DİFERANSİYEL DENKLEMLER

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ LİSANS PROGRAMI

DR. ÖĞR. ÜYESİ ÖMER FATİH YALÇIN

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ

İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ AÇIK VE UZAKTAN EĞİTİM FAKÜLTESİ

ENDÜSTRİ MÜHENDİSLİĞİ LİSANS PROGRAMI

DİFERANSİYEL DENKLEMLER

DR. ÖĞR. ÜYESİ ÖMER FATİH YALÇIN

Yazar Notu

Elinizdeki bu eser, İstanbul Üniversitesi Açık ve Uzaktan Eğitim Fakültesi’nde okutulmak için hazırlanmış **bir ders notu niteliğindedir**.

ÖNSÖZ

Fiziğin kanunları genel olarak diferansiyel denklemlerden faydalanarak yazılır. Böylece tüm mühendisler ve bilim adamları bir dereceye kadar diferansiyel denklemi kullanırlar. Eğer bilim ve mühendislikle uğraşacaksanız muhakkak diferansiyel denklemleri öğrenmeniz gerekecektir. Bilim dili olarak matematiği düşünülebiliriz ve diferansiyel denklemler de bu dilin en önemli parçalarından birisidir. Dolayısıyla bu ders notunun amaçları: bir adi diferansiyel denklemin tanımlanmasını ve sınıflandırılmasını yapabilmek, bir diferansiyel denklemin bir çözümünün ne demek olduğunu anlamak, belli başlı adi diferansiyel denklemlerin çözümünü bulabilmek ve bir fiziksel olayın matematiksel modellemesi olarak bir adi diferansiyel denklemini türetmek olarak belirtilebilir.

İÇİNDEKİLER

YAZAR NOTU

Bu kitapta konular öncelikle tanımları ve gerekli teoremleri ile anlatılmıştır. Sonrasında her konu ile ilişkili çözümlü örnekler verilmiştir. Bu çözümlü örnekleri öğrencilerin kendilerinin de uğraşarak bulmaları önerilir. Ayrıca son olarak her bölüm sonunda bölüm soruları kısmında öğrencilere cevaplı test soruları bırakılmıştır. Bu soruların da çözülerek cevaplarının karşılaştırılması ve başarının düşük olması halinde ilgili bölüme tekrar çalışması önerilir. Bilgisayar uygulamaları Mathematica 9.1 yazılımı ile yapılmıştır. Bazı küçük matematiksel ve imla yazım hatalarının doğal karşılanmasını temenni ederim

1. GENEL KAVRAMLAR

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

1.1.Türev ve İntegraller

1.1.1.Yüksek Mertebeden Türevler

1.1.2.Türev Alma Kuralları

1.2.Bir Fonksiyonun İlkeli

1.3.İntegral

1.3.1 İntegreal Alma Yöntemi

1.3.1.1.Değişken Dönüşümü Yardımıyla İntegral Alma

1.3.1.2. Kısmi İntegrasyon Yöntemiyle İntegral Alma

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Diferansiyel kelimesinden ne anlıyorsunuz?

2) dy ile Δy nin farkı nedir?

3) Bir eğrinin altındaki alanı nasıl buluruz?

4) Türev ile integral arasındaki temel ilişki nedir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Türev	Farklı fonksiyonların türevini alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Yüksek Mertebeden Türevler	Yüksek Mertebeden Türevleri hesaplayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Türev Alma Kuralları	Türev Alma Kurallarını kavramak	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Bir Fonksiyonun İlkeli	İntegral ile türev arasındaki ilişkiyi farkedebiilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
İntegral	Farklı fonksiyonların belirsiz integralini alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
İntegreal Alma Yöntemleri	İntegreal Alma Yöntemlerini kullanabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Değişken Dönüşümü Yardımıyla İntegral Alma	Değişken Dönüşümü Yardımıyla İntegral Almayı kavramak	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Kısmi İntegrasyon Yöntemiyle İntegral Alma	Kısmi İntegrasyon Yöntemiyle İntegral Almayı kavramak	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek

Anahtar Kavramlar

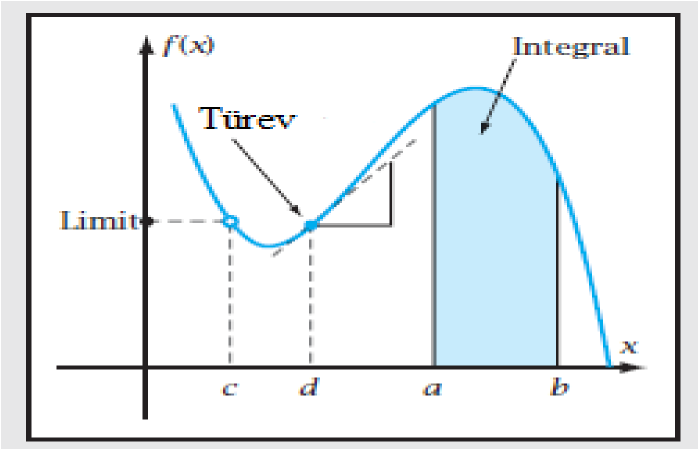
- Türev
- Yüksek mertebeden türev
- İntegral
- Değişken dönüşümü ile integrasyon
- Kısmi İntegrasyon

Giriş

Bu bölümde öncelikle diferansiyel denklemler dersi için bir altyapı oluşturmak amacıyla analizin temel konularından türev ve integral konuları temel noktaları ile irdelenir.

1.1. Türevler ve İntegraller

Analizin en temel konuları limit, türev ve integraldir. Bu konuların ifade ettiği geometrik mana şekil 1 de daha da net biçimde görülmektedir.



Şekil 1:. Limit, Türev ve İntegralin grafiksel yorumu

Diferansiyel denklemler dersinin anlaşılıp başarılı olunabilmesi için özellikle türev ve integral konularının çok iyi sindirilmesi gerekir. Dolayısıyla ilk 2 haftalık dersimizde bu konuları işleyip asıl dersimiz olan diferansiyel denklemler için bir altyapı hazırlanacaktır.

Türev

Tanım I.1. Bir $f(x)$ fonksiyonunun x değişkenine göre türevi

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = Df(x) \text{ veya } D_x f(x)$$

farklı formda yazılır ve

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

olarak tanımlanır. Burada ilk iki notasyona virgülsel gösterim, diğer kesirli gösterime de Leibniz notasyonu adı verilir. Ayrıca $\frac{d}{dx}$ ve D sembollerine **türev operatörleri** denir. $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki türevi,

$$f'(a) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ veya } f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ile bulunur.

1.1.1. Yüksek Mertebeden Türevler:

Bir $f(x)$ fonksiyonu türevlenebilir ise birinci mertebeden türevi f' de x in bir fonksiyonudur. Dolayısıyla f' nin x değişkenine göre türevi

$(f')' = f'' = y'' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, $f(x)$ in ikinci mertebeden türevi,

$(f'')' = f''' = y''' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) = \dfrac{d^3y}{dx^3}$ $f(x)$ in üçüncü mertebeden türevi ve

$\left(f^{(n-1)}\right)' = f^{(n)} = y^{(n)} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d^ny}{dx^n}$ $f(x)$ in n. mertebeden türevi olarak adlandırılır.

1.1.2.Türev Alma Kuralları

1. $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$, c:sabit bir değer

2. $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$ (kuvvet kuralı)

3. $\left(c.f(x)\right)' = c.f'(x)$

4. f ve g, türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$$\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x) \qquad \textbf{(Toplam Kuralı)}$$

Örnek 1.1: $f(x) = \sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}} + x^{\pi} \Rightarrow f'(x) = ?$

Çözüm:

$$f(x) = x^{1/2} + 9x^{2/3} - 2.x^{-3/5} + x^{\pi} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} + 9.\frac{2}{3}x^{-1/3} + 2.\frac{3}{5}x^{-8/5} + \pi x^{\pi-1}$$

5. f ve g, türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$$\left[f(x).g(x)\right]' = f'(x).g(x) + g'(x).f(x) \qquad \textbf{(Çarpım Kuralı)}$$

6. f ve g, türevlenebilir fonksiyonlar ve $g(x) \neq 0$ olsun.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - g'(x).f(x)}{\left(g(x)\right)^2} \qquad \textbf{(Bölüm Kuralı)}$$

Örnek 1.2.: $y = \dfrac{(x-1)(x^2-3x)}{x^4+1} \Rightarrow y' = ?$

Çözüm:

$$y = \frac{(x-1)(x^2-3x)}{x^4+1} \Rightarrow y' = \frac{\left[(x-1)(x^2-3x)\right]'.(x^4+1) - (x^4+1)'(x-1)(x^2-3x)}{(x^4+1)^2}$$

$$= \frac{\left[(x-1)'(x^2-3x) + (x^2-3x)'.(x-1)\right].(x^4+1) - 4x^3(x-1)(x^2-3x)}{(x^4+1)^2}$$

$$= \frac{\left[(x^2-3x) + (2x-3).(x-1)\right].(x^4+1) - 4x^3(x-1)(x^2-3x)}{(x^4+1)^2}$$

$$= \frac{3 - 8x + 3x^2 - 9x^4 + 8x^5 - x^6}{(1+x^4)^2}$$

7.Trigonometrik Fonksiyonların Türevi:

a) $(\sin x)' = \cos x, \quad \left(\sin(u(x))\right)' = u'(x)\cos(u(x))$

b) $(\cos x)' = -\sin x, \quad \left(\cos(u(x))\right)' = -u'(x).\sin(u(x))$

c) $(\tan x)' = \sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad \left(\tan(u(x))\right)' = u'(x)\sec^2(u(x))$

d) $(\cot x)' = -\csc^2 x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad \left(\cot(u(x))\right)' = -u'(x)\csc^2(u(x))$

e) $(\sec x)' = \sec x \tan x$

Örnek 1.3: $y = \sec x \Rightarrow y'' = ?$

$$y' = (\sec x)' = \sec x \tan x$$

8.Zincir Kuralı: $y'' = (\sec x)' \tan x + (\tan x)' \sec x = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x$

$$y = f(u),\ u = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

9. $n \in \mathbb{N}$, $u = g(x)$ türevlenebilir bir fonksiyon ise,

$$\left(u^n\right)' = \left(\left(g(x)\right)^n\right)' = n.\left(g(x)\right)^{n-1} g'(x)$$

10. $\left(e^x\right)' = e^x$, $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) e^{f(x)}$

11.

