UYGULAMALAR

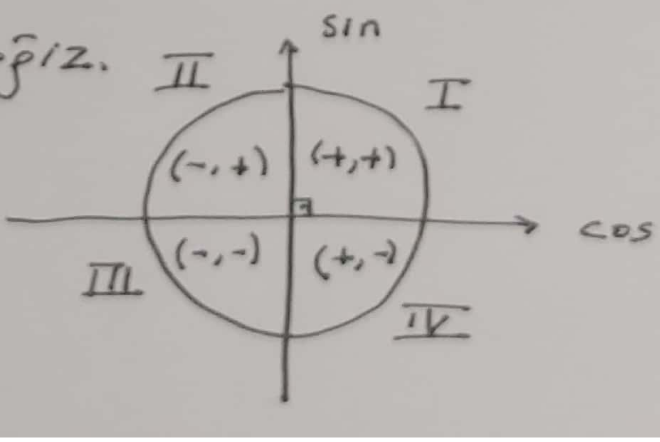
Kompleks sayıları kutupsal formda yazmak için trigonometrik bilgiye sahip olmak gerekir. Bunun için I. bölgedeki açı değerlerini,

$\xrightarrow{\text{SIN}}$

$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$90°$	$60°$	$45°$	$30°$	$0°$

$\xleftarrow{\text{cos}}$

değerlerini ezberlemeksizin bulabiliriz. Daha sonra aşağıda vereceğim trigonometrik bağıntılar yardımıyla da diğer bölgelerdeki açıların sin ve cosinüslerini kolayca bulabileceğiz.



İşaretler; (+), (−), (+) bulunur.

GENİŞ AÇILARIN TRİGONOMETRİK ORANLARI

Aşağıdaki tabloda geniş açıların yatay ve düşey eksenlere göre trigonometrik oranları verilmiştir.

Tabloyu inceleyiniz.

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$ $\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=+\sin\alpha$ $\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha$ $\cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(2\pi+\alpha)=\tan\alpha$ $\cot(2\pi+\alpha)=\cot\alpha$

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha \qquad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$

Örnek 4.23. Aşağıdakilerden hangisi $\sin 40^o$ ye eşittir?

A) $\sin 220^o$ B) $\cos 130^o$ C) $\cos(-50^o)$ D) $\sin(-40^o)$ E) $\sin 50^o$

Çözüm: Seçenekleri teker teker inceleyelim.

A) $\sin 220^o = \sin(180+40^o) = -\sin 40^o$

B) $\cos 130^o = \cos(180-50^o) = -\cos 50^o$

C) $\cos(-50^o) = \cos 50^o$

D) $\sin(-40^o) = -\sin 40^o$

E) $\sin 50^o = \sin 50^o$

Birbirini 90° ye tamamlayan açıların cosinüsü sinüsüne eşit olduğundan $\sin 40^o = \cos 50^o$ dir.

Doğru cevap (C) seçeneğidir.

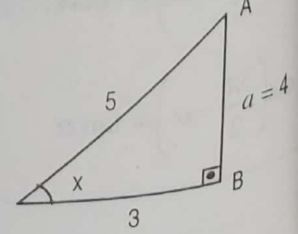
TRİGONOMETRİK ORANLARDAN BİRİ BELLİ İKEN DİĞERLERİNİ BULMA

Trigonometrik oranlardan biri verildiğinde, önce verilen ölçünün hangi bölgede olduğuna bakılıp aranan değerin işareti bulunur. Sonra ya formül kullanarak ya da probleme uyan bir dik üçgen çizilerek çözüm yapılır.

Örnek 4.24. $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ ve $\cos x = \dfrac{3}{5}$ ise $\sin x + \tan x$ toplamının değeri kaçtır?

Çözüm:

$\cos x = \dfrac{3}{5}$ → 3: komşu dik kenar, 5: hipotenüs



UYGULAMALAR

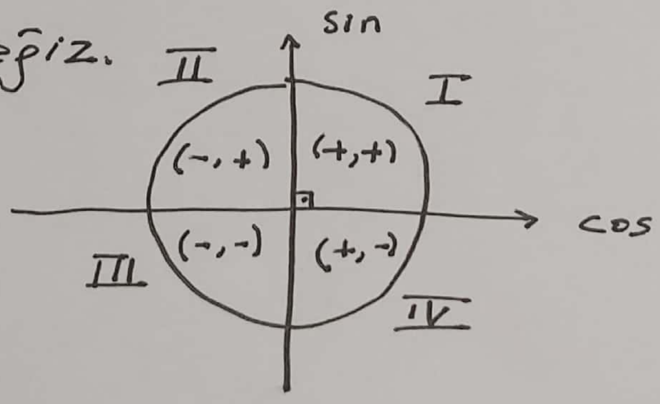
Kompleks sayıları kutupsal formda yazmak için trigonometrik bilgiye sahip olmak gerekir. Bunun için I. bölgedeki açı değerlerini,

$\xrightarrow{\text{SIN}}$

0°	30°	45°	60°	90°
$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
90°	60°	45°	30°	0°

$\xleftarrow{\text{COS}}$

değerlerini ezberlemeksizin bulabiliriz. Daha sonra aşağıda vereceğim trigonometrik bağıntılar yardımıyla da diğer bölgelerdeki açıların sin ve cosinüslerini kolayca bulabileceğiz.



Örnekler

1/ $z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ kompleks sayısını standart formda ($z = a + ib$) yazınız.

($\theta = \frac{\pi}{3}$, $r = 4$)

$$\Rightarrow \quad z = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

2) 1. sorunun karekökünü bulunuz.

De Moivre formülünü hatırlarsak,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \Rightarrow z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

formülünde $n = \frac{1}{2}$ alırsak

$$\Rightarrow \quad z^{1/2} \quad r^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z^{1/2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{3} + i \quad , \quad -\sqrt{3} - i$$

olarak hesaplanacaktır.

3) 1. sorunun 3. kuvvetten köklerini bulalım

$$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3} + 2i$$

$$\left.\begin{array}{l} r = 4 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \\ n = 3 \end{array}\right\} \text{ olduğuna göre}$$

Formülümüz.

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

olduğunu hatırlarsak,

$k = 0, 1, 2$ için z_1, z_2, z_3'ü bulacağız.

$k = 0$ için

$$z_1 = 4^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.0.\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.0\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 4^{1/3}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$k = 1$ için

$$z_2 = 4^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.1\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{9}\right)\right)$$

$k = 2$ için

$$z_3 = 4^{1/3}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2.2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{9}\right)\right.$$