SÜREKLİ DAĞILIMLAR:

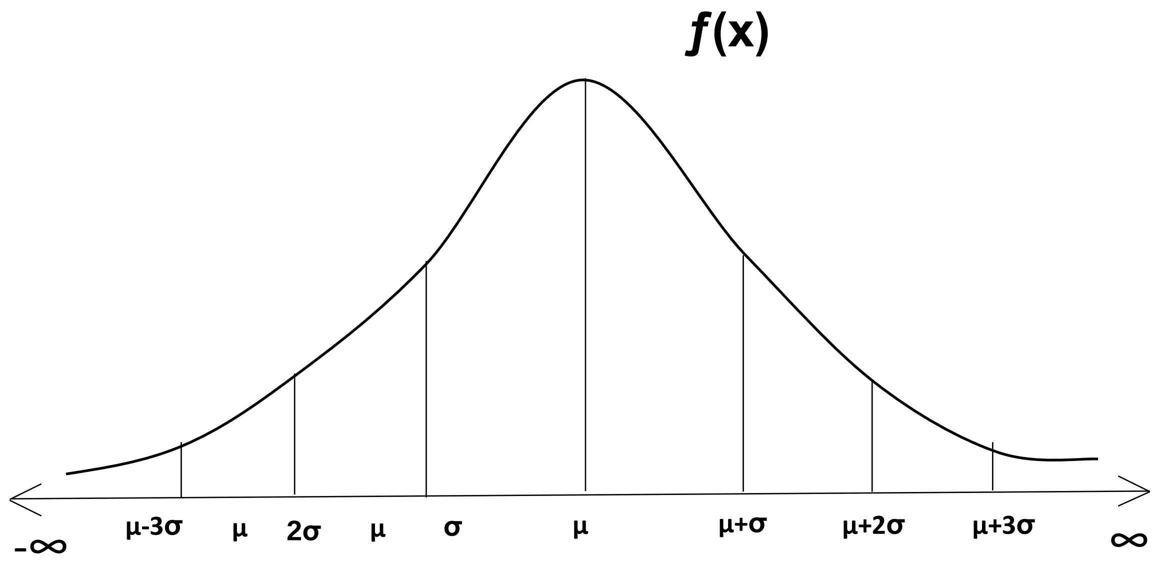
Normal Dağılım :

Normal dağılım ya da Gauss dağılımı pratikte çok sık karşılaşılan sürekli bir dağılımdır. İnsanların boy uzunlukları zekâ seviyeleri gibi değişkenler Normal dağılmış tesadüfi dağılımlara örnek olarak verilebilir.

Tanım : X Normal dağılmış bir tesadüfi değişken iken bunun olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, & -\infty < x < \infty \\ 0 \quad , & d.d. \end{cases}$$

biçimindedir. Bu dağılım iki parametrelidir, bunlar $-\infty < \mu < \infty$ ve $\sigma^2 > 0$' dir. Normal dağılım için $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gösterimi kullanılır. Normal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekildeki gibidir.



Şekil5.2 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$' nin olasılık yoğunluk fonksiyonu.

Şekilde görüldüğü gibi normal dağılım μ' ye göre simetriktir. μ'nün sağındaki ve solundaki iki alan eşittir. Yani

$$\int_{-\infty}^{\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx + \int_{\mu}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 0.5 + 0.5 = 1$$

olur. f(x) fonksiyonu x-eksenine sağdan ve soldan asimptotik olarak yaklaşır.

x= μ noktasında f(x) maksimum değeri olan $1/\sqrt{2\pi\sigma}$ değerini alır. Ayrıca f(x) fonksiyonunu büklüm noktası $\mu - \sigma$ ve $\mu + \sigma$ dır.

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olduğunda bazı özel olasılık değerleri aşağıda verilmiştir.

