşitliği elde edilir. $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan bu eşitlikten $c_1 + c_2 = 0$ ve $-3c_2 = 0$ elde edilir. Buradan da $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ bulunur. Demek ki $\{\alpha_1 - 3\alpha_2,\ \alpha_1\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

(ç) $c_1(\alpha_1 - \alpha_2) + c_2(\alpha_2 - \alpha_3) = 0$ eşitliği düzenlendiğinde $c_1\alpha_1 + (-c_1 + c_2)\alpha_2 - c_2\alpha_3 = 0$ eşitliği elde edilir. $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan bu eşitlikten

$$c_1 = 0,\ -c_1 + c_2 = 0,\ -c_2 = 0$$

elde edilir. Buradan da $c_1 = 0$ ve $c_2 = 0$ bulunur. Demek ki $\{\alpha_1 - \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

(d) $c_1(\alpha_1 + 3\alpha_2) + c_2(\alpha_1 - \alpha_3) + c_3(3\alpha_2 + \alpha_3) = 0$ eşitliği düzenlendiğinde

$$(c_1 + c_2)\alpha_1 + (3c_1 + 3c_3)\alpha_2 + (-c_2 + c_3)\alpha_3 = 0$$

eşitliği elde edilir. $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan bu eşitlikten

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ 3c_1 + 3c_3 &= 0 \\ -c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-3)R_1+R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{(-\frac{1}{3})R_2\to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{1R_2+R_3\to R_3}{\overset{(-1)R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan (1) denklem sisteminin çözümü vardır ve $c_1 = t,\ c_2 = -t,\ c_3 = t$ dir. Demek ki $c_1(\alpha_1 + 3\alpha_2) + c_2(\alpha_1 - \alpha_3) + c_3(3\alpha_2 + \alpha_3) = 0$ eşitliği sağlanacak biçimde en az biri sıfır olmayan $c_1,\ c_2,\ c_3$ sayıları bulunabiliyor. Buna göre $\{\alpha_1 + 3\alpha_2,\ \alpha_1 - \alpha_3,\ 3\alpha_2 + \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımlıdır.

(e) $c_1(3\alpha_1 - \alpha_2) + c_2(4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + c_3(\alpha_3 - \alpha_1) = 0$ eşitliği düzenlendiğinde

$$(3c_1 + 4c_2 - c_3)\alpha_1 + (-c_1 - c_2)\alpha_2 + (-c_2 + c_3)\alpha_3 = 0$$

eşitliği elde edilir. $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan bu eşitlikten

$$\begin{aligned} 3c_1 + 4c_2 - c_3 &= 0 \\ -c_1 - c_2 &= 0 \\ -c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{2R_2+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{1R_1+R_2\to R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{1R_2+R_3\to R_3}{\overset{(-2)R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan (1) denklem sisteminin çözümü vardır ve $c_1 = t$, $c_2 = t$, $c_3 = t$ dir. Demek ki $c_1(3\alpha_1 - \alpha_2) + c_2(4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) + c_3(\alpha_3 - \alpha_1)$ eşitliği sağlanacak biçimde en az biri sıfır olmayan c_1, c_2, c_3 sayıları bulunabiliyor. Buna göre $\{3\alpha_1 - \alpha_2,\ 4\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3,\ \alpha_3 - \alpha_1\}$ kümesi lineer bağımlıdır. □

16. $\mathbb{R}^4$ uzayında $H = Sp\{(2,6,-7,19),(2,0,3,-5),(0,1,0,-1),(-1,0,-1,1)\}$ eşitliğiyle verilen H alt uzayını geren lineer bağımsız bir küme bulunuz.

Çözüm: $(2,6,-7,19)$, $(2,0,3,-5)$, $(0,1,0,-1)$, $(-1,0,-1,1)$ vektörlerini satır vektörü olarak kabul eden matris A olsun. Bir matrisin satır vektörlerinde yapılan elementer işlemler matrisin satır uzayını değiştirmez. A matrisini elementer satır işlemleriyle satırca indirgeyelim.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -7 & 19 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{1R_3+R_1\to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 6 & -8 & 20 \\ 2 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{1R_1+R_4\to R_4}{\overset{(-2)R_1+R_2\to R_2}{\sim}}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 6 & -8 & 20 \\ 0 & -12 & 19 & -45 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -9 & 21 \end{bmatrix} \overset{R_2\leftrightarrow R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 6 & -8 & 20 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & -12 & 19 & -45 \\ 0 & 6 & -9 & 21 \end{bmatrix} \underset{\substack{12R_2+R_3\to R_3 \\ (-6)R_2+R_4\to R_4}}{\overset{(-6)R_2+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -8 & 26 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 19 & -57 \\ 0 & 0 & -9 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(\frac{1}{19})R_3\to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -8 & 26 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & -9 & 27 \end{bmatrix} \underset{9R_3+R_4\to R_4}{\overset{8R_3+R_1\to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. En sonda bulunan satırca indirgenmiş basamak matrisine S diyelim. S matrisinin ilk üç satırının lineer bağımsız olduğu apaçıktır. Son satır sıfır vektörüne eşit olduğundan S matrisinin satır uzayı, ilk üç satır vektörünün gerdiği uzaydır. Kısaca

