

YMH 214 SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

1

8.Hafta

TEMEL MATRİS İŞLEMLERİ

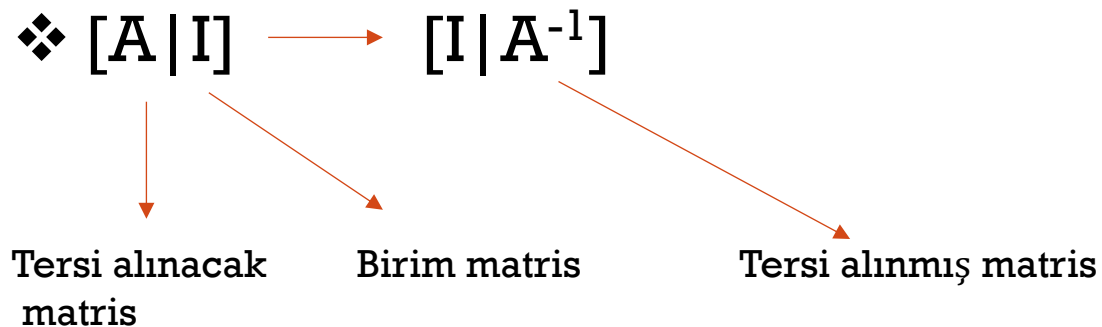
- Matrisin tersi
- Matrisin determinantı
- Matris transpozu
- Matris normları

MATRİSLER

- Matriste yatay yöndeki elemanlar dizisi satır, düşey yöndeki elemanlar dizisi sütun olarak adlandırılır.
- i ve j sırasıyla matrisin “satır” ve “sütun” terimlerini temsil etmektedir. $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ elemanlarından oluşan köşegene matrisin “asal” veya “ana köşegeni” denir.

Matrisin tersi

- ❖ Elementer satır işlemleri uygulanır.
- ❖ Sadece kare matrislerin tersi vardır ancak her kare matrisin de tersi olmayabilir. Mesela bir satırı tamamen 0 dan oluşan matrislerin)
- ❖ Bir matrisin tersiyle çarpımı birim matrisi (I) verir.



Matrisin tersi

Soru 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Çözüm için izlenecek adımlar:

1. Verilen A matrisini birim matrise dönüştürmek için elementer satır işlemleri yapılır.

Köşegen elemanları 1 olmalı

Sıfır olmalı

Sıfır olmalı

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Matrisin Tersi

- 2. Matrisin sol alt köşesindeki elemanı 0 yapmakla işlemlere başlanır. Bunun için Matrisin 1. satırı -3 ile çarpılıp 2. satırla toplanır.
- Köşegeni 1 yapmak için 2. satır -1/2 ile çarpılır.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-3S_1+S_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-1/2 S_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

Matrisin Tersi

- Matrisin sağ üst köşesini 0 yapmak için 2.satır -2 ile çarpılıp 1.satırla toplanır.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right) \xrightarrow{-2S_2+S_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right)$$

I $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

- Birim matrisi yanındaki matris A matrisinin tersini vermektedir.

Matris Kuralları

- ❑ $[A] + [B] = [B] + [A]$
- ❑ $[A]([B] + [C]) = [A][B] + [A][C]$
- ❑ $([A][B])^T = [B]^T \cdot [A]^T$
- ❑ $([A] \cdot [B])^{-1} = [B]^{-1} [A]^{-1}$
- ❑ $\det([A] \cdot [B]) = \det[A] \cdot \det[B]$
- ❑ $\det[A]^T = \det[A]$

Matris Determinantı

Soru2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisin determinantını bulmak için yapılacak işlemler;

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Blue arrows (positive terms):

- $1 \times 1 \times 2 = 2$
- $3 \times 0 \times -1 = 0$
- $5 \times 2 \times -1 = -10$

Red arrows (negative terms):

- $-1 \times 1 \times 5 = -5$
- $2 \times 4 \times -1 = -8$
- $-1 \times 4 \times 3 = -12$

$$\det(A) = (2 + 0 + 40) - (-5 + 0 + 12) = 42 - 7 = 35$$

Matrisin Transpozu

❖ $[B]=[A]^T \quad B_{ij}=A_{ji}$

❖ Matrisin satırları sütun haline getirilir.

❖ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2 \times 3} \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$

Vektör ve Matris Normları

$V=x+3y-2z$ vektöründe $V_1=1, V_2=3, V_3=-2$

1. Euclidian Norm

$$||\{V\}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} = 3.74$$

2. Uniform(tek biçimli) vektör norm

$$||\{V\}|| = \max |V_i| \quad 1 \leq i \leq n \quad \max |1, 3, 2| = 3$$

3. Frobenius matris norm

$$||\{A\}|| = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2)^{1/2}$$

4. Uniform matris normu

$$||\{A\}|| = \max(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|) \quad 1 \leq i \leq n$$

5. Sütun normu

$$||\{A\}|| = \max(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|) \quad 1 \leq j \leq n$$

Vektör ve Matris Normları

Örnek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Frobenius norm:

$$||\{A\}|| = \{1^2 + 2^2 + 3^2 + (-2)^2 + 3^2 + 4^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + 5^2\}^{1/2} = 8,54$$

Uniform matris norm:

$$||\{A\}|| = \max\{(1+2+1), (2+3+2), (3+4+5)\} \\ \max(4, 7, 12) = 12$$

Sütün matris norm:

$$||\{A\}|| = \max\{(1+2+3), (2+3+4), (1+2+5)\} \\ \max(6, 9, 8) = 9$$

Matrisler için Matlab Komutları

```
clear all;close all;clc
A=[4 -2 6;1 8 4;-3 -1 5]
fprintf('Matrisin transpozunu almak için kullanılan komut \n');
tranpozA=A'
fprintf('Matrisin determinantını almak için kullanılan komut \n');
determinantA=det(A)
fprintf('Matrisin tersini almak için kullanılan komut \n');
tersiA=inv(A)
```

Program Çıktısı

A =

4	-2	6
1	8	4
-3	-1	5

Matrisin transpozunu almak için kullanılan komut

tranpozA =

4	1	-3
-2	8	-1
6	4	5

Matrisin determinantını almak için kullanılan komut

determinantA =

348

Matrisin tersini almak için kullanılan komut

tersiA =

0.126436781609195	0.011494252873563	-0.160919540229885
-0.048850574712644	0.109195402298851	-0.028735632183908
0.066091954022989	0.028735632183908	0.097701149425287