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{\ln\left(a^x\right)}\right)' = \left(e^{x\ln(a)}\right)' = (x\ln a)' e^{x\ln(a)} = \ln a.\ a^x \qquad \left(a^{f(x)}\right)' = f'(x) \ln a . a^{f(x)}$$

12. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \qquad (\log_a f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$$

13.Parametrik fonksiyonların türevi

$x = f(t)$, $y = g(t)$ olup y, x in bir fonksiyonu olmak üzere zincir kuralı ile

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Örnek 1.4:

$$x = t - t^2$$
$$y = t - t^3$$

verildiğine göre ,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-3t^2}{1-2t}$$

14.Kapalı Fonksiyonların Türevi

Bağımlı değişken olan y- yi tek başına x cinsinden ifade edemediğimiz ve ya zorlandığımız fonksiyonlar kapalı fonksiyonlar olarak adlandırılırlar. Genel olarak, $y=f(x)$ olsun. $F(x,y)=0$ denklemi ile verilen bağıntılara **kapalı fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların türevi 2 yolla bulunabilir. İlk olarak $F(x,y)=0$nin her iki tarafının x e göre türevi alınarak bulunan denklemden $y'=\frac{dy}{dx}$ yalnız bırakılır.

Örnek 1.5 $x^2+y^2=25\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}(25)=2x+2y\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$

İkinci yol: $F(x,y)=0\Rightarrow D\left[F(x,y)\right]=F_x(x,y)dx+F_y(x,y)dy=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{-F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

15.Ters Trigonometrik Fonksiyonların Türevi:

Ters trigonometrik fonksiyonların türevlerini elde etmek için kapalı fonksiyonların türevlerini kullanarak elde ederiz. Bu durumda:

$$\left(\sin^{-1}x\right)'=\left(\arcsin x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\cos^{-1}x\right)'=\left(\arccos x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\left(\tan^{-1}x\right)'=\left(\arctan\right)'=\frac{1}{1+x^2},$$

$$\left(\cot^{-1}x\right)'=\left(\mathrm{arc}\cot x\right)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

16.Ters Fonksiyonun Türevi

$f(x)$, birebir ve türevlenebilir olsun. Eğer f in tersi de türevlenebilir ise ,

$f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ dir. Kapalı türevlerden yararlanarak son eşitlikten x e göre türev alırsak,

$$x=f^{-1}(y) \Rightarrow 1=\frac{d}{dx}\left(f^{-1}(y)\right)=\left(f^{-1}\right)'(y).y' \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(y)=\frac{1}{y'}=\frac{1}{f'(x)}$$

1.2.Bir Fonksiyonun İlkeli

Türevi bilinen ve $f(x)$ olan bir $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ ***in ilkeli*** denir. Matematiksel olarak,

$\forall x \in \mathrm{I}$ aralığı için $F'(x)=f(x)$ ise $F(x)$, $f(x)$ in I üzerinde *ilkeli* denir.

Teorem 1.1 : $F(x)$, $f(x)$ in I üzerinde ilkeli ise, c sabit bir sayı olmak üzere, $F(x)+c$, $f(x)$ in I üzerindeki en genel ilkelidir.

Örnek 1.6 $f(x)=x^2$ nin ilkelleri,

$$F(x)=x^3+1, x^3-5, x^3+2/3, \ldots.$$

Bu durumda $f(x)$ in I üzerindeki en genel ilkeli $F(x)=\frac{x^3}{3}+c$ formatındadır.

Örnek 1.7: $f(x)=\frac{1}{x}$ in ilkeli,

$(\ln x)'=\frac{1}{x}$ olduğundan $F(x)=\ln x+c$

NOT: Bir fonksiyonun türevleri içeren denklemlere *diferansiyel denklemler* denir. Bu tanımı ileriki konularda daha detaylı işleyeceğiz.

Örnek 1.8 $g(x)=4\sin x+2x^4$ in ilkeli $G(x)=-4\cos x+2\frac{x^5}{5}+c$

1.3. İntegral

Tanım 1.1: Türevi belli olan bir fonksiyonu bulmak için yapılan işleme ***integral alma*** veya ***ilkel fonksiyonunu bulma*** denir ve $\int f(x)dx$ sembolü ile gösterilir**.**

Tanım 1.2: $\forall x \in \mathrm{I}$ aralığı için $F'(x) = f(x)$ ise $F(x)$, $f(x)$ in I üzerinde ***ilkeli veya belirsiz integrali*** denir.

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + c$$

Bu denklemde $f(x)$ e ***integrand***, c ye ***integrasyon sabiti*** denir.

Temel İntegral Alma Formülleri:

1. $\int df(x) = f(x) + c$

2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

3. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

4. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$

5. $\int adx = ax + c$

6. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

7. $\int e^x dx = e^x + c$

8. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

9. $\int \sin xdx = -\cos x + c$

10. $\int \cos xdx = \sin x + c$

11. $\int \sec^2 xdx = \tan x + c$

12. $\int \cos ec^2 xdx = -\cot x + c$

13. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$

14. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c$

1.3.1 İntegral Alma Yöntemleri

İntegrali alınacak ifadenin hangi fonksiyonun türevi olduğu görmek yani direkt ilkelini bulmak her zaman mümkün olmaz. Bu nedenle aşağıdaki integral alma yöntemlerini kullanırız.

1.3.1.1. Değişken Dönüşümü Yardımıyla İntegral Alma

$\int f(x)dx$ belirsiz integralinde $x = g(t) \Rightarrow dx = g'(t)dt$ değişken dönüşümü yapılırsa,

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

olur.

Örnek 1.9 : $\int x^3 \cos(x^4+2)dx$ integralinde $x^4+2 = u \Rightarrow 4x^3dx = du$ değişken dönüşümü yardımıyla,

$$\int x^3 \cos(x^4+2)dx = \frac{1}{4}\int \cos u du = \frac{1}{4}\sin u + c = \frac{1}{4}\sin(x^4+2) + c$$

1.3.1.2. Kısmi İntegrasyon Yöntemiyle İntegral Alma

Direkt alınamayan ve değişken dönüşümüyle de bulunamayan integralleri daha basit hale getirmek ve değerlendirebilmek için kısmi integrasyon uygulanır.

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

Burada $u = f(x)$ ve $v = g(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ ve $dv = g'(x)dx$ değişken dönüşümleri ile yukardaki integral

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

formunu alır. Genel olarak hangi ifadeye u diyeceğimizin önceliği:

Log**A**rc**P**ol**T**rig**Ü**st

Örnek 1.10: $\int x\sin 3x dx = ?$

$$x = u \Rightarrow dx = du, \ \sin 3x dx = dv \Rightarrow v = -\cos 3x / 3$$

$$-x\cos 3x / 3 + \int \cos 3x / 3 \ \ dx = -x\cos 3x / 3 + \sin 3x / 9 + C$$

Örnek 1.11: $\int \ln x dx = ?$

$$\int \ln x dx = \ x\ln x - x + c$$

Uygulamalar

1) Türevin fizik ve diğer bilimlerdeki uygulamalarını araştırınız.

2) İntegralin fizik ve diğer bilimlerdeki uygulamalarını araştırınız

Uygulama Soruları

1) Konum fonksiyonu $S(t) = 10t^2 - 3t$ olan bir hareketlinin [0,3] saniyelik zaman aralığındaki

a)ortalaam hızı nedir?

b) Anlık hızı nedir?

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Diferansiyel denklemeler dersine altyapı için türev ve kuralları, temel intgerasyon formülleri, değişken dönüşümü ve kısmi integrasyon yöntemleri ile integral alma konuları işlendi.