$$H = Sp\{(1,0,0,2),(0,1,0,-1),(0,0,1,-3)\}$$

elde edilir. □

17. $G = \{(1,0,-1),(2,0,-2),(5,-2,-6),(13,-4,-15),(19,-8,-23)\}$ olsun. G kümesi,

$\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesidir. G kümesinin öyle bir alt kümesini bulunuz ki bu alt kümeye G kümesinin başka vektörleri konularak elde edilen kümeler lineer bağımlı olsun.

Çözüm: G kümesinin elemanlarını sütun vektörü olarak kabul eden matris A olsun. A matrisini elementer satır işlemleriyle satırca indirgeyelim.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 5 & 13 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -8 \\ -1 & -2 & -6 & -15 & -23 \end{bmatrix} \overset{1R_1+R_3 \to R_3}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 5 & 13 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(-\frac{1}{2})R_2 \to R_2}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 5 & 13 & 19 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \underset{1R_2+R_3 \to R_3}{\overset{(-5)R_2+R_1 \to R_1}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. En sonda bulunan satırca indirgenmiş basamak matrisine S diyelim. S matrisinin birinci ve üçüncü sütununun lineer bağımsız olduğu apaçıktır. Öteki sütunlar bu sütunların lineer bileşimidir. Birinci ve üçüncü sütunların yanına başka sütunlar konulduğunda lineer bağımlı kümeler elde edilir. Buna göre A matrisinde de birinci ve üçüncü sütun vektörleri lineer bağımsızdır. Bu sütunların yanına A matrisinin başka sütunları konularak elde edilen kümelerin tümü lineer bağımlı olur. $\square$

VEKTÖR UZAYININ BOYUTU

1. $\{(-3,1),(2,-7)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^2$ uzayının bir tabanı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\{(-3,1),(2,-7)\}$ kümesinin elemanlarını sırasıyla α_1, α_2 ile gösterelim. $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ kümesi, $\mathbb{R}^2$ uzayının 2 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1,\alpha_2)=\det\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 1 & -7\end{bmatrix}=19$$

dur. $\det(\alpha_1,\alpha_2)\neq 0$ olduğundan $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

$\mathbb{R}^2$ uzayının boyutunun 2 olduğunu biliyoruz. n boyutlu bir vektör uzayında n elemanlı $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ alt kümesi lineer bağımsız bir küme ise bu kümenin V vektör uzayı için bir taban olduğunu ispatlamıştık. Buna göre $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ kümesi, $\mathbb{R}^2$ uzayının bir tabanıdır. $\square$

2. $\{(-4,3),(8,-6)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayı için bir taban mıdır?

Çözüm: $\{(-4,3),(8,-6)\}$ kümesinin elemanlarını sırasıyla α_1, α_2 ile gösterelim. $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ kümesi, $\mathbb{R}^2$ uzayının 2 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1,\alpha_2)=\det\begin{bmatrix}-4 & 8\\ 3 & -6\end{bmatrix}=0$$

dur. $\det(\alpha_1,\alpha_2)=0$ olduğundan $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Buna göre $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ kümesi, $\mathbb{R}^2$ uzayının bir tabanı değildir. $\square$

3. $\{(2,5),(0,1),(-3,2)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayı için bir taban olur mu? Neden?

Çözüm: $\{(2,5),(0,1),(-3,2)\}=\varphi$ diyelim. φ kümesinin 3 tane elemanı var. $\mathbb{R}^2$ uzayının boyutunun 2 olduğunu biliyoruz. Ayrıca, n boyutlu bir vektör uzayında, n den daha çok vektörü bulunan her alt kümenin lineer bağımlı olduğunu da biliyoruz. Buna göre φ kümesi lineer bağımlıdır. (φ kümesinin lineer bağımlı olduğunu tanımdan yararlanarak da gösterebilirsiniz.)