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \cong \%68$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \cong \%95$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \cong \%99$

Normal dağılıma sahip X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-\mu}{\sigma}\right)^2} ds$$

ile gösterilir

$\forall x \epsilon R \text{ için simetri }$ özelliğinden $F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x) olur.$

Moment Çıkaran Fonksiyon:

$$E(e^{tx}) = M_X(t) = \int_{-\infty}^{\mu} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = u \rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sigma}$$

Olur. Böylece $dx = du\sigma \text{ ve } x = u\sigma + \mu' ye\ eşittir.\ u' için\ yeni\ sınıflar\ yerine\ konulduğunda$ $sınıf\ değerleri\ aynı\ kalır.$

$$M_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\mu} e^{t(u\sigma+\mu)} e^{-\frac{u^2}{2}} du\sigma$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t\sigma - \frac{u^2}{2}} du$$

$t\sigma u - \frac{u^2}{2} parabolü\ tam\ kareye\ tamamlanırsa$

$$t\sigma u - \frac{u^2}{2} + \frac{(t\sigma)^2}{2} - \frac{(t\sigma)^2}{2}$$

$$M_x(t) = \frac{e^{\mu t + \frac{(t\sigma)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-t\sigma)^2} du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-t\sigma)^2}\, du$$

İntegralinde u-$u - t\sigma = v \rightarrow \frac{dv}{du} = 1 \rightarrow dv = du$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2}\, dv = \sqrt{2\pi}$$

olduğundan

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{(t\sigma)^2}{2}}$$

ve $M_x(0) = 1\ bulunur. Ayrıca\ \ M'x(0) = E(X)\ ve\ M''x(0) = E(X^2)\ yardımıyla$

$$M'x(0) = E(X) = \mu$$

$$M''x(0) = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \sigma^2$$

elde edilir.

Standart Normal Dağılım:

$X \sim N(\mu, \sigma^2)\ iken\ F(X)'e\ ait\ integralin\ kapalı\ hali\ elde\ edilmemektedir. Dolayısıyla\ F(X)$ değerlerinin hesaplanması için tablolar geliştirilmiştir. Bu bağlamda X tesadüfi değişkeni standartlaştırılarak Z değişkenine dönüştürülür.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

alındığında;

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

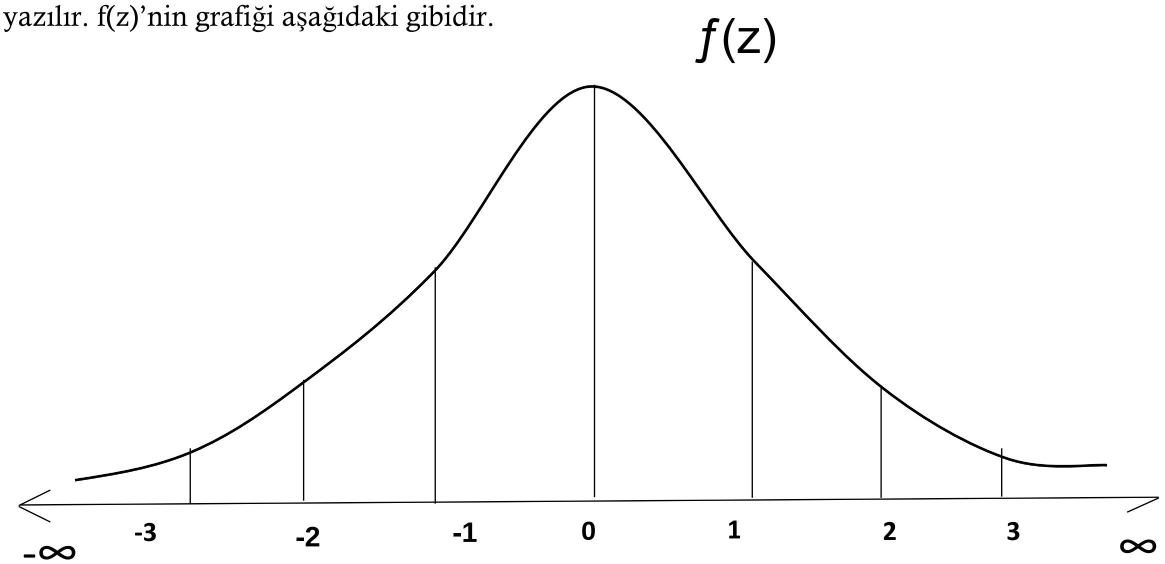
$$Var(Z) = Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}Var(X) = 1$$

