Rassal (Tesadüfi) Değişkenler

Belli bir tanıma göre bir araya gelen rassal olaylar bir rassal değişken oluşturur. Bir X değişkeni, alabileceği her değeri belli bir olasılıkla alıyorsa bu değişkene rassal değişken adı verilir. rassal değişkenin olasılık değerlerini de nisbi frekanslar olarak düşünebiliriz. Buradan, olasılığın frekanslarla tarifi ortaya çıkar. bir deneyde belli bir tanıma göre gerçekleşmesi muhtemel olan frekanslara beklenen frekanslar (ya da teorik frekanslar) denir. Bir A olayının olasılığı, A olayının beklenen frekansı toplam frekansa bölünerek hesaplanabilir. İstatistikte incelemeye konu olan değişkenlerin çoğu rassal değişken türündendir. Söz gelimi değişkenimiz ailelerin çocuk sayısı ise bu değişken 0 ile örneğin 8 arasında herhangi bir değer alabilir. Yine bir ülkenin ihracat rakamları yıldan yıla belli aralıkta rassal bir değer alır. Boy ya da ağırlık ölçüleri keza, belli bir aralıkta rassal olarak değişir. Bir deneyde bir rassal değişkenin alabileceği tüm sonuçlara ilişkin olasılıkların toplamı daima 1'dir.

Örnek : X tesadüfi değişkeni bir zarın atılışında gelen sayılar olsun. Bu durumda X'in alabileceği değerler, bu değerlerin beklenen frekansı ve nispi frekansı (olasılığı) aşağıdaki tablo ile verilmiştir.

Rassal Değişken		***X***	*f*	p
1 gelmesi olayı	→	1	1	$\frac{1}{6}$
2 gelmesi olayı	→	2	1	$\frac{1}{6}$
3 gelmesi olayı	→	3	1	$\frac{1}{6}$
4 gelmesi olayı	→	4	1	$\frac{1}{6}$
5 gelmesi olayı	→	5	1	$\frac{1}{6}$
6 gelmesi olayı	→	6	1	$\frac{1}{6}$
	→	-	6	1

X rassal değişkeni 6 adet rassal olayın bir araya gelmesi ile oluşmuştur. Toplam frekansın 6 olduğu, toplam olasılığın (toplam nispi frekansın) da 1 olduğu görülüyor.

Örnek : Bir madeni paranın iki defa atılması deneyinde rassal değişkenimiz paranın üste gelen yüzleri olsun. Rassal değişkenin alabileceği değerleri ve olasılıkları şöyledir: Paranın bir atılışında mümkün iki durum vardır. Bir para iki defa atılıyorsa $2.2=4$ durumla karşı karşıyayız demektir. Bu durumlar YY, YT, TY, TT olarak yazılabilir. Bu durumlardan her birinin olasılığı $\frac{1}{4}$'tür. Buna göre rassal değişken değerleri, beklenen frekanslar ve olasılıklar;

X_i	f_i	$P(X_i)$
YY	1	$\frac{1}{4}$
YT	1	$\frac{1}{4}$
TY	1	$\frac{1}{4}$
TT	1	$\frac{1}{4}$
-	4	1

olur. Burada da, frekansların toplamı 4, olasılıkların toplamı 1'dir.

Rassal değişkenler kesikli ya da sürekli olabilir. Yukarıda verilen iki örnek kesikli rassal değişkendir. Kesikli değişkenin her bir değerine karşı gelen olasılık yazılabilirken, sürekli değişkenin her bir değerine karşı gelen olasılık çok küçük olacağından, ancak fonksiyon olarak yazılabilir. Sürekli bir değişkene ait olasılık değeri olasılık fonksiyonunun integrali ile bulunur. *X* sürekli değişkeninin *a* ve *b* arasında bir değer alması ihtimali:

$$P(a<x<b)=\int_a^b f(x)dx$$

Örnek : Elektronik bir parçanın dayanıklılık süresi (*x* yıl) aşağıdaki şekilde $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

$$f(x)=\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} \qquad x>0$$

Bu parçalardan herhangi birinin ömrünün 5 yıldan fazla olması ihtimali:

$$P(x>5)=\int_0^{\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}}dx=-e^{-\frac{1}{4}x}\Big|_5^{\infty}$$

$$=\left(-e^{-\infty}\right).\left(-e^{-\frac{5}{4}}\right)=-0+0.29=0.29$$

olarak bulunur. Bu olasılık fonksiyonuna ilişkin toplam olasılığın 1 olduğu görülebilir. Fonksiyon tanımlı olduğu bölgede integrallenirse;

$$P(x>0)=\int_0^{\infty}\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}dx=-e^{-\frac{1}{4}x}\Big|_0^{\infty}=1.00$$

bulunur.

