YMH 214 SAYISAL ANALİZ

1

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

3.Hafta

LİNEER OLMAYAN (NONLİNEER) DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Lineer Olmayan Denklemler

Lineer olmayan denklem sistemleri, matematik, mekanik, dinamik ve elektrik gibi mühendisliğin birçok alanında sıkça karşılaşılmaktadır. İki veya daha yüksek dereceli polinomlar veya trigonometrik, logaritmik, üstel gibi lineer olmayan terimler içeren denklemler lineer olmayan denklemlerdir.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü

$3x-9=0$ → Bir bilinmeyenli lineer(doğrusal) denklemdir

$x^2-4x=0$ → Bir bilinmeyenli analitik çözümü olan lineer (doğrusal) olmayan denklemdir

$x^3-\sin x-5=0$

$x^4-2x^3-7x^2-9x-3=0$

$2x^2-5\tan x-e^{3x}=0$

$e^x+\cos x+1/x=0$

→ Bir bilinmeyenli analitik çözümü olmayan lineer (doğrusal) olmayan denklemlerdir

$x-\cos y=0$ → İki bilinmeyenli analitik çözümü olmayan lineer (doğrusal) olmayan denklemdir

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü

- Genelde nonlineer denklemler $f(x)=0$ kapalı formunda yazılır. Karşılaşılan denklemlerin çoğu tek değişkenli olmakla beraber çok değişkenli de olabilir

$$f(x_1, x_2, x_3, ..) = 0$$

- Lineer olmayan bir denklemin çözümü, köklerinin bulunması veya bir başka ifadeyle denklemi sağlayan ***x*** **değerinin veya değerlerinin bulunması** işlemidir.

- Lineer denklem sistemlerinin tek çözümü söz konusu iken **nonlineer denklemlerin** birden fazla kökleri, katlı kökleri veya karmaşık kökleri olabilir.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü

- Lineer olmayan denklem veya denklem takımlarının çözümü (köklerinin bulunması) için **çoğu zaman analitik yöntem mevcut değildir**.
- Analitik çözümü olmayan denklemlerin çözümünde sayısal analiz kullanılır.
- Analitik çözüm, tam sonuç üretir.
- Sayısal analiz ise **yaklaşık sonuç** üretir. Yani sonuçlarda **belirli bir hata** vardır.
- **Lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan yöntemler** KAPALI ve AÇIK Yöntemler olmak üzere iki gruba ayrılır.

Kapalı Yöntemler

Fonksiyonların kökleri civarında işaret değiştirmeleri gerçeğinden yararlanan teknikler kapalı yöntemlerdir. Kökün ilk tahmini için iki değer gereklidir. İlk tahmin değerleri kökü kıskaca almalıdır ve kökün farklı yanlarında olmalıdır. İlk tahminler arasında kalan aralığın küçültülmesi ve böylelikle doğru yanıta ulaşılması için farklı stratejiler kullanılır.

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü

KAPALI YÖNTEMLER:

- Grafik yöntemi
- Bisection (Ikiye bölme yöntemi)
- Yer değiştirme yöntemi (Regula Falsi yöntemi)

Sayısal Analizde Denklem Köklerini Bulmada İzlenecek Yol

1. Denklem köklerini aramaya belirli bir başlangıç değeri ya da değer aralığından başlanır.

- Kökü aramaya doğru bir noktadan başlamak çözüme ulaşmayı hızlandıracaktır.

2. Fonksiyonun girişine değerler vererek, fonksiyonun çıkışı gözlemlenir.

- Fonksiyonun çıkışını gözlemlemenin kolay yolu, fonksiyonun grafiğini çizdirmektir.
- Grafik, köke yakın aralığı hızlı ve kolay tespit etmeyi sağlar.
- Kökü aramaya uygun yerden başlamayı sağlar.

Grafik Yöntemi

- Sayısal yöntemlerin davranışlarının görsel olarak saptanmasında faydalıdır.
- Sayısal analiz ile denklem köklerini hızlı ve kolay bulmayı sağlayan bir yöntemdir.
- Karmaşık denklem/problemlerin yaklaşık (kabaca) çözümlenmesini sağlar.

