Çok Terimli Dağılım

Tanım : Bir tesadüfi denemedeki $H_1, H_2, \dots, , H_m$ ayrık sonuçlar ve Ω=$U_i^m = 1^H i$ olmak üzere bu deneme aynı koşullar altında n-kez tekrarlanırsa deneme sonuçları sayılarının dağılımına çok terimli dağılım denir. Bu bağlamda çok terimli X tesadüfi değişkeni şöyle veriliyor.

$$X = \begin{Bmatrix} X_1 : n\ denemede\ H_1\ sonucunun\ gerçekleşme\ sayısı \\ X_2 : n\ denemede\ H_2\ sonucunun\ gerçekleşme\ sayısı \\ X_m : n\ denemede\ H_m sonucunun\ gerçekleşme\ sayısı \end{Bmatrix}$$

H_i sonucunun gerçekleşmesi olasılığı p_i, yani $p_i = P(H_i)$ile ifade edilir. X tesadüfi değişkeninin olasılık fonksiyonu da

$$p(k_1, k_2, \dots, , k_m) = P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, , X_m = k_m)$$

Burada $m \in Z^+$, Σ_i^m=1 k_i=n ve Σ_i^m=1p_i = 1'dir. m=2 alındığında çok terimli X tesadüfi değişkeni binom (iki terimli) X tesadüfi değişkenine dönüşür. Yalnızca H_i sonucunun gerçekleşmesi ile ilgilenirse, ilgilenilen i. Sonucunun gerçekleşmesi olasılığı p_i ve diğer m – 1 sonucun gerçekleşme olasılığı da $q_i$olur. Dolayısıyla deneme 2 mümkün sonuçlu ve n kez tekrarlandığından Çok terimli tesadüfi değişken binom tesadüfi değişkenine dönüşür. Buna göre,

$$E(X_i) = np_i$$

$$Var\ (X_i) = np_i q_i$$

$$M_{X_i}(t) = (p_i e^t + q_i)^n$$

$$gX_i(s) = (q_i + sp_i)^n$$

Örnek : Bir petrol şirketi bir bölgedeki uzman raporlarına göre sondaj çalışması yapmayı planlıyor. Raporlara göre bölgede açılan herhangi bir kuyuda petrole rastlama olasılığı %8 doğalgaza rastlama olasılığı %13 ve kuyunun kuru çıkması olasılığı da %79 olarak tahmin ediliyor. Şirket 15 sondaj yapmaya karar veriyor buna göre;

a) Bir kuyuda petrole bir kuyuda da doğalgaza rastlama olasılığı nedir?
b) Beklenilen kuru (boş) kuru sayısı nedir?

Çözüm.

Kuyudan petrol veya doğalgaz çıkması veya kuyunun kuru çıkması olasılıkları sırası ile p_p, p_{dg}, p_k simgeleri ile gösterilirse

$$p_p = 0{,}08 \quad p_{dg} = 0{,}13 \quad p_k = 0{,}79$$

a) $n = 15$

p_x (1,1,13) $= \binom{15}{1,1,13}$ (0,08)(0,13)(0,79)^{13}

$=\frac{15!}{1!1!13!}$ (0,08) (0,13) (0,79)^{13}

=0,1019

b) $E(X_k) = np_k = \ 15 \cdot \frac{79}{100}$ =11,85 ≅12

15 kuyudan yaklaşık 12 kuyunun kuru çıkması bekleniyor.

Örnek : Hilesiz bir zar 10 kez havaya atılıyor.

a) $1\ kez\ 1, 2\ kez\ 2, 3\ kez\ 3\ ve\ 4\ kez\ 4$ gelmesi olasılığı nedir?
b) Tüm atışlarda 6 gelmesi olasılığı nedir?
c) 10 atıştan kaçında asal sayı gelmesi beklenir?

Çözüm

a) Bir zarın atılması denemesinde örnek uzay $\Omega\ = \{1,2,3,4,5,6\}$olur ve

$$p(w_i) = p_1 = p_2 = \cdots .. = p_6 = 1/6$$

olarak elde edilir. Buna göre,

$$p(1,2,3,4)\ = \binom{10}{1,2,3,4}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^4 = 0,0002083$$

b) $p(6) = \binom{10}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = 0,1666$

c) Zarın üzerindeki sayılardan asal sayı olanlar 2,3 ve 5 olduğundan bir atışta asal sayı gelmesi olasılığı,

$$p_a = \frac{3}{6}$$

ve

$$E(X_a) = np_a = 10.0,5 = 5$$

Poisson Dağılımı

Tanım : Birim zamanda (gün, saat veya dakika gibi) meydana gelen olayların sayısı X tesadüfi değişkeni ile ortalaması da λ ile gösterilir ve $X'in$ olasılık fonksiyonu

$$P(X = x) = p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0,1, \ldots \\ 0, & d.d \end{cases}$$

Biçiminde verilirse $X'e$ Poisson tesadüfi değişkeni denir ve X ~Poisson (λ) ile gösterilir.