Bölüm Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $y=\dfrac{x^2+4x+3}{\sqrt{x}}$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{2x\sqrt{x}}$

b) $y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\dfrac{3x}{2\sqrt{x}}$

c) $y'=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}+\dfrac{2x}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{2x\sqrt{x}}$

d) $y'=2\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}-\dfrac{3x}{2\sqrt{x}}$

e). Hiçbiri

2) $y=\dfrac{\sin x}{x^2}$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y'=\dfrac{x\sin x-2\cos x}{x^3}$

b) $y'=\dfrac{x\cos x-2\sin x}{x^3}$

c) $y'=\dfrac{\cos x-2\sin x}{x^2}$

d) $y'=\dfrac{x\cos x-2x}{x^3}$

e) $y'=\dfrac{x\cos x-2x^2}{x^3}$

3) $g(x)=(1+4x)^5\left(3+x-x^2\right)^8$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $g'(x)=4(1+4x)^4\left(3+x-x^2\right)^5\left(17+9x^2-21x\right)$

b) $g'(x)=7(1+4x)^4\left(3+x-x^2\right)^7\left(17+9x-21x^2\right)^2$

c) $g'(x)=4(1+4x)^4\left(3+x-x^2\right)^7\left(17+9x-21x^2\right)$

d) $g'(x)=4(1+4x)^4\left(3+x^2-x\right)^7\left(17+9x^2-21x\right)$

e) $g'(x)=-7(1+4x)^3\left(3+x-x^2\right)^6\left(17+9x-21x^2\right)^2$

4) $y=\sin\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

a). $y'=\cos\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\left(\sec^2\sqrt{\sin x}\right)\left[1/\left(2\sqrt{\sin x}\right)\right](\cos x)$

b) $y'=\cos\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\left(\sec\sqrt{\sin x}\right)\left[1/\left(2\sqrt{\sin x}\right)\right](\cos x)$

c) $y'=\cos\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\left(\sec^2\sqrt{\sin x}\right)\left[1/\left(2\sqrt{\sin x}\right)\right](\sin x)$

d) $y'=\cos\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\left(\sec^2\sqrt{\sin x}\right)\left[1/\left(2\sqrt{\cos x}\right)\right](\sin x)$

e) $y'=\cos^2\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\left(\sec^2\sqrt{\sin x}\right)\left[1/\left(2\sqrt{\cos x}\right)\right](\sin x)$

5) $e^{x^2y}=x+y$ kapalı fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y'=\left(1-2xye^{x^2y}\right)/\left(xe^{x^2y}-1\right)$

b) $y'=\left(1-2xye^{x^2y}\right)/\left(x^2-1\right)$

c) $y'=\left(1-2e^{x^2y}\right)/\left(x^2e^{x^2y}-1\right)$

d) $y'=\left(1-2xye^{x^2y}\right)/\left(x^2e^{x^2y}-1\right)$

e) $y'=\left(1-2xye^{x^2y}\right)/\left(x^2-x\right)$

6) $y=\left(1+x^2\right)\arctan x$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y'=1+2x\arctan x$

b) $y'=1+2\arctan x$

c) $y'=(1+x^2)+2x\arctan x$

d) $y'=1+x^2\arctan x$

e) $y'=1+2x\tan x$

7) $f(x) = x\cos x$ fonksiyonu için $f'''(0)$ türev değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) -1

b) -2

c) -3

d) -4

e) -5

8) $y = \ln\left(e^{-x} + xe^{x}\right)$ fonksiyonunun türevi aşağıdakilerden hangisidir?

a). $y' = \dfrac{x}{1-x}$

b). $y' = \dfrac{-x}{1+x}$

c) $y' = \dfrac{-xe^{x}}{1+x}$

d) $y' = \dfrac{xe^{x}}{1-x}$

e). $y' = \dfrac{x^2e^{x}}{1-x}$

9) $\int 2x\left(x^2+3\right)^4 dx$ belirsiz integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a). $\dfrac{1}{5}\left(x^2+3\right)^5 + C$

b). $\dfrac{1}{5}\left(x+3\right)^5 + C$

c) $\dfrac{1}{5}\left(x^2+3x\right)^5 + C$

d) $\dfrac{1}{5}\left(x^2+3\right) + C$

e) $\dfrac{1}{5}\left(x^2+3x\right) + C$

10) $\int \frac{1+4x}{\sqrt{1+x+2x^2}}dx$ belirsiz integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\sqrt{1+x+x^2}+C$

b) $2\sqrt{1+x+2x^2}+C$

c) $2\sqrt{1+2x-2x^2}+C$

d) $\sqrt{1-x+2x^3}+C$

e) $\sqrt{4-x+2x^3}+C$

11) $\int \cos x \sin^6 x dx$ belirsiz integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{1}{7}\cos^7 x+C$

b) $\frac{1}{7}\sin^5 x+C$

c) $\frac{1}{7}\sin^7 x+C$

d) $\frac{1}{7}\sin x+C$

e) $\frac{1}{7}\cos^3 x+C$

12) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

e) 7

13) $\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx$ belirsiz integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x\right)+C$

b) $\tan x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$

c) $\arctan x + \ln\left(1+x\right)+C$

d) $\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C$

e) $\arctan x + \frac{1}{2}\ln\left(x+x^2\right)+C$

Cevaplar

1) a, **2)** b, **3)** c, **4)** a, **5)** d, **6)** a, **7)** c, **8)** b, **9)** a, **10)** b, **11)** c, **12)** a, **13)**d

2. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

2.1.Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

2.2. Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

2.3. Diferansiyel Denklem Nedir?

2.4. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

2.4.1. Diferansiyel Denklemin Mertebesi ve Derecesi

2.4.2. Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) $\dfrac{dy}{dx} = f\left(x\right)$ denklemi size neyi çağrıştırıyor?

2) $\dfrac{dx}{dt} = v$ denklemi size neyi çağrıştırıyor?

3) $\dfrac{dv}{dt} = a$ denklemi size neyi çağrıştırıyor?

4) $m.\dfrac{d^2x}{dt^2} = F\left(x\left(t\right)\right), \quad (t \in \mathbb{R})$

denklemi size Fizikteki hangi ünlü bağıntıyı anımsaıtr?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi	Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi ile integral alabilmek.	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali	Trigonometrik Fonksiyonların İntegralini alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Diferansiyel Denklem Nedir?	Diferansiyel Denklemin tanımını kavrayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	Diferansiyel Denklemleri Sınıflandırıbilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Diferansiyel Denklemin Mertebesi ve Derecesi	Diferansiyel Denklemin Mertebesi ve Derecesini saptayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler	Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerinin ayırımını yapabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.

Anahtar Kavramlar

- Basit kesirlerle integrasyon
- Trigonometrik integrasyon
- Diferansiyel denklemin derecesi
- Diferansiyel denklemin mertebesi
- Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler

Giriş

Bu bölümde altyapı için gerekli integral alma teknikleri, diferansiyel denklemlerin tanımı, niçin kullanıldıkları, matematiksel modelleme ile olan ilişkisi ve sınıflandırmaları bahsedilir.

2.1. Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

Tanım 2.1: $a,b,c,A,B \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olsun.

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \; ve \; \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n} \; \left(\Delta = b^2 - 4ac < 0\right)$$

Biçimindeki ifadelere *basit kesirler* denir. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesinin basit kesirlerine ayrılarak integrallerinin alınmasında 2 durum söz konusudur:

I.Durum: $P(x)$ *in derecesi* $Q(x)$ *in derecesinden küçükse:*

Bu durumda paydadaki $Q(x)$ in aşağıdaki durumlarına göre işlemler yapılır:

a) $Q(x) = (a_1x+b_1)(a_2x+b_2)...(a_nx+b_n)$ çarpanlarına ayrılmışsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x+b_1} + \frac{A_2}{a_2x+b_2} + ... + \frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Basit kesirler cinsinden yazılabilir.

b) $Q(x) = (ax+b)^p$ çarpanlarına ayrılmışsa,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + ... + \frac{A_p}{(ax+b)^p}$$

Basit kesirler cinsinden yazılabilir.

c) $Q(x)$ çarpanlarına ayrılamayan ikinci dereceden ax^2+bx+c üç terimlilerine sahipse her çarpana $\frac{A_1x+B_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}$ biçiminde basit kesirler tekabül eder.

d) $Q(x)$ çarpanlarına ayrılamayan ikinci dereceden ax^2+bx+c üç terimlisinin *p.* kuvvetine

sahipse

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{\left(ax^2 + bx + c\right)^2} + \ldots + \frac{A_px + B_p}{\left(ax^2 + bx + c\right)^p}$$

biçiminde basit kesirlere ayrılır.

Örnek 2.1 : $\int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx$ integralini alalım:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2 + 1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$$

$$x = 1 \Rightarrow 2 = A(-1)(-2) \Rightarrow A = 1$$

$$x = 2 \Rightarrow 5 = B(-1) \Rightarrow B = -5$$

$$x = 3 \Rightarrow 10 = C.(2) \Rightarrow C = 5$$

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{5}{(x-2)} + \frac{5}{(x-3)}$$

basit kesirlerine ayrılır. Buradan terim terime integral alınırsa,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx - 5\int \frac{1}{x-2}dx + 5\int \frac{1}{x-3}dx \\ &= \ln(x-1) - 5\ln(x-2) + 5\ln(x-3) + C \\ &= \ln\frac{\left|(x-1)(x-3)^5\right|}{\left|(x-2)^5\right|} + C \end{aligned}$$

II.Durum: $P(x)$ *in derecesi* $Q(x)$ *in derecesinden büyükse*

$P(x)$, $Q(x)$ e bölünerek payın derecesi paydanın derecesinden küçük hale yani birinci durum formatına getirilir.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$$

2.2. Trigonometrik Fonksiyonların İntegrali

1. $\int \sin^n x dx \ \ veya \int \cos^n x dx$ **tipindeki integraller**

Bunun için n in 2 durumu göz önüne alınır:

a)n:Tek sayı ise

$$\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \sin x dx, \quad \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \cos x dx$$

yazılarak $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ özdeşliğinden yararlanılır.

b)n:Çift sayı ise

$\int \sin^n x dx = \int \left(\sin^2 x\right)^{n/2} dx$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$ yarım açı formülünden

yararlanılır.