bulunur. Ayrıca Normal dağılıma sahip bir X tesadüfi değişkeninin her bir lineer fonksiyonu da normal dağılıma sahip olduğundan dolayı $Z\sim N(0,1)$ yazılır.

Tanım : Z~N$(0,1)$ $tesadüfi\ değişkeninin\ olasılık\ yoğunluk\ fonksiyonu$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}, & -\infty < x < \infty \\ 0 \quad , & d.d. \end{cases}$$

yazılır. f(z)'nin grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil $Z\sim N(0,1)$ tesadüfi değişkenini olasılık yoğunluk fonksiyonu.

Şekilde görüldüğü gibi standart normal dağılım f(z) eksenine göre simetriktir. f(z) fonksiyonu z-eksenine sağdan ve soldan asimtotik olarak yaklaşır. z=0 noktasında f(z) maksimum değeri olan $1/\sqrt{2\pi}$ değerini alır. Ayrıca f(z) fonksiyonunu büklüm noktaları -1 ve +1 noktalarıdır. $Z\sim N(0,1)$ olduğunda aşağıdaki bazı özel olasılık değerleri verilmiştir.

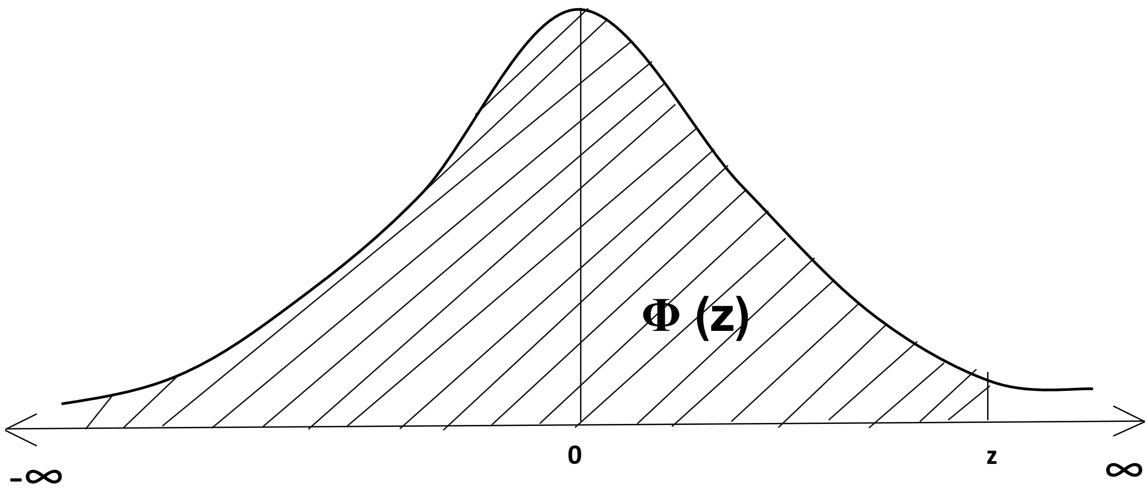
$$P(-1 < Z < 1) \cong \%68$$

$$P(-2 < Z < 2) \cong \%95$$

$$P(-3 < Z < 3) \cong \%99$$

Standart normal dağılımın birikimli dağılım değerleri tablo halinde Ek-A da verilmiştir.

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \Phi(\mathrm{z})$$



Şekil 5.4 $Z \sim N(0,1)$ tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu.

F(z)= Φ(z) tablo değerinden yararlanarak Normal dağılımla ilgili problemlerin tamamı çözülür.