Poisson Dağılımının Özellikleri

1) X_1~ Poisson(λ_1) ve X_2 ~Poisson(λ_2), X_1 ve X_2 bağımsız tesadüfi değişkenler olmak üzere $X = X_1+X_2$ ve $\lambda = \lambda_1+\lambda_2$ için

$$P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0,1,\ldots \\ 0, & d.d \end{cases}$$

2) X_1~Poisson(λ_1) ve X_2~Poisson (λ_2) olmak üzere

$\lambda_1<\lambda_2 \rightarrow P(X_1> x) < P(X_2> x)$

3) $X{\sim}Poisson\ (\lambda) \rightarrow P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{1+\lambda}$
4) $Y{\sim}Poisson(\lambda) \rightarrow P(Y = 2X = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$
5) X ~ Poisson (λ) birim zamanda meydana gelen olayların sayısını gösterdiğinde X_1 tesadüfi değişkeni de p olasılığı ile **istenen** sonuç sayısını, X_2 tesadüfi değişkeni de q olasılığı ile **istenmeyen** sonuç sayısını göstermek üzere $X = X_1 + X_2$ olur (özellik 1).

$$P(X_1 = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}; & x = 0,1 \ldots. \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$$P(X_2 = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}; & x = 0,1 \ldots. \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$X_1 \sim Poisson(\lambda p)\ ve\ X_2 \sim Poisson\ (\lambda p)\ olur.$

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \sum_{x \in D_X} xP(X=x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \textstyle\sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in D_X} x^2 P(X=x)$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} (x(x-1) + x) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \boldsymbol{\lambda^2 + \lambda}$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \lambda$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = \sum_{x \in D_X} e^{tx} P(X = x)$$

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!}$$

$$= \boldsymbol{e^{-\lambda} e^{e^t\lambda} = e^{\lambda(e^t - 1)}}$$

Olasılık Çıkaran Fonksiyon

$$g_X(s) = \sum\nolimits_{D_X} s^X P(X = x)$$

$$g_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{s\lambda} = e^{\lambda(s-1)}$$

Binom Dağılımı ile Poisson Dağılımı

X$\sim Binom\ (n, p)$ iken X tesadüfi değişkeninin Poisson dağılımına yaklaştığı aşağıdaki teorem yardımıyla veriliyor.

Teorem: Başarı olasılığı p, 0’ a ya da 1’e yaklaştığında ve n→∞ iken $X \sim Binom\ (n, p)$→Poisson (λ) olur. Yani,

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

İspat. X binom tesadüfi değişkenin olasılık fonksiyonu,

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \frac{n!}{(n-x)!x!}\ p^x q^{n-x}$$

$E(X) = np\ ve\ np = \lambda$ alalım, p $= \frac{\lambda}{n}$ ve q = $1 - \frac{\lambda}{n}$ olur. (5.10)’da p ve q’nun değerleri ve n! = $n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)(n-x)!$ yerine konulduğunda,

$$\text{p(x)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{x!}\frac{n^x\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)-\left(1-\frac{x+1}{n}\right)}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{1}\right)^{-x}$$

$n \to \infty$ için limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty} p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x+1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{1}\right)^{-x}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{1}\right)\cdots\left(1-\frac{x+1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} = 1$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

Olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p(x) = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

olur.

Örnek : Bir petrol istasyonuna gelişler ortalama 26 araç/saat ile Poisson dağılımına uymaktadır. Gelen araçlardan %23’ü benzin %38’i dizel %39’ u da gaz almaktadır.

a) Petrol istasyonunun boş kalması olasılığı nedir?
b) Bir günde gelmesi beklenen araç sayısı nedir?
c) 8 saatte benzin alan ortalama araç sayısı nedir?
d) 2 saatte en az 5 aracın dizel yakıt alması olasılığı nedir?

e) Benzin ve dizel yakıt alan araçların toplam sayısının olasılık çıkaran fonksiyonunu bulunuz?
f) Benzin ve gaz yakıtı alan araçların sayılarının toplamının Poisson dağılımına uyduğunu gösteriniz.

Çözüm. Benzin, dizel ve gaz yakıtı alan araçların sayılarını sırasıyla X_B , X_D ve X_G tesadüfi değişkenleri ile bunların parametrelerini de λ_B, λ_D ve λ_G gösterelim. O halde

a) $X \sim Poisson\ (26)\ ise\ E(X)\ =\ 26\ araç$

$$P(X=0)\ =\ \frac{26^0}{0!}e-\ 26\ = e-\ 26$$

b) Bir günde beklenen araç sayısı: 24.26 =624 dir.
c) Benzin alan araçların beklenen sayısı

$E(X_B)$ = 26.0,23= 5,98

olmak üzere 8 saatte benzin alanların beklenen sayısı,

8.5,98=47,84

≅48 araçtır.

