**Olasılık ve Türleri**

Bir deneyde herhangi bir olayın olasılığı, söz konusu olayın olması için elverişli sonuçların sayısı, mümkün tüm sonuçların sayısına bölünerek elde edilir. Bir A olayının olasılığı $P(A)$ ile gösterilir. Buna göre;

$$P(A) = \frac{ESS}{MSS}$$

olur. ESS sıfırdan küçük, MSS'den de büyük olmayacağına göre, $P(A)$ da, sıfırdan küçük 1'den büyük olamaz. Yani

$$0 < ESS < MSS$$

dir. Buna göre, herhangi bir A olayının olasılığı 0 ile 1 arasında $(0 \le P(A) \le 1)$ yüzdelik bir rakam olarak karşımıza çıkar.

**Örnek :** Zar atma deneyinde, A olayı: çift sayı gelmesi olsun. Bunun için 2, 4 ve 6 sonuçları olmak üzere elverişli 3 sonuç vardır. mümkün tüm sonuçların sayısı ise 6'dır. O halde;

$$P(A) = \frac{ESS}{MSS} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

**Örnek :** Hilesiz madeni bir paranın iki defa atılması deneyini göz önüne alalım. Burada örnek uzayı, yani mümkün tüm haller;

$$E = \{YY,\ YT,\ \ TY,\ TT\}$$

olup bu örnek uzayında bir *C* olayı "iki yazı gelmesi biçiminde verilsin. Buna göre bu *C* olayının olması için elverişli bir sonuç vardır (*YY* sonucu). Mümkün tüm sonuçların sayısı ise 4'tür. Buradan *C*'nin olasılığı;

$$P(C) = \frac{1}{4}$$

olarak bulunur.

*A* ve *B* olayları verilmişken, (*A* veya *B*) olayı, $A \cup B$ ile (*A* ve *B*) olayı, $A \cap B$ ile gösterilir. (*A* veya *B*) olayının olasılığı; $P(A \cup B)$ ile (*A* ve *B*) olayının olasılığı, $P(A \cap B)$ ile gösterilir. Bağımlı olaylar durumunda olaylardan birinin olması şartı altında diğerinin olması olasılığı, şartlı olasılık adını alır. *A* ve *B* bağımlı olaylar olsun. *B* olayının gerçekleşmiş olması halinde *A*'nın olasılığı (şartlı olasılık), $P(A|B)$ ile gösterilir ve

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

şeklinde hesaplanır. Burada $P(A\cap B)$, *A* ve *B*'nin aynı anda meydana gelme olasılığıdır. Eğer *A* ve *B* olayları bağımsız ise;

$$P(A|B)=P(A)$$

olur. Yani *B*'nin gerçekleşmiş olması şartı *A*'nın olasılığını etkilemez.

**Örnek :** Bir torbada 3'ü beyaz 2'si siyah 5 küçük top, 4'ü beyaz, 2'si siyah 6 büyük top vardır. Bu torbadan rastgele bir top çekiliyor. Çekilen topun küçük olduğu bilindiğinde bunun beyaz olması olasılığı nedir?

**Çözüm:**

*A* olayı : Çekilen topun beyaz olması

*B* olayı : Çekilen topun küçük bir top olması

$A\cap B$ olayı : Çekilen top hem beyaz hem de küçük olsun.

$$P(A\cap B)=\frac{3}{11} \qquad P(B)=\frac{5}{11}$$

Buradan şartlı olasılık;

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{11}}{\frac{5}{11}}$$

$$P(A|B)=\frac{3}{5}$$

olarak bulunur. Burada yeni bir *C* olayı tanımlayalım.

*C* olayı : Çekilen topun siyah olması ise

$A\cap C$ olayı : Çekilen topun hem beyaz hem siyah olması olur. torbada hem siyah hem beyaz top olmadığına göre $A \cap C$ boş kümedir. Yani *A* ve *C* olayları ayrık olaylardır. Dolayısıyla;

$$P(A \cap C) = 0$$

olur.

$A|C$ olayı: Çekilen topun siyah olduğu bilindiğinde beyaz olması.

Bu da boş bir kümedir. Bunun da olasılığın 0 olacağı tabiidir. Fakat bunu şartlı olasılık tanımından hareketle elde edelim.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{0}{\frac{4}{11}} = 0$$

**Çarpma ve Toplama Kuralları**

*A* ve *B* olayları verildiğinde, iki durum söz konusu olabilir.

$A \cap B$ olayı : *A* ve *B*'nin birlikte olması olayı

$A \cup B$ olayı : *A* veya *B*'nin olması olayı

Burada birinci olayın olasılığı olasılıkların çarpma kuralı ile, ikinci olayın olasılığı ise olasılıkların toplama kuralı ile bulunur;

Çarpma Kuralı $\quad P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = P(B).P(A|B)$

Toplama Kuralı $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

olarak yazılır. Eğer *A* ve *B* olayları bağımsız iseler;

$$P(B|A) = P(B)$$

olacağından, çarpa kuralı;

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

halini alır. Öte yandan *A* ve *B* olayları ayrık iseler;

$$A \cap B = \varnothing \quad P(A \cap B) = 0$$

olacağından, toplama kuralı da;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

şeklinde sadeleşir.

