

# YMH 214 SAYISAL ANALİZ

**Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ**

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

1

## 7.Hafta

# LİNEER (DOĞRUSAL) DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

# Lineer Denklemlerin Çözümü

## SAYISAL YÖNTEMLER:

- ❖ Jacobi Iteration Yöntemi
- ❖ Gauss Seidel Yöntemi

# Jacobi Iteration Yöntemi

- Toplam adımlarla yineleme yöntemi olarak ta bilinir.
- $Ax=b$  şeklinde yazılan denklemlerin çözmede kullanılan sayısal yöntemler yaklaşımıdır.
- Örneğin iki bilinmeyenli bir denklem ele alalım.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

- Denklemler tekrar düzenlenirse (bilinmeyenler yalnız bırakılırsa)
- 1.denklemden  $x_1$ , 2.denklemden  $x_2$  yalnız bırakılırsa;

$$x_1 = (c_1 - a_{12}x_2) / a_{11} \quad (1)$$

$$x_2 = (c_2 - a_{21}x_1) / a_{22} \quad (2)$$

# Jacobi Iteration Yöntemi

- Jacobi iterasyonu bilinmeyenler için bir tahmin ile başlar.
- Çözüm için başlangıç  $x_1$  ve  $x_2$  değerleri verilir.
- Verilen bu başlangıç değerleri 1 ve 2 nolu denklemde yerine yazılır.
- Elde edilen yeni  $x_1$  ve  $x_2$  değerleri bir sonraki iterasyonda tekrar 1 ve 2 nolu denklemde yerine yazılır ve durdurma kriterine kadar bu tekrarlama devam eder.
- Durdurma kriteri olarak ya iterasyon sayısı ya da hata sınırlaması kullanılır.

$$\left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right| < \varepsilon \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

# Jacobi Iteration Yöntemi

**Sorul:**  $8x+3y=8$

$$4x-9y=-12$$

denklemlerini Jacobi İterasyon yöntemiyle  $x=0$  ve  $y=0$  başlangıç koşuluyla 4 iterasyonda çözünüz.

Çözüm için izlenecek yol:

1. Birinci denklemde  $x$ , ikinci denklemde  $y$  yalnız bırakılır.

$$x=(8-3y)/8$$

$$y=(4x+12)/9$$

2.  $x$  ve  $y$  için verilen başlangıç değerleri( $x=0$  ve  $y=0$ ) bu denklemlere yazılır ve yeni  $x$  ve  $y$  değeri bulunur.

# Jacobi Iteration Yöntemi

1. iterasyon:

$$x=(8-3y)/8$$

$$x=(8-3*0)/8=1$$

$$y=(4x+12)/9$$

$$y=(4*0+12)/9=1.333$$

- Yeni x ve y değerleri  $x=1$ ,  $y=1.333$

2. iterasyon:

$$x=(8-3y)/8$$

$$x=(8-3*1.333)/8=0,50012$$

$$y=(4x+12)/9$$

$$y=(4*1+12)/9=1.777$$

- Yeni x ve y değerleri  $x=0,50012$   $y=1.777$

# Jacobi Iteration Yöntemi

3. iterasyon:

$$x=(8-3y)/8$$

$$x=(8-3* 1.777) /8=0.3336$$

$$y=(4x+12)/9$$

$$y=(4* 0,50012 +12)/9=1.555$$

- Yeni x ve y değerleri  $x=0,3336$   $y=1.555$

- 4. iterasyon:

$$x=(8-3y)/8$$

$$x= (8-3*1.555)/8=0,4168$$

$$y=(4x+12)/9$$

$$y=(4*0.3336+12)/9=1.4816$$

- Elde edilen x ve y değerleri  $x=0,4168$   $y=1.4816$



# Jacobi Iteration Yöntemi

**Soru2:**  $5x+3y+2z=8$   
 $3x-2y-4z=16$   
 $-4x+5y+3z=20$

denklemlerini Jacobi İterasyon yöntemiyle iterasyonda çözünüz.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ başlangıç koşuluyla 2}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

# Jacobi Iteration Yöntemi

**Çözüm:** Çok denklemlı problemlerin çözümünde, değişkenlerin katsayılarıyla oluşturduğumuz matriste dikkat edilmesi gereken husus:

- ❖ Her sütunda mutlak değerce en büyük sayıyı, köşegene getirmemiz gerekir. Verilen problemde, bu kuralı sağlamak için 2. ve 3. satırın yerini değiştirdik.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

- ❖ Birinci denklemde x, ikinci denklemde y, üçüncü denklemde z yalnız bırakılır.

