YMH 214 SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

5.Hafta

LİNEER OLMAYAN (NONLİNEER) DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Lineer Olmayan Denklemlerin Çözümü

AÇIK YÖNTEMLER:

- Fixed Point Iteration yöntemi (Sabit nokta iterasyon yöntemi)
- Newton Raphson yöntemi
- Secant yöntemi

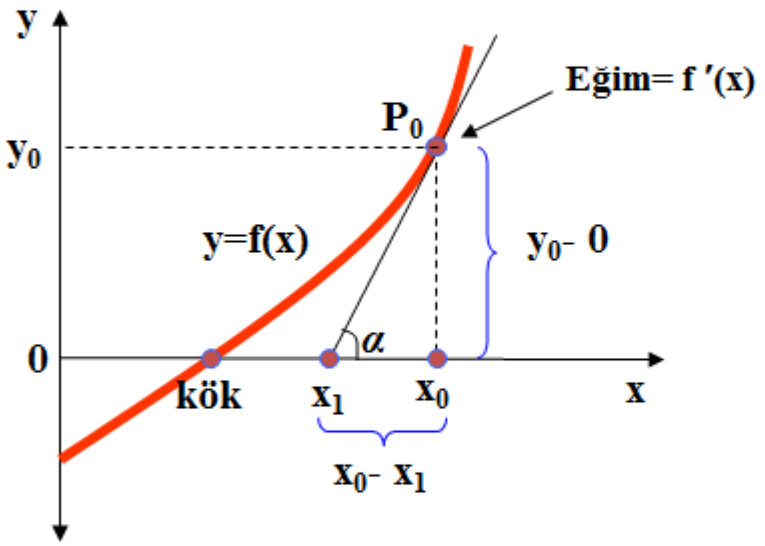
NEWTON RAPHSON YÖNTEMİ

- İşlem adımları açısından basit iterasyon yöntemi gibidir. Ancak **iterasyon formülü farklı olup** verilen fonksiyonun türevi de kullanır.

- Yöntem, **seçilen noktada** teğetin eğiminden yararlanarak köke yakın bir başka noktanın bulunması esasına dayanır.

- **Kök civarında seçilen** bir x_0 noktasındaki fonksiyonun teğetinin x eksenini kestiği x_1 noktası şeklin geometrisinden yararlanılır.

Newton Raphson Yöntemi



$$\Rightarrow \tan\alpha = f'(x_0) = \frac{y_0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Bir sonraki adımdaki değer ***x₂***

$$\Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Genel İfade

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton Raphson Yöntemi

Newton-Raphson yöntemine ait işlem adımları şöyle sıralanabilir.

1-) Verilen $f(x)=0$ fonksiyonun türevi alınır.

2-) İterasyona başlamak için tahmini bir başlangıç değeri (x_0) alınır. Genel iterasyon denklemi kullanılarak yeni x değerleri bulunur.

3-) İterasyona $|E_b| < \varepsilon$ oluncaya kadar devam edilir.

4-) Tolerans değeri sağlanıyorsa aranan kök değeri x_{k+1} dir.

- Genelde Newton-Raphson yöntemi hızlı sonuç verir.
- Ancak bu yönteminde yetersiz kaldığı veya sonuç veremediği bazı durumlar vardır.

Newton Raphson Yöntemi

ÖRNEK: $f(x)=x^2-\sin x-2$ fonksiyonun kökünü, başlangıç koşulunu $x_0=2{,}25$ alarak Newton-Raphson yöntemiyle $\varepsilon=0{,}00001$ tolerans değeriyle çözünüz

ÇÖZÜM: $\Rightarrow f(x)=x^2-\sin x-2$ $\quad \Rightarrow f'(x)=2x-\cos x$ $\quad \Rightarrow x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$\Rightarrow k=0 \text{ için}$

$$\Rightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \Rightarrow x_1=2{,}25-\frac{(2{,}25)^2-\sin(2{,}25)-2}{2.(2{,}25)-\cos(2{,}25)}=1{,}804534$$

$$\Rightarrow |E_b|=\left|\frac{x_1-x_0}{x_1}\right|=\left|\frac{1{,}804534-2{,}25}{1{,}804534}\right|=0{,}246859 \quad \Rightarrow |E_b|>\varepsilon$$ Olduğundan işleme devam edilir

