Beta Dağılımı:

Bu dağılım özellikle endüstri mühendisliği ve yöneylem araştırması gibi alanlarda kullanılmaktadır.

Tanım : $\forall \alpha, \beta > 0 \; için$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx \qquad (1)$$

fonksiyonuna Beta fonksiyonu denir. Beta fonksiyonu için

$$B(\alpha,\beta) = B(\beta,\alpha)$$

eşitliği sağlanır. Beta fonksiyonu Gamma fonksiyonu cinsinden,

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (2)$$

Olarak yazılır. (1) ve (2)'den

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

yazılır.

Tanım : Sürekli X tesadüfi değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.d \end{cases}$$

İse, X tesadüfi değişkeni Beta dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Beta(\alpha,\beta) ile\ gösterilir.$

Beta Dağılımı ile Düzgün, Üçgensel ve Parabolik Dağılım.

Beta dağılımında özel olarak,

1) $\alpha = \beta = 1$ $alınırsa\ X\ düzgün\ dağılıma\ sahip\ olur, yani\ X \sim U(0,1) olur\ ve$

$$f(x) = \begin{cases} 1 \ , & 0 < x < 1 \\ 0 \ , & d.d \end{cases}$$

2) $\alpha = 2 \ , \beta = 1\ için,$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \ , & 0 < x < 1 \\ 0 \ , & d.d \end{cases} \qquad (a)$$

$\alpha = 1 \ , \beta = 2\ için,$

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) \ , & 0 < x < 1 \\ 0 \ , & d.d \end{cases} \qquad (b)$$

(a) ve (b) dağılımlarına üçgensel dağılım denir.

3) $\alpha = 2 \ , \beta = 2\ için$

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) \ , & 0 < x < 1 \\ 0 \ , & d.d \end{cases}$$

Dağılımına ise parabolik dağılım denir.

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \int_{DX} x f(x) dx$$

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

$$\int_0^1 x x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\, \Gamma(\alpha)$$

ve

$$\Gamma(\alpha+\beta+1) = (\alpha+\beta)\, \Gamma(\alpha+\beta)$$

olur. Bu eşitlikler yardımı ile.

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

bulunur.

$$E(X^2) = \int_{DX} xf(x)dx$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^2 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)}$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

bulunur. Sıfır etrafındaki $k - \imath nc\imath\ moment\ de,$

$$E\left(X^k\right) = \int_{DX} x^k f(x)dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{k+\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+k+\beta)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+k+\beta)\Gamma(\alpha)}$$

Örnek : Kimyasal bir maddenin maksimum 1 yıl olan ömrü $\alpha = 3\ ve\ \beta = 4$ parametreli ile Beta dağılımına uymaktadır. X tesadüfi değişkeni bu maddenin ömrünü gösterdiğine göre;

a) F(x)' i bulunuz.

b) Bu kimyasal maddenin ömrünün üç aydan az olma olasılığı nedir?

c) $P(0{,}2 < X < 0{,}5) = ?$

d) Bu maddenin beklenen ömrü kaç aydır?

Çözüm: $X \sim Beta(3;4) olmak\ üzere,$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(3{,}4)} x^2(1-x)^3 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.d \end{cases}$$

$$B(3{,}4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(3+4)} = \frac{2!\,3!}{6!} = \frac{1}{60}$$

$$f(x) = \begin{cases} 60x^2(1-x)^3 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.d \end{cases}$$

a) X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

$$= \int_{-\infty}^{x} 60s^2\,(1-s)^3 ds$$

$$= x^3(36x^2 + 20) - x^4(45 + 10x^2)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le 0 \\ x^3(36x^2+20) - x^4(45+10x^2) & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \ge 0 \end{cases}$$

b) Üç ay 0,25 yıl olduğundan istenen olasılık aşağıdaki gibidir.

$$P(X < 0{,}25) = F(0{,}25) = 0{,}169433$$

c)

$$P(0,2 < X < 0,5) = F(0,5) - F(0,2)$$

$$= 0,65125 - 0,09888$$

$$= 0,55237$$

d)

$$P(X < 0,25) = F(0,25) = 0,169433$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}\ yıl$$

olarak bulunur. Soruda kimyasal maddenin ortalama ömrü ay cinsinden istendiği için

$$\frac{3}{7}.12 = 5,14\ aydır.$$

Weibull Dağılımı

Weibull dağılımı endüstri mühendisliği, meteoroloji, elektrik mühendisliği ve fizik gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Bu dağılım bazen bir, bazen iki bazen de üç parametreli olarak tanımlanır. Üç parametreli Weibull dağılımına genelleştirilmiş Weibull dağılımı denir ve X genelleştirilmiş Weibull tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım : X tesadüfi değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\alpha}\left(\frac{x-\theta}{\alpha}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x-\theta}{\alpha}\right)^{k}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad d.d \end{cases}$$

ise, f(x)' e genelleştirilmiş Weibull dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu denir. Burada $\alpha > 0$ ölçek parametresi, $k > 0$ şekil parametresi ve $-\infty < \theta < \infty$ dağılım için yer (konum) parametresi olup $X \sim Weibull(k, \alpha, \theta)$ olarak gösterilir.

X' in dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x > 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x-\theta}{\alpha}\right)^k} & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \to \infty \end{cases}$$

Biçimindedir.