- Grafiksel yöntemlerin dezavantajları

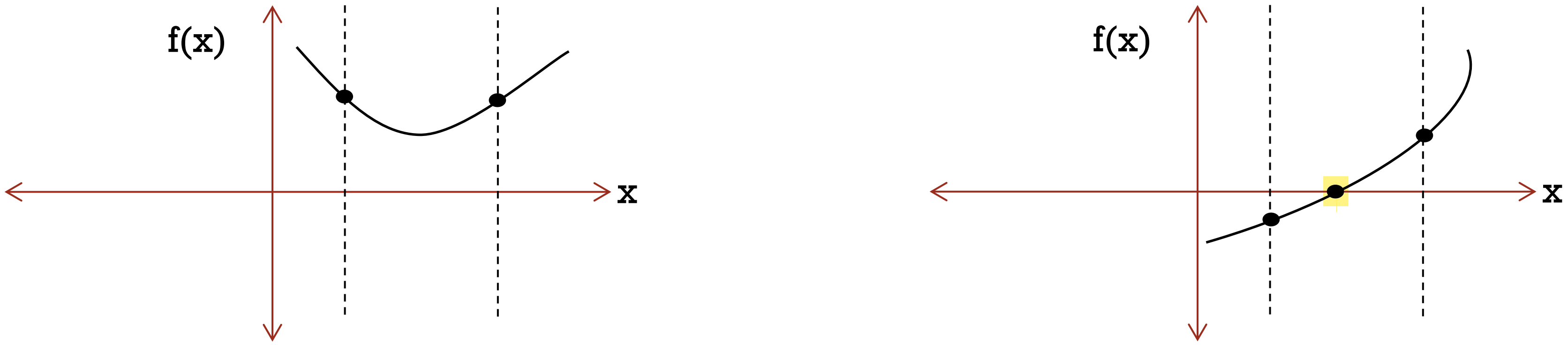
a. Hassas çözüm elde edilemez. Bu yüzden grafik yöntemlerin pratikte değeri sınırlıdır.

b. Bilgisayar kullanmadan grafik çizmek uzun zaman alır.

c. Çoğunlukla 3 ya da daha düşük bilinmeyenli denklem çözümü için uygundur.

Grafik Yöntemi

- f(x)=0 denkleminin köklerini tahmin etmek için kullanılan basit bir yöntem, fonksiyonu çizmek ve x eksenini nerede kestiğini gözlemlemektir.
- f(x)=0 yapan x değerini gösteren bu nokta kökün kaba bir tahminini verir.



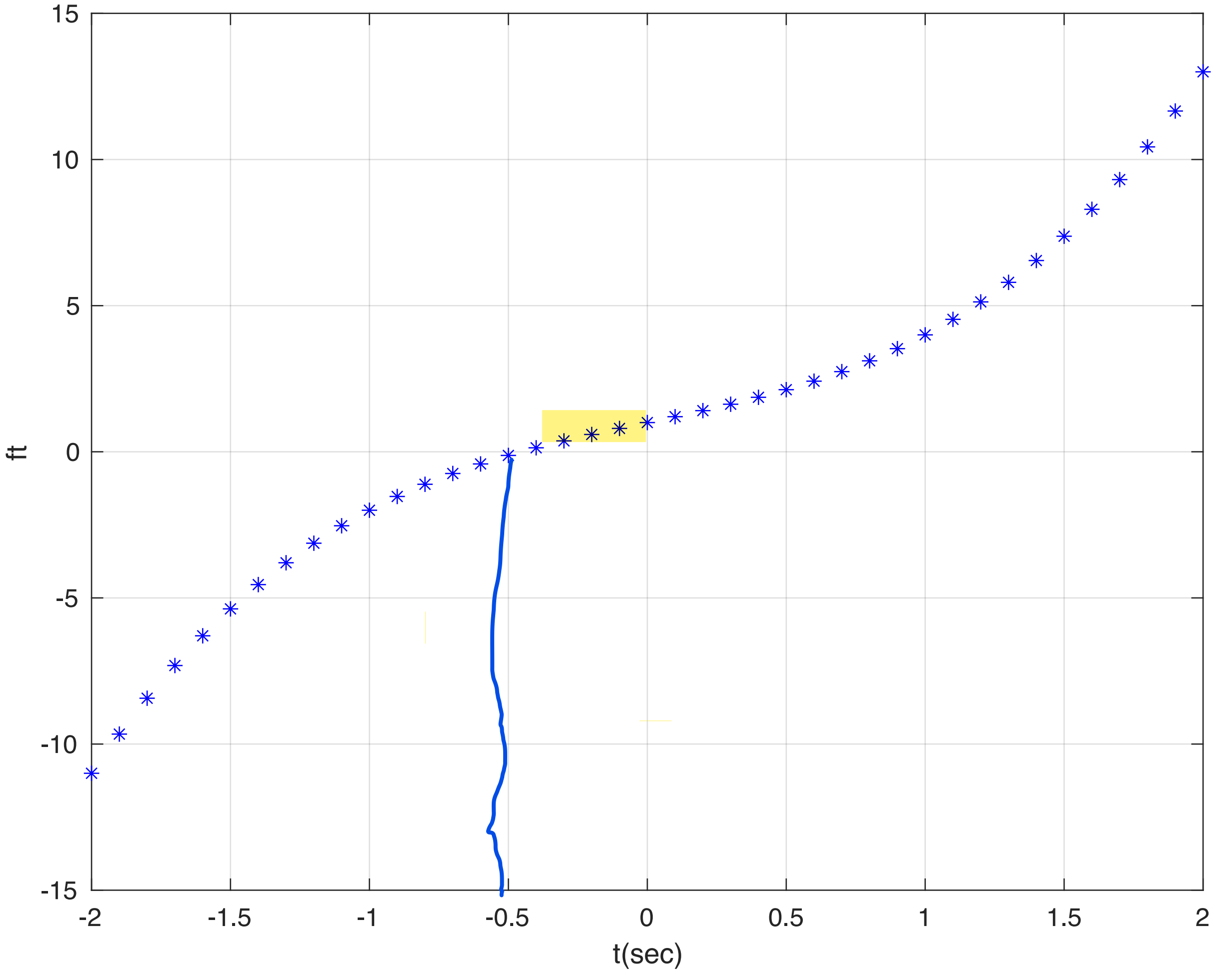
(a) (b)

