Bölüm 7

Karmaşık Sayılar

Karmaşık sayılar gerçel sayıların genişlemesiyle elde edilen daha büyük bir kümedier. Genişleme şu gereksemeden doğmuştur: $x^2 = +1$ denklemimin çözümü $+1, -1$ sayılarıdır ve $\mathbb{R}$ içindedir. Ama $x^2 = -1$ denklemimin çözümü $\mathbb{R}$ içinde yoktur. Özellikle elektromanyetik teoride bütün ikinci derece denklemlerin çözüm kümesine gerekseme doğar. O nedenle $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesini bütün ikinci derece denklemlerin köklerini içerecek büyüklüğe genişletmek gereği vardır. Bu genişleme kolay yapılır.

$$x^2 = -1$$

denkleminin çözümü olarak $+i$ ve $-i$ sayıları tanımlanır.

Tanım 7.1.

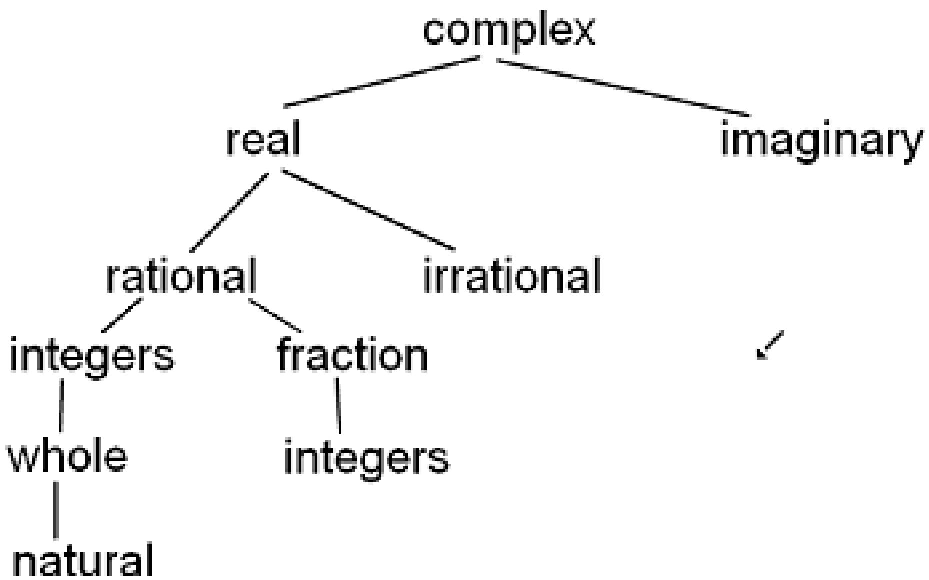
$$\sqrt{-1} = +i$$

denilir. Bu bir tanımdır. $+i$ sayısına karmaşık sayıların birim öğesi denilir.

7.1 Karmaşık Sayılar

Belli türden denklemleri çözebilmek için bazı sayı kümelernin yetersiz kaldığını; bu tür denklemlere çözüm bulmak için sözkonusu sayı kümelerinin genişletilerek daha büyük sayı kümeleri elde edildiğini biliyoruz. Örneğin,

$x + 3 = 0$ gibi bir denklem doğal sayılarda çözülemeyince, doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ genişletilerek tam sayılar kümesi $\mathbb{Z}$ oluşturulmuştur.



Şekil 7.1: Karmaşık Sayının Düzlemsel Gösterimi

$3x+4=0$ gibi bir denklem $\mathbb{Z}$'de çözülemeyince, bu küme genişletilerek rasyonel sayılar kümesi ($\mathbb{Q}$) oluşturulmuştur.

$x^2-7=0$ gibi bir denklem $\mathbb{Q}$'da çözülemeyince, bu küme irrasyonel sayılarla genişletilerek gerçel (reel) sayılar kümesi $\mathbb{R}$ oluşturulmuştur. Gerçel (real) sayılar kümesi ile sayı ekseninin noktalarının bire bir eşlendiğini hatırlayınız.

$a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $a \neq 0$ için $ax^2+bx+c=0$ denklemini çözerken,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

ve

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

olmak üzere,

$b^2 - 4ac > 0$	ise, denklemin gerçel iki kökü vardır
$b^2 - 4ac = 0$	ise, denklemin gerçel ve eşit iki kökü vardır
$b^2 - 4ac < 0$	ise, denklemin gerçel kökü yoktur

kurallarını anımsayınız.

Dikkat ederseniz, üçüncü olasılıkta negatif sayıların karekökü söz konusudur. Bu sayılar, $\mathbb{R}$'nin elemanı değildir.

Örneğin, $x^2+3=0$ denkleminin $\mathbb{R}$ içinde çözümü yoktur. Çünkü her gerçel sayının karesi pozitiftir; dolayısıyla $x^2=-3$ denklemini sağlayan hiçbir gerçel sayı yoktur.

Öyleyse $\mathbb{R}$ gerçel sayılar kümesinin genişletilerek, içinde bu tür denklemlerin de çözülebildiği daha büyük bir sayı sistemi oluşturmaya gerek vardır.

$x^2+1=0$ denklemini sağlayan $\sqrt{-1}$ sayısına *sanal (imajiner) sayı birimi* denir ve $i=\sqrt{-1},\ i^2=-1$ biçiminde gösterilir.

7.2 Gerçel ve Sanal Kısımlar

$a,b\in\mathbb{R}$ ve $i^2=-1$ olmak üzere $a+ib$ biçimindeki sayılara

karmaşık (kompleks) sayılar

denir.

Karmaşık sayıyı genellikle z ve bu sayıların oluşturduğu kümeyi$\mathbb{C}$ ile göstereceğiz.

$$\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b\in R\}$$

dir. $z=a+ib$ karmaşık sayısında;

a'ya bu sayının gerçel (reel) kısmı denir ve $ge(z)$ ile gösterilir. b'ye bu sayının sanal (imajiner) kısmı denir ve $san(z)$ $[Im(z)]$ ile gösterilir.

$$ge(z)=a \Rightarrow [san(z)=b \wedge z=ge(z)+i.san(z)$$
$$san(z)=0 \Rightarrow z\in\mathbb{R}\,[\mathbb{R}\subset\mathbb{C}]$$
$$ge(z)=0 \Rightarrow z=o+bi \Leftrightarrow z=bi$$

Örnek 7.1.

$z=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i$ karmaşık sayısının gerçel ve sanal kısımlarını bulalım:

$$z=\frac{1}{2}+i(-\frac{2}{3})\ \text{ ise}$$
$$san(z)=-\frac{2}{3}$$

olur.

7.3 Karmaşık sayıların Eşitliği

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $z_1 = a + ib$ ve $z_2 = c + id$ olsun.

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

dir.

Örnek 7.2.

