Alt Vektör Uzayı: V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı, W da V nin bir alt kümesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa W'ya V nin bir alt uzayıdır denir.

i) $\forall x, y \in W$ için $x + y \in W$

ii) $\forall x \in W$ ve $\forall \alpha \in K$ için $\alpha x \in W$

ÖRNEK: $V = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \}$ kümesinin $\mathbb{R}^n$ nin bir alt uzayı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: i) $x, y \in V$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere $x + y \in V$ yani $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in V$ olduğunu göstermeliyiz.

$$x \in V \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$$
$$y \in V \Rightarrow + \; y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$$
$$\overline{(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \dots + (x_n + y_n) = 0}$$

old. $x + y \in V$ dir.

ii) $\forall x \in V$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \in V$ olduğunu yani $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$x \in V \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \text{ dir.}$$
$$\alpha x = \alpha (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \alpha . 0 = 0$$

old. $\alpha x = \alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n \in V$ dir.

$x + y \in V$ ve $\alpha x \in V$ old. $V \subset \mathbb{R}^n$ bir alt vektör uzayıdır.

ÖRNEK: $V = \{ x = (x_1, x_2, x_3) : x_i > 0 \} \subset \mathbb{R}^3$ kümenin alt vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $\forall x, y \in V$ için $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere $x + y \in V$ olduğunu göstermeliyiz:

$$\left.\begin{array}{l} x \in V \Rightarrow x_1 > 0, \; x_2 > 0, \; x_3 > 0 \\ y \in V \Rightarrow y_1 > 0, \; y_2 > 0, \; y_3 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x_1 + y_1), (x_2 + y_2), (x_3 + y_3) > 0$$

olup $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in V$ dir.

ii) $\forall x \in V$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $x=(x_1,x_2,x_3)$ olmak üzere $\alpha x \in V$, yani $(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in V$ olduğunu göstermeliyiz. $x=(x_1,x_2,x_3) \in V$ old. $x_1, x_2, x_3 > 0$ dır. α yı pozitif seçersek $\alpha x > 0$ ve $\alpha x \in V$ olur, fakat α skaler old. negatif de olabilir. Bu nedenle $\alpha < 0$ için yani $\alpha = -1$ seçilirse $\alpha x = (-x_1, -x_2, -x_3) < 0$ olup $\alpha x \notin V$ olur. Buna göre V kümesi $\mathbb{R}^3$ ün bir alt uzayı değildir.

<u>Lineer Kombinasyon (Birleşim)</u> V vektör uzayı K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$ ve $\alpha \in K$ olmak üzere

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

toplamına x'in lineer kombinasyonu (birleşimi) denir.

<u>Örnek</u>: $x_1=(1,2)$, $x_2=(-1,1)$ vektörleri ve $x=(-1,7)$ vektörleri verilsin. Burada x vektörünü

$$x = 2x_1 + 3x_2 \qquad \{(-1,7) = 2(1,2) + 3(-1,1)\}$$

şeklinde yazabiliriz.

<u>Lineer Bağımlılık ve Lineer Bağımsızlık</u>

V bir vektör uzayı ve $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ vektörünü gözönüne alalım.

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

ise $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesine lineer bağımsız; Eğer $c_1, c_2, \dots, c_n$'lerden en az biri sıfırdan farklı ise bu vektörlere lineer bağımlıdır denir.

ÖRNEK: $x_1=(1,-1,1)$, $x_2=(1,0,1)$, $x_3=(0,1,1)$ vektörlerinin lineer bağımlı olup olmadıklarını gösteriniz.

ÇÖZÜM: $c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=0$ olsun.

$$c_1\cdot(1,-1,1)+c_2(1,0,1)+c_3(0,1,1)=(0,0,0)$$

$$(c_1,-c_1,c_1)+(c_2,0,c_2)+(0,c_3,c_3)=(0,0,0)$$

$$(c_1+c_2,-c_1+c_3,c_1+c_2+c_3)=(0,0,0)$$

$c_1+c_2=0$, $-c_1+c_3=0$, $c_1+c_2+c_3=0$

$\Rightarrow$ $c_1=0$, $c_2=0$ ve $c_3=0$ bulunur.

Dolayısıyla tüm c_i sabitleri sıfır olduğundan $\{x_1,x_2,x_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

NOT: $\det(x_1,x_2,\dots,x_n)\neq 0$ ise $\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

yukarıdaki örnekte

$$\det(x_1,x_2,x_3)=\begin{vmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1\neq 0$$ old. lineer bağımsızdır.