φ kümesi lineer bağımsız olmadığından, bu küme $\mathbb{R}^2$ uzayının bir tabanı değildir. $\square$

4. $\{(2,1,3),(-1,0,1),(0,1,2)\}$ kümesi $\mathbb{R}^3$ uzayı için bir taban mıdır?

Çözüm: $\{(2,1,3),(-1,0,1),(0,1,2)\}$ kümesinin elemanlarını sırasıyla α_1, α_2, α_3 ile gösterelim. $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayının 3 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\det\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}=-3$$

tür. $\det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$ olduğundan $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

$\mathbb{R}^3$ uzayının boyutunun 3 olduğunu biliyoruz. n boyutlu bir vektör uzayında n elemanlı $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ alt kümesi lineer bağımsız bir küme ise bu kümenin V vektör uzayı için bir taban olduğunu ispatlamıştık. Buna göre $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir tabanıdır. □

5. $Sp\{(-3, 5)\} = H$ olsun. H alt uzayının farklı iki tabanını bulunuz.

Çözüm: $\{(-3, 5)\}$ kümesi H alt uzayının bir üretecidir. Ayrıca lineer bağımsız bir kümedir. Buna göre bu küme, H alt uzayının bir tabanıdır. $\{(6, -10)\}$ kümesinin de H alt uzayını ürettiği kolayca görülebilir. Ayrıca bu küme de lineer bağımsızdır. Bundan dolayı $\{(6, -10)\}$ kümesi de H alt uzayının bir tabanıdır. □

6. $Sp\{(1, -3), (-3, 9)\} = H$ olsun. H alt uzayının farklı iki tabanını bulunuz.

Çözüm: $\{(1, -3), (-3, 9)\}$ kümesi H alt uzayının bir üretecidir. Ama lineer bağımlı bir kümedir. Bundan dolayı H alt uzayının bir tabanı değildir. $\{(1, -3)\}$ kümesi H uzayının lineer bağımsız bir üreteci olduğundan bu küme, H alt uzayının bir tabanıdır. $\{(-3, 9)\}$ kümesinin de H alt uzayını ürettiği kolayca görülebilir. Ayrıca bu küme de lineer bağımsızdır. Bundan dolayı $\{(-3, 9)\}$ kümesi de H alt uzayının bir tabanıdır. □

7. $\{(a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ kümesinin alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu uzayın bir tabanını bulunuz. Bu alt uzayın boyutu nedir?

Çözüm: $\{(a, 0, b) : a, b \in \mathbb{R}\} = H$ diyelim. H kümesinin herhangi iki u ve v elemanını göz önüne alalım. $u = (a_1, 0, b_1)$ ve $v = (a_2, 0, b_2)$ biçimindedir. $c \in \mathbb{R}$ için

$$u + cv = (a_1 + ca_2,\ 0,\ b_1 + cb_2)$$

olur. $u + cv \in H$ olduğu apaçıktır. Buna göre H kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt vektör uzayıdır.

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad \text{ve} \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

olmak üzere $\{e_1, e_3\} \subset H$ olduğu apaçıktır. $\{e_1, e_2\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu kolayca görülebilir.

$u \in H$, $u = (a_1, 0, b_1)$ olsun.

$$u = (a_1, 0, b_1) = (a_1, 0, 0) + (0, 0, b_1) = a_1(1, 0, 0) + b_1(0, 0, 1) = u_1e_1 + u_2e_3$$

olduğundan $u \in Sp\{e_1, e_3\}$ dır. Her $u \in H$ için $u \in Sp\{e_1, e_3\}$ olduğundan $H \subseteq Sp\{e_1, e_3\}$ tür.

$\{e_1, e_3\} \subset H$ olduğundan ve alt vektör uzayı toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre kapalı olduğundan e_1, e_3 vektörlerinin lineer bileşimleri de H uzayının elemanıdır. Buna göre $Sp\{e_1, e_3\} \subseteq H$ dir. Sonuç olarak $Sp\{e_1, e_3\} = H$ dir.

Böylece $\{e_1, e_3\}$ kümesinin, H alt vektör uzayının bir tabanı olduğu gösterilmiş oldu. H alt vektör uzayının bir tabanında 2 tane vektör bulunduğundan H alt uzayının boyutu 2 dir.

H alt vektör uzayının başka tabanlarını da bulabilirsiniz. Örneğin, $\{(2,0,3), (-1,0,2)\}$ kü-mesinin de H alt uzayı için bir taban olduğu gösterilebilir. $\alpha_1 = (2,0,3)$, $\alpha_2 = (-1,0,2)$ ve $\{(2,0,3), (-1,0,2)\} = \varphi$ diyelim. $\alpha_1 \neq 0$ dır ve α_2 vektörü α_1 vektörünün lineer bileşimi değildir. Buna göre φ kümesi lineer bağımsızdır.