Grafik Yöntemi Matlab Çözümü

Örnek: $f(x) = x^3 + 2x + 1$ fonksiyonunun kökünü, MATLAB programında çizdireceğiniz grafik üzerinden kabaca bulalım

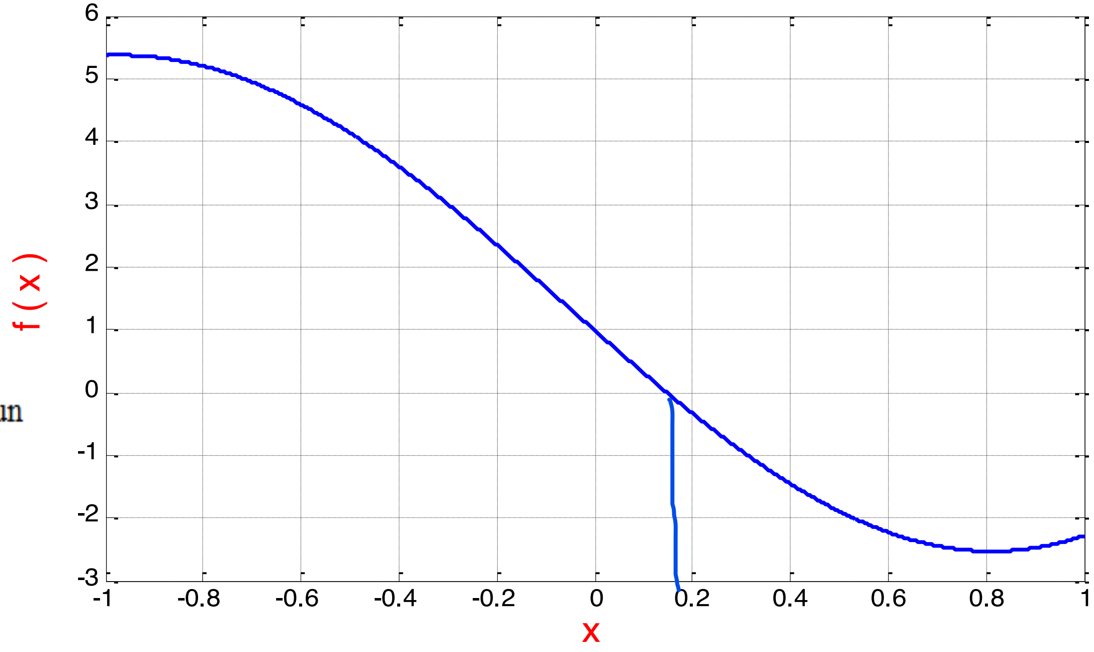
```
clear all;close all;clc
fprintf('Grafik yöntemini kullanarak f(x)=(x^3+2*x+1) denkleminin koklerini bulma');
for t=-2:0.1:2
    ft=t^3+2*t+1;
    plot(t,ft,'b*')
    hold on
end
grid on
xlabel('t(sec)');
ylabel('ft');
```

Grafik Yöntemi Matlab Çözümü



ÖRNEK: $\Rightarrow e^{x} - 5\sin(\pi x/2) = 0$ fonksiyonunun köklerini yaklaşık olarak grafik metodu kullanarak [-**1** , **1**] aralığın da bulalım.

```
>> x=-1:0.00001:1;
>> f=exp(x)-5*sin(pi*x/2);
>> plot(x,f,'b','linewidth',2)
>> grid on
```



Yukarıdaki grafiğe yakınlaştırma yaparsak fonksiyonun $x \cong 0.149$ civarında sıfır olduğu görülür.