$z_1 = 3x - i\frac{1}{2}$ ve $z_2 = -36 + (y+1)i$ sayılarının eşit olabilmesi için x ve y'nin ne olacağını bulalım:

$$3x + i(-\frac{1}{2}) = -36 + i(y+1)$$

$$\begin{aligned} 3x &= -36; & y + 1 &= -\frac{1}{2} \\ x &= -12; & y &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 7.3.

$\frac{x}{x-1} + \frac{1}{y^2}i$ sayısının karmaşık sayı olabilmesi için x ve y nin ne olacağını bulalım:
Verilen sayının karmaşık sayı olabilmesi için,

$$\frac{x}{x-1}, \frac{1}{y^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \qquad \begin{aligned} & x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \text{ ve } x \in \mathbb{R} \\ & y^2 \neq 0 \Rightarrow y \neq 0 \text{ ve } y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

olmalıdır.

Örnek 7.4.

$4x^2 - 2x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$\Delta = (-2)^2 - 4.4.1 = 4 - 16 = -12 < 0$ olduğundan, denklemin karmaşık sayı olan iki kökü vardır:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2.4}$$

eşitliğinden

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{-1}.\sqrt{12}}{8} = \frac{2}{8} + \frac{2\sqrt{3}}{8}\sqrt{-1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$$

çıkar. Benzer şekilde x_2 de hesaplanabilir ve

$$\mathbb{S} = \{\frac{1}{4}(1 - \sqrt{3}i), \quad \frac{1}{4}(1 + \sqrt{3}i)\}$$

bulunur.

7.4 Sanal Birimin Kuvvetleri

$n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, i'nin kuvvetleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$i = \sqrt{-1}$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2.i = -i$
$i^4 = i^2.i^2 = (-1)(-1) = 1$	$i^5 = i^4.i = i$	$i^6 = i^4.i^2 = -1$
$i^7 = i^4.i^3 = -i$	$i^8 = i^4.i^4 = 1$	$i^9 = (i)^{4.2}.i = i$
$i^{10} = (i)^{4.2}i^2 = -i$	$i^{11} = (i)^{4.2}i^3 = -i$	$i^{12} = i^{4.3} = 1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$i^{4n+1} = i$	$i^{4n+2} = -1$	$i^{4n+3} = -i$
$i^{4n} = 1$		

Örnek 7.5.

i^{-27} sayısını hesaplayalım.

$$i^{-27} = i^{-(4\times6+3)} = \frac{1}{i^{4.6}.i^3} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{(-i)i} = \frac{i}{1} = i$$

bulunur.

Örnek 7.6.

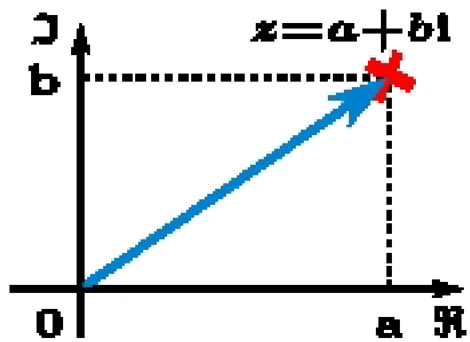
$$\frac{3 - i^{412}}{1 - i^{210}}$$

ifadesini sadeleştirelim:

$$\begin{aligned}\frac{3-i^{412}}{1-i^{210}} &= \frac{3-i^{4\times103}}{1-i^{4\times52}.i^2}\\ &= \frac{(3-(1))}{1-1.(-1)}\\ &= \frac{2}{2}\\ &= 1\end{aligned}$$

bulunur.

7.5 Geometrik Gösterim



Şekil 7.2: Karmaşık Sayının Düzlemsel Gösterimi

Karmaşık sayılar ile analitik düzlemin noktaları bire bir eşlenebilir. Bu eşlemede, $x+yi$ sayısına (x, y) noktası karşılık getirilir.

Şekilde, $0+0i$ sayısı, $O(0,0)$ noktası ile, $x+0i$ sayıları Ox ekseni ile, bütün $0+yi$ sayıları, Oy ekseni ile eşlenir. Ox eksenine gerçel (reel) eksen, Oy eksenine *sanal (imajiner)* eksen denir.

Yukarıda belirtildiği gibi karmaşık sayılarla bire bir eşlenen düzleme, *karmaşık düzlem* diyeceğiz.

7.6 Karmaşık Sayının Eşleniği

Şekil 7.3'ü inceleyiniz. $x+yi$ ve $x-yi$ sayılarından birine diğerinin *eşleniği* denir. z karmaşık sayısının eşleniğini $\overline{z}$ biçiminde göstereceğiz.

$$\overline{z} = \overline{(x+yi)} = x+(-y)i = x-yi$$

dir. Şekil dikkatle incelendiğinde bir karmaşık sayı ile eşleniğinin, gerçel eksene (Ox eksenine) göre simetrik oldukları görülür.

Teorem 7.1. B*ir karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği kendisidir.*

İspat: $z = x+yi$ karmaşık sayısını düşünelim.

$$(\overline{z})^{-} = [(x+yi)^{-}]^{-} = [x-yi]^{-} = x+yi = z$$

olur. Örneğin,

$$z = 1+2i \Rightarrow \overline{z} = 1-2i \Rightarrow \overline{(\overline{z})} = 1+2i$$

Örnek 7.7.

Aşağıda verilen karmaşık sayıların eşleniklerini bulalım.

a) $1-\frac{1}{2}i$ c) 203 e) $\sqrt{-16}+3$
b) $\sqrt{2}+i$ d) $\sqrt{-7}$ f) $7-\sqrt{-9}+\sqrt{-4}$

Çözümler:

a) $1-\frac{1}{2}i$'nin eşleniği $1+\frac{1}{2}i$'dir.