---

ÖRNEK: $f(x)=x^2 - \sin x - 2$ fonksiyonun kökünü, başlangıç koşulunu $x_0=2{,}25$ alarak Newton-Raphson yöntemiyle $\varepsilon=0{,}00001$ tolerans değeriyle çözünüz

---

$\Rightarrow k=1$ *için*

$$\Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \Rightarrow x_1 = (1,804534) - \frac{(1,804534)^2 - \sin(1,804534) - 2}{2.(1,804534) - \cos(1,804534)} = 1,730709$$

$$\Rightarrow |E_b| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{1,730709 - 1,804534}{1,730709}\right| = 0{,}042655 \quad \Rightarrow |E_b| > \varepsilon$$ Olduğundan işleme devam edilir

---

k= 0 için	x_1= 1,804534	$\|E_b\|$= 0,246859
k= 1 için	x_2= 1,730709	$\|E_b\|$= 0,042655
k= 2 için	x_3= 1,728468	$\|E_b\|$= 0,001296
k= 3 için	x_4= 1,728466	$\|E_b\|$= 9,7253e-7

ÖRNEK: ***f(x)= x^4–2x–5*** fonksiyonun kökünü, başlangıç koşulunu $x_0=2$ alarak **Newton-Raphson** yöntemiyle ε=0.00001 tolerans değeriyle çözünüz.

ÇÖZÜM: $\Rightarrow f(x)=x^4-2x-5$ $\Rightarrow f'(x)=4x^3-2$ $\Rightarrow x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

$\Rightarrow k=0$ *için*

$$\Rightarrow x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \Rightarrow x_1=2-\frac{2^4-2.2-5}{4.\,2^3-2}=1,766666$$

$$\Rightarrow |E_b|=\left|\frac{x_1-x_0}{x_1}\right|=\left|\frac{1,766666\ -2}{1,766666}\right|=0,132075 \qquad \Rightarrow |E_b|>\varepsilon$$ Olduğundan işleme devam edilir

---

ÖRNEK: ***f(x)= x⁴–2x–5*** fonksiyonun kökünü, başlangıç koşulunu $x_0=2$ alarak **Newton-Raphson** yöntemiyle ε=0.00001 tolerans değeriyle çözünüz.

$\Rightarrow k=1$ *için*

$$\Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \Rightarrow x_1 = 1,766666 - \frac{1,766666^4 - 2.1,766666 - 5}{4.1,766666^3 - 2} = 1,706434$$

$$\Rightarrow |E_b| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{1,706434 - 1,766666}{1,706434}\right| = 0,035296 \quad \Rightarrow |E_b| > \varepsilon \text{ Olduğundan işleme devam edilir}$$

---

k= 0 için	x_1= 1,766666	**|E$_b$|**= 0,132075
k= 1 için	x_2= 1,706434	**|E$_b$|**= 0,035296
k= 2 için	x_3= 1,702719	**|E$_b$|**= 0,002181
k= 3 için	x_4= 1,702706	**|E$_b$|**= 7,4169e-6

