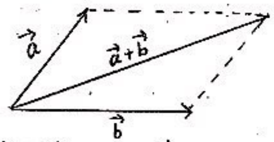
HIFSI ALTINOK

VEKTÖRLER

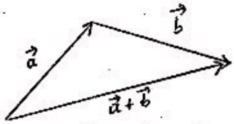
Tanım: Belirli bir yönlü doğru parçasının paralellik bağıntısıyla tanımlı denklik sınıfına vektör denir. Bir vektörü başlangıç noktası, bitim noktası, doğrultusu ve yönü belirler.

Vektörlerle Yapılan işlemler

(a) Toplama İşlemi



(paralelkenar kuralı)

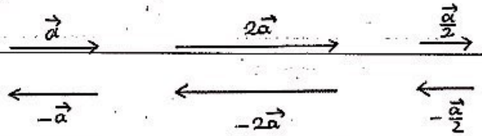


(Üçgen kuralı)

(b) Skaler ile Çarpım

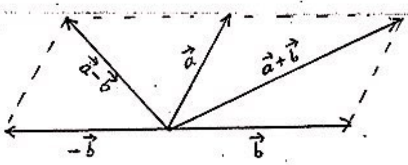
Bir vektörün bir skaler ile çarpılması demek skalerin büyüklük, küçüklük veya negatifliğine göre boyunun uzayıp kısalması veya yönünün değişmesi ile ilgilidir.

Örnek



(c) Çıkarma işlemi

İki vektörün farkı $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$ şeklinde tanımlanır.

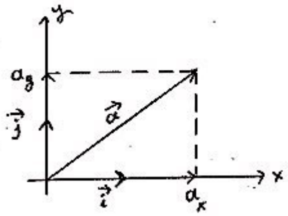


Düzlemde (İki Boyutlu Uzayda) Vektör Gösterimi

İki boyutlu uzayda $\vec{i}=(1,0)$, $\vec{j}=(0,1)$ standart baz vektörleri a_x ve a_y elemanlarının bileşenleri olmak üzere düzlemde bir vektörü

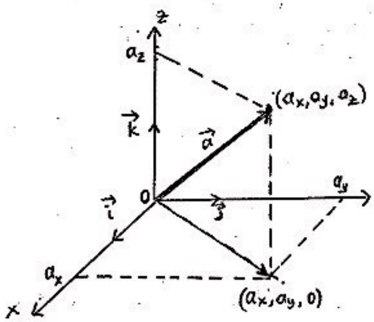
$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} = (a_x, a_y)$$

şeklinde göstereceğiz.



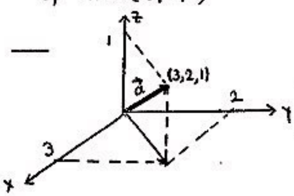
Üç Boyutlu Uzayda Vektör Gösterimi

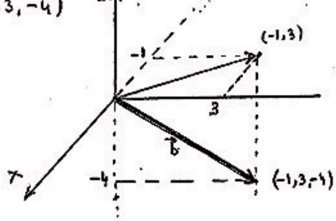
$\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$ standart baz vektörleri a_x, a_y, a_z ile verilen vektörün bileşenleri olmak üzere $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z)$ vektörü aşağıda gösterilmiştir.



ÖRNEK : Üç boyutlu uzayda aşağıdaki vektörleri gösteriniz.

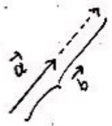
a) $\vec{a} = (3,2,1)$ b) $\vec{b} = (-1,3,-4)$



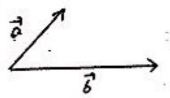


Lineer Bağımlı ve Lineer Bağımsız Vektörler

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ herhangi iki vektör ve bu vektörlerin biri diğerinin katı şeklinde yazılabiliyorsa bu vektörlere lineer bağımlı vektörler denir. Aksi durumda lineer bağımsız vektörler denir.



($\vec{b} = 2\vec{a}$ old. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ lineer bağımlı)



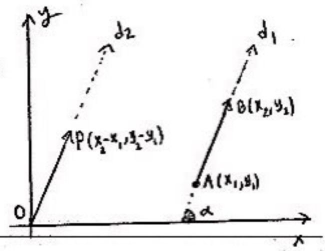
($\vec{a}$ ve $\vec{b}$ lineer bağımsız)

Baz : $\vec{u}, \vec{v} \in V$ olsun. Eğer $\vec{u}$ ve $\vec{v}$ vektörleri lineer bağımsız ise $(\vec{u}, \vec{v})$ çiftine V kümesi üzerinde bir baz denir.

Konum (Yer) Vektörü : Başlangıç noktası orjin olan vektörlere konum vektörü denir. Eğer vektör orjinde değilse vektörün uzunluğunu ve yönünü değiştirmemek kaydıyla orjine taşıyabiliriz.