Vektörlerin iç çarpımı

V bir reel vektör uzayı olsun. ~~V üzerinde bir iç çarpım~~ aşağıdaki şartları sağlayan bir

$$\langle\,,\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$$
$$(\vec{x},\vec{y})\to\langle\vec{x},\vec{y}\rangle$$

Bazı kaynaklarda iç çarpım "." şeklinde skaler çarpım ile de gösterilir. Yani

$$\cdot : V\times V\to\mathbb{R}$$
$$(\vec{x},\vec{y})\to\vec{x}\cdot\vec{y}$$

dönüşümüdür:

1) $\forall\,\vec{x},\vec{y}\in V$ için $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=\langle\vec{y},\vec{x}\rangle$ (Simetri)

2) $\forall\,\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{y}_1,\vec{y}_2,\vec{x},\vec{y}\in V$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için

$$\left.\begin{aligned}\langle\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2,\vec{y}\rangle&=\alpha\langle\vec{x}_1,\vec{y}\rangle+\beta\langle\vec{x}_2,\vec{y}\rangle\\ \langle\vec{x},\alpha\vec{y}_1+\beta\vec{y}_2\rangle&=\alpha\langle\vec{x},\vec{y}_1\rangle+\beta\langle\vec{x},\vec{y}_2\rangle\end{aligned}\right\}\text{(Bilineerlik)}$$

3) $\forall\,\vec{x}\in V$ için $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle\geq 0$ ve $\langle\vec{x},\vec{x}\rangle=0 \Leftrightarrow \vec{x}=0$

Eğer $V=\mathbb{R}^n$ alınırsa $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ için

$$<,>:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$$

$<\vec{x},\vec{y}> = <(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)> = x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$ dır.

ÖRNEK: $\vec{x}=(1,0,1)$; $\vec{y}=(2,3,1) \Rightarrow$

$\Rightarrow <\vec{x},\vec{y}> = <(1,0,1),(2,3,1)> = 1.2+0.3+1.1=3$

Norm: Bir $\vec{x}\in V$ vektörünün normu $\|\vec{x}\|=\sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}$ şeklinde tanımlanır. Üç boyutlu uzayda $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ ise

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{<(x_1,x_2,x_3);(x_1,x_2,x_3)>} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

şeklindedir.

ÖRNEK: $\vec{x}=(1,2,3)$ ve $\|\vec{x}\|=\sqrt{<\vec{x},\vec{x}>}=\sqrt{<(1,2,3);(1,2,3)>}=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$

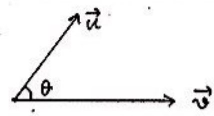
ÖRNEK: $A(-2,-4)$, $B(2,5)$ ise $\vec{AB}$ vektörünün normunu (uzunluğunu) bulunuz.

Çözüm: $\vec{AB}=\vec{B}-\vec{A}=[2,5]-[-2,-4]=[4,9]$

$\Rightarrow \|\vec{AB}\|=\sqrt{4^2+9^2}=\sqrt{97}$

İki Vektör Arasındaki Açı: $\vec{x},\vec{y}\in V$ lineer bağımsız iki vektör olmak üzere, bu iki vektör arasındaki açı

$$\cos\theta = \frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|}$$



formülüyle bulunur.

ÖRNEK: $\vec{x}=(3,1,0)$, $\vec{y}=(0,1,-1)$ ise iki vektör arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm: $$\cos\theta=\frac{<\vec{x},\vec{y}>}{\|\vec{x}\|.\|\vec{y}\|}=\frac{<(3,1,0),(0,1,-1)>}{\sqrt{<(3,1,0),(3,1,0)>}.\sqrt{<(0,1,-1),(0,1,-1)>}}=\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$\theta=77^\circ$

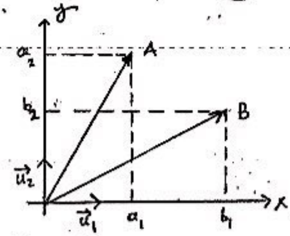
$\cos\theta=\frac{1}{2\sqrt{5}}$ old. Kosinüsü $\frac{1}{2\sqrt{5}}$ olan açıyı hesap mak. ile bulabiliriz.

Birim Vektör: Normu 1 olan vektördür. Bir vektörü birim vektör yapmak için bu vektörün bileşenleri normuna bölünür.

ÖRNEK: $\vec{x}=(-2,3,1) \Rightarrow \|\vec{x}\|=\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}=\sqrt{14}\neq 1$ old. birim vektör değildir. Bu vektörü birim vektör yapalım:

$$E=\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|}=\left(\frac{-2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$ olup $\|\vec{E}\|=1$ 'dir.