Newton Raphson Yöntemi Matlab Çözümü

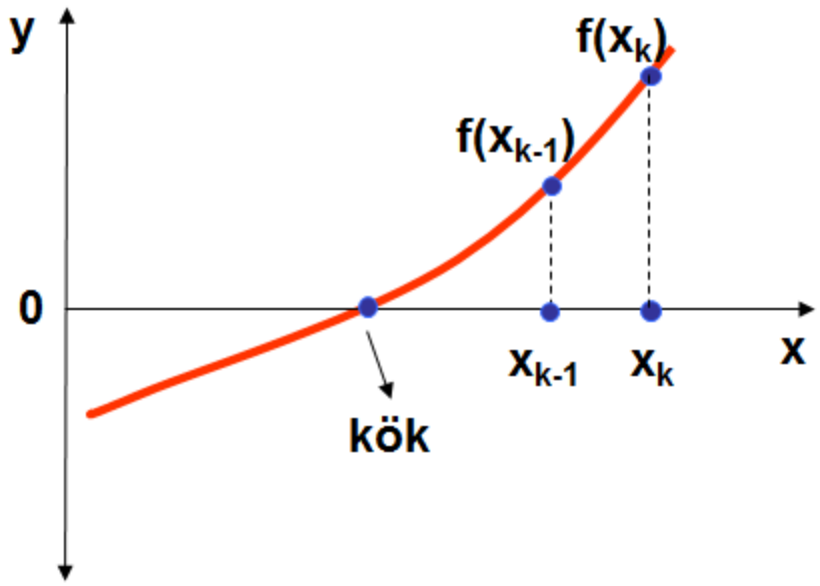
```
clear all;close all;clc
fprintf('Newton Raphson yöntemini kullanarak f(x)=sqrt(x)+In(x)-2*sin(x/2) denkleminin köklerini bulma \n');
x0=1.1;
tol=1.0E-6;

for i=1:100
    fx0=sqrt(x0)+log(x0)-2*sin(x0/2);
    fdx0=1/(2*sqrt(x0))+1/x0-cos(x0/2);
    x1=x0-fx0/fdx0;
fprintf('%4.1f   %7.4f   %7.4f   %7.4f\n',i,x0,x1,abs(x1-x0));
if abs(x1-x0)<tol
break;
end
x0=x1;
end
disp('Yaklaşık kök=')
x0
```

Program Çıktısı

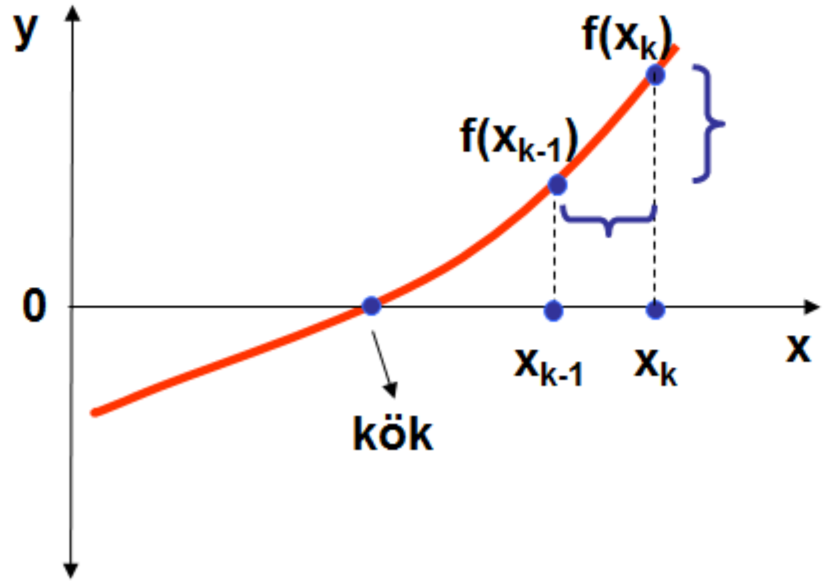
```
Newton Raphson yöntemini kullanarak f(x)=sqrt(x)+In(x)-2*sin(x/2) denkleminin köklerini bulma
 1.0     1.1000    0.9148    0.1852
 2.0     0.9148    0.9368    0.0220
 3.0     0.9368    0.9373    0.0004
 4.0     0.9373    0.9373    0.0000
Yaklaşık kök=

x0 =

    0.9373
```

SECANT (KİRİŞ) YÖNTEMİ

- *Newton-Raphson* yönteminin uygulanması sırasında türev alınmasında zorluklarla karşılanabilir.
- Polinomlar ve bir çok başka fonksiyonlar için bu sorun olmasa da, **Türevlerinin hesaplanması** son derece zor veya zaman alıcı olan belirli fonksiyonlar vardır.
- **Böyle durumlarda türev** Geriye Sonlu Farklar yaklaşımı ile bulunur.



SECANT (KİRİŞ) YÖNTEMİ



Geriye Sonlu farklar yaklaşımıyla :

$$f'(x_k) \cong \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{(x_k) - (x_{k-1})}$$

Newton-Raphson iterasyon denklemi

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Bu yöntemde hesaplamalara başlamak için **2 tane** ***ilk tahmine*** ihtiyaç duyulur.