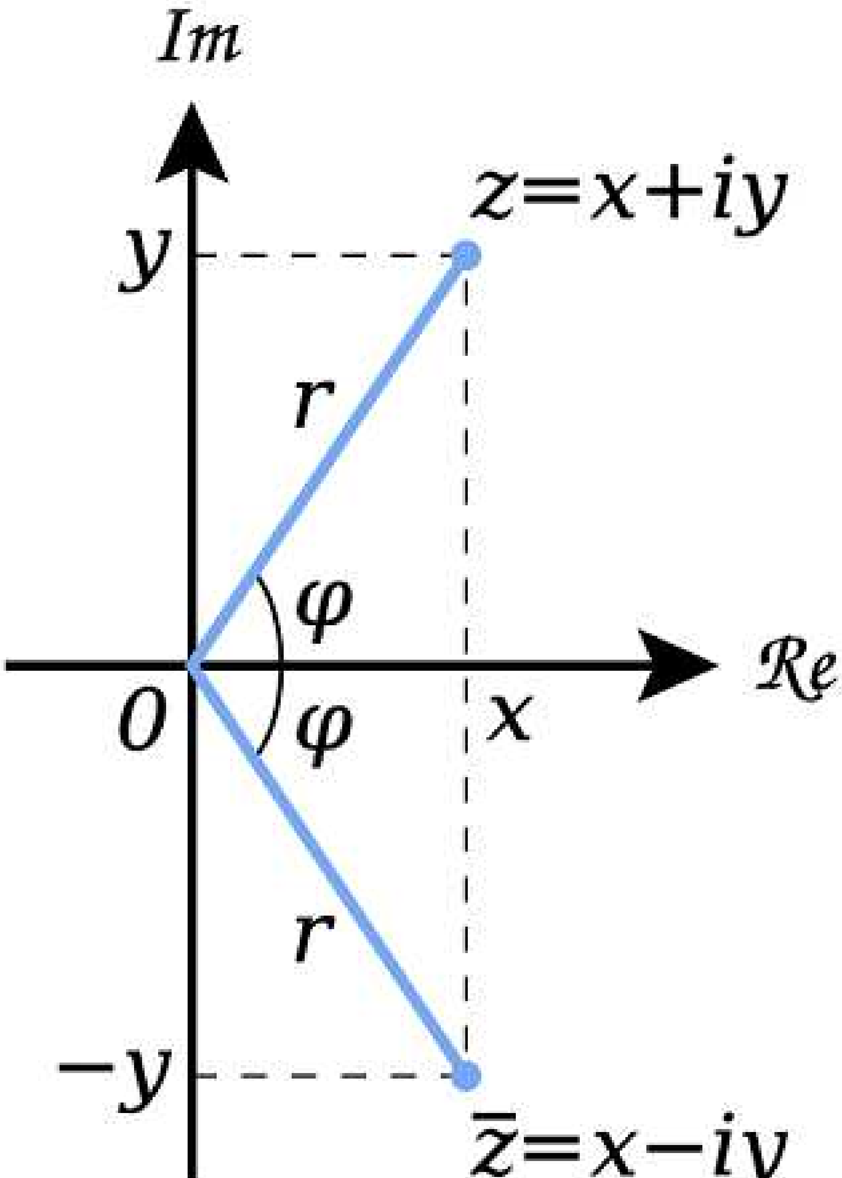
b) $\sqrt{2}+i$'nin eşleniği $\sqrt{2}-i$'dir.

c) 203'ün eşleniği 203 tür.

d) $\sqrt{-7} = \sqrt{7}i$'nin eşleniği $-\sqrt{7}i$'dir.

e) $\sqrt{-16}+3 = 3+4i$'nin eşleniği $3-4i$'dir.

f) $7-\sqrt{-9}+\sqrt{-4} = 7-3i+2i = 7-i$'nin eşleniği $7+i$'dir.



Şekil 7.3: Karmaşık Eşlenik

7.7 Mutlak Değer (modül)

Karmaşık düzlem üzerinde $x+yi$ sayısına karşılık gelen nokta Z olsun. ZAO dik üçgeninde,

$$|OZ|^2 = |x|^2 + |y|^2 = \sqrt{x^2+y^2}$$

veya

$$|z| = |x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}$$

yazılır.

Karmaşık düzlemde, bir karmaşık sayıya karşılık gelen noktanın başlangıç noktasına uzaklığına bu sayının *modülü* veya *mutlak değeri* denir.

$z = x+yi$ sayısının modülü $|z|$ ile gösterilir. $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ dir.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $\sqrt{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$ ve $|z| \geq 0$ dır.

Örnek 7.8.

$u = 3-4i$ sayısının modülünü bularak karmaşık düzlemde gösterelim:
$|u| = \sqrt{3^2+(-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
olur.

Örnek 7.9.

olduğunu gösterelim:
$z = a+bi$ olsun. $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ dir.

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2} = 0 \Rightarrow a^2+b^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0+0i = 0$$

ve

$$z = 0 \Rightarrow z = 0+0i \Rightarrow |z| = \sqrt{0^2+0^2} \Rightarrow |z| = 0$$

bulunur.

7.8 Toplama ve Çıkarma

İki karmaşık sayı $u = a+bi$ ve $v = c+di$ olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı i'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. Bu nedenle,

$$u+v = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

$$u-v = (a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$$

Yandaki şekli inceleyiniz.

Örnek 7.10.

$z_1 = 2-3i$ ve $z_2 = 1+2i$ ise z_1+z_2 ve z_1-z_2 toplam ve farklarını bularak karmaşık sayılar düzleminde gösterelim.

$$\begin{aligned}
z_1+z_2 &= (2-3i)+(1+2i)\\
&= (2+1)+(-3+2)i\\
&= 3-i\\
z_1-z_2 &= (2-3i)-(1+2i)\\
&= (2-1)+(-3-2)i\\
&= 1-5i
\end{aligned}$$

Yandaki şekil üzerinde, karmaşık sayıların toplam ve farkının geometrik yorumunu yapınız.

7.9 Toplama Çıkarmanın özelikleri

Kapalılık Özeliği

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$ olsun

$$z_1+z_2 = (a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$

bulunur. $a,b,c,d \in \mathbb{R} \Rightarrow (a+c),(b+d) \in \mathbb{R}$ olduğundan

$$(z_1+z_2) \in \mathbb{C}$$

olur. O halde, karmaşık sayılar kümesi toplama işlemine göre *kapalıdır.*

Etkisiz (birim) Eleman Varlığı

$z_1, 0 \in \mathbb{C}$, $z_1 = a + bi$ ve $0 = 0 + 0i$ olsun.

$$\begin{aligned}
z_1 + 0 &= a + bi + 0 + 0i; \\
&= (a+0) + (b+0)i \\
&= a + bi \\
&= z_1 \\
0 + z_1 &= 0 + 0i + a + bi \\
&= (0+a) + (0+b)i \\
&= a + bi \\
&= z_1
\end{aligned}$$

olur. O halde, sıfır, karmaşık sayılarda toplama işlemine göre *etkisiz (birim) elemandır*.

Ters Eleman Varlığı

$z \in \mathbb{C}$ ve $z = a + bi$ ise $-z = -a - bi$ diye tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
z + (-z) &= (a + bi) + (-a - bi) \\
&= (a - a) + (b - b)i \\
&= 0 + 0i \\
&= 0 \\
(-z) + (z) &= (-a - bi) + (a + bi) \\
&= (-a + a) + (-b + b)i \\
&= 0 + 0i \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinde, toplama işlemine göre, *her elemanın tersi* vardır.

Birleşme Özeliği

$u, v, z \in \mathbb{C}$ ve $u = a + bi, v = c + di, z = x + yi$ olsun.

$$\begin{aligned}
(u+v)+w &= [(a+bi)+(c+di)]+(x+yi) \\
&= [(a+c)+(b+d)i]+(x+yi) \\
&= [(a+c)+x]+[(b+d)+y]i \\
&= [a+(c+x)]+[b+(d+y)[i \\
&= a+bi+[(c+x)+(d+y)i] \\
&= u+(v+w)
\end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılarda toplama işleminin *b*irleşme özeliği vardır.

$(\mathbb{C}, +)$ sistemi kapalılık, etkisiz eleman, ters eleman ve birleşme özelikleri olduğu için *grup*tur.

