

OLASILIK TEORİSİ

Hatırlanacağı gibi, ilk bölümde İstatistiğin Betimsel ve Tümevarımsal İstatistik diye iki kısma ayrıldığını söylemiştik. Tümevarımsal İstatistik, örnekten hareketle yığına ilişkin bilinmeyen parametreler hakkında tahminlerde bulunmak amacıyla geliştirilmiş yöntemler bütünüdür. Tümevarımsal istatistik yöntemleri olasılık teorisinin gelişmesiyle ortaya çıkmıştır. Bu nedenle, bundan sonraki bölümlerin ağırlıklı konusu olan tümevarımsal istatistik yöntemlerine geçmeden önce olasılık ile ilgili bilgilerimizi tazeleyelim.

Olasılığın tanımı ve türleri anlatılırken kullanacağımız faktöriyel notasyonu ile küme ve olay kavramlarına bir göz atmak gerekir. çünkü, olasılık kavramları küme ve olay kavramları üzerinde yükselmektedir. 1’den n ’e kadar sayıların çarpımı faktöriyel notasyonu ile $n!$ şeklinde yazılır ve “ n faktöriyel” diye okunur. Yani,

$$n! = 1.2.3... (n-2).(n-1).n$$

olarak yazılır. Örneğin,

$$3! = 3.2.1 = 6$$

olurken

$$5! = 5.4.3.2.1 = 120$$

olur. Faktöriyellerin bölümünde sadeleştirme yapılabilir. Örneğin;

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5.4.\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{1}}{\cancel{3}.\cancel{2}.\cancel{1}} = 5.4 = 20$$

Bu arada hemen belirtelim ki tanım olarak,

$$0! = 1! = 1$$

olduğu kabul edilir.

8.1. Permütasyon ve Kombinasyon

Herhangi bir deneyde sonuçların olasılık hesabı yapılırken Elverişli Sonuçların Sayısı (ESS) ve Mümkün tüm Sonuçların Sayısının (MSS) bilinmesi gerekir. bu sayıların elde edilmesinde permütasyon ve kombinasyondan yararlanılır. Permütasyon, n elemanın r li olarak kaç farklı şekilde sıralanabileceğine cevap verir. Permütasyon sayıları bulunurken bir elemana sıraya girmesi için birden fazla şans verilebilir veya verilmez. Eğer sıraya giren bir elemana sonraki bir sırada tekrar şans verilirse tekrarlı permütasyon durumu ortaya çıkar. Örneğin A, B,

C, D harflerinden ikişerli kelimeler oluştururken harflerin tekrar etmesine izin veriyorsak $4.4 = 16$ diziliş söz konusu olur. bu 16 diziliş;

AA	AB	AC	AD
BA	BB	BC	BD
CA	CB	CC	CD
DA	DB	DC	DD

şeklinde gösterilebilir. Genel olarak n sayıda elemanın r elemanlı tekrarlı permütasyonu;

$$P\binom{n}{r} = n^r$$

ile verilir.

Örnek : Bir paranın arka arkaya üç kez atılışında ortaya çıkan sonuçların sayısının kaç olduğuna bakalım. Burada iki elemanın (yazı, tura) üçlü permütasyonu söz konusudur. Ve bu tekrarlı bir permütasyondur. Çünkü birinci atışta örneğin yazı gelse, ikinci hatta üçüncü atışta yine yazı gelebilir. O halde burada $n = 2$ ve $r = 3$ olmak üzere $n^r = 2^3 = 8$ mümkün durum vardır. Bu durumlar;

YYY	YYT	YTY	YTT
TTT	TTY	TYT	TYY

şeklinde liste olarak görülebilir. Permütasyonda eğer bir elemana birden fazla yer verilmiyorsa bu kez tekrarsız permütasyon söz konusu olur. n elemanın r li tekrarsız permütasyonu;

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ile hesaplanır.

