DETERMİNANT

Determinant alma işlemi aşağıda vereceğimiz üç kurala göre hesaplanır.

1. Sarrus Kuralı
2. Laplace Açılımı
3. Determinantın özelliklerinden faydalanarak elemanter operasyonlar ile hesabı

1. Sarrus Kuralı

Bu kural 2×2 tipindeki ve 3×3 tipindeki matrislerin determinantında aşağıdaki gibi işlemi yapılarak bulunur.

$\det A$ veya $|A|$ şeklinde gösterilir.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}a_{21}$$

Determinant

$$|B| = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}.b_{22}.b_{23} + b_{21}.b_{32}.b_{13} + b_{31}.b_{12}.b_{33} - (b_{13}b_{22}b_{31} + b_{23}b_{32}b_{11} + b_{33}.b_{12}b_{21})$$

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{matrix}$$

Örnek 9.6.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (12 + 27 + 0) - (6 + 0 + 36) = 39 - 42 = -3$$

$$\begin{matrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{matrix}$$

Tanım 9.13. Herhangi bir karesel matrisin herhangi bir a_{ij} elemanının **minörü** diye a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütünun silinmesiyle geri kalan kısmın determinantına denir. M_{ij} ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{22} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad a_{11} \rightarrow M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}$$

$$a_{32} \rightarrow M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{23} - a_{13}.a_{21}$$

Tanım 9.14. Karesel bir A matrisinin **kofaktör** veya **eşçarpanı** matrisin a_{ij} elemanlarının minörleri M_{ij} ler olmak üzere $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ şeklinde olur.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(A_{22}.A_{33} - A_{23}A_{32}$$

$A_{32} = (-1)^5 (A_{11}.A_{23} - A_{13}.A_{31})$ örneklerinden de görüldüğü gibi kofaktör veya kısaca işaretli minör de diyebiliriz.

2. Laplace Açılımı

Laplace Açılımı verilen karesel matrisin herhangi bir satırına veya sütününa göre hesaplanır. Hesaplamada determinantın değeri değişmez açılım aşağıdaki formülle verilir.

$$|A| = \sum_{i,j,=1}^{n} a i_j \; A_{ij}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_{11}\;A_{11} + a_{12}\;A_{12} + a_{13}\;A_{13} \rightarrow \text{1.satıra göre} \\ &= a_{11}\;(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \end{aligned}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \rightarrow \text{1.sütuna göre}$$

$$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \longrightarrow \text{3. satıra göre}$$

UYARI: Bu metot ile matrisin mertebesi için bir sınırlama yoktur.

Örnek 9.7.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\left[1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right]$$

$$= 2(1-16) = -30$$

Örnek 9.8.

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) = -1 + (3+3) - [(-4-1)+3] = 7$$

Determinantın Özellikleri

1. Determinantın herhangi bir satırını veya sütununu k ile çarpmak demek determinantı k ile çarpmak demektir. Yani,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}.a_{21}$$

$$D'=\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=ka_{11}a_{22}-ka_{12}a_{21}=k(a_{11}a_{22}-a_{12}.a_{21})=k.D$$

2. Detenminantın herhangi iki satırı veya sütunu aralarında yer değiştirirlerse determinat işaret değiştirir. Yani,

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$D'=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{21}.a_{12}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{21}.a_{12})=-D$$

3. Detenminantın herhangi bir satırının veya sütununun elemanlarının hepsi "0" ise determinantın değeri "0" a eşittir. Yani,

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

4. Determinantın herhangi iki satırı veya sütunu birbirinin aynısı ise determinantın değeri "0" a eşittir.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{12}-a_{11}.a_{12}=0$$

5. Determinantın herhangi iki satırı veya sütunu arasında bir oran sözkonusu ise determinantın değeri "0" a eşittir.

6. Determinantın herhangi bir satırı veya sütunu iki veya daha fazla terimin toplamı şeklindeyse determinant iki veya daha fazla determinantın toplamı şeklinde olur.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+z & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{12} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13} \\ a_{21} & y & a_{23} \\ a_{31} & z & a_{33} \end{vmatrix}$$

7. Determinantın herhangi bir satırının "k" katını başka bir satıra veya herhangi bir sütununun "k" katının başka bir sütuna ilave edilmesiyle determinantın değeri değişmez.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Birinci sütunun "k" katını ikinci sütuna ilave edelim.