2. $\int \sin^m x \cos^n x dx$ *tipindeki integraller*

Bunun için 3 durum göz önüne alınır:

*a)*m ve n den birisi tek diğeri çift sayı olsun. Bu durumda tek kuvvetli olan trigonometrik ifade birinci kuvveti ile diğer kalan çift kuvvetinin çarpımı şeklinde yazılır. Kalan çift kuvvettin de $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ özdeşliğinden yararlanılarak değişken dönüşümü ile integral alınır.

Örnek 2.2 : $\int \sin^5 x \cos^4 x dx = \int \sin^4 x \sin x \cos^4 x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x \cos^4 x dx$

Buradan $\cos x = u \Rightarrow -\sin x dx = du$ dönüşümü ile integral,

$$-\int \left(1 - u^2\right)^2 u^4 du$$

Polinomsal hale gelerek rahatlıkla alınır.

b)m ve n den ikisi de tek olsun.

Bu durumda küçük olan kuvvet (a) şıkkındaki gibi yazılarak aynı yol izlenir.

Örnek 2.3 : $\int \sin^5 x \cos^7 x dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x \cos^7 x dx$

c) m ve n den ikisi de çift olsun.

Bu durumda $m = 2p,\ n = 2k$ olmak üzere,yarım açı formülünü kullanarak

$$\int \left(\sin^2 x\right)^p \left(\cos^2 x\right)^k dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^p \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^k dx$$

yazılır.

3. $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx,\ \int \sin \alpha x \sin \beta x dx,\ \int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ tipindeki integrallerde trigonometrik ters dönüşüm formülleri kullanılır.

4.İntegrandında sinx veya cosx in kesirli ifadeleri bulunan integrallerin alınması:

Bu tür intgeraller hesabı için,

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \arctan t = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx}{2}$$

ve bir dik üçgen çizilerek tanjantı verilen açının sin veya cos u bulunarak integrandda yerine yazılarak integral alınır. Eğer alacağımız integralde $\sin^2 x$ *veya* $\cos^2 x$ in kesirli ifadeleri olsaydı

$$\tan x = t \Rightarrow \arctan t = x \Rightarrow \frac{dt}{1+t^2} = dx$$

Dönüşümü yapılarak aynı işlemler uygulanırdı.

2.3. Diferansiyel Denklem Nedir?

Çoğu doğa olaylarına kaynaklık eden mühendislik, fizik ve sosyal kökenli birçok problem matematik terimleri ile ifade edildiği zaman bu problemler, bilinmeyen fonksiyonun bir veya daha yüksek mertebeden türevlerini içeren bir denklemi sağlayan fonksiyonun bulunması problemine dönüşür. Fizikten bir örnek vermek gerekirse klasik mekanikte bir parçacığın konumu,

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \text{(II.1)}$$

fonksiyonu ile verilen bir nokta ile belirlenir. Bu fonksiyonun zamana göre türevi bu parçacığın *hızını* verir:

$$v = \frac{dx}{dt} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \tag{II.2}$$

Hızın zaman göre türevine *ivme* denir:

$$a = \frac{dv}{dt} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \tag{II.3}$$

Bir m kütleli parçacığı hareket ettiren kuvvet:

$$F = m.a \tag{II.4}$$

Newton'un kanunu ile verilir. Eğer $x(t)$, F kuvveti altında m kütleli bir parçacığın t anındaki konumu veren bir fonksiyon ise Newton'un ikinci kanununa göre bu kuvvet momentumun değişim oranına eşittir ve

$$m.\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x(t)\right), \quad (t \in \mathbb{R}) \tag{II.5}$$

yazılır. Dolayısıyla Burada F kuvveti t zamanının, $x(t)$ konumunun ve $\frac{dx}{dt}$ hızının bir fonksiyonudur. Buradan hareketle bir $x(t)$ fonksiyonu ile onun türevi $\frac{dx}{dt}$ veya türevleri arasındaki ilişkiyi gösteren denklemelere ***'Diferansiyel Denklemler'*** denir. Burada t 'ye *bağımsız değişken*, x ' ise *bağımlı değişken* denir. Fakat biz dersimizde liseden de alışık olduğumuz üzere bağımlı değişken olarak y , bağımsız değişken olarak da x 'i sıklıkla kullanacağız.

Örnek 2.4:

$$\frac{dy}{dx} + 3x + 4 = 0$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3 = 0$$

2.4. Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Dikkat edilecek olursa, hız, ivme ve kuvvet sadece tek serbest değişken olan t zamanına bağlı olarak yazıldı. Bu tür diferansiyel denklemlere *Adi diferansiyel denklemler* (ordinary differential equations) denir. Klasik bir tanım vermek gerekirse x bağımsız değişkeni, bilinmeyen $y = f(x)$ fonksiyonu ve bu fonksiyonun $y', y'', \ldots. y^{(n)}$, türevleri arasındaki bir bağıntıya ' ***ad*i *diferansiyel denklem*** 'denir. Bu denklem

$$F\left(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(II.6)}$$

şeklinde gösterilir. Biz bu dönemki dersimizde sadece bu tip diferansiyel denklemlerle ilgileneceğiz.

Örnek 2.5:

$$\frac{dy}{dx} = 3x + 4$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 0$$
$$xy' + y = 5$$
$$\left(y''\right)^2 + \left(y'\right)^3 + 3y = x$$

Eğer bilinmeyen $y = f(x)$ fonksiyonu iki veya daha fazla değişkene bağlı ise türevlerine kısmi **türev,** denkleme ise ***kısmi diferansiyel denklem(*** partial differential Equation) ya da ***kısmi türevli denklem*** denir. Fakat bu tip denklemeler biraz daha karışık olduğundan bu dönemki dersimizin dışındadır.

Örnek 2.6

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y + x\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}$$

2.4.1. Diferansiyel Denklemin Mertebesi ve Derecesi

Bir diferansiyel denklemin mertebesi, denklemde bulunan en yüksek mertebeden türevin mertebesidir.

Örnek 2.7

$xy' + y = 7$ Birinci mertebeden,

$y''' + xy'' + 2y\left(y'\right)^2 + xy = 0$ Üçüncü mertebeden

Bir diferansiyel denklemin derecesi ise en yüksek mertebeli türevinin üssüdür.

Örnek 2.8

$\frac{dy}{dx} = 3x + 4$, birinci dereceden

$\left(y''\right)^2 + \left(y'\right)^3 - 5y = x^2$ ikinci dereceden

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4+xy=0$$ üçüncü mertebeden ikinci dereceli dif.denklem.

2.4.2. Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler

Eğer $F\left(x,y,y',y'',....y^{(n)}\right)=0$ adi diferansiyel denkleminde F fonksiyonu y ve $y',y'',....y^{(n)}$ değişkenlerinin lineer bir fonksiyonu ise bu diferansiyel denkleme **lineerdir** denir.

Böylece $n.$ mertebeden en genel lineer adi diferansiyel denklem $a_0\left(x\right)\neq 0$ koşulu ile

$$a_n\left(x\right)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}\left(x\right)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a\left(x\right)\frac{dy}{dx}+a_0\left(x\right)y=g\left(x\right) \qquad \text{(II.7)}$$

formundadır. Burada $a_0\left(x\right)\neq 0$ ve $g\left(x\right)$ bilindiği varsayılır ve yalnızca x 'e bağlıdırlar. Diğer bir manada bir lineer diferansiyel denklem aşağıdaki özellikleri sağlamalıdır:

1. Denklemde y bağımlı değişkenin ve türevlerinin sadece birinci kuvvetleri vardır $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ $ve\ y^3$ gibi ikinci veya daha fazla kuvvetleri olmaz.

2. Denklemde y bağımlı değişkenin ve türevlerinin $\left(\frac{1}{y+2x}\right)$ kesirli, üstel e^y logaritmik $\ln\left(\frac{dy}{dx}\right)$ gibi lineerliği bozucu terimleri olmaz.

3. Bir lineer diferansiyel denklem y bağımlı değişkenin ve türevlerinin $y\frac{dy}{dx}$ gibi çarpımını içermez.

Yukarıdaki formda olmayan denklemelere de **Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemler** denir**.** Lineer diferansiyel denklemler lineer olmayanlara göre daha kolay çözülürler fakat ikinci dereceden diferansiyel denklemler bazen sadece sayısal yöntemlerle çözülebilmektedir.

Örnek 2.9

Lineer	**Lineer Değil**
$2y$	y^2 veya sin y

$\frac{dy}{dx}$	$y\frac{dy}{dx}$
$(2+3\sin x)\,y$	$(2-3y^2)\,y$
$x\frac{dy}{dx}$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

Örnek 2.10

$$y''' + 5e^{2x}y'' + y = 7x^2 \quad \text{ve} \quad x^3\frac{d^3y}{dx^3} + x\frac{dy}{dx} + y = e^x$$

Denklemleri lineer diferansiyel denklemlerdir.

Örnek 2.11

$$y''' + 5e^{2x}y'' + yy' = 7x^2 \quad \text{ve} \quad x^3\frac{d^3y}{dx^3} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = e^x$$

denklemleri lineer olmayan diferansiyel denklemlerdir.