# Jacobi Iteration Yöntemi

- $x = (8 - 3y - 2z) / 5$   
 $y = (20 + 4x - 3z) / 5$   
 $z = (3x - 2y - 16) / 4$

1. İterasyon

$$x = (8 - 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0) / 5 = 1.6$$

$$y = (20 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0) / 5 = 4$$

$$z = (3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 16) / 4 = -4$$

2. İterasyon

$$x = (8 - 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-4)) / 5 = 0.8$$

$$y = (20 + 4 \cdot 1.6 - 3 \cdot (-4)) / 5 = 7.68$$

$$z = (3 \cdot 1.6 - 2 \cdot 4 - 16) / 4 = -4.8$$

# Jacobi İterasyon Yöntemi Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc
fprintf('Jacobi İterasyon yöntemini kullanarak x^2-2*x-y=0.5 ve x^2+4*y^2=4 denklemlerinin köklerini bulma \n');
x0=0;
y0=0;
E=1.0E-4;
fprintf('i      x1      y1      errorx      errory      \n')
for i=1:100
    x1=(x0^2-y0+0.5)/2;
    y1=sqrt((4-x0^2)/4);
    errorx=abs(x1-x0);
    errory=abs(y1-y0);
    fprintf('%4.1f    %7.4f    %7.4f    %7.4f    %7.4f\n',i,x1,y1,errorx,errory);
    if abs(x1-x0)<E & abs(y1-y0)<E
        break;
    else
        x0=x1;
        y0=y1;
    end
end
disp('Denklemin kökleri');
disp([x1,y1])
```

# Program Çıktısı

---

Jacobi İterasyon yöntemini kullanarak  $x^2-2x-y=0.5$  ve  $x^2+4y^2=4$  denklemlerinin köklerini bulma

i	x1	y1	errorx	errory
1.0	0.2500	1.0000	0.2500	1.0000
2.0	-0.2188	0.9922	0.4688	0.0078
3.0	-0.2222	0.9940	0.0034	0.0018
4.0	-0.2223	0.9938	0.0002	0.0002
5.0	-0.2222	0.9938	0.0001	0.0000
6.0	-0.2222	0.9938	0.0000	0.0000

Denklemin kökleri

-0.222216524323657    0.993809686442584

# Gauss Seidel Yöntemi

- Gauss-Seidel yönteminde, iterasyonlarda her değişkenin hesaplanmış değeri diğer değişkenlerin hesaplanması için kullanılarak Jacobi tekrarlama yöntemine göre yakınsama hızlandırılmıştır.
- Yöntemde ilk olarak verilen başlangıç şartları için ilk değişkenin değeri hesaplanır.
- İkinci, üçüncü ve diğer değişkenler için önceki işlemlerde bulunan değerler kullanılır. Eğer başlangıç değeri verilmemişse, ilk değerler olarak sıfır alınabilir.

# Gauss Seidel Yöntemi

Problemın Çözümü İçin İzlenecek Adımlar:

1. Her satırda köşegen deki eleman mutlak değerce en büyük olmalıdır. Değilse satırlar arası yer değıştirme yapılmalıdır.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$2 \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

# Gauss Seidel Yöntemi

Problemin Çözümü İçin İzlenecek Adımlar:

3. Birinci denklemde x, ikinci denklemde y, üçüncü denklemde z yalnız bırakılır.

$$x = (8 - 3y - 2z) / 5$$

$$y = (20 + 4x - 3z) / 5$$

$$z = (3x - 2y - 16) / 4$$

4. Jacobi iterasyondan farklı olarak başlangıç değerleri başlangıçta verilen x, y, z değerleri tüm denklemlerde aynı anda yerine konularak değil, sadece ilk denklemde yerine konulur. İlk denklemde bulunan x değeri, ikinci denklemde yerine konulur. İkinci denklemde elde edilen y değeri ise üçüncü denklemde yerine konulur.