Değişme Özeliği

$\forall u, v \in \mathbb{C}$ ve $u + a + bi,\ v = c + di$ olsun.

$$\begin{aligned}
u+v &= (a+bi)+(c+di) \\
&= (a+c)+(b+d)i \\
&= (c+a)+(d+b)i \\
&= (c+di)+(a+bi) \\
&= v+u
\end{aligned}$$

olduğundan, karmaşık sayılar kümesinde toplama işleminin *değişme özeliği* vardır. Sonuç olarak,

$(\mathbb{C}, +)$ sistemi *değişmeli bir grup*tur.

7.10 Alıştırmalar

1. Köklerinden biri $1 - 2i$ olan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemi bulunuz.
2. $(1+i)^{14}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.
3. $(3-2i) = u(1+i)$ ise u sayısını bulunuz.

4. $P(x) = 3x^{17} - x^8 + 2$ ise $P(i)$'yi bulunuz.

5. $z = x + yi$ ve $z \in \mathbb{C}$ ise $(z - \overline{z})$ ve $(\overline{z} - z)$ karmaşık sayılarını bulunuz.

6. Aşağıdaki ifadeleri $a + ib$ biçiminde yazınız.

$$\begin{aligned} i^{16} &= ? \\ \sqrt{-64} + \sqrt{-5} - \sqrt{-25} &= ? \\ 5\sqrt{-121} &= ? \\ \sqrt{-7}.5\sqrt{-3} &= ? \\ 12\sqrt{5}\sqrt{-\frac{4}{5}} &= ? \\ \frac{3}{15\sqrt{-1}} &= ? \\ 5\sqrt{-3} + \sqrt{-9} &= ? \\ \frac{1}{7}\sqrt{-243} - 8\sqrt{-28} - \frac{2}{3}\sqrt{-63} &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^{19} &= ? \\ \sqrt{-\frac{1}{3}} &= ? \\ 3\sqrt{-60} &= ? \\ \sqrt{-27}\sqrt{-\frac{1}{3}} &= ? \\ \frac{12\sqrt{-15}}{16\sqrt{-5}} &= ? \\ \frac{10}{\sqrt{-5}} &= ? \\ (i\sqrt{3})^4 &= ? \end{aligned}$$

7. Aşağıdaki ifadeleri kısaltınız.
   a) $\frac{1}{i^3} - \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} - \frac{1}{i^6}$ b) $4i + 6i^2 - i^3 + 2i^4 + 3i^5$
   c) $\sqrt{-\frac{x}{3}} + \sqrt{-\frac{x}{9}} - \sqrt{-\frac{x}{27}}$ d) $\sqrt{-4x^4} - \sqrt{-9x^4} - \sqrt{100x^4}$

8. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
   a) $x^2 - 2x + 10 = 0$ b) $x^2 - x + 1 = 0$ c) $x^2 - x + 3 = 0$
   d) $2y^2 = 3y - 4$ e) $\frac{t^2}{2} + \frac{3t}{5} = -\frac{3}{10}$ f) $7u^2 + 5u = -1$

9. $z_1 = 3 - m + ni$ ve $z_2 = (m - 2n)i$ sayılarının eşit olması için m ve n kaçtır?

10. Aşağıdaki işlemleri yapınız.
   a) $(17 + \frac{1}{2}i) + (17 - \frac{1}{2}i)$ d) $\frac{i}{2}(1 - \sqrt{9})$
   b) $6 + (2 - i)$ e) $(5 + \sqrt{-4}) + (1 - 4i)$
   c) $(3 + 2i) + i$ f) $(i^2 - i) + (i^4 - i^3)$

7.11 Çarpma

İki karmaşık sayı $u = a + bi$ ve $v = c + di$ olsun. Sıfırdan farklı her karmaşık sayı i'ye göre birinci dereceden bir polinomdur. İki polinomun çarpımı işlemi ile dağılma ve birleşme özeliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} u.v &= (a+bi).(c+di) \\ &= a(c+di)+bi(c+di) \\ &= ac+adi+bci+bdi^2 \qquad "i^2=-1" \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

bulunur.

Örneğin,

$u=(3+i)$ ve $v=1+2i$ ise $u.v$ yi bulalım:

$$u.v=(3+i)(1+2i)=(3.1-1.2)+(3.2+1.1)i=1+7i$$

Teorem 7.2. *Her $z=x+yi$ karmaşık sayısı için $|z|^2=z.\overline{z}$ dir.*

İspat:

$$\begin{aligned} z.\overline{z} &= (x+yi)(x-yi) \\ &= x^2+y^2 \\ &= (\sqrt{x^2+y^2})^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

7.12 Çarpımın Özelikleri

Kapalılık Özeliği

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ve $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ olsun.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i \end{aligned}$$

olur. $(ac-bd) \in \mathbb{R}$ ve $(ad+bc) \in \mathbb{R}$ olduğu için iki karmaşık sayının çarpımı yine bir karmaşık sayıdır.

Karmaşık sayılar kümesi çarpma işlemine göre *kapalıdır.*

Etkisiz (birim) Eleman Varlığı

$z_1, 1 \in \mathbb{C}$ ve $z_1 = a+bi$, $1 = 1+0i$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} z_1 \times 1 &= (a+bi)(1+0i) \\ &= (a.1-b.0)+(a0+b.1)i \\ &= a+bi = z_1 \end{aligned}$$

bulunur. Ohalde, $1 = 1+0i$ sayisi karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre *etkisiz (birim) eleman*dır.

Ters Eleman Varlığı

z karmaşık sayının çarpma işlemine göre tersi z^{-1} ile gösterilsin.

$$z.z^{-1} = 1$$

olmalıdır. Şimdi bu eşitliği sağlayan z^{-1} sayısını belirleyeceğiz:

$z = a+bi$ ise

$$\begin{aligned} z.z^{-1} = 1 &\Leftrightarrow (a+bi).z^{-1} = 1 \\ &\Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{z} \\ & \text{"Pay ve paydayı } a-bi \text{ ile çarpalım."} \\ &\Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} \\ &\Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i \end{aligned}$$

bulunur. $z^{-1} \in \mathbb{C}$ olduğu açıktır. Son eşitliği kullanarak sağlama yapabiliriz:

$$\begin{aligned} z.z^{-1} &= (a+bi).[\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i] \\ &= \underbrace{(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2})}_{1} + \underbrace{(-\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2})}_{0} i \\ z.z^{-1} &= 1+0i \\ z.z^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

Sıfır hariç, karmaşık sayılar kümesinde çarpma işlemine göre *her elemanın tersi* vardır.

Birleşme Özeliği

$u, v, z \in \mathbb{C}$ ve $u = a + bi,\ v = c + di,\ z = x + yi$ olsun.

$$
\begin{aligned}
(u.v).z &= [(a+bi)(c+di)].(x+yi) \\
&= [(ac-bd)+(ad+bc)i](x+yi) \\
&= [(ac-bd).x-(ad+bc)y]+[(ac-bd)y+(ad+bc)x]i \\
&= (acx-bdx-ady-bcy)(acy-bdy+adx+bcx)i \\
&= [a(cx-dy)-b(dx+cy)]+[a(cy+dx)+b(cx-dy)]i \\
&= (a+bi)[(cx-dy)+(cy+dx)i] \\
&= u.(v.z)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin

birleşme özeliği

vardır.

