Gamma dağılımı:

Tanım : $\forall n > 0$ *için tanımlanan Gamma fonksiuonu aşağıdaki gibidir.*

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}\, e^{-x} dx$$

$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) bulunur. n\ tamsayı\ ise$

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)\ldots\Gamma(1)$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$$

ve böylece

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

elde edilir. Ayrıca

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma(k)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ dır.$$

Tanım : Bağımsız tesadüfi değişkenler $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \text{Ü}stel(\lambda)$ olmak üzere

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

Tesadüfi değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

verildiğinde X'e Gamma tesadüfi değişkeni f(x)' e de X' in olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Ve $X \sim Gamma(n, \lambda)$ ile gösterilir. Gamma dağılımının kullanım alanı oldukça geniştir.

Beklenen Değer ve Varyans :

$$E(X) = \int_{DX} x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} \frac{x\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} dx$$

Pay ve payda $n\lambda$ ile $çarpılırsa$

$$E(X) = \frac{n}{\lambda} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x\lambda(\lambda x)^n e^{-\lambda x}}{\Gamma(n+1)} dx}_{1} \quad = \frac{n}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{DX} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{x^2 \lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} dx$$

pay ve $payda$ $n(n+1)\lambda^2 ileçarpılırsa,$

$$E(X^2) = \frac{n(n+1)}{\lambda^2} \underbrace{\int_{0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{n+1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n+2)!} dx}_{1}$$

$$= \frac{n(n+1)}{\lambda^2}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{n(n+1)}{\lambda^2} - \frac{n^2}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}$$

İkinci yol

$i = 1,2,\dots,n$ *için bağımsız tesadüfi değişkenler* $X_i \sim \text{üstel}(\lambda)$ *ve*

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Alındığında $E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i)$

$$= E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

$$= \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \cdots + \frac{1}{\lambda} = \frac{n}{\lambda}$$

ve

$$Var(X) \quad = \quad Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \cdots + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{n}{\lambda^2}$$

bulunmuş olur.

Moment Çıkaran Fonksiyon

$i = 1,2,\dots,n$ $için\ bağımsız\ tesadüfi\ değişkenler\ X_i \sim Üstel(\lambda)$ ve

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$alındığında\ X \sim Gama(\lambda) olur.$

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

$$= E(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots . e^{tX_n})$$

$$= E(e^{tX_1}) E(e^{tX_2}) \dots . E(e^{tX_n})$$

$$= M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t)$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \dots \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$$

Gamma Dağılımı ile Üstel, Erlang ve Ki Kare Dağılımı

Özel olarak $\boldsymbol{f(x) fonksiyonunda}$,

1) $n = 1$ $alınırsa\ X\ tesadüfi\ değişkeni$ $üstel\ dağılıma\ sahip\ olur.$

$$X \sim üstel(\lambda)$$

2) $\forall n \epsilon Z^+ iken\ X\ tesadüfi\ değişkeni\ erlang\ dağılımına\ sahip\ olur.$

$$X \sim Erlang(n, \lambda)$$

olarak gösterilir X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda (\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} &, \quad x > 0 \\ 0 &, \quad d.d \end{cases}$$

Olur. Dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{-\mu x} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(\mu x)^i}{i!} & , \quad x > 0 \\ 1 & , \quad x \to \infty \end{cases}$$

olur.

3) $n = \frac{k}{2} ve\ \lambda = \frac{1}{2} alınırsa$ X tesadüfi değişkeni Ki-kare dağılımına sahip olur.

$$X \sim X_k^2$$

Örnek : Bir süpermarkete gelen müşterilerin gelişler arası süreleri dakikada 0,4 ortalama ile üstel dağılıma uymaktadır. Buna göre,

a) 2.müşterinin 1.dakika içinde gelmesi olasılığı nedir?

b) 5.müşterinin kaç dakika içinde gelmesi beklenir?

Çözüm.

a) A: "2.müşterinin 1.dakikada gelmesi" olayını tanımlayalım.

i. müşterinin geliş süresi T_i olmak üzere ve 1.müşterinin geliş süresi $T_1 \sim Üstel(0{,}4)$

1.müşterinin geliş anı ile 2.müşterinin geliş anı arasındaki süre de $T_2 \sim Üstel(0{,}4)$ olmak üzere,

2.müşterinin geliş anına kadar geçen sürede $t_2 = T_1 + T_2 ve\ t_2 \sim Gamma(2; 0{,}4)$ olur. t_2 tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu da.

$$f_{t_2}(x) = \begin{cases} \frac{(0{,}4)(0{,}4)^{2-1} e^{-0{,}4x}}{\Gamma(2)} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.d \end{cases}$$

$$P(A) = \int_0^1 (0{,}4)(0{,}4x) e^{-0{,}4x} dx$$

$$= 0{,}0615 \ bulunur$$

c) 5.müşterinin geliş anı 5 müşterinin gelişler arası sürelerinin toplamına eşittir, yani

$$t_5 = T_1 + T_2 + \cdots + T_5$$

$$E(t_5) = E(T_1 + T_2 + \cdots + T_5)$$

$$E(T_1) + E(T_2) + \cdots + E(T_5)$$

$$= \frac{1}{0{,}4} + \frac{1}{0{,}4} + \cdots + \frac{1}{0{,}4}$$

$$= 12{,}5 \ dakika \ içinde \ gelmesi \ beklenir.$$

Örnek : Bir orijinal birde yedek üniteden oluşan bir sistemin ömrünü (ay cinsinden) X tesadüfi değişkeni ile gösterelim. X' in olasılık fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-\frac{x}{2}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Olarak tanımlı ise, bu sistemin en az 15 ay boyunca çalışma olasılığı nedir?

Çözüm. Bir orijinal birde yedek üniteden oluşan bir sistemin ömrünün 15 ay ve daha fazla olması olasılığını bulmak için özelikle sistemin ömrüne ait olasılık yoğunluk fonksiyonunda verilen c sabiti bulunur.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\infty} f(x)dx$$

$$0$$

$$c\int_{0}^{\infty} xe^{-\frac{x}{2}}dx = 1$$

Kısmi integral alınırsa $u = x \ ve \ dv = e^{-x/2}dx \ alınır \ ise$

$$c\left[-2xe^{-\frac{x}{2}} + 4e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{\infty} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

Bulunur. Olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Olarak bulunur. Bu dağılım $\lambda = \frac{1}{2} ve \ n = 2 \ olan \ Gamma \ dağılımına \ sahiptir.$

İstenen olasılık,

$$P(X \geq 15) = \int_{15}^{\infty} \frac{1}{4}xe^{-x/2}dx$$

dir. Bu olasılık için kısmi integral alınırsa

$$P(X \geq 15) = e^{-\frac{15}{2}}\left(\frac{15}{2} + 1\right)$$

$$P(X \geq 15) = \frac{17}{2}e^{-\frac{15}{2}} \cong 0{,}0047$$

bulunur.