$\varphi \subset H$ olduğundan ve alt vektör uzayı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalı olduğundan φ kümesinin lineer bileşimleri de H uzayının elemanıdır. Buna göre $Sp\varphi \subseteq H$ dir.

$u \in H$ olsun. u vektörü, $u = (a_1, 0, b_1)$ biçimindedir.

$$u = c_1(2,0,3) + c_2(-1,0,2) \qquad (1)$$

olacak biçimde c_1, c_2 sayılarının varlığı gösterilirse $u \in Sp\varphi$ olduğu gösterilmiş olur. (1) eşitliği,

$$\begin{aligned} 2c_1 - c_2 &= a_1 \\ 3c_1 + 2c_2 &= b_1 \end{aligned} \qquad (2)$$

denklem sistemine denktir. (2) denklem sisteminin katsayılar determinantı sıfırdan farklı olduğundan bu denklem sisteminin bir ve yalnız bir çözümü vardır. a_1 ve a_2 sayılarının her verilişinde c_1, c_2 sayıları bulunabilir. Bu durum, $u \in Sp\varphi$ olduğunu gösterir. Her $u \in H$ için $u \in Sp\varphi$ olduğundan, $H \subseteq Sp\varphi$ dir. Yukarıda, $Sp\varphi \subseteq H$ olduğunu da görmüştük. Buna göre $Sp\varphi = H$ dir.

Böylece φ kümesinin, H uzayının bir tabanı olduğu gösterilmiş oldu. □

8. $Sp\{(3,2,-1)\}$ alt uzayının bir tabanını bulunuz. Bu alt uzayın boyutu nedir? $Sp\{(3,2,-1)\}$ alt uzayı geometrik olarak ne gösterir?

Çözüm: $Sp\{(3,2,-1)\} = H$ diyelim. H kümesi, $\{(3,2,-1)\}$ kümesinin ürettiği alt vektör uzayıdır. $(3,2,-1)$ vektörü sıfırdan farklı bir vektör olduğundan $\{(3,2,-1)\}$ kümesi lineer bağımsızdır. Buna göre $\{(3,2,-1)\}$ kümesi, H alt vektör uzayının bir tabanıdır. Bir tabanında 1 tane vektör bulunduğundan, H alt uzayının boyutu 1 dir.

Geometrik olarak $Sp\{(3,2,-1)\}$ alt uzayı, $\mathbb{R}^3$ uzayında $(0,0,0)$ ve $(3,2,-1)$ noktalarından geçen doğruyu gösterir. □

9. $\{(-3,4), (6,-8)\}$ kümesinin gerdiği $Sp\{(-3,4), (6,-8)\}$ alt vektör uzayının boyutunu bulunuz. $Sp\{(-3,4), (6,-8)\}$ alt uzayı geometrik olarak ne gösterir?

Çözüm: $Sp\{(-3,4), (6,-8)\} = H$ diyelim. H kümesi, $\{(-3,4), (6,-8)\}$ kümesinin ürettiği alt vektör uzayıdır. $(6,-8)$ vektörü $(-3,4)$ vektörünün lineer bileşimi olduğundan

$$Sp\{(-3,4), (6,-8)\} = Sp\{(-3,4)\}$$

olur. Kısaca $Sp\{(-3,4)\} = H$ dır. $(-3,1)$, sıfırdan farklı bir vektör olduğundan $\{(-3,4)\}$ kümesi lineer bağımsızdır. Buna göre $\{(-3,4)\}$ kümesi, H alt vektör uzayının bir tabanıdır. Bir tabanında 1 tane vektör bulunduğundan H alt uzayının boyutu 1 dir.

Geometrik olarak H alt uzayı, $\mathbb{R}^2$ uzayında $(0,0)$ ve $(-3,4)$ noktalarından geçen doğruyu gösterir. $\square$

10. $\{(-1,2,1),(-1,0,2),(3,1,2)\}$ kümesinin gerdiği alt vektör uzayı H ile gösteriliyor. H alt vektör uzayının boyutunu bulunuz. H alt uzayı geometrik olarak ne gösterir?