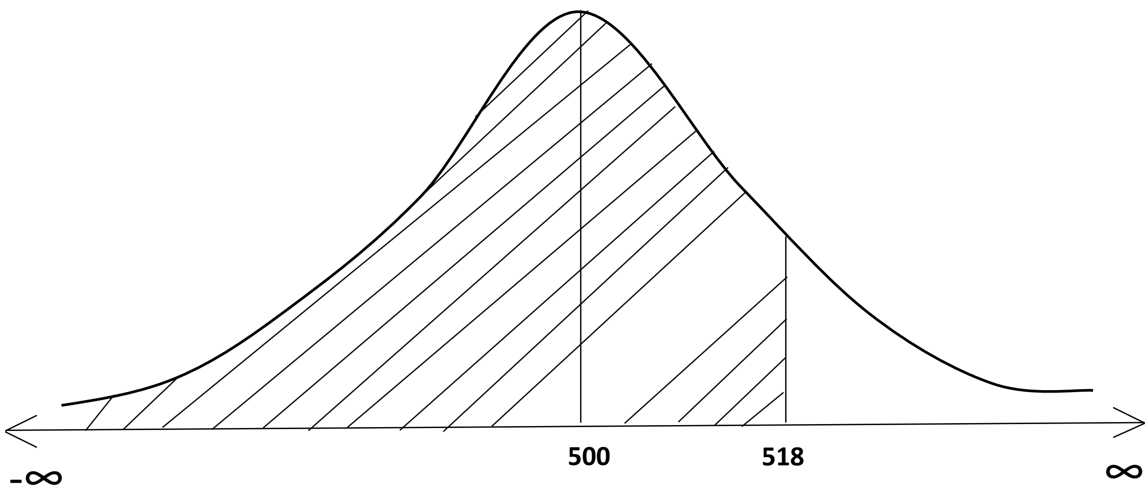
Örnek: Bir konserve fabrikasındaki konserve kutularının ağırlıkları $\mu = 500\ gr\ ve\ \sigma^2 = 100\ gr\ olarak\ normal\ dağılıma\ sahiptir$. Buna göre tesadüfi olarak seçilen bir kutunun,

a) 518 gr dan az olması olasılığı nedir?
b) 480 gr dan çok olması olasılığı nedir?
c) 485 ile 515 gr arasında olması olasılığı nedir?

Çözüm a)

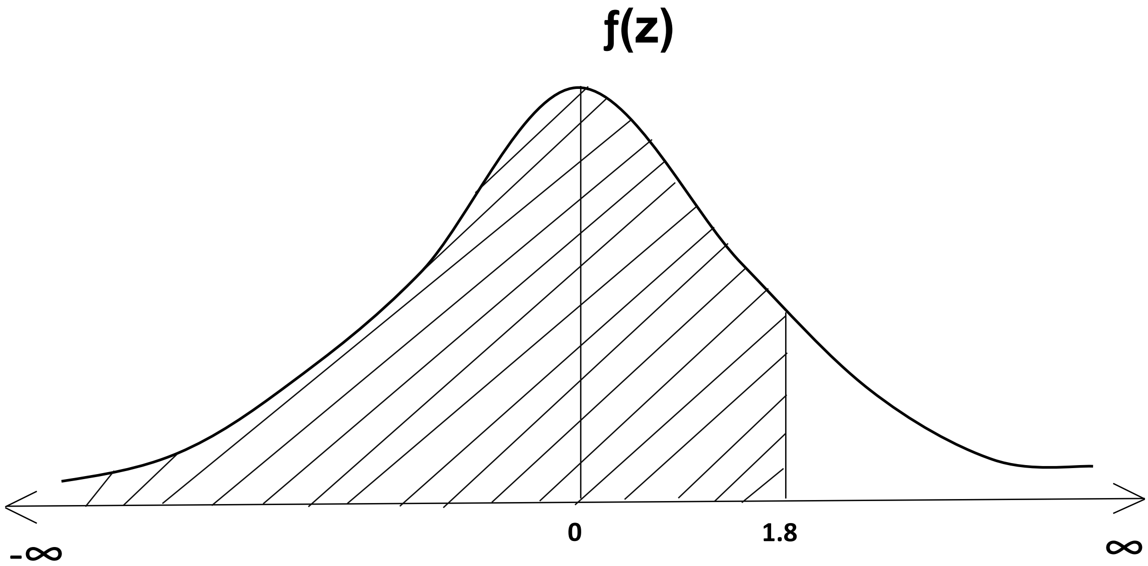
$$P(X < 518) = P\left(X < \frac{518 - 500}{10}\right) = P(Z < 1.8)$$