Örnek 2.12

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

Diferansiyel denklemi ikinci mertebeden, birinci dereceden, adi ve lineer bir denklemdir.

Örnek 2.13

$$y''' + 3y^3y'' + 5y^4 = x^2$$

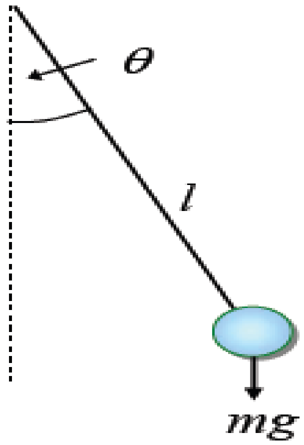
Diferansiyel denklemi üçüncü mertebeden, birinci dereceden, adi ve lineer olmayan bir denklemdir

Uygulamalar

1) Fizik ve mühendislikte kullaılan bazı diferansiyel denklemleri araştırarak onları isimlendirin

Uygulama Soruları

1) Bir sarkacın hareket denklemi:



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

Diferansiyel denklemi ile verilir. Buna göre

a) Bu denklemi isimlendiriniz

b) Bu denklemin nasıl elde edildiğini araşştırınız.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, integral alma tekniklerinden birkaçı, diferansiyel denklemlerin tanımı, niçin kullanıldıkları, matematiksel modelleme ile olan ilişkisi ve sınıflandırmalarından bahsedildi.

Bölüm Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $\int \cos^3 dx$ belirsiz integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{1}{3}\cos x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C$

b) $\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin^2 x + C$

c) $\frac{1}{3}\cos x \sin x + \frac{2}{3}\sin^2 x + C$

d) $\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C$

e) $\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin^2 x + C$

2) $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2} dx$ belirsiz integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $6\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + C$

b) $6\ln|x| + \frac{5}{x+2} + C$

c) $\ln|x+2| + \frac{1}{x} + C$

d) $6\ln|x-2| + \frac{5}{x+2} + C$

e) $\ln|x+2| + \frac{1}{x^2} + C$

3) $\int \frac{2x^3 - 4x^2 - x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$ belirsiz integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$

b) $\ln\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{2(x+1)}+C$

c) $\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{2(x^2+1)}+C$

d) $\ln\dfrac{|x^2|}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{2(x^2+1)}+C$

e) $\ln\dfrac{|x^2|}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{2(x^2+x)}+C$

4) $\int_0^1 x\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{45}{61}$

b) $\dfrac{55}{63}$

c) $\dfrac{25}{23}$

d) $\dfrac{35}{33}$

e) $\dfrac{105}{43}$

5) $\int_0^4 xe^{-x}dx$ integralinin sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $1-5e^{-3}$

b) $1-5e^{-4}$

c) $1-5e^{-2}$

d) $1-e^{-4}$

e) $1-5e^{-2}$

Cevaplar

1) d, **2)** a, **3)** c, **4)** b, **5)** b

II.2.1. Alıştırmalar

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri sınıflandırın.

1. $y'(x)+y(x)=0$

2. $\dfrac{d^2u(t)}{dt^2}=\sin(u(t)).$

3. $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y)+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y)=0$

II.2.2. Alıştırmalar

Aşağıdaki diferansiyel denklemleri lineer olup olmamalarına göre sınıflandırın

1. $y'(x)=\sin(x)y+\cos(y)$

2. $y'(x)=\sin(y)x+\cos(x)$

3. $y'(x)=\sin(x)y+\cos(x)$

3. DEĞİŞKENLERE AYRILABİLEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

3.1. Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

3.2. . Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemleri

3.3. Değişkenlere Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) $y' + y = 0$ diferansiyel denklemini hangi trigonometrik ifade sağlar?Başka çözümler yazabilir miyiz?

2) $y' + y = 2$ diferansiyel denklemini $y(x) = 2 + Ce^{-x}$ fonksiyonu sağlar mı?

3) $\dfrac{dy}{dx} = e^{-x} y$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulun

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri	Diferansiyel Denklemlerin çözümlerinin manasını anlayabilmek.	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemleri	Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemlerini kavramak	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Değişkenlere Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler	Değişkenlere ayrılabilen Diferansiyel Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek

Anahtar Kavramlar

- Diferansiyel denklemin çözümü
- Başlangıç değer problemi
- Sınır değer problemi
- Değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemler
- Çözüm eğrisi

Giriş

Bu bölümde, öncelikle bir diferansiyel denklemin çözümü deyince ne anlıyoruz? sorusuna cevap aranır. Ayrıca başlangıç ve sınır değer problemlerinin ne demek olduğu incelenir. Daha sonra diferansiyel denklemlerinin çözümlerini bulmaya değişkenlerine ayrılabilir tipte diferansiyel denklemler için devam edilir. Bu sayede özel çözüm ve genel çözüm ifadeleri daha iyi kavranılır.

3.1. Diferansiyel Denklemlerin Çözümleri

Bir diferansiyel denklemi özdeş olarak sağlayan her $y = f(x)$ fonksiyonuna diferansiyel denklemin ***çözümü*** veya ***integrali*** denir. Bir diferansiyel denklemi çözmek demek, türevleri ile birlikte verilen diferansiyel denklemde yerlerine konulduğu zaman, denklemi özdeş olarak sağlayan bütün fonksiyonları bulmak demektir. Diferansiyel denklemlerin çözümü **genel, özel** ve **tekil** olmak üzere üç türdür. n. mertebeden bir diferansiyel denklemin genel çözümü, sayıca daha aşağı düşürülemeyen n tane keyfi sabiti içerir. Bu çözüme diferansiyel **denklemin ilkeli** de denir. Örneğin, $y' - y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $y = ce^x$ dir. Diferansiyel denklemin mertebesi kaç ise genel çözümündeki c sabitlerinin sayısı da o kadardır. Örneğin, $y'' + 4y = 0$ ikinci mertebeden denkleminin çözümü $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ olmak üzere iki sabit içerir.

Özel çözümler, genel çözümlerden sözü edilen sabitlere özel değerler vermek suretiyle elde edilir. Örneğin, $y' - y = 0$ diferansiyel denkleminin özel çözümleri

$$y = e^x,\ y = -\sqrt{2}e^x, y = \frac{1}{2}e^x, ...vb \text{ dir.}$$

Bunlardan başka bazı diferansiyel denklemlerin, bu denklemi sağlayan, fakat genel çözümlerden bulunamayan bir veya birkaç çözümü olabilir ki bu çözümlere **tekil çözümler** denir. Örneğin, $y'(y-x) + xy - x^2 = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y = \frac{-x^2}{2} + C$$

dir. Buna ek olarak denklemin bu genel çözümündeki C sabitine değer vererek elde edilemeyen $y = x$ çözümü de mevcuttur. Buradan hareketle $y = x$ bu diferansiyel denklemin tekil çözümüdür.

Örnek 3.1:

$$\frac{dy}{dx} + y = 2\cos x$$

diferansiyel denkleminin çözümünü düşünelim. Bu denklemin çözümü demek x cinsinden y'nin değerinin bulunması demektir. Peki, y ' yi nasıl alalım ki bu denklemi sağlasın. Mesela $y(x) = sinx + \cos x$ bir çözüm olabilir mi? Bakalım. Bunun için x'e göre türev alınırsa,

$$y'(x) = \cos x - \sin x$$

olur. Bu değerleri diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$\cos x-\sin x+\left(\sin x+\cos x\right)=2\cos x$$

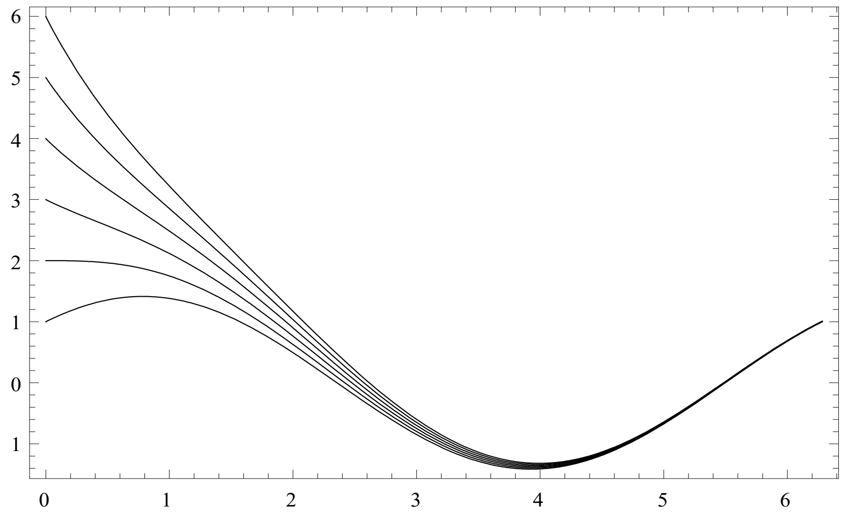
denklemi sağladığı görülür. Dolayısıyla bu bir özel çözümdür. Peki, başka çözümler var mı? $y\left(x\right)=sinx+\cos x+e^{-x}$ de bir çözüm olabilir mi?

$$y'\left(x\right)=\cos x-sinx-e^{-x}$$

değeri denklemde yerine yazılırsa,

$$\cos x-sinx-e^{-x}+\left(sinx+\cos x+e^{-x}\right)=2\cos x$$

denklemi sağlar. Benzer şekilde $y\left(x\right)=sinx+\cos x-e^{-x}$ de denklemin özel bir çözümü olacaktır. O zaman bu denklemin bütün çözümlerini içeren genel çözümü c_1 keyfi bir sabit olmak üzere $y\left(x\right)=sinx+\cos x+c_1e^{-x}$ olarak yazılır. Bir diferansiyel denklemin çözümü $y=f\left(x\right)$ biçiminde açık fonksiyon olarak bulunacağı gibi $g\left(x,y\right)=0$ biçiminde kapalı fonksiyon formunda da bulunabilir. Her iki durumda da elde edilen çözüm fonksiyonun grafiğine diferansiyel denklemin **çözüm eğrisi** veya **integral eğrisi** denir. Şekil II.1 de örnekteki diferansiyel denklemin çözüm eğrilerinin birkaçının grafiği görülmektedir. Bunlar kolları yukarıda olan bir parabol eğri ailesini göstermektedir.



