ifadeyi bulunuz.

ÇÖZÜM:

$\vec{a} = a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ verilsin. Bunun kendisi ile skalar çarpımı:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = (a_x \cdot a_x)+(a_y \cdot a_y)+(a_z \cdot a_z)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

şeklinde bulunur. Ayrıca skalar çarpım tanımından

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a.a.\cos 0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$$

olur. Son iki eşitlik karşılaştırılırsa

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

veya

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

bulunur.

6.3.3. Vektörel Çarpım (Dış Çarpım):

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel çarpımı $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ şeklinde tanımlı yeni bir vektördür. Bu vektörün bilinmesi için; modül, doğrultu ve yönünün bilinmesi gerekir.

i) $\vec{c}$ nin modülü:

$$c = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = a.b.\sin\theta \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi \tag{6.3.4}$$

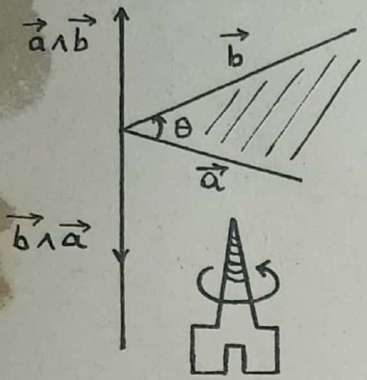
şeklinde bir reel sayıdır.

ii) $\vec{c}$ nin doğrultusu; $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin belirttiği düzleme dik bir doğrultudur.

iii) Yönü ise; aşağıda tanımlayacağımız sağ el veya sağ vida kuralına göre bulunur.

Sağ el kuralı ile $\vec{c}$ nin yönü şu şekilde bulunur. $\vec{c}$ nin doğrultusunu sağ elimizle, elimizin bükülen parmakları $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ye olacak şekilde kavradığımızda baş parmağımızın yönü $\vec{c}$ nin yönünü verir.

Vida kuralı ise Şekil 6.13 de izah edilmiştir.



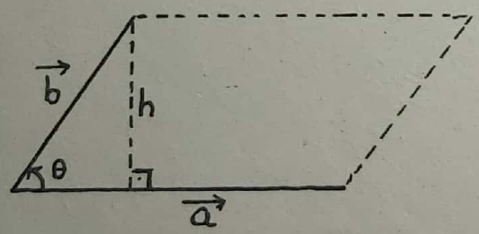
Şekil 6.13

$\vec{u}$, $\vec{a}\wedge\vec{b}$ yönündeki birim vektör olmak üzere $\vec{a}\wedge\vec{b}$ vektörel çarpımı;

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = a.b.\sin\theta.\vec{u} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi \qquad (6.3.5)$$

şeklinde de tanımlanabilir.

$\vec{a}\wedge\vec{b}$ vektörel çarpımının modülü $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanına eşittir (Şekil 6.14).



Şekil 6.14

Paralelkenarın S alanı:

$$S = a.h$$

$$S = a.b.\sin\theta$$

olur. (6.3.4) den

$$S = |\vec{a}\wedge\vec{b}| \qquad (6.3.6)$$

şeklinde bulunur. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin belirttiği üçgenin alanı ise, paralelkenarın alanının yarısına eşit olduğundan,

$$S' = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} |\vec{a} \wedge \vec{b}| \qquad (6.3.7)$$

sonucuna varılır.

6.3.4. Vektörel Çarpımın Özellikleri:

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{c}$ vektörleri için vektörel çarpımın aşağıdaki özellikleri vardır:

1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

2) $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$

3) $m(\vec{a} \wedge \vec{b}) = (m\vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (m\vec{b})$, $m \in \mathbb{R}$

4) $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$.

Bu özelliklerin doğruluğu vektörel çarpımın tanımından kolayca gösterilebilir.

Şimdi iki vektörün vektörel çarpımlarının analitik olarak nasıl yapıldığını görelim:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$$

olsun. Buna göre $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin vektörel çarpı...