$\vec{AB}$ vektörüne eş ve başlangıç noktası orjin olan $\vec{OP}$ vektörüne $\vec{AB}$ nin konum vek. denir.

$$\vec{P} = \vec{OP} = \vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$$
$$= \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$



ÖRNEK : $A(-2,4)$, $B(3,-6)$ ise $\vec{AB}$ nin konum vektörü

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = [3,-6] - [-2,4] = [3-(-2), -6-4] = [5,-10].$$

İki Vektörün Eşitliği

$\vec{A} = (x_1, y_1)$, $\vec{B} = (x_2, y_2)$ vektörleri için

$$\vec{A} = \vec{B} \iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2 \text{ ve } y_1 = y_2 \text{ dir.}$$

Vektör Uzayları

$V \neq \emptyset$ vektörlerin bir kümesi ve K bir cisim olsun.

$\oplus : V \times V \to V$ ve $\odot : K \times V \to V$ fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlarsa V'ye K cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

$\forall x, y, z \in V$ ve $\forall \alpha, \beta \in K$ için $x \oplus y \in V$ olmak üzere (kapalılık) (Çarpmaya göre)

1) $x \oplus y = y \oplus x$ (Değişme)
2) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$ (Birleşme)
3) $x \oplus e = e + x = x$ (Birim eleman)
4) $x \oplus (-x) = (-x) \oplus x = e$ (Ters eleman)
5) $\varepsilon \odot x = x$ (ε birim eleman)
6) $\alpha \odot (x \oplus y) = (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y)$
7) $(\alpha \oplus \beta) \odot x = (\alpha \odot x) + (\beta \odot x)$
8) $(\alpha \odot \beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x)$

NOT: $K \neq \emptyset$ bir küme ve üzerinde "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri tanımlansın. $(K, +, \cdot)$ üçlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa K'ya $\boxed{\text{cisim}}$ denir. $\forall a, b, c \in K$ için

1) $a + b = b + a$
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$
3) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
4) $a + 0 = a$
5) $a + (-a) = 0$
6) $a \cdot b = b \cdot a$
7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
8) $a \cdot 1 = a$
9) $a \cdot a^{-1} = 1$

Bir vektör uzayı, üzerinde tanımlandığı cisme göre isim alır. Eğer K bir reel sayılar cismi ise V'ye reel vektör uzayı, $K = \mathbb{C}$ yani K kompleks sayılar cismi ise V'ye kompleks vektör uzayı denir.

$\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı :

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \}$ kümesi toplama ve skaler ile çarpım işlemine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzayda toplama ve skaler ile çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ dir.

$\alpha \in \mathbb{R}$ skaler olmak üzere

$\alpha \vec{x} = \alpha (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ dir.

ÖRNEK : $(1, 2, 1, 3)$, $(2, 1, 3, 1) \in \mathbb{R}^n$ verilsin.

$(1,2,1,3) + (2,1,3,1) = (3,3,4,4)$

$5 \cdot (1,2,1,3) = (5,10,5,15)$

Alt Vektör Uzayı V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı, W da V nin bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa W'ya V nin bir alt uzayıdır denir.

i) $\forall x,y \in W$ için $x+y \in W$

ii) $\forall x \in W$ ve $\forall \alpha \in K$ için $\alpha x \in W$

ÖRNEK: $V=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_n) : x_1+x_2+\dots+x_n=0\}$ kümesinin $\mathbb{R}^n$ nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: i) $x,y \in V$ ve $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ olmak üzere $x+y \in V$ yani $(x_1+y_1, x_2+y_2,\dots,x_n+y_n) \in V$ olduğunu göstermeliyiz.

$$x \in V \Rightarrow \quad x_1+x_2+\dots+x_n=0$$
$$y \in V \Rightarrow \quad + \underline{y_1+y_2+\dots+y_n=0}$$
$$(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\dots+(x_n+y_n)=0$$

old. $x+y \in V$ dir.

ii) $\forall x \in V$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \in V$ olduğunu yani $\alpha x_1+\alpha x_2+\dots+\alpha x_n=0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$x \in V \Rightarrow \quad x_1+x_2+\dots+x_n=0 \text{ dır.}$$
$$\alpha x = \alpha(x_1+x_2+\dots+x_n)=\alpha.0=0$$

old. $\alpha x = \alpha x_1+\alpha x_2+\dots+\alpha x_n \in V$ dir.

$x+y \in V$ ve $\alpha x \in V$ old. $V \subset \mathbb{R}^n$ bir alt vektör uzayıdır.

ÖRNEK: $V=\{x=(x_1,x_2,x_3) : x_i>0\} \subset \mathbb{R}^3$ kümesinin alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $\forall x,y \in V$ için $x=(x_1,x_2,x_3)$ ve $y=(y_1,y_2,y_3)$ olmak üzere $x+y \in V$ olduğunu göstermeliyiz:

$$\left.\begin{array}{l} x \in V \Rightarrow x_1>0,\ x_2>0,\ x_3>0 \\ y \in V \Rightarrow y_1>0,\ y_2>0,\ y_3>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1+y_1),(x_2+y_2),(x_3+y_3)>0$$

olup $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \in V$ dir.