

YMH 214 SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

1

9.Hafta

LU AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ

LU AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ

LU ayrıştırma yöntemi kısaca;

$$[a][x] = [b]$$

olarak gösterilen doğrusal denklem sisteminin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntemde, $[b]$ eşitlik vektörü üzerinde değişiklik yapılmadan sadece, katsayılar matrisi üzerinde işlemler yapılarak çözüme ulaşılmaya çalışılır. Yöntemde, $[a]$ katsayılar matrisidir. Büyük A şeklinde de gösterilir $[A]$. Alt üçgen matris $[L]=[l]$ ve üst üçgen matris $U=[u]$ olarak iki ayrı çarpan matrise ayrılır. Bu durumda $[a]$

$$A = [a] = [l][u] = LU$$

olarak ifade edilir. Böylece denklem sisteminin tamamı göz önüne alındığında;

$$LU[x] = [l][u][x] = [b]$$

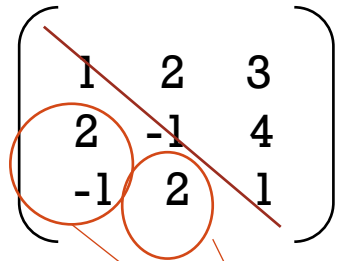
LU AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ

- L ve U matrislerini bulmak için farklı metotlar tercih edilebilir.
- Örneğin bir önceki konuda anlatılan, üst üçgen(Upper triangler matrix) veya alt üçgen matrisin (Lower triangler matrix) oluşturulmasını temel alarak sistemi çözümleyen elementer matris işlemleri, L ve U matrislerini bulmak içinde kullanılabilir.

Soru 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini LU ayrıştırmasına göre çözünüz.

Çözüm için izlenecek adımlar:

1. **adım:** A matrisini satır işlemleri yardımıyla üst üçgen matris haline getirmeliyiz. Böylece LU ayrıştırmasındaki U 'yu bulmuş oluruz.


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Bu elemanlar sıfır
yapılacak

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-2S_1 + S_2 \rightarrow S_2 \\ S_1 + S_3 \rightarrow S_3}]{\text{}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4/5S_2 + S_3 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{pmatrix}$$

Üst üçgen matris yani

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{pmatrix} \text{ bulunmuş olur.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} -2S_1 + S_2 \rightarrow S_2 \\ S_1 + S_3 \rightarrow S_3 \end{matrix}]{\begin{matrix} S_2 \\ S_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{4/5S_2 + S_3 \rightarrow S_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{pmatrix}$$

2. Adım: Alt üçgen matrisi bulmak için birim matrise yukarıda yapılan elementer işlemler uygulanır.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4/5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = L.U \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -4/5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 12/5 \end{pmatrix}$$

LU Ayrıştırma Yöntemi Örnek Soru Çözümü

Soru:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 12 \\ 16 \end{Bmatrix}$$
 denklem sistemlerini LU ayrışımı kullanarak çözünüz.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} -2R_1 + R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}]{\begin{matrix} -3R_1 + R_2 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2/7R_2 + R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -25/7 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2/7 & 1 \end{pmatrix}$$

LU Ayırıştırma Yöntemi Örnek Soru Çözümü

Soru:
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 12 \\ 16 \end{Bmatrix}$$
 denklem sistemlerini LU ayrışımı

kullanarak çözünüz.

1. adım: L ve U matrisleri bulunur.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} -2R_1+R_3 \rightarrow R_3 \end{matrix}]{\begin{matrix} -3R_1+R_2 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2/7R_2+R_3 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -25/7 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2/7 & 1 \end{pmatrix}$$

2. adım:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -25/7 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 12 \\ 16 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2/7 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 12 \\ 16 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 10 \\ k_2 &= 12 - 3 \cdot k_1 = -18 \\ k_3 &= 16 - 2 \cdot k_1 + 2/7 \cdot k_2 = -0.5714 \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -18 \\ -0.51714 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & -25/7 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -18 \\ -0.51714 \end{pmatrix}$$

$$2*X+3*Y+4*Z=10$$

$$X=0.9775$$

$$-7*Y-4*Z=-18$$

$$Y=2.4886$$

$$-25/7*Z=-0.51714$$

$$Z=0.1448$$

Matlab İçin Örnek Soru Çözümü

Soru: $[A]=[L].[U]$

$$[A]\{x\}=\{b\}$$

$$[L][U]\{x\}=b$$

$$[U]\{x\}=\{d\}$$

$$[L]\{d\}=\{b\}$$

Yukarıda verilen önermelere aşağıdaki denklem sistemini LU ayrışımı kullanarak Matlabda çözünüz

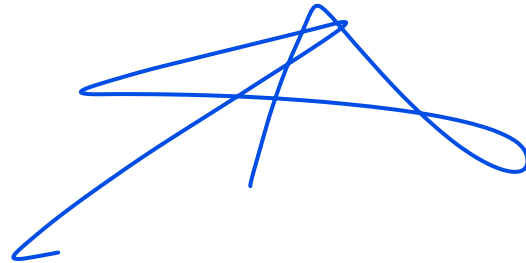
Matlab İçin Örnek Soru Çözümü

SORU:
$$\begin{pmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 7.85 \\ -19.3 \\ 71.4 \end{pmatrix}$$
 denklem sistemini LU ayrışımı

kullanarak Matlabda çözünüz.

Matrisler için Matlab Komutları

```
clear all;close all;clc  
A=[3 -0.1 -0.2;0.1 7 -0.3;0.3 -0.2 10]  
b=[7.85;-19.3;71.4]  
[L U]=lu(A)  
d=L\b  
x=U\d
```



Program Çıktısı

A =

3.0000	-0.1000	-0.2000
0.1000	7.0000	-0.3000
0.3000	-0.2000	10.0000

b =

7.8500
-19.3000
71.4000

L =

1.0000	0	0
0.0333	1.0000	0
0.1000	-0.0271	1.0000

U =

3.0000	-0.1000	-0.2000
0	7.0033	-0.2933
0	0	10.0120

d =

7.8500
-19.5617
70.0843

x =

3.0000
-2.5000
7.0000