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \wedge (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k})$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_xb_x)\vec{i} \wedge \vec{i} + (a_xb_y)\vec{i} \wedge \vec{j} + (a_xb_z)\vec{i} \wedge \vec{k} + (a_yb_x)\vec{j} \wedge \vec{i}$$
$$+ (a_yb_y)\vec{j} \wedge \vec{j} + (a_yb_z)\vec{j} \wedge \vec{k} + (a_zb_x)\vec{k} \wedge \vec{i} + (a_zb_y)\vec{k} \wedge \vec{j}$$
$$+ (a_zb_z)\vec{k} \wedge \vec{k}$$

olur. $\vec{i}, \vec{j}$ ve $\vec{k}$ lar birbirine dik birim vektörler olduğundan, (6.3.5) den

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = i.i.\sin 0.\vec{u} = 0, \quad \vec{j} \wedge \vec{j} = 0, \quad \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = i.j.\sin 90.\vec{k} = \vec{k}$$

($\vec{i} \wedge \vec{j}$ ye dik birim vektör $\vec{k}$ olduğundan $\vec{u}=\vec{k}$ alınmıştır.)

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}\ , \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

bulunur. Vektörel çarpımın özellikleri de gözönüne alınırsa;

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$

olur. Determinant açılımı hatırlanırsa $\vec{a} \wedge \vec{b}$ vektörel çarpımının

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad (6.3.8)$$

şeklinde yazılacağı görülür. Bu eşitlik vektörel çarpımın yapılmasında sağladığı kolaylıktan dolayı önemlidir.

ÖRNEK 6.3.4:

$\vec{a} = 3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ ve $\vec{b} = 2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ vektörleri verildiğine göre $\vec{a} \wedge \vec{b}$ yi hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

(6.3.8) den;

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -5\vec{i}+7\vec{j}+11\vec{k}$$

bulunur.

ÖRNEK 6.3.5:

$\vec{a} = \vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ vektörleri veriliyor;

a) $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c}$ ve $(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$ çarpımlarını,

b) $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin her ikisine de dik olan birim vektörü bulunuz.

ÇÖZÜM:

a)

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \wedge \vec{c}$$

$$= \left(\vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) \wedge \vec{c}$$

$$= (5\vec{i}-5\vec{j}+5\vec{k}) \wedge (\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -5\vec{i}+15\vec{j}+20\vec{k} ,$$

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (5\vec{i}-5\vec{j}+5\vec{k}) \wedge (\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k})$$

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -5 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -40\vec{i}-20\vec{j}+20\vec{k}$$

bulunur.

b) $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin her ikisine de dik olan vektör, $\vec{a}\wedge\vec{b}$ dir. Bu doğrultudaki birim vektör $\vec{u}$ ise;

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}\wedge\vec{b}}{|\vec{a}\wedge\vec{b}|} = \frac{5\vec{i}-5\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{25+25+25}} = \frac{5\vec{i}-5\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{75}}$$

$$\vec{u} = \frac{5}{\sqrt{75}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{75}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{75}}\vec{k}$$

elde edilir.

ÖRNEK 6.3.6:

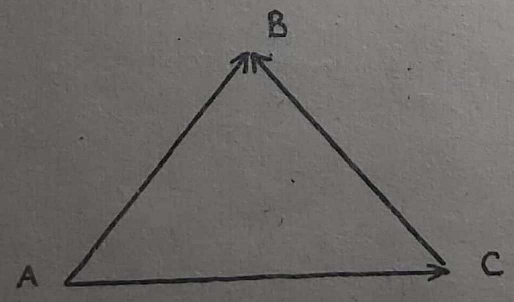
A(2,3,5) , B(4,2,-1), C(3,6,4) noktaları veriliyor.

a) Bu noktaların belirttiği üçgenin alanını bulunuz.

b) $\overrightarrow{AB}$ ve $\overrightarrow{AC}$ vektörleri üzerine kurulan paralelkenarın alanını bulunuz.

ÇÖZÜM:

A,B ve C noktaları üzerine kurulan üçgenin alanı (6.3.7) den;



$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|$$

dir. (6.1.4) den

$$\overrightarrow{AB} = (4-2)\vec{i}+(2-3)\vec{j}+(-1-5)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i}-\vec{j}-6\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-2)\vec{i}+(6-3)\vec{j}+(4-5)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$$

bulunur. ABC üçgeninin alanı;

$$S = \frac{1}{2} \left| (2\vec{i}-\vec{j}-6\vec{k}) \wedge (\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}) \right|$$

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| 19\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k} \right.$$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{426} \;\; br^2$$

elde edilir.

b) Paralelkenarın alanı (6.3.6) dan

$$S = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$$

veya

$$S = \sqrt{426}\; br^2$$

bulunur.