f(z)



Şekil $X \sim N(500,100)$' nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve$P(Z < 518)$ olasılığı.

X tesadüfi değişkeni standartlaştırıldığında istenen olasılık aşağıdaki şekilde gösterilir.

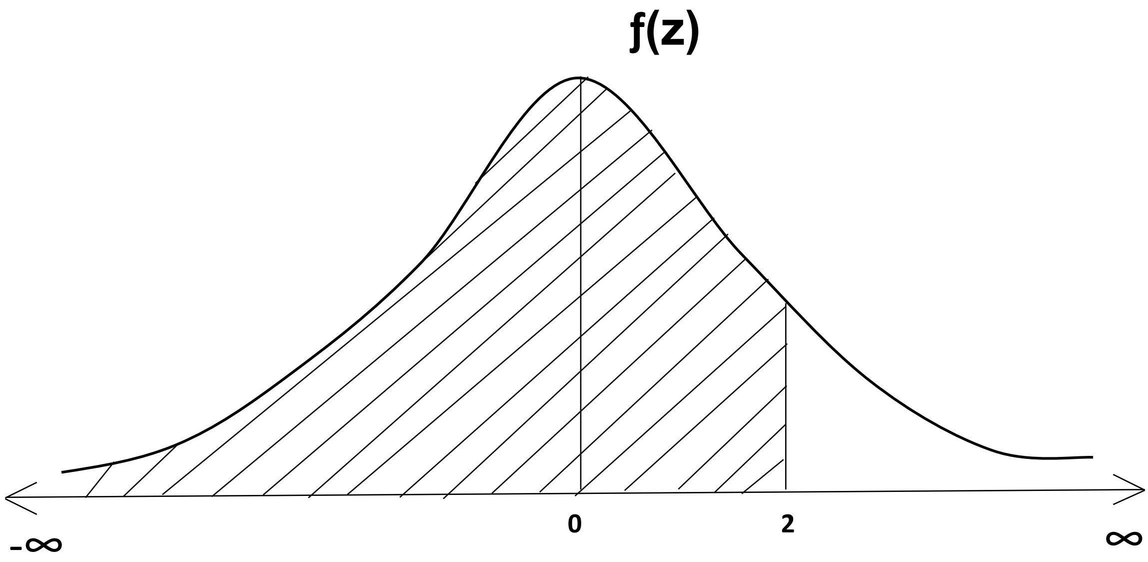


Şekil $Z \sim N(0,1)$' nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $P(Z < 1{,}8)$ olasılığı.

$$P(Z < 1.8) = \Phi(1.8) = 0.9641 \; olarak \; bulunur.$$

b)