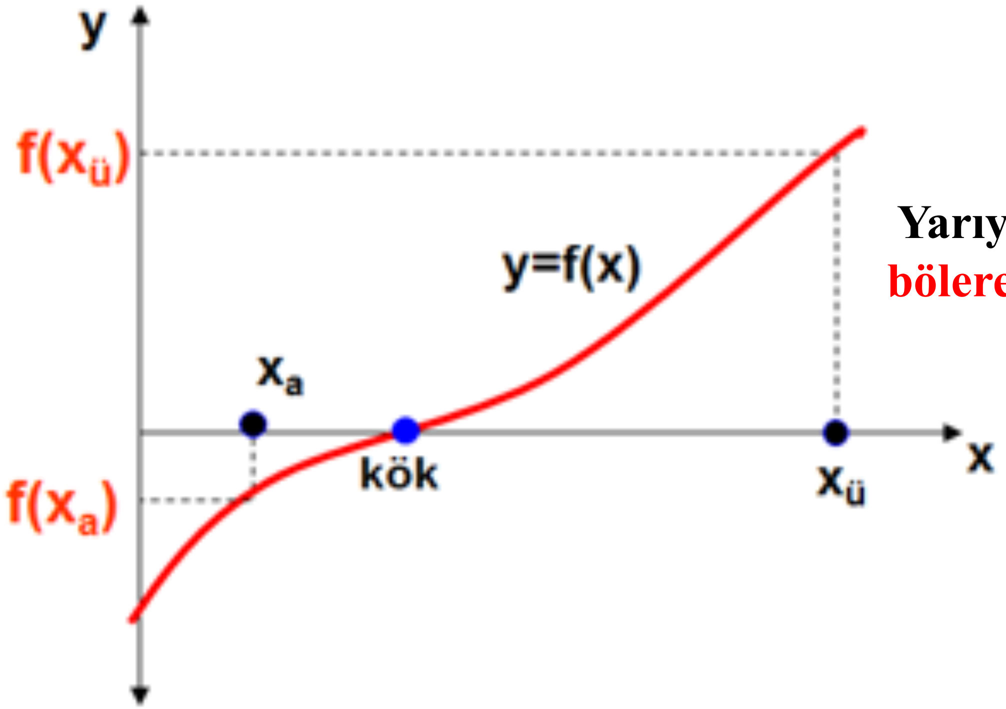
NOT: Fonksiyonun **sıfır değerini aldıktan sonra işaret değiştirdiğine** dikkat edin

x	f(x)
-0.1	1.687
0	1
0.1	0.323
0.14	0.059558
0.14916	7.388e-5
0.15	-0.0053926
0.2	-0.32368

BİSECTİON(İKİYE BÖLME YÖNTEMİ)

- Lineer olmayan ve analitik çözümü olmayan bir bilinmeyenli denklemlerin köklerini bulmada kullanılan kapalı yöntemlerden biridir.
- Denklemi sıfır yapan x değerleri denklemin kökleridir.
- Verilen bir ***f(x)=0*** denklemi [**a , b**] **aralığında tanımlı** ve **sürekli olsun**.
- ***a*** ve ***b*** **değerlerinin verilen fonksiyonda yazılması** ile elde edilen ***f(a) ve f(b)*** **ters işaretli ise**, fonksiyon [**a , b**] aralığında ***x*** **ekseneni kesiyor** ve söz konusu **bu aralıkta en az bir kökü vardır**.

BİSECTİON(İKİYE BÖLME YÖNTEMİ)



Yarıya Bölme Yöntemi, [xa,xü] aralığı ard arda ikiye bölerek, gerçek kök değerine yaklaşma esasına dayanır.