Beklenen Değer ve Varyans

Bir rassal değişken beklenen (ortalama) değer ve varyansı ile karakterize edilebilir, yani betimlenebilir. Beklenen değer, bir rassal değişkenin alabileceği değerlerin ortalaması olup, $E(X)$ ile gösterilir[1]. Kesikli rassal değişken için beklenen değer, her bir değerin karşı gelen olasılıklarla çarpımının toplamıdır.

$$E(X)=\sum X_i P(X_i)$$

Sürekli bir rassal değişkenin beklenen değeri ise bu değişkenin olasılık fonksiyonunun tanımlı olduğu aralıktaki,

$$E(X)=\int x.f(x)dx$$

integrali ile tanımlanır. Kesikli veya sürekli olsun, bir *X* rassal değişkeninin varyansı ise beklenen değerler cinsinden şu şekilde tanımlanmaktadır[2]:

$$Var(X)=E\left[X-E(x)\right]^2$$

Bu ifade açıldığında varyans için daha pratik bir tanım;

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

ile elde edilmektedir. Yukarıdaki tanımlardan a sabit sayı olmak üzere beklenen değer ve varyans için şu özellikler çıkarılabilir:

$$E(a) = a$$

$$E(aX) = a.E(X)$$

$$E(E(X)) = E(X)$$

$$Var(a) = 0$$

$$Var(aX) = a^2 Var(x)$$

Örnek : X kesikli değişkeni bir zar atma deneyinde, gelen rakamlar olsun. Zar atma deneyinde gelen rakamların beklenen değeri;

$$E(X) = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 5\left(\frac{1}{6}\right) + 6\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= (1+2+3+4+5+6)\frac{1}{6} = 3.5$$

olarak bulunur. Bu şekilde tamsayılı bir değişken kesirli bir beklenen değere sahip olabilir. Zar atılışında gelen rakamların varyansını bulmak için önce karelerin beklenen değerini bulalım.

$$E(X) = 1^2\left(\frac{1}{6}\right) + 2^2\left(\frac{1}{6}\right) + 3^2\left(\frac{1}{6}\right) + 4^2\left(\frac{1}{6}\right) + 5^2\left(\frac{1}{6}\right) + 6^2\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= 1\left(\frac{1}{6}\right) + 4\left(\frac{1}{6}\right) + 9\left(\frac{1}{6}\right) + 16\left(\frac{1}{6}\right) + 25\left(\frac{1}{6}\right) + 36\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= (1+4+9+16+25+36)\frac{1}{6} = 15.2$$

Öte yandan $E(X) = 3.5$ olarak daha önce bulunmuştu. Buradan varyans,

$$Var(X) = E(X^2) = [E(X)]^2 = 15.2 - (3.5)^2 = 2.9$$

olarak hesaplanır.

Örnek : Sürekli bir rassal değişkenin olasılık fonksiyonu;

$$f(X) = 2X, \quad 0 < X < 1$$

ile verilmiştir. *X* değişkeninin beklenen değerini bulalım.

$$E(X) = \int_0^1 x.f(x).dx = \int_0^1 x.2x.dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3} = 0.67$$

olarak bulunur. Varyans hesabı için yine ilk önce karesel beklenen değeri bulmalıyız. Karesel beklenen değer;

$$E(X) = \int_0^1 x^2.f(x).dx = \int_0^1 x^2.2x.dx = 2\int_0^1 x^3 dx = \frac{2}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{2} = 0.50$$

olarak bulunur. Buradan varyans hesabı,

$$Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = 0.50 - (0.67)^2 = 0.05$$

olarak hesaplanır.