İki Nokta Arasındaki Uzaklık:



Şekilde görüldüğü gibi $A(a_1, a_2)$ ve $B(b_1, b_2)$ noktaları arasındaki uzaklık $\vec{u}_1$ ve $\vec{u}_2$ birim vektörler olmak üzere aşağıdaki gibi bulunur.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{BA} = (b_1 - a_1)\vec{u}_1 + (b_2 - a_2)\vec{u}_2$$
$$= (b_1 - a_1)(1,0) + (b_2 - a_2)(0,1) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$
$$\Rightarrow d(A,B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

... **Baz** V vektör uzayının keyfi bir alt kümesi S olsun. S nin elemanlarının her sonlu kümesi lineer bağımsız ise S kümesine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlıdır denir.

$S \subset V$ olsun. Aşağıdaki 2 şart sağlanırsa S'ye $\boxed{\text{baz}}$ denir.

i) S lineer bağımsızdır

ii) $V = Sp\{S\}$ dir. Yani her $\vec{x} \in V$ elemanı S'deki sonlu sayıdaki elemanların bir lineer birleşimidir. $(x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n)$

ÖRNEK: $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$ vektörleri $\mathbb{R}^3$ ün baz vektörleridir. Gerçekten,

i) $c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3 = 0$

$$\Rightarrow c_1(1,0,0) + c_2(0,1,0) + c_3(0,0,1) = (0,0,0)$$
$$(c_1, c_2, c_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ old.}$$

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

ii) Her $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vektörü

$$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$
$$= x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) + x_3(0,0,1)$$
$$= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3)$$
$$= (x_1, x_2, x_3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu nedenle $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bazıdır.

ÖRNEK: $\vec{x}_1=(1,-1,1)$, $\vec{x}_2=(0,1,1)$, $\vec{x}_3=(0,0,1)$ vektörlerinin $\mathbb{R}^3$ ün bir bazı olduğunu gösteriniz

Çözüm: $c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3=(0,0,0)$

$$(c_1, -c_1+c_2, c_1+c_2+c_3)=(0,0,0)$$

Buradan $c_1=c_2=c_3=0$ old. $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ lineer bağımsızdır. Ayrıca $\mathbb{R}^3=Sp\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ old. $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$, $\mathbb{R}^3$ için bir bazdır. (çünkü $\mathbb{R}^3$ ün her x elemanı $x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3$ şeklinde yazılabilir.)

Ortogonal Vektörler

V bir vektör uzayı olsun. Eğer $\vec{x},\vec{y}\in V$ olmak üzere $\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=0$ ise bu vektörlere $\boxed{\text{ortogonal}}$ veya dik vektörler denir.

Ortogonal ve ortonormal sistem

Sonlu boyutlu bir V vektör uzayının bir bazı $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$ olsun. Eğer her i,j; $i,j=1,2,\dots,n$ için $\langle\vec{x}_i,\vec{x}_j\rangle=0$ ise $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n\}$ sistemine $\boxed{\text{ortogonal sistem}}$ denir.

Eğer $\langle\vec{x}_i,\vec{x}_j\rangle=\begin{cases}0, & i\neq j \text{ ise}\\ 1, & i=j \text{ ise}\end{cases}$

şartı sağlanıyorsa $\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n\}$ sistemine $\boxed{\text{ortonormal sistem}}$ denir.

ÖRNEK: $\vec{x}_1=\frac{1}{5}(3,4)$, $\vec{x}_2=(\alpha,\beta)$, V nin lineer bağımsız vektörleri olsun. $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ bir ortonormal sistem ise $(\alpha,\beta)=?$

Çözüm: $\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ bir ortonormal sistem ise

$\langle x_1,x_1\rangle=1$, $\langle x_2,x_2\rangle=1$, $\langle x_1,x_2\rangle=0$ olmalıdır.

$$\langle x_1,x_2\rangle=0 \Rightarrow \langle \tfrac{1}{5}(3,4),(\alpha,\beta)\rangle=0$$
$$\Rightarrow \boxed{3\alpha+4\beta=0}$$

$\langle x_1,x_1\rangle=1$ eşitliğinde bilinmeyen yoktur. Sadece sabit sayılar old. işlem yapmaya gerek yok.

$$\langle x_2,x_2\rangle=1 \Rightarrow \langle(\alpha,\beta),(\alpha,\beta)\rangle=1$$
$$\Rightarrow \boxed{\alpha^2+\beta^2=1}$$

(11)

Buradan $\left.\begin{aligned} 3\alpha + 4\beta &= 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = -\frac{4}{3}\beta$

$\frac{16}{9}\beta^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \pm\frac{3}{5} \quad \alpha = \pm\frac{4}{5}$ bulunur.