d) 1 saatte dizel yakıt alan araçların beklenen sayısı:

$E(X_D)$ 26.0,38=9,88

Araç olmak üzere 2 saatte dizel yakıt alan araçların sayısı

X'_D~Poisson(2(9,88))

araç sayısı olduğundan

P(X'_D≥5)=1 – P (X'_D≤4)

=1 - $\sum_{x=0}^{4} P(X'_D = x)$

=1 - $\sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-19,76}.(19,76)^x}{X!}$

=0,9999 dir.

e) Benzin ve dizel yakıt alan araçların sayısını sırasıyla X_B ve X_D ile bunların parametrelerini de λ_B ve λ_D verildi. O halde Poisson dağılımının 1. ve 5. özelliklerinden

$$Y = X_B + X_D$$

alınıp

$$\lambda_{BD} = \lambda_B + \lambda_D = 26(0,23 + 0,38) = 15,86$$

Poisson dağılımına sahip Y tesadüfi değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonu

$$g_Y(s) = \sum_{y=0}^{\infty} \frac{s^y e^{-15,86} 15,86^y}{y!}$$

$$= e^{-15,86} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{(15,86s)^y}{y!}$$

$$= e^{-15,86} e^{15,86s}$$

$$= e^{15,86(s-1)}$$

olarak bulunur.

f) Poisson dağılımının birinci ve beşinci özelliklerinden dolayı; benzin ve gaz yakıtı alan araçların sayısını sırasıyla X_B ve X_G ile bunların parametrelerini de λ_B ve λ_G= verildi. O halde Z tesadüfi değişkeni de $Z = X_B + X_G$ olarak tanımlayalım ve Poisson dağılımının 1. ve 5. Özelliklerinden $\lambda_{BG} = \lambda_B + \lambda_G$= 26(0,23 + 0,39) = 16,12 parametresi ile Poisson dağılımına sahiptir.

Z ~ Poisson (16,12) olur, yani

$$P(Z = z) \begin{cases} \frac{e^{-16.12}(16.12)^z}{z!}, & x = 0,1 \ldots\ldots \\ 0, & d.d \end{cases} \text{ bulunur.}$$

Örnek : Bir bölgede bir hastalığa yakalanma oranının 0.001 olduğu biliniyor. Tesadüfi olarak seçilen 2000 kişilik bir örneklemle çalışıldığında,

a) En az iki kişinin bu hastalığa yakalanma olasılığı nedir?
b) En çok dört kişinin bu hastalığa yakalanma olasılığı nedir?
c) Hiç kimsenin bu hastalığa yakalanmama olasılığı nedir?
d) $X \sim Binom\ (2000;\ 0,001)\ için\ X'in$ karakteristik fonksiyonunu bulunuz?

Çözüm. p = 0,001 ve n = 2000 olduğundan, $E(X) = np = 2\ olur$

X~Binom (2000;0,001) ≈ Poisson (2) elde edilir.

a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{1} \frac{e^{-2} \cdot 2^x}{x!}$$

$$= 1 - 3e^{-2} = 0,594$$

b) $P(X \leq 4) = \frac{e^{-2} \cdot 2^x}{x!} = 7e^{-2} = 0.947$

c) $P(X = 0) = \frac{e2^{-} \cdot 2^0}{0!} = e^{-2} = 0,1353$

d) $\varphi_X(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{D_x} e^{itx} P(X = x)$

$$\varphi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \frac{e^{-2} 2^x}{x!}$$

$$= e^{-2} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(2e^{it})^x}{x!}$$

$$= e^{2(e^{it-1)}}$$

Örnek : Eldeki verilere göre bir ülkede yaşayan insanların intihar etme oranı ayda bir milyon kişide 4'tür. Bu ülkenin 500.000 nüfuslu bir şehrinde bir ayda,

a) En fazla 4 intiharın yaşanma olasılığını bulunuz?
b) Bir yılda en az iki ay içinde 4'den az intiharın olma olasılığı nedir?

Çözüm.

a) Her ay gerçekleşen intihar sayısını X tesadüfi değişkeni ile gösterelim. Bu durumda X, n $=5.10^5$ ve p$= 4.10^{-6}$ parametreli binom dağılımına uyar. $np = 2 < 10$ olduğundan, λ=2 parametreli Poisson dağılımına yaklaşım kullanmak uygun olur. Böylece,

$$p_0 = P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^{4} e^{-2} \frac{2^k}{k!} = 7e^{-2} = 0{,}9473 \text{ olur.}$$

b) Y tesadüfi değişkeni 4'ten fazla intiharın gerçekleştiği ayların sayısını göstersin. Bu takdirde,

$$P(Y = k) = \binom{12}{k} (1 - p_0)^k (p_0)^{12-k},$$
$$P(Y \geq 2) = 1 - \left(P(Y = 0) + P(Y = 1)\right) = 0{,}129$$

olarak bulunur.