1. Her iterasyonda bir önceki denklemde bulunan yeni x, y veya z değerleri bir sonraki adımda yerine konulur.



# Gauss Seidel Yöntemi

**Soru2:**

$$5x+3y+2z=8$$

$$3x-2y-4z=16$$

$$-4x+5y+3z=20$$

denklemlerini Jacobi İterasyon yöntemiyle iterasyonda çözünüz.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

başlangıç koşuluyla 2

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 16 \end{bmatrix}$$

# Gauss Seidel Yöntemi

$$x=(8-3y-2z)/5$$

$$y=(20+4x-3z)/5$$

$$z=(3x-2y-16)/4$$

1. İterasyon

$x=0, y=0, z=0$  başlangıç değerleri ilk denklemde yerine yazılır.

$$x=(8-3*0-2*0)/5=1.6$$

İkinci denklemde  $x$  yerine 1.6 yazılır.

$$y=(20+4*1.6-3*0)/5=5.28$$

Üçüncü denklemde  $x$  yerine 1.6,  $y$  yerine 5.28 yazılır.

$$z=(3*1.6-2*5.28-16)/4=-5.44$$

Yeni değerler  $x=1.6$   $y=5.28$   $z=-5.44$

# Gauss Seidel Yöntemi

$$x=(8-3y-2z)/5$$

$$y=(20+4x-3z)/5$$

$$z=(3x-2y-16)/4$$

## 2. İterasyon

$x=1.6$ .  $y=5.28$   $z=-5.44$  ilk denklemde yerine yazılır.

$$x=(8-3*5.28-2*(-5.44))/5=0.608$$

İkinci denklemde  $x$  yerine 0.608 yazılır.

$$y=(20+4*0.608-3*(-5.44))/5=7.75$$

Üçüncü denklemde  $x$  yerine 0.608,  $y$  yerine 7.75 yazılır.

$$z=(3*0.608-2*7.75-16)/4=-7.419$$

Yeni değerler  $x=0.608$   $y=7.75$   $z=-7.419$

# Gauss Seidel Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc;format('long','g');
fprintf('Gauss Seidel yöntemini kullanarak  $3x-0.1y-0.2z=7.85$     $0.1x+7y-0.3z=-19.3$     $0.3x-0.2y+10z=71.4$  denklemlerinin \n');
fprintf('köklerini bulma -Bitirme şartı x in hata oranı(errorx)<0.01 ise bitir \n');
i=1;
y(i)=0; z(i)=0;x(i)=0;
errorx=9999;
while errorx(i)>=0.01
    x(i+1)=(7.85+0.1*y(i)+0.2*z(i))/3;
    y(i+1)=(-19.3-0.1*x(i+1)+0.3*z(i))/7;
    z(i+1)=(71.4-0.3*x(i+1)+0.2*y(i+1))/10;
    errorx(i+1)=abs(x(i+1)-x(i))/x(i+1)*100;
    errory(i+1)=abs(y(i+1)-y(i))/y(i+1)*100;
    errorz(i+1)=abs(z(i+1)-z(i))/z(i+1)*100;
    i=i+1;
end
disp('x error(%)');
disp([x',errorx'])
disp('y error(%)');
disp([y',errory'])
disp('z error(%)');
disp([z',errorz'])
```

# Program Çıktısı

Gauss Seidel yöntemini kullanarak  $3x-0.1y-0.2z=7.85$   $0.1x+7y-0.3z=-19.3$   $0.3x-0.2y+10z=71.4$  denklemlerinin köklerini bulma -Bitirme şartı  $x$  in hata oranı(errorx)<0.01 ise bitir

x	error(%)
0	9999
2.61666666666667	100
2.99055650793651	12.5023499899631
3.00003189791081	0.31584297423301
3.00000035246927	0.00105151459431879

y	error(%)
0	0
-2.79452380952381	-100
-2.49962468480726	-11.7977361365069
-2.49998799235305	-0.014532371631624
-2.50000003575461	-0.000481736055333635

z	error(%)
0	0
7.00560952380953	100
7.00029081106576	0.0759784541430433
6.99999928321562	0.00416468399995072
6.99999998871083	1.00785030896313e-05