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11}+a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21}+a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31}+a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{0}+\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{D}=D$$

8. Determinantın herhangi bir satırını göz önüne alıp başka satırların kofaktörleriyle çarpılıp toplanmasından elde edilen toplam "0" dır. Benzer şekilde sütunlar için de geçerlidir.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$$

Elemanter Operasyon Sembolleri

H satır operasyonu, K sütun operasyonunu göstermek üzere,

1. H_{ij} : i. satır ile j. satır yer değiştirecek

   $\rightarrow K_{ij}$: i. sütun ile j. sütun yer değiştirecek

2. $H_i(k)$: i. satır k ile çarpılacak

   $\rightarrow K_i(k)$: i. sütun k ile çarpılacak

3. $H_{ij}(k)$: j. satırın k katının i. satıra ilave edeceğiz

   $\rightarrow K_{ij}(k)$: j. sütunun k katının i. sütuna ilave edeceğiz.

Örnek 9.9.

$$D=\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&1\\0&1&3\end{vmatrix}\overset{H_{12}}{\approx}(-1)\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&0\\0&1&3\end{vmatrix}\overset{H_{21^{(-2)}}}{\approx}(-1)\begin{vmatrix}1&2&1\\0&-3&-1\\0&1&3\end{vmatrix}\approx(-1)\begin{vmatrix}-3&-2\\1&3\end{vmatrix}$$

$$\overset{H_{12}}{\approx}(-1)(-1)\begin{vmatrix}1&3\\-3&-2\end{vmatrix}\approx H_{21^{(3)}}\begin{vmatrix}1&2\\0&7\end{vmatrix}=7$$

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\2&0&1&1\\-1&0&2&3\end{vmatrix}\underset{H_{41^{(1)}}}{\overset{H_{31^{(-2)}}}{\approx}}\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&1\\0&-4&-5&-7\\0&2&5&7\end{vmatrix}\approx\begin{vmatrix}1&2&1\\-4&-5&-7\\2&5&7\end{vmatrix}\approx\begin{vmatrix}1&2&1\\-4&-5&-7\\2&5&7\end{vmatrix}\underset{H_{31^{(-2)}}}{\overset{H_{21^{(4)}}}{\approx}}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\0&3&-3\\0&1&5\end{vmatrix}\approx\begin{vmatrix}3&-3\\1&5\end{vmatrix}\Rightarrow H_{12^{(-3)}}\approx\begin{vmatrix}0&-18\\1&5\end{vmatrix}=18$$

Örnek 9.10.

$\begin{vmatrix}1&a&bc\\1&b&ac\\1&c&ab\end{vmatrix}$ determinantını determinantın özelliklerinden faydalanarak bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\begin{vmatrix}1&a&bc\\1&b&ac\\1&c&ab\end{vmatrix}\underset{\substack{H_{2^{(b)}}\\H_{3^{(c)}}}}{\overset{H_{1^{(a)}}}{\approx}}\frac{1}{abc}\begin{vmatrix}a&a^2&abc\\b&b^2&abc\\c&c_2&abc\end{vmatrix}\approx\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}a&a^2&1\\b&b^2&1\\c&c^2&1\end{vmatrix}$$

$$\underset{H_{31^{(-1)}}}{\overset{H_{21^{(-1)}}}{\approx}}\begin{vmatrix}a&a^2&1\\b-a&a^2-a^2&0\\c-a&c^2-a^2&0\end{vmatrix}\approx\begin{vmatrix}b-a&(b-a)(b+a)\\c-a&(c-a)(c+a)\end{vmatrix}\approx(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&b+a\\1&c+a\end{vmatrix}$$

$$\overset{H_{21^{(-1)}}}{\approx}(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&b+a\\0&c-b\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$$

Örnek 9.11.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \underset{K_{13^{(1)}}}{\overset{K_{12^{(1)}}}{\approx}} \begin{vmatrix} x+2 & x & 1 \\ x+2 & 1 & 1 \\ x+2 & 1 & x \end{vmatrix} \approx (x+2)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \underset{H_{31^{(-1)}}}{\overset{H_{21^{(-1)}}}{\approx}}$$

$$(x+2)\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1-x & x-1 \end{vmatrix} \approx (x+2)(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = -(x+2)(1-x)^2$$

Örnek 9.12.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ dır. Gerçekten, 2. satırın elemanları 2 ile çarpıldığı zaman 4.satırı

ermektedir.