İNVERS MATRİS BULMA YÖNTEMLERİ

1. Adjoint Matris Yardımıyla İnvers Matris Hesabı

Adjoint matrisin 1 nolu özelliğini göz önüne alırsak

$$A(adjA) = |A| I_n$$

eşitliğinde $\det A \neq 0$ olmak üzere bu eşitliğin her iki tarafını A^{-1} ile ma

$$A^{-1} A(adjA) = A^{-1}|A| I_n$$

$$\Rightarrow \underbrace{A^{-1} A}(adjA) = A^{-1}|A|.I_n$$

$$\Rightarrow I_n (adjA) = A^{-1}|A|.I_n$$

$$\Rightarrow adjA = |A| A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$$

Formülde de görüldüğü gibi matrisin tersinin mevcut olması determinantının 0 dan farklı olmasıdır. Aksi takdirde matrisinin inversi mev

Örnek 9.20.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin inversini bulalım.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -3+4-(1+18) = 1-19 = -18, \qquad -18 \neq 0 \text{ olduğundan inversi bulunur.}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9-2) = -7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{18}\begin{bmatrix} -1 & -7 & 2 \\ -7 & 5 & -4 \\ 3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$$

2. Elemanter Operasyonlar ile İnvers Matris Bulma:

A determinantı 0 dan farklı herhangi bir karesel matris I_n de A nın mertebesinde birim matris olmak üzere A ve I_n matrislerini aşağıdaki gibi matris tablosuna yerleştirelim.

$$\left[A \,\vdots\, I_n\right] \approx \overset{H}{\ldots\ldots} \approx \left[I_n \,\vdots\, A^{-1}\right]$$

Bu matris tablosuna bir dizi satır operasyonu sonucunda bu tablo ikinci taraftaki matris tablosuna dönüştürülerek A^{-1} tablosu bulunmuş olacaktır.

Örnek 9.21.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} H_{21^{(-3)}} \\ \approx \\ H_{21^{(-2)}} \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$H_2(-1/6)\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} H_{12^{(-2)}} \\ \approx \\ H_{22^{(3)}} \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\approx}{H_{2}^{(-1)}}\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1 \end{array}\right] \underset{H_{23}^{(-1/2)}}{\overset{H_{13}^{(-1/3)}}{\approx}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/6 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1 \end{array}\right]$$

Lineer Denklem Sistemleri ve Çözüm Metodları

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in R$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ler bilinmeyenler olmak üzere;

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (1)$$

sistemine n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan lineer denklem sistemi denir. Bu denklem sisteminde

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ile katsayılar matrisini,

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ile eşitliğin sağındaki sabitlerin kolon (sütun) matrisini,

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ile bilinmeyenlerin kolon (sütun) matrisini gösterirsek,

Buna göre (1) nolu sistemi matris formunda kısaca

$$AX = B \qquad (2)$$

şeklinde gösterebiliriz.

LİNEER DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

1. Katsayılar Matrisinin İnversi (Tersi) Yöntemi İle Çözümü

Verilen denklem sistemi (2) nolu eşitlikte olduğu gibi matris formunda yazıp buradaki katsayılar matrisi olan A matrisinin inversi mevcut ise bu invers matris ile (2) nolu eşitliğin her iki tarafını soldan matris çarpımına tabi tutarak

$$AX = B$$

$$\Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow I_n X = A^{-1}B$$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$ formülü elde edilir.

Örnek 9.22.

$$2x_1 + x_2 - x_3 = -1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3$$

denklem sistemini çözünüz.

Çözüm:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B}$$

A nın determinantına bakılır, eğer sıfırdan farklı ise inversi alınır ve $A^{-1}.B = X$ e uygulanır.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 11$$

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-4 \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1$$

$$X=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 7 & -3\\ -4 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 3\end{bmatrix}\Rightarrow X=\frac{1}{11}\begin{bmatrix}0\\ 11\\ 22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

2. Cramer Kuralı ile Lineer Denklem Sistemlerinin Çözümü

Bu kural ile bir denklem sistemini çözmek için (1) nolu denklem sisteminin katsayıları matrisinin determinantı 0 dan farklı olmak üzere bilinmeyenler aşağıdaki orantılar yardımıyla hesaplanır.

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n&=b_n\end{aligned}\right\}$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\ldots a_{1n}\\ b_2 & a_{22}\ldots a_{2n}\\ b_n & a_{n2}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\ldots a_{1n}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\ldots a_{2n}\\ a_{n1} & b_n & a_{n3}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|},\ \ldots,\quad x_n=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots b_1\\ a_{21} & a_{22}\ldots b_2\\ . & . \quad .\\ . & . \quad .\\ a_{n3} & a_{n2}\ldots b_n\end{vmatrix}}{|A|}$$

Örnek 9.23.

$$\begin{aligned}x_1-2x_2+3x_3&=-1\\ 2x_1+x_2-2x_3&=-5\\ x_1+5x_2-x_3&=2\end{aligned}$$ denklem sistemini çözünüz.

Çözüm:

$$A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 5 & -1\end{vmatrix}\Rightarrow \det A=36$$

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -2 & 3\\ -5 & 1 & -2\\ 2 & 5 & -1\end{vmatrix}}{36}=-2,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & -5 & -2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{36}=1,\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 2 & 1 & -5\\ 1 & 5 & 2\end{vmatrix}}{36}=1$$