Değişme Özeliği

$u, v \in \mathbb{C}$ ve $u = a + bi,\ v = c + di$ olsun. Gerçel sayılarda dağılma, birleşme ve çarpma işlemine göre değişme özeliğini uygularsak,

$$
\begin{aligned}
u.v &= (a+bi).(c+di) \\
&= (ac-bd)+(ad+bc)i \\
&= (ca-db)+(da+cb)i \\
&= (c+di).(a+bi) \\
&= v.u
\end{aligned}
$$

bulunur.

Karmaşık sayılarda çarpma işlemine göre

değişme özeliği

vardır.

Sonuç olarak, $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$ sistemi çarpma işlemine kapalıdır; etkisiz elemanı vardır; her elemanın tersi vardır; birleşme ve değişme özeliklerini sağlar. Öyleyse, sistem

değişmeli bir grup

tur.

Dağılma Özeliği

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliğinin varlığını gösterelim:

$u,v,z\in\mathbb{C}$ ve $u=a+bi$, $v=c+di$, $z=x+yi$ olsun.

$$\begin{aligned}
u.(v+z) &= (a+bi)[(c+di)+(x+yi)] \\
&= (a+bi)[(c+x)+(d+y)i] \\
&= [a(c+x)-b(d+y)]+[a(d+y)+b(c+x)]i \\
&= (ac+ax-bd-by)+(ad+ay+bc+bx)i \\
&= [(ac-bd)+(ad+bc)i]+[(ax-by)+(ay+bx)i] \\
&= u.v+u.z
\end{aligned}$$

bulunur. Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine soldan dağılma özeliği vardır. Benzer şekilde, sağdan dağılma özeliğinin varlığı da gösterilebilir.

Karmaşık sayılarda çarpma işleminin toplama işlemi üzerine *d*ağılma özeliği vardır.

O halde $(\mathbb{C}-0,+,\cdot)$ sistemi bir *cisim*dir.

Çarpma İşleminde Kısaltma Kuralı

Teorem 7.3. *$u,v,w\in\mathbb{C}$, $w\neq 0$ ve $uw=vw$ ise $u=v$ dir.*

İspat: $u=a+bi$, $v=c+di$ ve $w=x+yi$ olsun.

$$\begin{aligned}
uw &= (a+bi)(x+yi) \\
&= (ax-by)+(ay+bx)i
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} vw &= (c+di)(x+yi) \\ &= (cx-dy)+(cy+dx)i \end{aligned}$$

olacaktır. $uw = vw$ olması için

$$(ax-by)+(ay+bx)i = (cx-dy)+(cy+dx)i$$

olmalıdır. Buradan,

$$(ax-by-cx+dy)+(ay+bx-cy-dx)i = 0$$

çıkar. Sol yanın eşleniği ile çarparsak

$$(ax-by-cx+dy)^2+(ay+bx-cy-dx)^2 = 0$$

ya da

$$[(a-c)x+(d-b)y]^2+[(a-c)y+(b-d)x]^2 = 0$$

yazabiliriz. Bu ifadedeki bütün sayılar gerçel ve $w = x+yi \neq 0$ olduğundan, son eşitliğin sağlanabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$a = c \quad \text{ve} \quad b = d$$

olmasıdır. Öyleyse,

$$u = v$$

olur.

7.13 Bölme

$u, v \in C$ ve $u = a+bi$, $v = c+di$, $v \neq 0$ olsun.

$$\frac{u}{v} = \frac{a+bi}{c+di}$$

"Pay ve paydayı, paydanın eşleniği ile çarpalım".

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} \\ &= \frac{(ac-bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac-bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \end{aligned}$$

olur.

İki karmaşık sayının birbirine bölümünü elde etmek için paydanın eşleniği ile pay ve payda çarpılır.

Örnek:

$$\frac{7+3i}{5-2i}$$

işlemini yapalım:

$$\begin{aligned}
\frac{7+3i}{5-2i} &= \frac{(7-3i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)} \\
&= \frac{(35-6)+(14+15)i}{5^2+2^2} \\
&= \frac{29+29i}{29} \\
&= 1+i
\end{aligned}$$

Bölme işlemini ters eleman yardımıyla şöyle tanımlayabiliriz: $u = a+bi$ ve $v = c+di$ ve $v \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{u}{v} = u \cdot \frac{1}{v} = u \cdot v^{-1}$$

dir.

İki karmaşık sayının birbirine bölümü; bölenin tersi ile bölünenin çarpımına eşittir.

Teorem 7.4. *$u, v \in \mathbb{C}$ ise, aşağıdaki bağıntılar vardır.*

$$\begin{aligned}
|uv| &= |u|.|v| \\
\left|\frac{u}{v}\right| &= \frac{|u|}{|v|} \quad (v \neq 0) \\
|u+v| &\leq |u|+|v| \\
|u|-|v| &\leq |u+v|
\end{aligned}$$

Bu teoremin ispatı öğrenciye bırakılmıştır.

7.14 Alıştırmalar

1. Aşağıdaki ifadeleri $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a + ib$ biçiminde yazınız.

   a) $(3+4i)(4i-3)$

   b) $(6i-1)(1+6i)$

   c) $(1+\sqrt{-7})^2$

   d) $(3-5i)^2$

   e) $(-2+5i)(4+3i)$

   f) $(5-2i)(3+4i)$

   g) $\sqrt{-9}-3)(2-\sqrt{-1})$

   h) $(\sqrt{-25}+2)(\sqrt{-16}-2)$

2. Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

$a)\dfrac{4+i}{2-3i}$	$d)\dfrac{1-\sqrt{-7}}{i}$	$g)\dfrac{i}{1+i}$
$b)\dfrac{3+i}{5i}$	$e)\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{-3}}$	$h)\dfrac{i^5+1}{i^5}$
$c)\dfrac{2-i}{7}$	$f)\dfrac{5-\sqrt{-7}}{\sqrt{-7}}$	$i)\dfrac{i^3-1}{i^3}$

3. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
   a) $x^2-2ix-4=0$ b) $ix^2+5x-4i=0$

4. $z = 2-i$ ise $z^{-1}-i$ bulunuz.

5. $z = 1-i$ ise $z^2 \cdot z^{-1}$ ifadesini bulunuz.

6. $|z^2| = |z|^2$ olduğunu gösteriniz.

7.15 Geometrik Yorumlar

Toplama İşleminin Geometrik Yorumu

Karmaşık iki sayı $z_1 = a + bi$ ve $z_2 = c + di$ olsun. z_1 ve z_2 sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntülerine, sırayla, A ve B diyelim.