Örnek : A, B, C, D harfleri tekrarsız ve ikişerli olmak üzere kaç farklı şekilde dizilebilir?

Çözüm: Burada 4 elemanın 2'li permütasyonu söz konusudur. Yani;

$$P\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4.3.\cancel{2}.\cancel{1}}{\cancel{2}.\cancel{1}} = 12$$

Bu 12 diziliş aşağıda gösterilmiştir.

-	AB	AC	AD
BA	-	BC	BD
CA	CB	-	CD
DA	DB	DC	-

Görüldüğü gibi tekrarlı durumların yer aldığı köşegen elemanlarına yer verilmemiştir. Eğer n elemanın n 'li permütasyonunu arıyorsak;

$$P\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

olarak bulunur.

Örnek : A, B, C, D harfleri ile 4 harfli anlamlı/anlamsız kaç kelime yazılabileceği sorulsa idi;

$$P\binom{4}{4} = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = 4! = 4.3.2.1 = 24$$

olarak bulunurdu. Kombinasyon ise n tane nesne arasından r tanesinin kaç farklı şekilde seçilebileceğine cevap verir. Kombinasyonda çekiliş sırası önemli değildir. Buna göre n 'in r 'li kombinasyonu;

$$C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ile hesaplanmaktadır.

Örnek 4: 5 kişilik bir gruptan 3 kişilik bir heyeti kaç farklı şekilde seçmek mümkündür?

Çözüm: Seçilen şahısların seçiliş sırası önemli olmadığından bu soruya kombinasyon ile cevap aranır. Buna göre;

$$C\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5.4}{2.1} = 10$$

10 farklı şekilde söz konusu heyet teşkil edilebilir. Kombinasyonda bir elemana seçime girmesi için tekrar şansı verilirse tekrarlı kombinasyon ortaya çıkar. n elemanın r 'li tekrarlı kombinasyon sayısı;

$$C\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

ile hesaplanır.

Örnek : A, B, C, D harfleri verilmişken bu elemanların ikişerli tekrarlı kombinasyonu;

$$C\binom{4+2-1}{2} = \frac{(6-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

olarak hesaplanır. Bu 10 kombinasyonu;

AA	AB	AC	AD
-	BB	BC	BD
-	-	CC	CD
-	-	-	DD

biçiminde liste halinde yazabiliriz.

Kümeler ve Olaylar

Küme, nesnel ya da kavramsal belirli öğelerden meydana gelen bir topluluktur. Küme elemanlarının aynı türden olması şart değildir. Ancak, elemanlarının belirli olması şarttır.

Örneğin;

- Sınıfımızda adı A harfi ile başlayan öğrenciler topluluğu bir kümedir. Belirli elemanlardan oluşmaktadır. Somut bir kümedir. Kümenin elemanları bir araya getirilebilir.
- Sınıfımızda okutulan dersler topluluğu yine bir kümedir. Ancak kavramsal (soyut) bir kümedir. Bu kümenin elemanları nesnel olarak bir araya getirilemez fakat simgesel olarak temsil edilebilir.
- Sınıfımızdaki zeki öğrenciler ya da dünyadaki dürüst insanlar topluluğu, zekânın ve dürüstlüğün nesnel ölçüleri olmadığı sürece bunlar birer küme olarak kabul edilemez. Çünkü hangi elemanlardan meydana geldiği belli değildir. Küme elemanları liste ya da tanım halinde gösterilebilir. Örneğin 0 ile 100 arasındaki tek sayılardan oluşan küme,

Liste halinde $A = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots, 97, 99\}$

Tanım olarak $A = \{x \mid 0 < x < 100, x \text{ tek sayı}, x \in N\}$ ile gösterilebilir.