Şekil II.1 $\dfrac{dy}{dx}+y=2\cos x$ diferansiyel denkleminin çözüm eğrileri

Örnek 3.2: c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $y\left(x\right)=c_1sin2x+c_2\cos 2x$ ifadesinin $y''+4y=0$ diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu gösterin?

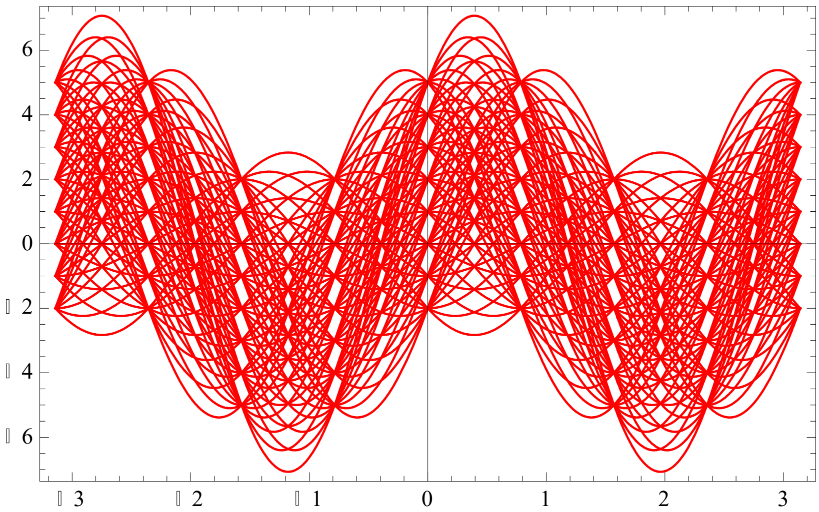
y'nin türevleri alınırsa,

$$y' = 2c_1 \cos 2x - 2c_2 sin2x$$
$$y'' = -4c_1 sin2x - 4c_2 \cos 2x$$

bulunur. Böylece

$$y'' + 4y = -4c_1 sin2x - 4c_2 \cos 2x + 4\left(c_1 sin2x + c_2 \cos 2x\right) = 0$$

eşitliği sağlandığından dolayı $y(x) = c_1 sin2x + c_2 \cos 2x$ ifadesi x'in bütün değerleri için diferansiyel denklemi sağlar ve $(-\infty, +\infty)$ aralığında bir çözümüdür. Diğer yandan Şekil II.2 de örnekteki diferansiyel denklemin çözüm eğrilerinin birkaçının grafiği görülmektedir.



Şekil II: 2 $y'' + 4y = 0$ diferansiyel denkleminin çözüm eğrileri

Örnek 3.3

$y = e^{3x}$ fonksiyonu $y''' - 4y'' - 4y' + 16y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olup olmadığını gösterin.

$$y = e^{3x} \Rightarrow y' = 3e^{3x} \Rightarrow y'' = 9e^{3x} \Rightarrow y''' = 27e^{3x}$$

Türev değerleri diferansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$27e^{3x} - 36e^{3x} - 12e^{3x} + 16e^{3x} = 0 \Rightarrow -5e^{3x} = 0$$

olur.Bu ise mümkün değildir.Yani $-5e^{3x} \neq 0$ dır.Dolayısıyla $y = e^{3x}$ fonksiyonu diferansiyel denklemin çözümü değildir.

3.2. Başlangıç Değer ve Sınır Değer Problemleri

Bir diferansiyel denklem mertebesine bağlı olarak, çözüm fonksiyonu bir veya birden fazla sabit içerir. Bu sabitlerin değerlerinin bulunması için diferansiyel denklem ile birlikte ek olarak bazı koşulların da verilmesi gerekir. Eğer bu ek koşul veya koşullar, bağımsız değişkenin sadece bir noktadaki değeri için verilmişse buna **başlangıç koşulu**, bu tür probleme de **başlangıç değerli problem** denir. Koşullar, bağımsız değişkenin birden çok noktasındaki değeri için verilmişse buna **sınır koşulu denir.** Bu tür probleme de **sınır değerli problem** denir.

Örnek 3.4 $y'' = 8x,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$

Probleminde iki koşul da $x = 1$ noktasında verildiğinden bir başlangıç değerli(koşullu) problemdir.

Örnek 3.5 $y'' + 3y' = 5e^x;\ y(0) = 1,\ y(1) = 1$

Probleminde iki koşul da $x = 0$ ve $x = 1$ gibi iki farklı noktada verildiğinden bir sınır değerli(koşullu) problemdir.

Genel olarak bir diferansiyel denklem eğer başlangıç ve sınır koşulları varsa birlikte verilir ve ona göre çözüm istenir.

Örnek 3.6 $y = 2x + Ce^x$ ifadesinin $\dfrac{dy}{dx} - y = 2(1 - x)$ diferansiyel denklemi sağladığını gösteriniz ve $y(0) = 3$ ile tanımlanan özel çözümünü bulunuz.

$y = 2x + Ce^x$ ifadesini $\dfrac{dy}{dx} - y = 2(1 - x)$ diferansiyel denkleminde yerine yazalım:

$$\left(2x + Ce^x\right)' - \left(2x + Ce^x\right) = 2(1 - x) \Rightarrow 2 + Ce^x - 2x - Ce^x = 2 - 2x = 2(1 - x)$$

Denklemi sağladı. Özel çözüm $3 = 2.0 + Ce^0 \Rightarrow C = 3$ olarak alındığında özel çözüm:

$$y = 2x + Ce^x = 2x + 3e^x$$

olarak bulunur.

3.3. Değişkenlere Ayrılabilen Diferansiyel Denklemler

Genel olarak birinci mertebeden adi bir diferansiyel denklemin *standart formu*:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \text{ veya } f(x, y, y') = 0 \tag{III.1}$$

Bu denklemler daima $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{M(x, y)}{-N(x, y)}$ eşitliği biçiminde yazılabilir. Buradaki eksi işareti sadece uygunluk açısından konulmuştuur. Buradan

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{III.2}$$

olur ve *diferansiyel form* olarak adlandırılır. Bu formdaki bir diferansiyel denklem

$$f(x)dx + g(y)dy = 0 \tag{III.3}$$

biçiminde yazılabiliyorsa '***değişkenlere ayrılabilir tipte bir diferansiyel denklem***' adını alır. $f(x)dx + g(y)dy = 0$ denkleminin her terimi yalnız bir değişken ve bu değişkenin diferansiyelini içerdiğinden terim terime integral alınabilir. Bu durumda

$$\int g(y)dy = -\int f(x)dx + C \Rightarrow F(x) + G(y) = C \tag{III.4}$$

çözümü elde edilir.

Diğer yandan

$$f(x)dx + g(y)dy = 0\,;\; y(x_0) = y_0$$

başlangıç değerli problemin çözümü için öncelikle denklem (III.4) kullanılır daha sonra C sabitini elde etmek için başlangıç koşulu uygulanır. Alternatif bir çözüm olarak da

$$\int_{x_0}^{x} f(s)ds + \int_{y_0}^{y} g(t)dt = C \tag{III.5}$$

düşünülebilir.

Örnek 3.7 $xdy = \left(y^2 - 3y + 2\right)dx$ **denkleminin çözümünü bulun.**

Değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{dy}{\left(y^2-3y+2\right)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{\left(y^2-3y+2\right)} = \int \frac{-dy}{y-1} + \int \frac{dy}{y-2} = \int \frac{dx}{x}$$

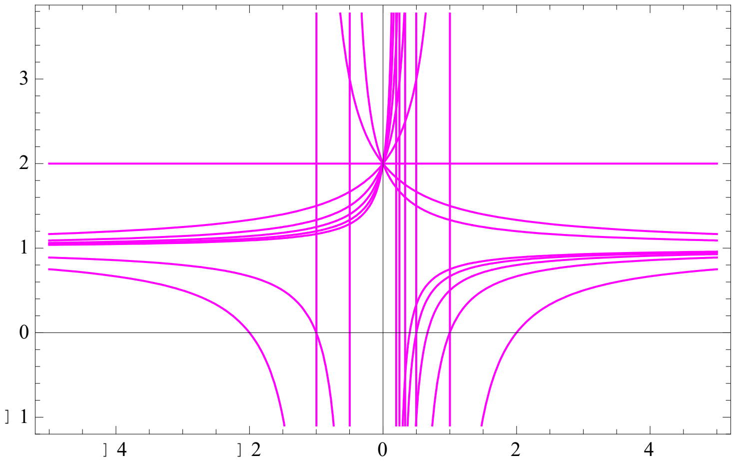
yazılıp integraller alınırsa,

$$-\ln(y-1) + \ln(y-2) = \ln x + c \Rightarrow \ln\left(\frac{y-2}{y-1}\right) = \ln(Cx)$$

eşitliğinden diferansiyel denklemin genel bir çözümü

$$y = \frac{2-Cx}{1-Cx}$$

elde edilir.Bu çözüm eğrilerinin birkaçının grafiği Şekil III.1 de verilmiştir.