Yandaki şekilde görüldüğü gibi $OACB$ paralel kenarını çizelim. Şekilde taralı olan,

$$\overset{\Delta}{ODB} \cong \overset{\Delta}{AEC} \quad \text{(A.K.A. eşlik kuralı)}$$

dir. Bu üçgenlerin eşliğinden yararlanarak C noktasının koordinatları $(a + c, b + d)$ olur. Yani C noktası,

$$z_1 + z_2 = (a + c) + i(b + d)$$

sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

Şekli dikkatle inceleyecek olursak aşağıdaki sonucu çıkarırız.

İki karmaşık sayının mutlak değerleri toplamı, bu sayıların toplamının mutlak değerinden küçük olamaz.

Bunun sembolle ifadesi şöyledir:

$$|z_1| + |z_2| \geq |z_1 + z_2|$$

Çıkarma İşleminin Geometrik Yorumu

Yandaki şekli inceleyiniz. $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$ olsun. z_1, z_2 ve $-z_2$ sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntülerine, sırasıyla, A, B ve P diyelim. Toplama işlemine benzer şekilde hareket edilerek, R noktasının koordinatları, $(a-c, b-d)$ bulunur. Yani R noktası,

$$z_1 - z_2 = (a-c) + i(b-d)$$

sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür. Şekilden de kolayca görüleceği gibi, şu sonucu yazabiliriz:

İki karmaşık sayının mutlak değerlerinin farkı, farklarının mutlak değerinden büyük olamaz.

Bunun sembolle ifadesi şöyledir:

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

7.16 İki Karmaşık Sayı Arasındaki Uzaklık

$z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ iki karmaşık sayı olsun. Bu sayılar arasındaki uzaklık, karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri arasındaki uzaklık olarak tanımlanır. Dolayısıyla,

$z_1 = x_1 + iy_1$'in görüntüsü $A(x_1, y_1)$

$z_2 = x_2 + iy_2$'in görüntüsü $B(x_2, y_2)$
ise

$$|z_1 - z_2| = |AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

olur. Tabii,

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$$

olduğunu görmek kolaydır.

Örnek 7.11.

$z_1 = 1 + i$ ve $z_2 = 1 - i$ sayıları arasındaki uzaklığı bulalım.

$$\left.\begin{array}{lll} z_1 = 1+i'nin & \text{görüntüsü} & A(1,1) \\ z_2 = 1-i'nin & \text{görüntüsü} & B(1,-1) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \mid z_1 - z_2 \mid = \sqrt{(1-1)^2+(1+1)^2} = 2$$

bulunur.

Örnek 7.12.

$\{z : \mid z-1+i \mid = 2, z \in \mathbb{C}\}$ kümesini karmaşık düzlemde gösterelim:

$z = x+iy$ olsun.

$$\begin{aligned} & \mid z-1+i \mid = 2 \\ \Rightarrow \quad & \mid x+iy-1+i \mid = 2 \\ \Rightarrow \quad & \mid (x-1)+i(y+1) \mid = 2 \\ \Rightarrow \quad & \mid \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 2 \\ \Rightarrow \quad & (x-1)^2+(y+1)^2 = 4 \end{aligned}$$

bulunur. O halde, verilen denklemi sağlayan karmaşık sayılar, merkezi $(1,-1)$ ve yarıçapı 2 olan çember üzerindeki karmaşık sayılardır. Şekli inceleyiniz.

Örnek 7.13.

$$\{z : \mid z-1+i \mid \leq 2, z \in \mathbb{C}\}$$

kümesini karmaşık düzlemde gösterelim.

$$|z-1+i| \leq 0 \Rightarrow |z-(1-i)| \leq 2$$

$(1-i)$ sayısının görüntüsü $M(1,-1)$ olduğundan z sayılarının kümesi M merkezli $r=2$ yarıçaplı dairedir. Yukarıda sağdaki şekle bakınız.

7.17 Kutupsal Göstrim

Sıfırdan farklı bir karmaşık sayı $z=a+ib$ olsun. Bu sayının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsünü orijine birleştiren doğru parçasına r ve r nin Ox ekseni ile oluşturduğu açının ölçüsüne θ diyelim. Şekildeki dik üçgenden,

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \sin\theta &= \frac{b}{|z|} \quad \text{veya} \quad b=|z|\sin\theta \\ \cos\theta &= \frac{a}{|z|} \quad \text{veya} \quad a=|z|\cos\theta \end{aligned}$$

yazılır. a ve b yerine değerleri konularak,

$$z=a+ib=|z|\cos\theta+i|z|\sin\theta=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

veya

$$|z|=r \quad \text{yazılırsa} \quad z=a+ib=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

elde edilir. Bu biçimdeki gösterime, karmaşık sayıların

kutupsal (veya trigonometrik) gösterimi

denir.

Sıfırdan farklı $z=a+ib$ karmaşık sayısı için,

$$\cos\theta=\frac{a}{|z|} \quad \text{ve} \quad \sin\theta=\frac{b}{|z|}$$

eşitliklerini sağlayan θ gerçel sayısına z nin

argümenti

denir ve $arg(z) = \theta$ veya $arg(a + ib) = \theta$ biçiminde gösterilir. $0 \leq \theta < 2\pi$ ise θ ya karmaşık sayının

esas argümenti

denir.

Mutlak değeri ve argümenti verilen bir karmaşık sayı kolayca bulunur.

Karmaşık sayının mutlak değer ve argümentine bu sayının

kutupsal koordinatları

denir ve $(|z|, \theta)$ veya (r, θ) biçiminde gösterilir.

Karmaşık sayı, θ argümenti radyan cinsinden ve $k \in Z$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} z = a + ib &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)] \end{aligned}$$

biçiminde de yazılabileceğini unutmayınız.

$$|z| = r \quad ve \quad (\cos\theta + i\sin\theta) = cis\theta$$

gösterimini kullanırsak,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = rcis\theta$$

kısaltmasını yazabiliriz.

Örnek 7.14.

$z = 1 + i\sqrt{3}$ sayısının argüment ve esas argümentini bulalım.

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

bulunur. Mutlak değer yardımıyla,

$$z = 2\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

yazılır.

Karmaşık sayının kutupsal biçimi düşünülerek, $k \in Z$ için,

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$
$$\Rightarrow \quad arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

bulunur. θ için eşitliği sağlayan en küçük pozitif gerçel sayı $\frac{\pi}{3}$ olduğundan, z sayısının esas argümenti $\frac{\pi}{3}$ radyandır.

z sayısını kutupsal biçimde yazalım:

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\cos 60^0 + i\sin 60^0) = 2cis60^0$$

veya $k \in z$ olmak üzere,

$$z = 2[\cos(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)] = 2cis(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)$$

ya da

$$z = 2[\cos(60^0 + k360^0) + i\sin(60^0 + k360^0)] = 2cis(60^0 + k360^0)$$

olur.

z 'nin esas argümentinin, OAB üçgeni yardımıyla bulunabileceğini görünüz.

Örnek 7.15.