Çözüm: $\{(-1,2,1),(-1,0,2),(3,1,2)\}$ kümesinin elemanlarını sırasıyla α_1, α_2, α_3 ile gösterelim. $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayının 3 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \det\begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 17$$

tür. $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \neq 0$ olduğundan $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır. Bu küme, H alt vektör uzayını gerdiğinden, H alt vektör uzayının bir tabanı olur. H alt vektör uzayının bir tabanında 3 tane eleman bulunduğundan $boyut H = 3$ tür. H, $\mathbb{R}^3$ uzayının bir alt vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^3$ uzayının boyutu 3 tür. Bir alt uzayın boyutu, asıl uzayın boyutuna eşit ise bu alt uzay, asıl uzaya eşittir. Buna göre $H = \mathbb{R}^3$ tür.

Geometrik olarak, H alt uzayı $\mathbb{R}^3$ uzayını gösterir. $\square$

11. $Sp\{(-2,1,0),(3,0,1),(5,-1,1)\}$ alt vektör uzayının bir tabanını bulunuz. Bu uzayın boyutu nedir?

Çözüm: $\{(-2,1,0),(3,0,1),(5,-1,1)\}$ kümesinin elemanlarını sırasıyla α_1, α_2, α_3 ile gösterelim. $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ kümesi, $\mathbb{R}^3$ uzayının 3 elemanlı bir alt kümesidir.

$$\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \det\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

tür. $\det(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = 0$ olduğundan $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Bu kümenin $\{(-2,1,0),(3,0,1)\}$ alt kümesinin lineer bağımsız olduğu hemen görülebilir (Birinci vektör sıfırdan farklıdır ve ikinci vektör, birinci vektörün lineer bileşimidir.). α_3 vektörü, α_1 ve α_2 vektörlerinin lineer bileşimi olmak zorundadır. $Sp\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} = Sp\{\alpha_1,\alpha_2\}$ olur.

$$Sp\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\} = H$$

diyelim. $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ kümesi, H alt vektör uzayının bir tabanı olur. H alt vektör uzayının bir tabanında 2 tane eleman bulunduğundan $boyut H = 2$ tür. $\square$

12. $\mathbb{R}^4$ uzayında $H = Sp\{(2,6,-6,-7), (2,0,6,3), (0,1,-2,0), (-1,0,-3,-1)\}$ eşitliğiyle verilen H alt uzayının bir tabanını bulunuz.

Çözüm: $(2,6,-6,-7)$, $(2,0,6,3)$, $(0,1,-2,0)$, $(-1,0,-3,-1)$ vektörleri, satır vektörleri olarak yazılarak bulunan matris A olsun. H alt uzayı, A matrisinin satır uzayı ile özdeşlenebilir. Elementer satır işlemlerinin bir matrisin satır uzayını değiştirmediğini biliyoruz. Bu gerçekten yararlanmak için A matrisini satırca indirgeyelim.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -6 & -7 \\ 2 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

dir. S matrisinin dördüncü satırı sıfır vektörüne eşit olduğundan S matrisinin satır uzayı, ilk üç satır vektörünün gerdiği uzaydır. Kısaca

$$H = Sp\{(1,0,3,0), (0,1,-2,0), (0,0,0,1)\}$$

elde edilir. Ayrıca $\{(1,0,3,0), (0,1,-2,0), (0,0,0,1)\}$ kümesi lineer bağımsızdır. Sonuç olarak bu küme, H alt uzayının bir tabanıdır. H alt vektör uzayının bir tabanında 3 tane eleman bulunduğundan $boyut H = 3$ tür. $\square$

13. 3×1 biçimindeki matrislerin kümesi $\mathbb{R}^3_1$ ile gösteriliyor.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a+b+2c \\ 2a-2c \\ 2b+6c \end{bmatrix} : a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

olduğuna göre W alt uzayının bir bazını bulunuz. W alt uzayının boyutunu belirtiniz.

Çözüm: $\begin{bmatrix} a+b+2c \\ 2a-2c \\ 2b+6c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 2a \\ 2b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c \\ -2c \\ 6c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$

olduğundan $W = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ dir. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin lineer bağımlı olduğu ve $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu kolayca görülebilir.

Buna göre $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi W alt uzayı için bir taban olur. $\dim W = 2$ dir. $\square$

14. $\mathbb{R}^3$ uzayının H alt uzayı,

$$H = Sp\{(2,-3,-2),(4,-6,-4),(-6,9,6),(2,1,1),(-2,-5,-4)\}$$

eşitliğiyle veriliyor. $\{(2,-3,-2),(4,-6,-4),(-6,9,6),(2,1,1),(-2,-5,-4)\}$ kümesinin içinden H alt uzayının bir tabanını bulunuz.

