Çoklu Korelasyon

Araştırmalardan bazen bir seri ile ikiden fazla seri arasındaki ilişkinin eş anlı olarak ölçülmesi istenir. Bir seri ile birden fazla seri arasındaki ilişkinin ölçülmesi istendiğinde çoklu korelasyon katsayısı kullanılır. Seri sayısı arttıkça çoklu korelasyonun formülasyonu ve hesabı güçleşir. Burada sadece üç serili çoklu korelasyon katsayısını vermekle yetiniyoruz. X_1, X_2 ve X_3 serileri verilmişken, ρ_{12}, ρ_{13} ve ρ_{23} sırasıyla X_1 ile X_2; X_1 ile X_3 ve X_2 ile X_3 serileri arasındaki basit korelasyon katsayılarını göstermek üzere, X_1 serisi ile X_2, X_3 serileri arasındaki çoklu korelasyon katsayısı;

$$\rho_{1.23} = \sqrt{\frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{23}^2}}$$

(pozitif karekök) ile hesaplanır. X_2 serisi ile X_1, X_3 serileri arasındaki çoklu korelasyon katsayısı;

$$\rho_{2.13} = \sqrt{\frac{\rho_{21}^2 + \rho_{23}^2 - 2\rho_{21}\rho_{23}\rho_{13}}{1-\rho_{13}^2}}$$

X_3 serisi ile X_1, X_2 serileri arasındaki çoklu korelasyon katsayısı;

$$\rho_{3.12} = \sqrt{\frac{\rho_{31}^2 + \rho_{32}^2 - 2\rho_{31}\rho_{32}\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}}$$

ile hesaplanır. Çoklu korelasyon katsayısının değer aralığı ve değerlerin yorumu basit korelasyon katsayısından farklıdır. Çoklu korelasyon katsayısı, ikinci grup serilerin birinci seri üzerindeki doğru veya ters yönlü toplam etkilerini yüzde olarak ifade eder ve değişim aralığı 0’dan 1’e kadardır.

Örneğin X_1 serisi ile X_2, X_3 serileri arasındaki $\rho_{1.23}$ çoklu korelasyon katsayısı;

$\rho_{1.23} = 0$ ise,	ilişki yok,
$\rho_{1.23} < 0.50$ ise,	ilişki zayıf,
$\rho_{1.23} > 0.50$ ise,	ilişki zayıf,
$\rho_{1.23} = 1$ ise,	ilişki tam,

Çoklu korelasyon katsayısı uygulamalarda sıfıra yakın veya 1'e yakın değerler alabilirse de tam olarak sıfır veya 1 değerlerini aldığı pek görülmez. Serpilme diyagramında gözlem noktalarının dağılımı, bunların tam ortasından çizilen doğruya yaklaştıkça çoklu korelasyon katsayısı 1'e yaklaşır. Noktalar doğrudan uzaklaştıkça ilişki zayıflar ve çoklu korelasyon katsayısı sıfıra yaklaşır.

Örnek : Tüketicilerin bir maldan talep ettikleri miktar (X_1), o malın fiyatı (X_2) ve tüketicilerin gelir düzeyi (X_3) ile ilişkilidir. Aşağıda bu üç seriye ilişkin veriler yer almaktadır.

X_1:	9	7	8	6	5	6	8	(bin ton)
X_2:	6	7	3	6	8	7	5	(TL)
X_3:	10	8	11	5	4	6	12	(bin TL)

Talep edilen miktarın (X_1), fiyat (X_2) ve gelir (X_3) ile çoklu korelasyonunu bulalım. Bu verilerden $\bar{X}_1 = 7$, $\bar{X}_2 = 6$ ve $\bar{X}_3 = 8$ ortalamaları bulunur. Her bir serinin kendi ortalamalarından sapmaları olan x_1, x_2 ve x_3 değerleri bulunmalıdır.

x_1:	2	0	1	-1	-2	-1	1
x_2:	0	1	-3	0	2	1	-1
x_3:	2	0	3	-3	-4	-2	4

Sapmalar cinsinden ara değerler tablosu şu şekilde oluşturulmuştur.