Kutupsal koordinatları $(4, 225^0)$ olan karmaşık sayıyı bulalım:

$$\begin{aligned}
z &= 4cis225^0 \\
&= 4(\cos 225^0 + i\sin 225^0) \\
&= 4[(-\cos 45^0) + i(-\sin 45^0)] \\
&= 4(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + i(-\frac{\sqrt{2}}{2}) \\
&= -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i \\
&= -2\sqrt{2}(1+i)
\end{aligned}$$

7.18 Kutupsal Çarpma ve Bölme

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ ve $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ karmaşık sayılarının çarpımını ve bölümünü bulalım.

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1.r_2[(\cos\theta_1.\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2) \\ &= r_1.r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)] \\ z_1.z_2 &= r_1.r_2 cis(\theta_1+\theta_2) \end{aligned}$$

olur.

Benzer şekilde

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1.\bar{z}_2 = \frac{r_1}{r_2}cis(\theta_1-\theta_2)$$

bulunur.

Yukarıdaki eşitliklerden,

$$\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

ve

$$\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

sonuçlarını çıkarırız.

Örnek 7.16.

$z_1 = 2(\cos 70^0 + i\sin 70^0)$, $z_2 = 3(\cos 50^0 + i\sin 50^0)$ olmak üzere $z_1.z_2$ yi bulalım:

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= 2.3cis(70^0+50^0) \\ &= 6(\cos 120^0 + i\sin 120^0) \\ &= 6(-\cos 60^0 + i\sin 60^0) \\ &= 6(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \\ &= -3+3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Örnek 7.17.

$\arg z_1 = \frac{\pi}{3}$ ve $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$ ise $\arg(\frac{z_1}{z_2})$yi bulalım:

$$\begin{aligned} \arg\frac{z_1}{z_2} &= \arg z_1 - \arg z_2 \\ &= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

Çarpma İşleminin Geometrik Yorumu

$$z_1 = a + ib = r_1 cis\theta_1$$

ve

$$z_2 = c + id = r_2 cis\theta_2$$

olsun. z_1 ile z_2 sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri sırasıyla A ve B olsun. Ox ekseni üzerinde $|OC| = 1$ birim uzunluk olacak şekilde C noktası alalım. $m(\hat{C}) = m(\hat{B})$ ve $m(\widehat{COA}) = m(\widehat{BOD})$ olacak şekilde açılar çizip $A\overset{\Delta}{O}C$ ne benzer $D\overset{\Delta}{O}B$ elde edelim.

$$\begin{aligned} A\overset{\Delta}{O}C \sim D\overset{\Delta}{O}B \quad &\Rightarrow \quad \frac{|OD|}{|OA|} = \frac{|OB|}{|OC|} \\ &\Rightarrow \quad \frac{|OD|}{|z_1|} = \frac{|z_2|}{1} \\ &\Rightarrow \quad |OD| = |z_1| . |z_2| \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan $\widehat{COA} = \theta_1$, $\widehat{COB} = \theta_2$ ve $\widehat{COD} = \theta_1 + \theta_2$ olduğundan $z = z_1 z_2 = r_1 r_2 cis(\theta_1 + \theta_2)$ çarpımı, karmaşık düzlemde D noktası ile temsil edilir. Yani D noktası, $z_1.z_2$ sayısının, karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

Bölme İşleminin Geometrik Yorumu

$z_1 \neq 0$ olmak üzere iki karmaşık sayı

$$z_1 = a + ib = r_1 cis\theta_1$$

ve

$$z_2 = c + id = r_2 cis\theta_2$$

olsun. z_1 ve z_2 sayılarının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüleri sırasıyla A ve B olsun. $|OC| = 1$ birim uzunluk olmak üzere $\overset{\Delta}{AOC}$ ne benzer $\overset{\Delta}{BOD}$ çizelim.

$$\overset{\Delta}{AOC} \sim \overset{\Delta}{BOD} \Rightarrow$$
$$\frac{|DO|}{|CO|} = \frac{|BO|}{|AO|} \Rightarrow |DO| = \frac{|z_2|}{|z_1|}$$

bulunur. Öte yandan

$$\widehat{COD} = \theta_2 - \theta_1, \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = |OD| = \frac{r_2}{r_1}$$

olduğu açıktır. O halde,

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1} cis(\theta_2 - \theta_1)$$

bölümü, karmaşık düzlemde D noktası ile temsil edilir. Yani D noktası $\frac{z_2}{z_1}$ sayısının karmaşık sayılar düzlemindeki görüntüsüdür.

KARMAŞIK SAYILARIN KUVVETLERİ

$z = r cis\theta$ olsun.

$$\begin{array}{rclrcl}
z^2 &=& z.z = r cis\theta . r cis\theta; & z^3 &=& z^2.z = r^2 cis2\theta . r cis\theta \\
z^2 &=& r^2 cis(\theta+\theta) & z^3 &=& r^3 cis(2\theta+\theta) \\
z^2 &=& r^2(\cos 2\theta + i\cos 2\theta) & z^3 &=& r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)
\end{array}$$

bulunur.

Benzer şekilde devam edilerek $n \in \mathbb{N}^+$ için,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

elde edilir.

Teorem 7.5. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ *için,*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

dır. Bu eşitliğe De Moivre eşitliği *denir.*

Örnek 7.18.

$(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{75}$ karmaşık sayısını kutupsal biçimde yazalım.

$$\begin{aligned}
(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{75} &= (\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})^{75} \\
&= \cos\frac{75\pi}{3} + i\sin\frac{75\pi}{3} \\
&= \cos 25\pi + i\sin 25\pi \\
&= \cos(\pi + 12.2\pi) + i\sin(\pi + 12.2\pi) \\
&= -1 + i0 \\
&= -1
\end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 7.19.

$(1+i)^{18}$ sayısını kutupsal biçimde yazalım.

$$|\, 1 + i \,| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
(1+i)^{18} &= (\sqrt{2})^{18}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}})^{18} = 2^9(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^{18} \\
&= 2^9(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}) \\
&= 2^9(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

bulunur.

7.19 Karmaşık sayıların Kökleri

$u = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sayısının n-inci ($n \in \mathbb{N}^+$) kuvvetten köklerini $\sqrt[n]{u}$ ile göstereceğiz. Bu kökler

$$z = \sqrt[n]{u} \Leftrightarrow z^n = u$$

bağıntısını sağlayan z sayılarıdır.

Örneğin, karesi -2 olan bir gerçel sayı olmadığını biliyoruz; ama karesi -2 olan karmaşık sayıları bulabiliriz:

$$(\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$$

$$(-\sqrt{2}i)^2 = 2i^2 = -2$$

O halde, $\sqrt{2}i$ ve $-\sqrt{2}i$ sayıları -2'nin kareköküdür.