Şekil III.:1 $xdy = \left(y^2 - 3y + 2\right)dx$ diferansiyel denkleminin çözüm eğrileri

Örnek 3.8 $x\sin y dx + \left(x^2+1\right)\cos y dy = 0$ denkleminin $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ noktasından geçen çözümünü bulunuz.

Denklem değişkenlerine ayrılırsa,

$$\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{\cos y}{\sin y}dy = 0 \Rightarrow \int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{\cos y}{\sin y}dy = C$$

yazılır. İntegraller alınırsa,

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + \ln\sin y = C \Rightarrow \left(x^2+1\right)\sin^2 y = C$$

elde edilir. $x=1$ için bu denklem derlenirse,

$$(1+1)\sin^2 y\left(1\right) = 2\sin^2\left(\pi/2\right) = 2 = C$$

olduğundan çözümün sağlandığı

$$\left(x^2+1\right)\sin^2 y = C$$

bağıntısı elde edilir.

Örnek 3.9 $\left(1+x^3\right)dy - x^2 y dx = 0$ diferansiyel denkleminin $x=1, y=2$ sınır değerlerini sağlayan özel çözümünü bulunuz.

Verilen denklemi değişkenlerine ayırıp terim terime integre edelim:

$$\left(1+x^3\right)dy - x^2ydx = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{x^2}{1+x^3}dx = 0 \Rightarrow \int\frac{dy}{y} - \int\frac{x^2}{1+x^3}dx$$

$$\ln y - \frac{1}{3}\ln\left(1+x^3\right) = \ln C \Rightarrow y^3 = C\left(1+x^3\right)$$

Denklemin $x=1, y=2$ sınır değerlerini çözümde yerine yazarsak,

$2^3 = C\left(1+1^3\right) \Rightarrow C = 4$ elde edilir ve bu durumda özel çözüm $y^3 = 4\left(1+x^3\right)$

bulunur.

Örnek 3.10 : Varsayalım Mehmet bir fincan kahve yaptı ve $t=0$. dakikada iken su 100^0C de kaynıyordu. Farz edelim ki Mehmet bu kahveyi 70^0C de içmek istiyor. Bulunduğu odanın sıcaklığı da 26^0C olsun. Bunun yanı sıra varsayalım Mehmet 1 dakikadaki kahve sıcaklığını ölçsün ve bunun 95^0C ye düştüğünü tespit etsin. Acaba Mehmet kahveyi ne zaman içmeye başlamalıdır?

Çözüm:

Kahvenin sıcaklığı T, odanınki ise A olsun. Bu durumda kahvenin bazı k sıcaklığı için

$$\frac{dT}{dt} = k\left(A-T\right)$$

diferansiyel denklemi yazılabilir. Buradan başlangıç değerlerimiz ise $A=26, T\left(0\right)=100, T\left(1\right)=95$ dir. Diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırıp terim terime integral alırsak,

$$\int\frac{dT}{T-A} = -\int kdt \Rightarrow \ln\left(T-A\right) = -kt + c$$

$$T - A = Ce^{-kt} \Rightarrow T = A + Ce^{-kt} = 26 + Ce^{-kt}$$

Böylece $T = 26 + Ce^{-kt}$ bulunur. Buradan başlangıç koşullarını uygularsak,

$$100 = 26 + C \Rightarrow C = 74 \text{ ve } T\left(1\right) = 95 \Rightarrow 95 = 26 + 74e^{-k}$$

ve buradan k değeri

$$k = -\ln\left(\frac{95-26}{74}\right) \approx 0.07$$

bulunur. Şimdi kahvenin 70^0C sıcaklığa ulaşacağı t zamanını çözelim.

$$70 = 26 + 74e^{-0.07t} \Rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{70-26}{74}\right)}{0.07} \approx 7.43 \text{ dakika.}$$

Yani Mehmet kahveyi ilk yaptığı zamandan yaklaşık yedi buçuk dakika sonra kahvesini içmeye başlayabilir.

Uygulamalar

1) Her diferansiyel denkemi değişkenlerine ayırıp ayıramayacağımızı tartışınız.

2) Diferansiyel denklemlerin çözüm eğrilerini bilgisayarda çizmemizi sağlayan MATHEMATİCA, MATLAP VE MAPLE bilgisayar dillerini araştırınız.

Uygulama Soruları

1) $y' = 1 + x + y + xy$ diferansiyel denkelmini değişkenlerine ayırarak genel çözümünü bulunuz.

2) $y' = 6\dfrac{e^{2x}}{e^{y}},\ y(0) = 0$ diferansiyel denkelmini değişkenlerine ayırarak özell çözümünü bulunuz.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, bir diferansiyel denklemin çözümü deyince ne anlaşıldığından ve başlangıç ve sınır değer problemlerin den bahsedildi. Ayrıca değişkenlerine ayrılabilir tipte diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırıldı.

Bölüm Soruları

1) $y = x^2 - 1$ ifadesi aşağıdaki diferansiyel denklemlerden hangisinin çözümüdür?

a) $(y')^4 + y^2 = -1$

b) $y'' + y' = 2x + 2$

c) $(y')^3 + y^2 = 0$

d) $(y')^2 + y = -1$

e) $y''' + y' = 2x - 1$

2) $y = e^{4x}$ ifadesi aşağıdaki diferansiyel denklemlerden hangisinin çözümüdür?

a) $y''' - 12y'' + 48y' - 64y = 0$

b). $y''' - 2y'' + 48y' - 64y = 0$

c). $y''' - 12y'' + 8y' - 64 = 0$

d). $y''' - 48y' - 64y = 0$

e) $y'' + 48y' - 64y = 0$

3. $y = \sin x$ ifadesi aşağıdaki diferansiyel denklemlerden hangisinin çözümüdür?

a) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y^2$

b) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 1 - y^2$

c) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y$

d). $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2$

e). $\left(\frac{dy}{dx}\right) = 1 - y^2$

4) $y = C_1e^x + C_2$ nin $y'' - y' = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümüdür. $y(0) = 10$ ve $y'(0) = 100$ koşulunu sağlayacak şekilde C_1 ve C_2 sabitleri aşağıdakilerden hangisinde verilmiştir?

a) $C_1 = 10,\ C_2 = 100$

b) $C_1 = 10,\ C_2 = 90$

c) $C_1 = 100,\ C_2 = -90$

d) $C_1 = 100,\ C_2 = 90$

e) $C_1 = 10,\ C_2 = 10$

5) $\dfrac{dy}{dt} = 4y$ denklemini $y(0) = 1$ koşulunu sağlayan çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = e^t$

b) $y = e^{2t}$

c) $y = 3e^{4t} - 2$

d) $y = 2e^{4t} - 5$

e). $y = e^{4t}$

Cevaplar

1) b, **2)** a, **3)** a, **4)** c, **5)**e

6) Aşağıdaki diferansiyel denklenilerin genel çözümlerini ve verildiğinde başlangıç koşulunu sağlayan özel çözümlerini bulunuz.

1. $y' + y\cos x = 0$.

2. $y' = \dfrac{x}{y}$

3. $y' = x^2 y$

4. $\frac{dx}{dt}=\left(x^2-1\right)t, \quad x(0)=0$

5. $\frac{dx}{dt}=x\sin t, \quad x(0)=1$

6. $\frac{dy}{dx}=xy+x+y+1$

7. $xy'=y+2x^2y, \quad y(1)=1$

8. $y'+y\cos x=0$

7) Aşağıdaki diferansiyel denklenilerin genel çözümlerini ve verildiğinde başlangıç koşulunu sağlayan özel çözümlerini bulunuz.

1. $x^2y'=y^2+xy, \quad y(1)=1.$

2. $y'+y\left(x^2-1\right)+xy^6=0, \quad y(1)=1$

3. $2yy'+1=y^2+x, \quad y(0)=1.$

4. $y'+xy=y^4, \quad y(0)=1.$

5. $yy'+x=\sqrt{x^2+y^2}$

4. HOMOJEN TİPTE VE DEĞİŞKENLERE AYRILABİLİR TİPTE DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

4.1. Homojen Tipte Diferansiyel Denklemler

4.2. Değişkenlere Ayrılabilen Tipte Diferansiyel Denklemler

4.2.1. $(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0$ Tipindeki Diferansiyel Denklemler

4.2.2. $xf(xy)dx+xg(xy)dy=0$ Tipindeki Diferansiyel Denklemler

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Bir diferansiyel denklem mdeğişkenlerine ayrılamıyorsa nasıl çözeriz?