$x_1.x_2$	$x_1.x_3$	$x_2.x_3$	x_1^2	x_2^2	x_3^2
0	4	0	4	0	4
0	0	0	0	1	0
-3	3	-9	1	9	9
0	3	0	1	0	9
-4	8	-8	4	4	16
-1	2	-2	1	1	4
-1	4	-4	1	1	16
-7	24	-23	12	16	58

Bu ara değerlerden aşağıdaki basit korelasyonlar hesaplanır:

$$\rho_{12} = \frac{\sum x_1.x_2}{\sqrt{\sum x_1^2.\sum x_2^2}} = \frac{-7}{\sqrt{12\times 16}} = -0.50$$

$$\rho_{13} = \frac{\sum x_1.x_3}{\sqrt{\sum x_1^2.\sum x_3^2}} = \frac{-7}{\sqrt{12\times 58}} = 0.90$$

$$\rho_{23} = \frac{\sum x_2.x_3}{\sqrt{\sum x_2^2.\sum x_3^2}} = \frac{-23}{\sqrt{16\times 58}} = -0.76$$

Buradan talep edilen miktar (X_1) ile fiyat (X_2) ve gelir (X_3) arasında çoklu korelasyon katsayısı:

$$\rho_{1.23} = \sqrt{\frac{\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - 2\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}}{1-\rho_{23}^2}}$$

$$\rho_{1.23} = \sqrt{\frac{(-0.50)^2 + (0.90)^2 - 2(-0.50)(0.90)(-0.76)}{1-(0.76)^2}} = 0.89$$

Çoklu korelasyon katsayısı % 89 gibi yüksek bir oranda gerçekleşmiştir. Bu da talep edilen miktar (X_1) ile fiyat (X_2) ve gelir (X_3) arasında oldukça yüksek bir korelasyon olduğunu göstermektedir.

Kısmi Korelasyon Katsayısı

Çoklu korelasyon katsayısı bir seri ile birden fazla seri arasındaki eş anlı ilişkiyi ölçmekte idi. Bir seri ile ikinci bir seri arasındaki ilişkiyi ölçerken diğer serilerin etkilerinin sabit tutulması ile kısmi korelasyon kavramı ortaya çıkar. Birbirleriyle etkileşimli ikiden fazla seri verildiğinde, diğer serilerin etkilerinin sabit tutulmasıyla iki seri arasındaki korelasyon kısmi korelasyon katsayısı ile ölçeriz. X_1, X_2 ve X_3 gibi üç serimiz olsun. Eğer bu üç seri aralarında karşılıklı bir etkileşim içerisinde iseler, bunlardan sadece ikisi arasındaki ilişkiyi ölçerken, üçüncü serinin bu ikisi üzerindeki etkilerini sabit tutmamız gerekir. bu şekilde X_1, X_2 ve X_3 serileri verildiğinde şu kısmi korelasyonlar söz konusu olur;

$\rho_{12.3}$: X_1 ile X_2 arasındaki korelasyon, X_3 'ün etkisi sabit

$\rho_{13.2}$: X_1 ile X_3 arasındaki korelasyon, X_2 'nin etkisi sabit

$\rho_{23.1}$: X_2 ile X_3 arasındaki korelasyon, X_1 'in etkisi sabit

Bu kısmi korelasyon katsayıları basit korelasyon katsayıları yardımıyla bulunur. Şöyle ki;

$$\rho_{12.3} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{\left(1-\rho_{13}^2\right)\left(1-\rho_{23}^2\right)}}$$

$$\rho_{13.2} = \frac{\rho_{13} - \rho_{12}\rho_{23}}{\sqrt{\left(1-\rho_{12}^2\right)\left(1-\rho_{23}^2\right)}}$$

$$\rho_{23.1} = \frac{\rho_{23} - \rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{\left(1-\rho_{12}^2\right)\left(1-\rho_{13}^2\right)}}$$

Burada ρ_{12}, ρ_{13} ve ρ_{23} sırasıyla X_1 ile X_2, X_1 ile X_3 ve X_2 ile X_3 arasındaki basit korelasyon katsayılarıdır. Bu şekilde elde edilen kısmi korelasyon katsayılarının değer aralığı ve yorumu yukarıda basit korelasyon katsayısında olduğu gibidir.