Çözüm: $(2,-3,-2)$, $(4,-6,-4)$, $(-6,9,6)$, $(2,1,1)$, $(-2,-5,-4)$ vektörleri sütun vektörleri olarak yazılarak bulunan matris A olsun. Bir matriste yapılan elementer satır işlemlerinin matristeki lineer bağımsız sütunların yerlerini değiştirmediğini biliyoruz. Bu gerçekten yararlanmak için A matrisini satırca indirgeyelim.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 & 2 & -2 \\ -3 & -6 & 9 & 1 & -5 \\ -2 & -4 & 6 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

dir. En sağda bulunan satırca indirgenmiş S matrisinin birinci ve dördüncü sütun vektörleri lineer bağımsızdır. S nin geriye kalan sütun vektörleri bu vektörlerin yanına konulduğunda lineer bağımlı kümeler elde edilir. Buna göre A matrisinin de birinci ve dördüncü sütun vektörleri lineer bağımsızdır. A nın geriye kalan sütun vektörleri bu vektörlerin yanına konulduğunda lineer bağımlı kümeler elde edilir. Buradan A matrisinin birinci ve dördüncü sütun vektörlerine karşılık gelen $(2,-3,-2)$, $(2,1,1)$ vektörlerinden oluşan $\{(2,-3,-2),(2,1,1)\}$ kümesinin, H alt uzayının bir tabanı olduğu anlaşılır. $\square$

15. $\mathbb{R}_1^3$ uzayının H alt uzayı,

$$H = Sp\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ -14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

eşitliğiyle veriliyor. $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ -14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin içinden H alt uzayının bir tabanını (bazını) bulunuz. H alt uzayının boyutu nedir?

Çözüm: $\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ -4 \\ -14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ vektörleri sütun vektörleri olarak yazılarak bulunan matris A olsun. Bir matriste yapılan elementer satır işlemlerinin matristeki lineer bağımsız sütunların yerlerini değiştirmediğini biliyoruz. Bu gerçekten yararlanmak için A matrisini satırca indirgeyelim.

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 12 & -6 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 2 & -2 & 2\\ -7 & -14 & 7 & -6 & 5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=S$$

dir. Sağda bulunan satırca indirgenmiş S matrisinin birinci ve dördüncü sütun vektörleri lineer bağımsızdır. S nin geriye kalan sütun vektörleri bu vektörlerin yanına konulduğunda lineer bağımlı kümeler elde edilir. Buna göre A matrisinin de birinci ve dördüncü sütun vektörleri lineer bağımsızdır. A nın geriye kalan sütun vektörleri bu vektörlerin yanına konulduğunda lineer bağımlı kümeler elde edilir. Buradan A matrisinin birinci ve dördüncü sütun vektörlerine karşılık gelen $\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ -7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ -6\end{bmatrix}$ vektörlerinden oluşan $\left\{\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ -7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ -6\end{bmatrix}\right\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu anlaşılır.

$$\left\{\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ -7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 12\\ -4\\ -14\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -6\\ 2\\ 7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ -6\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -4\\ 2\\ 5\end{bmatrix}\right\}-\left\{\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ -7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ -6\end{bmatrix}\right\}$$

kümesindeki vektörlerin her biri, $\left\{\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ -7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ -6\end{bmatrix}\right\}$ kümesinin lineer bileşimi olduğundan

$$Sp\left\{\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ -7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 12\\ -4\\ -14\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -6\\ 2\\ 7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ -6\end{bmatrix},\begin{bmatrix} -4\\ 2\\ 5\end{bmatrix}\right\}=Sp\left\{\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ -7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ -6\end{bmatrix}\right\}$$

olur. Sonuç olarak $\left\{\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ -7\end{bmatrix},\begin{bmatrix} 5\\ -2\\ -6\end{bmatrix}\right\}$ kümesi, alt uzayının bir tabanıdır. Bir tabanında 2 tane vektör bulunduğundan H alt uzayının boyutu 2 dir. $\square$

MATRİSİN RANKI

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & -3 \\ -2 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$ olsun. A matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş basamak matrisini bulunuz. A matrisinin rankı nedir?

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 10 & 1 \\ -3 & 1 & -7 & -3 \\ -2 & 1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

dır. A matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş basamak matris, $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ matrisidir. Bu matrisi S ile gösterelim. S matrisinin birinci ve ikinci sütunları lineer bağımsızdır. Üçüncü sütun ilk iki sütunun lineer bileşimidir. Dördüncü sütun, ilk iki sütunun lineer bileşimi değildir. Buna göre $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesi S matrisinin sütun uzayının bir tabanıdır. Bu kümede 3 tane eleman bulunduğundan S matrisinin sütun rankı 3 dir. (S matrisinin satırlarının lineer bağımsız olduğu da kolayca görülebilirdi.) Dolayısıyla S matrisinin rankı 3 tür. Elementer satır işlemleri bir matrisin rankını değiştirmediğinden A matrisinin rankı 3 tür. $\square$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 7 & 1 & -13 & 20 \\ 1 & -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin satır uzayı için bir taban bulunuz.