Bunun dışında, kümeleri Venn diyagramı denilen şekillerle de gösterebiliriz. Hiç elemanı olmayan kümeye boş küme denir ve \emptyset ya da $\{ \}$ ile gösterilir. Herhangi bir A kümesinin bir a elemanı, $a \in A$ (a eleman A) diye yazılır. A'nın elemanı olmayan bir b nesnesi söz konusu ise $b \notin A$ (b A'nın elemanı değil) şeklinde gösterilir. Belli bir tanıma göre bir araya gelen bütün kümelerin oluşturduğu topluluğa Evrensel Küme (E kümesi) diyoruz. Bir kümenin elemanları ile daha az sayıda eleman içeren farklı farklı küçük kümeler oluşturulabilir ki bu kümelere alt kümeler adı verilir. Şimdi kümeler üzerindeki bazı işlemleri simge olarak verelim. A ve B herhangi iki küme olsun.

$A \subset B$	A, B'nin öz alt kümesi
$A \not\subset B$	A, B'nin alt kümesi değil
$A \subseteq B$	A, B'nin alt kümesi (kümeler eşit de olabilir)
A'	A'nın değili kümesi
$A \cup B$	A ve B kümelerinin bileşimi kümesi
$A \cap B$	A ve B'nin kesişimi kümesi
$A - B$	A'da olan fakat B'de olmayan elemanların oluşturduğu küme

A ve B gibi iki kümenin hiçbir ortak elemanı yoksa, bu iki kümeye ayrık kümeler denir. bir deneysel süreçte ortaya çıkabilecek her sonuç bir küme, bütün sonuçların bileşimiyle de örnek uzayı (evrensel küme) oluşur. Örnek uzayının her alt kümesi bir olay olarak tanımlanabilir. İstatistikte yığın ve örnek tipik birer küme kavramıdır. Yığın kümesi, örnek adı verilen alt kümelerden oluşur. Başka bir deyişle örneklerin oluşturduğu örnek uzayına yani evrensel kümeye yığın (anakitle, kitle) adı verilir.

Örnek : Hilsesiz bir zarın atılması deneyini düşünün. Bu atılıştta 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 gelmesi sonuçlarının her biri bir kümedir. Bu kümeler topyekün bir evrensel küme oluşturur. Bu evrensel kümenin çeşitli alt kümeleri düşünülebilir. Buna göre söz gelimi

$A = \{1\}$	A olayı: zarın 1 gelmesi
$B = \{1, 3, 5\}$	B olayı: zarın tek sayı gelmesi

Gibi olaylar tanımlanabilir. Sadece bir sonucu içeren olaylara basit olay, birden fazla sonucu içeren olaylara ise bileşik olay denir. yukarıdaki örnekte A basit olay olurken, B bileşik bir olaydır. İki olay bir deneyde aynı anda meydana gelemiyorsa bunlara ayrık olaylar denir. zar atma deneyinde 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 gelmesi olaylarının hepsi karşılıklı ayrık olaylardır. Aynı anda bu olaylardan ikisi ya da daha fazlası meydana gelemmez. İki olaydan birinin sonucu diğerini etkilemiyorsa bu olaylar birbirinden bağımsız olaylardır. Eğer iki olaydan birinin olması diğer olayın meydana gelmesini etkiliyorsa bunlara bağımlı olaylar denir. İçerisinde 3 kırmızı 4 beyaz top bulunan torbadan iadeli olarak iki top çektiğimizde birinci topun kırmızı olması olayı ile ikinci topun kırmızı olması olayları birbirini etkilemez. Bu iki olay bağımsızdır. Torbalar iadesiz çekildiğinde bu iki olay bağımlı hale gelir. Öte yandan, bir boş kümeye imkânsız olay, evrensel kümeye ise kesin olay denilebilir. Zar atma deneyinde 7 gelmesi kümesinin hiçbir elemanı yoktur. Bu bir boş kümedir ve imkânsız olaydır. Zarın bir atılışında evrensel küme 1, 2, 3, 4, 5 veya 6 sonuçlarından oluşur. Zarın atılışında bu kümenin elemanlarından birinin gelmesi kesindir. Yani evrensel küme kesin olaydır.