**Örnek:** İçinde 6 beyaz ve 7 siyah top bulunan torbadan iadesiz olarak iki top çekiliyor.

A olayı : Çekilen ilk topun beyaz olması

B olayı : İkinci topun siyah olması

$A \cap B$ olayı : Birinci topun beyaz ikincinin siyah olması

şeklinde tanımlanabilir. *A* ve *B* olayları bağımlı olaylardır. Bu $A \cap B$ olayının olasılığını bağımlı olayların olasılık çarpım kuralından;

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{6}{13}.\frac{7}{12} = \frac{7}{26} = 0.27$$

olarak bulunur. Eğer çekilen toplar tekrar torbaya iade ediliyor olsaydı, *A* ve *B* olayları bağımsız olacaklardır. Bu durumda;

$$P(A \cap B) = P(A).P(B) = \frac{7}{13}.\frac{6}{13} = \frac{42}{169} = 0.25$$

olarak olasılık bulunurdu.

**Örnek:** 6 beyaz 7 siyah top bulunan torbadan arka arkaya iadesiz iki top çekilişi deneyinde yine;

*A* olayı : Çekilen ilk topun beyaz olması

*B* olayı : İkinci topun siyah olması

olsun. İadesiz seçimden dolayı *A* ve *B* olayları bağımlıdır. Burada;

$A \cup B$ olayı : Çekilen ilk topun beyaz veya ikinci topun siyah olması olarak tanımlanır. Bu olayın olasılığını toplama kuralından;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{13} + \frac{7}{13} - \frac{6}{13}.\frac{7}{12} = \frac{114}{156} = 0.73$$

buluruz. Topların çekilişi iadeli olsaydı *A* ve *B* olayları bağımsız olaylar olacaktı. Bu durumda $A \cup B$ olayının olasılığı;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{13} + \frac{7}{13} - \frac{6}{13} \cdot \frac{7}{13} = \frac{127}{169} = 0.75$$

bulunur.

**Örnek :** Bir zar atma deneyinde *A* olayı çift gelmesi, *B* olayı tek gelmesi olsun. Bu durumda $A \cap B = \varnothing$ olduğundan $P(A \cap B) = 0$ ve;

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

bulunur. Yani zarın atılışında tek veya çift gelmesi kesin bir olaydır. Bir *A* olayı;

$$A \cap B_1,\ A \cap B_2, \ldots, A \cap B_r$$

gibi parçalardan oluşuyor ise;

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_r)$$

ifadesine *A*'nın toplam olasılığı denir. Burada kesişimler şartlı olasılık ile;

$$P(A) = P(A|B_1) + P(A|B_2) + \cdots + P(A|B_r)$$

yazılabilir. Buradan bir $B_j$ olayı verildiğinde *A*'nın şartlı olasılığı;

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum P(A|B_j)P(B_j)}$$

veya

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)}$$

olur ki bu ifade *Bayes Teoremi* olarak bilinir. Teoremi kesişimler cinsinden;

$$P(B_j|A) = \frac{P(A \cap B_j)}{\sum P(A \cap B_j)} = \frac{P(A \cap B_j)}{P(A)}$$

olarak da yazabiliriz.

**Örnek:** Bir sınıfta 20 kız, 30 erkek öğrenci mevcuttur. Kızların 10'u İngilizce, 7'si Fransızca, 3'ü de Almancayı yabancı dil olarak seçerken erkek öğrencilerin 15'i İngilizceyi, 10’u Fransızcayı, 5’i de Almancayı seçmiştir. Seçilen bir öğrencinin kız olması halinde yabancı dil olarak İngilizceyi seçmiş olması ihtimalini bulalım.

**Çözüm:**

| | |
|---|---|
| $A$ olayı | : Seçilen öğrencinin kız olması |
| $B_1$ olayı | : Seçilen öğrencinin yabancı dilinin İngilizce olması |
| $B_2$ olayı | : Seçilen öğrencinin yabancı dilinin Fransızca olması |
| $B_3$ olayı | : Seçilen öğrencinin yabancı dilinin Almanca olması |
| $B_1 \mid A$ olayı | : Kız olması halinde yabancı dilinin İngilizce olması |
| $A \mid B_1$ olayı | : Yabancı dilinin İngilizce olması halinde kız olması |
| $A \mid B_2$ olayı | : Yabancı dilinin Fransızca olması halinde kız olması |
| $A \mid B_3$ olayı | : Yabancı dilinin Almanca olması halinde kız olması |

Bu olayların olasılıkları sırasıyla;

$$P(A) = \frac{20}{50} = 0.40$$

$$P(B_1) = \frac{25}{50} = 0.50$$

$$P(B_2) = \frac{17}{50} = 0.34$$

$$P(B_3) = \frac{8}{50} = 0.16$$

$$P(A \mid B_1) = \frac{10}{20} = 0.50$$

$$P(A \mid B_2) = \frac{7}{20} = 0.35$$

$$P(A \mid B_3) = \frac{3}{20} = 0.15$$

$$P(B_1 \mid A) = ?$$

Bu verilerden $P\left(B_1 | A\right)$ olasılığı:

$$P\left(B_1 | A\right) = \frac{P\left(A | B_1\right) P\left(B_1\right)}{\sum P\left(A | B_j\right) P\left(B_j\right)}$$

$$= \frac{(0.50).(0.50)}{\left[(0.50).(0.50) + (0.35).(0.34) + (0.15).(0.16)\right]}$$

$$= 0.64$$

olarak bulunur.