Çözüm: $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 7 & 1 & -13 & 20 \\ 1 & -3 & -5 & 6 \end{bmatrix} \overset{(-1)R_1 \to R_1}{\sim} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & -4 & 5 \\ 2 & 0 & -4 & 6 \\ 7 & 1 & -13 & 20 \\ 1 & -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

$$\underset{\substack{(-7)R_1+R_3 \to R_3 \\ (-1)R_1+R_4 \to R_4}}{\overset{(-2)R_1+R_2 \to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 15 & 15 & -15 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{15}R_3 \to R_3}{\overset{\frac{1}{4}R_2 \to R_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & -4 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (2)R_2+R_1\to R_1 \\ \sim \\ (-1)R_2+R_3\to R_3 \\ 1R_2+R_4\to R_4 \end{array} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Bir matrisin satır uzayı elementer satır işlemlerinde değişmez. En son elde edilen matrisin satır uzayı $Sp\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$ dır.

$$\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}$$

kümesinin lineer bağımsız olduğu da hemen görülmektedir. Öyleyse bu küme A matrisinin satır uzayı için bir taban olur. □

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & -17 & 3 \\ -2 & 1 & -12 & 2 \end{bmatrix}$ olsun. A matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş basamak matrisi bularak A matrisinin satır uzayının bir tabanını elde ediniz.

A^T matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş basamak matrisi bularak A matrisinin sütun uzayının bir tabanını elde ediniz.

Çözüm: $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 & -2 \\ -3 & 1 & -17 & 3 \\ -2 & 1 & -12 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 5 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

dır. A matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş basamak matrisi S ile gösterelim. S matrisinin birinci ve ikinci satırları lineer bağımsızdır. Üçüncü satır sıfırdır. Buna göre S matrisinin satır uzayının bir tabanı $\{[1,0,5,-1], [0,1,-2,0]\}$ dır. Elementer satır işlemleri bir matrisin satır uzayını değiştirmediğinden $\{[1,0,5,-1], [0,1,-2,0]\}$ kümesi, A matrisinin satır uzayının da bir tabanıdır.

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -17 & -12 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. A^T matrisine satırca denk olan satırca indirgenmiş basamak matrisi D ile gösterelim. D matrisinin satır uzayının bir tabanı $\left\{\left[1,0,\frac{1}{8}\right], \left[0,1,\frac{3}{4}\right]\right\}$ tür. Elementer satır işlemleri bir matrisin satır uzayını değiştirmediğinden $\left\{\left[1,0,\frac{1}{8}\right], \left[0,1,\frac{3}{4}\right]\right\}$ kümesi, A^T matrisinin satır uzayının da bir tabanıdır. Dolayısıyla $\left\{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{8} \end{matrix}, \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{matrix}\right\}$ kümesi, A matrisinin sütun uzayının bir tabanıdır.

□

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ matrisinin sütun vektörlerinin içinden bu matrisin sütun uzayının bir tabanını seçiniz.

Çözüm: Bir matriste yapılan elementer satır işlemlerinin matristeki lineer bağımsız sütunların yerlerini değiştirmediğini biliyoruz. Bu gerçekten yararlanmak için A matrisini satırca indirgeyelim.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 6 & 3 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S$$

dir. En sağda bulunan satırca indirgenmiş S matrisinin birinci ve dördüncü sütun vektörleri lineer bağımsızdır. S nin geriye kalan sütun vektörleri bu vektörlerin yanına konulduğunda lineer bağımlı kümeler elde edilir. Buna göre A matrisinin de birinci ve dördüncü sütun vektörleri lineer bağımsızdır. A nın geriye kalan sütun vektörleri bu vektörlerin yanına konulduğunda lineer bağımlı kümeler elde edilir. Buradan A matrisinin birinci ve dördüncü sütun vektörlerine karşılık gelen $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektörlerinden oluşan $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ kümesinin, A matrisinin sütun uzayı için bir taban olduğu anlaşılır. □

MATRİSİN SIFIR UZAYI

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 11 \\ 4 & 3 & 2 & 13 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ olduğuna göre A matrisinin sıfır uzayını bulunuz. A matrisinin sıfırlığı nedir?