Bu örnekteki gibi özel çözüm her zaman mümkün değildir. Karmaşık sayıların köklerini bulmak için, De Moivre teoremini kullanacağız

Teorem 7.6.

$$u = r cis\theta \quad ve \quad n \in N^+ \quad için$$

$$z^n = u$$

denklemini sağlayan z sayıları şunlardır:

$$r^{1/n} cis\frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

İspat:

$z^n = u$ denkleminde $u = r cis\theta$ değerini yerine koyup De Moivre teoremini uygularsak,

$$\begin{aligned} z^n &= r cis\theta \\ z &= [r cis\theta]^{1/n} \\ z &= r^{1/n} cis[\frac{1}{n}(\theta + 2k\pi)] \\ z &= \sqrt[n]{r} cis(\frac{\theta + 2k\pi}{n}), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1 \end{aligned}$$

bulunur.

$z^n = u$ denklemini sağlayan z sayılarına u sayısının n-inci kuvvetten kökü denir. Köklerin modülleri eşit ve $\sqrt[n]{r}$ dir. Agümentleri ise birbirlerinden farklı olup

$$\frac{\theta}{n}, \frac{\theta+2\pi}{n}, \frac{\theta+4\pi}{n}, \cdots, \frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}$$

dir. Görüldüğü gibi, verilen bir u karmaşık sayısının n-inci kuvvetten n tane kökü vardır. Bu kökler karmaşık düzlemde, merkezi orijinde olan $\sqrt[n]{|u|}$ yarıçaplı çember üzerinde eşit aralıklarla sıralanır.

Örnek 7.20.

u sayısını kutupsal biçimde yazalım. $k \in Z$ olmak üzere

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{1+3} = 2 \\ u &= 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i) \\ u &= 2cis(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \end{aligned}$$

olur. Kareköklere z diyelim. k bir tamsayı olmak üzere

$$\begin{aligned} z^2 &= u \\ z^2 &= 2cis(\frac{\pi}{3} + 2k\pi) \\ z &= 2^{1/2} cis[\frac{1}{2}(\frac{\pi}{3} + 2k\pi)] \\ z &= \sqrt{2} cis(\frac{\pi}{6} + k\pi) \end{aligned}$$

$k = 0$ için

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2} cis \frac{\pi}{6} \\ z_1 &= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}) \\ &= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$k = 1$ için

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt{2} cis(\frac{\pi}{6} + \pi) \\ &= \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i \sin\frac{7\pi}{6}) \\ &= \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 7.21.

$z^3 - i = 0$ denkleminin köklerini bulalım. $k = 0, 1, 2, \ldots$ olmak üzere

$$\begin{aligned} z^3 = i \quad &\Rightarrow \quad z^3 = cis(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \\ &\Rightarrow \quad z = cis[\frac{1}{3}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)] \\ &\Rightarrow \quad z = [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3})] \end{aligned}$$

$k = 0$ için,

$$\begin{aligned} z_1 &= [\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}] \\ z_1 &= (\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\ z_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$k = 1$ için,

$$\begin{aligned} z_2 &= [\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})] \\ z_2 &= (\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) \\ z_2 &= (-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) \\ z_2 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

$k=2$ için,

$$\begin{aligned}
z_3 &= [\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3})] \\
z_3 &= (\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}) \\
z_3 &= (0-i) \\
z_3 &= -i
\end{aligned}$$

bulunur.

Köklerin görüntülerinin ağırlık merkezi orijinde olan düzgün çokgenin köşeleri olduğunu grafikten görünüz.

Örnek 7.22.

$u=8+6i$ sayısının kareköklerini bulunuz.

Bu sayıyı kutupsal biçimde yazmak için trigonometrik cetvelden değerler bulmak zorunda kalacağız. Bundan sakınmak amacıyla, kutupsal koordinatları kullanmadan, karekökleri tanıma uyacak biçimde bulmaya çalışalım:

$z=x+iy$ ve $z^2=u$ olsun.

$$\begin{aligned}
z^2 &= (x+iy)^2=8+6i \\
&= x^2-y^2+2xyi=8+6i \\
& \begin{cases} x^2-y^2=8 \\ 2xy=6 \Rightarrow y=\frac{3}{x} \end{cases}
\end{aligned}$$

çıkar. Elde edilen sistemi çözelim:

$$\begin{aligned}
x^2-y^2=8 &\Rightarrow x^2-(\frac{3}{x})^2=8 \\
&\Rightarrow x^4-9-8x^2=0 \\
&\Rightarrow (x^2+1)(x^2-9)=0 \\
&\Rightarrow x^2+1=0 \quad \text{olamaz} \\
&\Rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \\
&\Rightarrow \begin{cases} x_1=3 & \text{için} \quad y_1=1 \\ x_2=-3 & \text{için} \quad y_2=-1 \end{cases}
\end{aligned}$$

bulunur. Ohalde $z_1=3+i$ ve $z_2=-3-i$ olacaktır.

7.20 Alıştırmalar

1.
$$z = (\frac{\sqrt{2}}{2} - 1)^2 (2 - i)$$
sayısının mutlak değerini bulunuz.

2. $u =| u-1 | +2i$ eşitliğini doğrulayan u karmaşık sayısını bulunuz.

3. $| z-1 | - | z+2i |= 0$ eşitliğini doğrulayan z karmaşık sayılarının görüntülerini bulunuz.

4. $u = 1+2i$ ve $v = 3-i$ sayıları arasındaki uzaklığı bulunuz.

5. $\{z :| z-i |\leq 3, z \in \mathbb{C}\}$ kümesini karmaşık sayılar düzleminde belirtiniz.

6. $\{z :| z+1-2i |\leq| z+4 |, z \in \mathbb{C}\}$'ni karmaşık sayılar düzleminde belirtiniz.

7. $z = 1-\sqrt{3}i$ sayısını kutupsal biçimde yazınız.

8. $z_1 = 4(\cos 200^0 + i \sin 200^0)$ ve $z_2 = 2(\cos 110^0 + i \sin 110^0)$ ise z_1 / z_2 sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

9. $\arg[z-1+i] = 60^0$ eşitliğini sağlayan z karmaşık sayılarının karmaşık düzlemdeki görüntüleri kümesini gösteriniz.

10. $A = \frac{(cis\frac{\pi}{6})^4 (cis\frac{\pi}{2})^3}{(cis\frac{\pi}{4})^5}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

11. $z = (1-i)^{64}$ sayısını $a + ib$ biçiminde yazınız.

12. Aşağıdaki şekilde görüntüleri verilen z_1 ve z_2'nin çarpımı olan sayıyı bulunuz.

13. $z = +i$ sayısının kareköklerini bulunuz ve karmaşık düzlemde gösteriniz.

14. Kutupsal koordinatları $(2, 135^0)$ olan karmaşık sayıyı $a + ib$ biçiminde yazınız.

15. $4 \cdot (1 + \sqrt{3})i$ sayısının küpköklerini bulunuz ve karmaşık düzlemde gösteriniz.

16. $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ birer fonksiyon ve

$$f : z \to z + 1; \quad g : z \to \overline{z}$$

ise $(g \circ f)(i)$'yi bulunuz.