lineer bağımlılık ve lineer bağımsızlık

Tanım $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$ vektör uzayının elemanları olsunlar. $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + \dots + c_n \vec{x}_n$$

toplamına (vektöre) $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ vektörlerinin lineer birleşimi denir.

Tanım: $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \in V$, $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, Eğer

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \vec{x}_i = \vec{0}$$

eşitliğini sağlayan c_i'lerin hepsi sıfır ise ($c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$) $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ vektörleri lineer bağımsız. Aksi halde en az bir c_i sıfırdan farklı ise lineer bağımlıdır diyeceğiz.

Bunu biraz açarsak, $c_1 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Yukarıdaki eşitlikten $\vec{x}_1$ vektörünü çekersek,

$$\vec{x}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\vec{x}_2 - \frac{c_3}{c_1}\vec{x}_3 - \dots - \frac{c_n}{c_1}\vec{x}_n$$

olur ki $\vec{x}_1$ vektörü geri kalan $(n-1)$- tane vektör cinsinden yazılmış olur.

[Bu konuyu determinant anlatırken vektörlerin lineer bağımlılık ve bağımsızlığını göstereceğiz].

Tanım: V bir vektör uzayı $\emptyset \neq S \subset V$ cümlesi de vektör uzayı aksiyomlarını sağlıyorsa S'ye V'nin alt uzayı denir.

Tanım: S, V'nin alt uzayı olsun. S deki sonlu sayıda elemanların bütün lineer birleşimlerinin oluşturduğu alt uzaya S'nin gerdiği alt uzay denir ve $V = sp\{S\}$ ile gösterilir.

Tanım : Bir V vektör uzayının S alt cümlesi aşağıdaki iki özelliğe sahip ise V'nin bir bazı adını alır.

1) S lineer bağımsızdır.

2) $V = sp\{S\}$, (S, V'yi gerer).

Tanım : Bir V vektör uzayının bir bazı S olsun. S deki vektörlerin sayısına V'nin boyutu denir. boy V ile gösterilir.

Örnek :

İki boyutlu uzayda $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ bir bazdır. şartlarını incelersek.

1) lineer bağımsızlık

$$c_1 \vec{i} + c_2 \vec{j} = \vec{0}$$ eşitliğini sağlayan c_1 ve c_2'nin sıfır olması ;

$$c_1 (1,0) + c_2 (0,1) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (c_1, 0) + (0, c_2) = (0,0)$$

$$(c_1, c_2) = (0,0) \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$ olup lineer bağımsızdır.

2) Germe aksiyomu :

V' nin herhangi bir elemanı bu $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ cinsinden yazılmasına bakacağız. Örnek olarak iki boyutlu uzayda $(3,5)$ vektörünü gözönüne alırsak, bu vektör

$$(3,5) = 3\vec{i} + 5\vec{j} = 3(1,0) + 5(0,1)$$

şeklinde yazılacağından germe sağlanır.

Böylece $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ 2-boyutlu olduğu tanımından anlaşılır ve baz olduğunu söyleriz.

Teorem (Baza tamamlama teo):

Bu teoremi örnek üzerinde göstermek istersek, 3- boyutlu uzayda iki lineer bağımsız vektör verilmiş uzay üç-boyutlu olduğu için bu iki vektör ile üçüncü vektörün lineer bağımsız olacak şekilde seçilmesidir.

Örnek 3.2.29 ***Exercise 3.2.30*** *$\mathbb{R}^4$ uzayında $\alpha_1 = (1,0,1,2)$, $\alpha_2 = (0,1,1,2)$, $\alpha_3 = (1,1,1,3)$ verilsin. $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.*

$$c_1 + c_2 = 0,\ c_2 + c_3 = 0,\ c_1 + c_2 + c_3 = 0,\ 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 = 0$$

sistemin çözümünden $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ elde edilir ki $\mathbb{S}$ lineer bağımsız olur.

Örnek 3.2.31 *$\mathbb{R}^3$ de $\alpha_1 = (1,2,-1)$, $\alpha_2 = (1,-2,1)$, $\alpha_3 = (-3,2,1)$ ve $\alpha_4 = (2,0,0)$ verilsin. $\mathbb{S} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Gerçekten,*

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_4 = 0$$

iken

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 - 3c_3 + 2c_4 &= 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + 2c_3 &= 0 \\ -c_1 + c_2 - c_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin aşikar olmayan bir çözümü vardır. Örneğin $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 1$ ve $c_4 = 0$ bir çözüm olup $\mathbb{S}$ nin lineer bağımlı olması için yeterlidir.