Çözüm: (a) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eşitliği,

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 11x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 13x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

denklem sistemine denktir. Bu denklem sisteminin çözüm kümesi, A matrisinin sıfır uzayıdır.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 11 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 13 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur Son matrisin gösterdiği denklem sisteminden, $x_1 = -3t$, $x_2 = t$, $x_3 = -2t$, $x_4 = t$ elde edilir. Buna göre

$$(A \text{ matrisinin sıfır uzayı}) = \left\{ t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

olur. A matrisinin sıfır uzayının boyutu 1 olduğundan bu matrisin sıfırlığı 1 dir.

A matrisi $m \times n$ biçiminde bir matris ise $rank\, A + sıfırlık A = n$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikten $rank A = 4 - 1 = 3$ elde edilir. □

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -6 & -1 \\ 4 & 12 & -8 & -2 \\ -6 & -18 & 12 & 1 \\ 3 & 9 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. A matrisinin sıfır uzayını bulunuz. A matrisinin sıfırlığı nedir?

Çözüm: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eşitliği, $\begin{bmatrix} 3 & 9 & -6 & -1 \\ 4 & 12 & -8 & -2 \\ -6 & -18 & 12 & 1 \\ 3 & 9 & -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineer homojen denklem sistemine denktir. Bu denklem sisteminin genişletilmiş matrisini satırca indirgeyelim.

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 & -6 & -1 & 0 \\ 4 & 12 & -8 & -2 & 0 \\ -6 & -18 & 12 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. En son bulunan satırca indirgenmiş basamak matrisinin gösterdiği denklem sisteminde

$$x_2 = t, \quad x_3 = k$$

diyelim. $x_1 = -3t + 2k$, $x_4 = 0$ elde edilir. Demek ki

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3t+2k \\ t \\ k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3t \\ t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k \\ 0 \\ k \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dir. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denkleminin çözüm uzayı $\mathbf{H}$ olsun. $\mathbf{H} = Sp\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ biçiminde olduğunu gördünüz mü? Böylece $\mathbf{H}$ uzayı belirtilmiş oldu.

$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$ vektörlerinin ikinci ve üçüncü bileşenine dikkat ediniz. $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0$ dır. $\boldsymbol{\alpha}_2$ vektörü, $\boldsymbol{\alpha}_1$ vektörünün lineer bileşimi değildir. Buna göre $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ kümesi lineer bağımsızdır. $\mathbf{H} = Sp\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ olduğu da göz önüne alındığında $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ kümesinin $\mathbf{H}$ alt uzayının bir tabanı olduğu görülür. Bir tabanında 2 tane vektör bulunduğundan $\dim \mathbf{H} = 2$ tür. Öyleyse $sıfırlık A = 2$ tür. □

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 7 & 31 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 19 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -27 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. A matrisinin sıfır uzayını bulunuz. A matrisinin sıfırlığı nedir?

Çözüm: $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ eşitliği, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 7 & 31 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 19 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -27 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ lineer homojen denklem sistemine denktir. Bu denklem sisteminin genişletilmiş matrisi satırca indirgendiğinde

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 7 & 31 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 19 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -27 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğu görülür.

$$x_1 = t, \quad x_3 = k, \quad x_5 = s$$

diyelim. $x_2 = 2k - 3s$, $x_4 = -4s$ elde edilir. Demek ki

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ 2k-3s \\ k \\ -4s \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ denkleminin çözüm uzayı $\mathbf{H}$ olsun. $\mathbf{H} = Sp\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ biçiminde olduğunu gördünüz mü? Böylece $\mathbf{H}$ uzayı belirtilmiş oldu.

$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ vektörlerinin birinci, üçüncü ve beşinci bileşenine dikkat ediniz. $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq 0$ dır. $\boldsymbol{\alpha}_2$ vektörü, $\boldsymbol{\alpha}_1$ vektörünün lineer bileşimi değildir. $\boldsymbol{\alpha}_3$ vektörü, $\boldsymbol{\alpha}_1$ ve $\boldsymbol{\alpha}_2$ vektörlerinin lineer bileşimi değildir. Buna göre $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır. $\mathbf{H} = Sp\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ olduğu da göz önüne alındığında $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3\}$ kümesinin $\mathbf{H}$ alt uzayının bir tabanı olduğu görülür. Bir tabanında 3 tane vektör bulunduğundan $\dim \mathbf{H} = 3$ tür. Öyleyse $sıfırlık A = 3$ tür. $\square$