Fakat tahminler arasında **f(x)** ***işaret değiştirmek*** **zorunda değildir**

ÖRNEK: $f(x) = e^{-x} - x = 0$ fonksiyonun kökünü, başlangıç koşullarını $x_{-1} = 0$ ve $x_0 = 1$ alarak **Secant Yöntemiyle** $\varepsilon = 0.001$ tolerans değeriyle çözünüz

ÇÖZÜM: $\Rightarrow f(x) = e^{-x} - x = 0$ $\qquad \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k).(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$

$\Rightarrow k = 0$ *için* $\quad \Rightarrow x_{-1} = 0 \quad x_0 = 1 \qquad \Rightarrow f(x) = e^{-x} - x = 0$

$\Rightarrow f(x_{-1}) = f(0) = e^0 - 0 = 1 \qquad \Rightarrow f(x_0) = f(1) = e^{-1} - 1 = 0{,}36788 - 1 = -0{,}63212$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0).(x_0 - x_{-1})}{f(x_0) - f(x_{-1})} = 1 - \frac{(-0{,}63212).(1-0)}{(-0{,}63212) - (1)} = 0{,}61269$$

$\Rightarrow |E_b| = \left|\dfrac{x_1 - x_0}{x_1}\right| = \left|\dfrac{0{,}61269 - 1}{0{,}61269}\right| = 0{,}63212 \quad \Rightarrow |E_b| > \varepsilon$ Olduğundan işleme devam edilir

---

$\Rightarrow k=1\ için \quad \Rightarrow x_0 = 1 \quad x_1 = 0,61269 \quad \Rightarrow f(x) = e^{-x} - x = 0$

$\Rightarrow f(x_0) = e^{-1} - 1 = -0,63212 \quad \Rightarrow f(x_1) = e^{-0,61269} - 0,61269 = -0,07079$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1).(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 0,61269 - \frac{(-0,07079).(0,61269-1)}{(-0,07079) - (-0,63212)} = 0,56383$$

$\Rightarrow |E_b| = \left|\frac{x_2 - x_1}{x_2}\right| = \left|\frac{0,56383 - 0,61269}{0,56383}\right| = 0,08663 \quad \Rightarrow |E_b| > \varepsilon$ Olduğundan işleme devam edilir

---

	x_{k-1}	x_k	$f(x_{k-1})$	$f(x_k)$	x_{k+1}	$\lvert E_b \rvert$	$\lvert E_b \rvert < \varepsilon$
k= 0 için	0	1	1	-0,63212	0,61269	0,63212	-
k= 1 için	1	0,61269	-0,63212	-0,07079	0,56383	0,08663	-
k= 2 için	0,61269	0,56383	-0,07079	0,00519	0,56717	0,00588	-
k= 3 için	0,56383	0,56717	0,00519	-4,18575e-5	0,56714	4,70667e-5	+

Secant Yöntemi Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc
fprint /Users/bihterdas/Desktop/suatentropy.m k f(x)=x-0.17/sqrt(15/x^0.3)+2) denkleminin köklerini bulma \n');
x1=1.0;
x0=5.0;
tol=1.0E-5;
fprintf('Iter      x2        abs(x2-x1)   \n')
for i=1:100
    fx1=x1-0.17/sqrt(15/(x1^0.3)+2);
    fx0=x0-0.17/sqrt(15/(x0^0.3)+2);
    x2=x1-(fx1*(x1-x0))/(fx1-fx0);
fprintf('\n%4.1f   %7.4f   %7.4f   %7.4f \n\n',i,x2,abs(x2-x1));
if abs(x2-x1)<tol
break;
end
x0=x1;
x1=x2;
end
disp('Kök=')
x2
```

Program Çıktısı

```
Secant yöntemini kullanarak f(x)=x-0.17/sqrt(15/x^0.3)+2) denkleminin köklerini bulma
Iter      x2        abs(x2-x1)

 1.0    0.0390    0.9610
 2.0    0.0261    0.0128
 3.0    0.0247    0.0014
 4.0    0.0247    0.0000
 5.0    0.0247    0.0000   Kök=

x2 =

    0.0247
```