Örnek: Bir meslek sınavında adaylar, yazılı, mülakat ve uygulama olmak üzere üç ayrı sınava tabi tutulmaktadır. Sınava giren 5 adayın bu üç sınavdan 10 üzerinden yapılan değerlendirmelerinde şu puanlar ortaya çıkmıştır:

Aday Sıra No	:	i :	1	2	3	4	5
Yazılı Sınav Puanı	:	X_1 :	2	2	3	4	4
Mülakat Sınavı Puanı	:	X_2 :	3	3	5	4	5
Uygulama Sınavı Puanı	:	X_3 :	3	4	5	6	7

Her üç sınav arasındaki kısmi korelasyon katsayılarını araştıralım.

$\rho_{12.3}$: Yazılı Mülakat korelasyonu, Uygulama sabit

$\rho_{13.2}$: Yazılı ve Uygulama korelasyonu, Mülakat sabit

$\rho_{23.1}$: Mülakat ve Uygulama korelasyonu, Yazılı sabit

Bu kısmi korelasyon katsayıların hesabı için ara değerler sapmalar cinsinden aşağıdaki tablo ile hesaplanmıştır.

X_1	X_2	X_3	$X_1.X_2$	$X_1.X_3$	$X_2.X_3$	X_1^2	X_2^2	X_3^2
-1	-1	-2	1	2	2	1	1	4
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	2	1	1	2	1	1	4
0	0	0	3	4	5	4	4	10

Kısmi korelasyonların hesabı için gerekli basit korelasyonlar:

$$\rho_{12} = \frac{\sum X_1.X_2}{\sqrt{\sum X_1^2 \sum X_2^2}} = \frac{3}{\sqrt{4\times 4}} = 0.75$$

$$\rho_{13} = \frac{\sum X_1.X_3}{\sqrt{\sum X_1^2 \sum X_3^2}} = \frac{3}{\sqrt{4\times 10}} = 0.63$$

$$\rho_{23} = \frac{\sum X_2.X_3}{\sqrt{\sum X_2^2 \sum X_3^2}} = \frac{3}{\sqrt{4\times 10}} = 0.79$$

Buna göre kısmi korelasyonlar;

$$\rho_{12.3}=\frac{\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{\left(1-\rho_{12}^2\right)\left(1-\rho_{23}^2\right)}}=\frac{0.75-\left(0.63\right)\times\left(0.79\right)}{\sqrt{\left[1-\left(0.63\right)^2\right]\left[1-\left(0.79\right)^2\right]}}=0.5$$

$$\rho_{13.2}=\frac{\rho_{13}-\rho_{12}\rho_{23}}{\sqrt{\left(1-\rho_{13}^2\right)\left(1-\rho_{23}^2\right)}}=\frac{0.63-\left(0.75\right)\times\left(0.79\right)}{\sqrt{\left[1-\left(0.75\right)^2\right]\left[1-\left(0.79\right)^2\right]}}=0.1$$

$$\rho_{23.1}=\frac{\rho_{23}-\rho_{12}\rho_{13}}{\sqrt{\left(1-\rho_{12}^2\right)\left(1-\rho_{13}^2\right)}}=\frac{0.79-\left(0.75\right)\times\left(0.63\right)}{\sqrt{\left[1-\left(0.75\right)^2\right]\left[1-\left(0.63\right)^2\right]}}=0.62$$

Adayların yazılı ve mülakat sınavları ile mülakat ve uygulama sınavları arasında vasat bir kısmi korelasyon ortaya çıkarken, yazılı ve uygulama sınavları arasındaki kısmi korelasyonlar küçük çıkmıştır.