BİSECTİON(İKİYE BÖLME YÖNTEMİ)

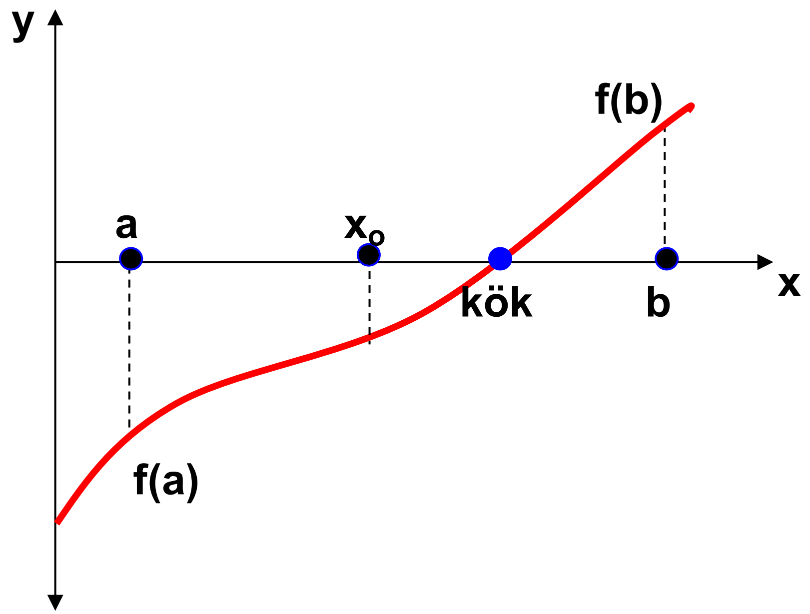
Yöntemin uygulanmasında izlenecek yol:

1. Verilen f(x) denkleminde [a,b] kapalı aralığındaki a ve b değerleri f(x) fonksiyonunda yerine yazılır ve **$f(a). f(b) < 0$** şartı aranır.
2. Üst ve alt değerler için **orta değer** (**x_0**) hesaplanır. $x_o = (a+b)/2$
3. **$f(x_o)$** değeri hesaplanır
   - Eğer **$f(x_o) = 0$** ise **kök x_0**'dır.
   - Eğer **$f(x_o) \neq 0$** ise **işleme devam** edilir

4.

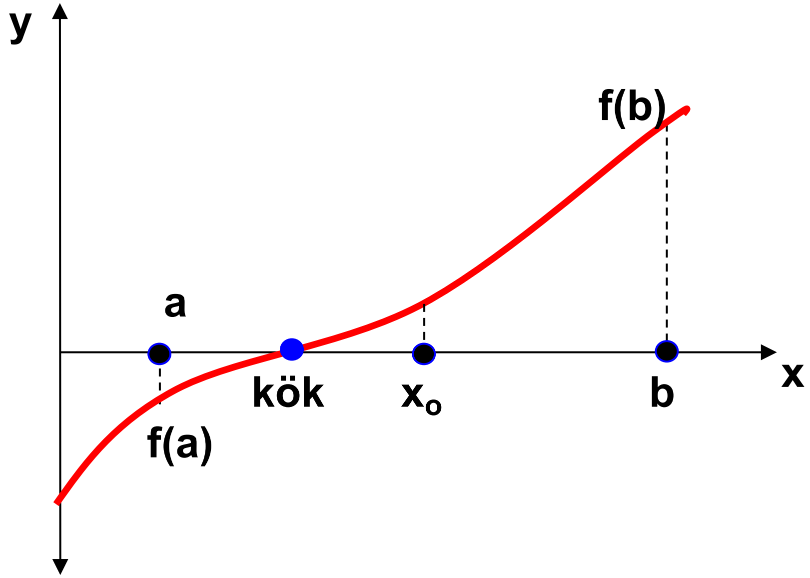
- $f(a).f(x_o) > 0$ ise

  a yerine x_o yazılarak işleme devam edilir.



- $f(a).f(x_o) < 0$ ise

  b yerine x_o yazılarak işleme devam edilir.



5. işleme son verme

1) $f(x_o)=0$ olunca işleme son verilir . Kök x_o'dır.

2) $|E_b| < \varepsilon$ ise işleme son verilir.

$E_b =$ | (Son değer-ilk değer)/son deger |

Bisection Yöntemi Matlab Programı

```
clear all;close all;clc
fprintf('Bisection yöntemini kullanarak f(x)=x^3-4 denkleminin köklerini bulma');
a=-1;
b=2;
tol=1E-6;
for i=1:100
fonka=a^3-4;
fonkb=b^3-4;
xm=0.5*(a+b);
fonkm=xm^3-4;
if fonka*fonkm<0
b=xm;
else
a=xm;
end
if abs(a-b)<tol
break
end
end
disp('Iterasyon sayısı')
i
disp('Denklemin kökü');
format long
xm
disp('Fonksiyonun kökteki değeri')
fonkm
```

Program Çıktısı

```
Bisection yöntemini kullanarak f(x)=x^3-4 denkleminin köklerini bulmaIterasyon sayısı

i =

    22

Denklemin kökü

xm =

   1.587401151657104

Fonksiyonun kökteki değeri

fonkm =

     7.536009469788496e-07
```