$$P(X > 480) = P(Z > -2) = P(Z < 2) = \Phi(2) = 0.9772$$



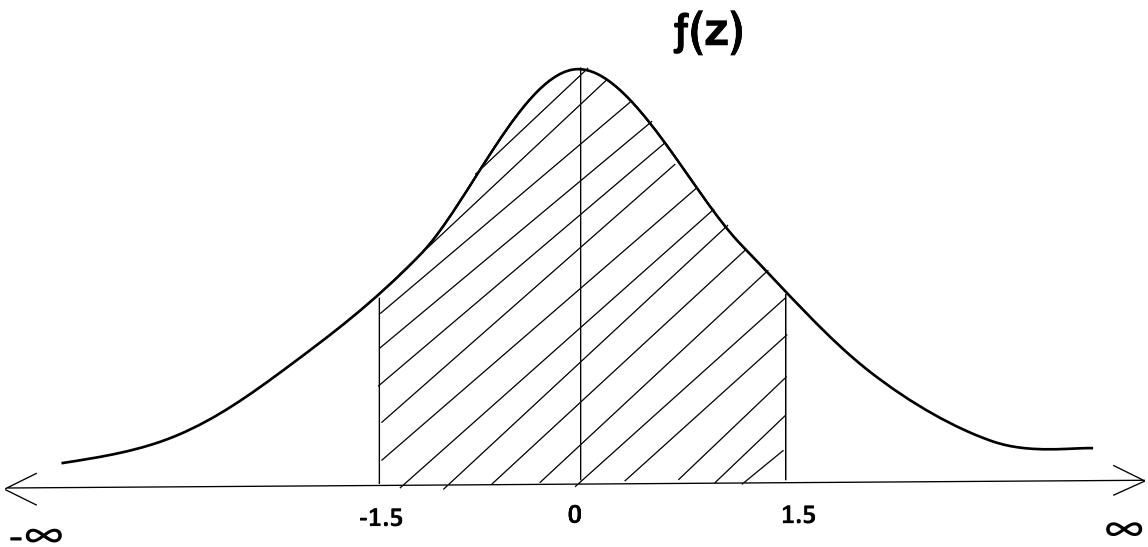
Şekil $Z \sim N(0,1)$' nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $P(Z < 2)$ olasılığı.

c)

$$p(485 < X < 515) = P\left(\frac{485 - 500}{10} < Z < \frac{515 - 500}{10}\right)$$

$$= P(-1.5 < Z < 1.5$$

$$= \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) = 0.8664$$



Şekil $Z \sim N(0,1)$' nin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $P(-1.5 < Z < 1.5)$ olasılığı.

Örnek : Erkeklerin boy uzunluğu $\mu = 167$cm ortalama $\sigma = 3$ standart sapma ile normal dağılıma uymaktadır. Buna göre,

a) Boyu 167 cm'den daha uzun olan erkeklerin yüzdesi nedir?
b) Boyu 170 cm'den daha uzun olan erkeklerin yüzdesi nedir?
c) Tesadüfi seçilen dört erkeğin hepsinin de 170 cm'den uzun olma olasılığı nedir? Tesadüfi seçilen dört erkeğin ikisinin ortalamadan daha uzun olma olasılığı nedir?

ÇÖZÜM.

a)

X tesadüfi değişkeni cm cinsinden bir erkeğin boyunu göstersin. Bu durumda $X \sim N(167,9)$ olur.

$$P(X > 167) = P\left(\frac{X-167}{3} > 0\right) = P(Z > 0) = \frac{1}{2} \ , Z \sim N(0,1)$$

b)

$$P(X > 170) = P\left(\frac{X-167}{3} > \frac{170-167}{3}\right) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 0{,}16$$

$$Burada\ \Phi, N(0,1) standart\ normal\ dağılım\ foksiyonudur.$$

c) Y tesadüfi değişkeni 170 cm'den uzun erkeklerin sayısını göstersin. Bu durumda Y, n=4 ve p=$P(X > 170) = 0{,}16$ parametreli binom dağılımına sahiptir ve,

$$P(Y = 4) = (0{,}16)^4 = 0{,}0007$$

d) K tesadüfi değişkeni $\mu = 167$ ortalamasından daha uzun olan erkeklerin sayısını versin. Bu durumda K, n=4 ve $p = P(X > 167) = 0{,}5$ parametreli binom dağılımına sahip olur ve,

$$p = P(X > 167) = 0{,}5 \; parametreli\ binom\ dağılımına\ sahip\ olur\ ve,$$

$$P(K = 2) = \binom{4}{2}(0{,}5)^4 = 0{,}375$$

olarak bulunur.