2) $xy' = x - y$ diferansiyel denklemi değişkenlerine ayrılabilir mi?Çözümü nedir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Homojen Tipte Diferansiyel Denklemler	Homojen Tipte Diferansiyel Denklemleri çözebilmek.	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Değişkenlere Ayrılabilen Tipte Diferansiyel Denklemler	Değişkenlere Ayrılabilen hale getirilebilen diferansiyel denklemlerin çözülebilmesi	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
$\left(a_1x+b_1y+c_1\right)dx+\left(a_2x+b_2y+c_2\right)dy=0$ Tipindeki Diferansiyel Denklemler	$\left(a_1x+b_1y+c_1\right)dx+\left(a_2x+b_2y+c_2\right)dy=0$ Tipindeki Diferansiyel Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
$xf\left(xy\right)dx+xg\left(xy\right)dy=0$ Tipindeki Diferansiyel Denklemler	$xf\left(xy\right)dx+xg\left(xy\right)dy=0$ Tipindeki Diferansiyel Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek

Anahtar Kavramlar

- Homojen fonksiyon
- Homojen diferansiyel denklemler
- Değişkenlere ayrılabilir hale getirilebilir diferansiyel denklemler

Giriş

Bu bölümde, geçen haftadan kısmen değindiğimiz diferansiyel denklemlerinin çözümlerini bulmaya homojen tipte diferansiyel denklemler ve bazı değişkenlere ayrılabilir forma getirilebilen denklemler için devam edilir.

4.1. Homojen Tipte Diferansiyel Denklemler

Eğer bir $f(x,y)$ fonksiyonu için, $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$ şeklinde yazılabiliyorsa, bu denkleme *n.dereceden homogen denklem* denir. $y'=\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ standart formdaki bir $f(x,y)$ fonksiyonu

$$f(x,\lambda x)=f(1,\lambda),\ (x\neq 0)\ \text{veya}\ f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n f(x,y)$$

koşulunu sağlıyorsa diferansiyel denklem homojendir.

Denklem (II.2)deki diferansiyel denklemdeki Eğer M(x,y) ile N(x,y) aynı mertebeden homojen fonksiyonlarsa buna ***b****irinci mertebeden homojen diferansiyel denklem* denir. Bu durumda $y=vx$ dönüşümü yapılarak

$$y=vx \Rightarrow dy=vdx+xdv \qquad \text{(III.6)}$$

denklem değişkenlere ayrılabilir hale getirilerek çözülür. Alternatif olarak eğer $\dfrac{dy}{dx}=y'=f(x,y)$ şeklindeki bir diferansiyel denklemde f fonksiyonu sadece x'e

veya sadece y'e değil de, onların x/y veya y/x oranlarına bağlı ise bu diferansiyel denklem **homojendir** denir ve

$$\frac{dy}{dx}=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 4.1

Homojen	**Homojen değil**
$f(x,y)=x^4-x^3y \Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^4 f(x,y)$	$f(x,y)=x^2+\cos x\sin y \Rightarrow f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2x^2+\cos\lambda x\sin\lambda y \neq \lambda^n f(x,y)$
$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+2xy}{x^2}=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\left(\dfrac{y}{x}\right)=F\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^3+2xy}{x^2}=y\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+2\left(\dfrac{y}{x}\right)\neq F\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Örnek 4.2: $(x^3+y^3)dx-3xy^2dy=0$ **denkleminin çözümünü bulun.**

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^3 f(x,y)$ şeklinde yazılabildiğinden bu denkleme 3.dereceden homojen denklemdir. $y=vx \Rightarrow dy=vdx+xdv$ dönüşmü yapılıp denklemde yerine konulunca,

$$(x^3+x^3v^3)dx-3xx^2v^2(xdv+vdx)=0$$
$$(x^3-2x^3v^3)dx=3x^4v^2dv$$
$$(1-2v^3)dx-3v^2xdv=0 \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx-3\int\frac{v^2dv}{1-2v^3}=0 \Rightarrow x^2(1-2v^3)=C$$

bulunur. $v=y/x$ olduğundan $x^2(1-2\frac{y^3}{x^3})=C$ elde edilir.

Örnek 4.3: $2xy\frac{dy}{dx}-\left(x^2+y^2\right)=0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^2 f(x,y)$ şeklinde yazılabildiğinden bu denkleme 2.dereceden homojen denklemdir.

$y=vx \Rightarrow dy=vdx+xdv$ dönüşmü yapılıp denklemde yerine konulunca,

$$2xvx\left(vdx+xdv\right)-\left(x^2+\left(vx\right)^2\right)dx=0 \Rightarrow 2x^2v^2dx+2x^3vdv-x^2dx-x^2v^2dx=0$$
$$\left(v^2-1\right)dx+2vxdv=0 \Rightarrow \frac{2v}{1-v^2}dv=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int\frac{2v}{1-v^2}dv=\int\frac{1}{x}dx$$
$$-\ln\left(1-v^2\right)=\ln x+\ln C \Rightarrow x\left(1-v^2\right)=C$$

$v=y/x$ olduğundan

$$y=\mp\sqrt{x\left(x-c\right)}$$

Elde edilir.

4.2. Değişkenlere Ayrılabilen Tipte Diferansiyel Denklemler

4.2. 1. $\left(a_1x+b_1y+c_1\right)dx+\left(a_2x+b_2y+c_2\right)dy=0$ Tipindeki Diferansiyel Denklemler

Bu tipteki diferansiyel denklemler uygun dönüşüm seçmek şartıyla değişkenlerine ayrılabilir.Öncelikle eğer $c_1=c_2=0$ olsaydı denklem homojen tipte bir denklem olurdu. Varsayalım c_1 ve c_2 'nin her ikisi de sıfırdan faklı olsunlar.

Bu durumda denklemde

$$x = x_1 + h \Rightarrow dx = dx_1, \qquad y = y_1 + k \Rightarrow dy = dy_1 \tag{III.7}$$

dönüşümleri yapılırsa denklem**,**

$$\left(a_1\left(x_1+h\right)+b_1\left(y_1+k\right)+c_1\right)dx_1+\left(a_2\left(x_1+h\right)+b_2\left(y_1+k\right)+c_2\right)dy_1=0$$
$$\left(a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1\right)dx_1+\left(a_2x_1+b_2y_1+a_2h+b_2k+c_2\right)dy_2=0$$

formunu alır. Bu durumda h ve k

$$a_1h+b_1k+c_1=0$$
$$a_2h+b_2k+c_2=0$$

biçiminde seçilirse denklem,

$$\left(a_1x_1+b_1y_1\right)dx_1+\left(a_2x_1+b_2y_1\right)dy_1=0$$

homojen tipte bir diferansiyel denkleme dönüşür.Bundan sonra homojen tipte diferansiyel denklemde yapılan işlemler uygulanarak çözüm bulunur.

Eğer $a_1b_2-a_2b_1=0$ olsaydı $x=x_1+h$ ve $y=y_1+k$ dönüşümleri yapamazdık. Bu durumda

$$a_1b_2-a_2b_1=0 \Rightarrow a_1b_2=a_2b_1 \Rightarrow \frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k \Rightarrow a_2=a_1k \text{ ve } b_2=b_1k$$

olarak diferansiyel denklemi,

$$\left(a_1x+b_1y+c_1\right)dx+\left(k\left(a_1x+b_1y\right)+c_2\right)dy=0$$

formununu alır. Burada $a_1x+b_1y=t$ dönüşümü yapılırsa denklem, değişkenlere ayrılabilen tipte bir denklem haline gelir.

Örnek 4.4: $\left(2x-5y+3\right)dx-\left(2x+4y-6\right)dy=0$ denklemini çözünüz.

Öncelikle denklemde

$$\frac{a_2}{a_1}=-1,\ \frac{b_2}{b_1}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{a_2}{a_1}\neq\frac{b_2}{b_1}$$

olduğundan ilk durumla,

$$x = x_1 + h \Rightarrow dx = dx_1, \qquad y = y_1 + k \Rightarrow dy = dy_1$$

biçiminde seçilirse denklem,

$$\left(2x_1 - 5y_1 + 2h - 5k + 3\right)dx_1 + \left(-2x_1 - 4y_1 - 2h - 4k + 6\right)dy_1 = 0$$

haline gelir. Buradan h ve k ,

$$\begin{aligned} &2h - 5k + 3 \Rightarrow 2h - 5k = -3 \\ &-2h - 4k + 6 \Rightarrow -2h - 4k = -6 \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözüm kümesidir. Bu sistemin çözümü $h = k = 1$ bulunur.Buna göre

$$x = x_1 + 1 \Rightarrow dx = dx_1, \qquad y = 1 + k \Rightarrow dy = dy_1$$

dönüşümü ile denklem,

$$\left(a_1 x_1 + b_1 y_1\right)dx_1 + \left(a_2 x_1 + b_2 y_1\right)dy_2 = 0 \Rightarrow \left(2x_1 - 5y_1\right)dx_1 + \left(-2x_1 - 4y_1\right)dy_1 = 0$$

birinci dereceden homojen bir denklemdir. Bunun için

$$y_1 = vx_1 \Rightarrow dy_1 = vdx_1 + x_1 dv$$

dönüşümü kullanılarak,

$$\left(2 - 5v\right)dx_1 - \left(2 + 4v\right)\left(vdx_1 + x_1 dv\right) = 0 \Rightarrow \left(2 - 7v - 4v^2\right)dx_1 - x_1\left(2 + 4v\right)dv = 0$$

değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklem haline gelir. Buradan,

$$\frac{dx_1}{x_1} - \frac{2 + 4v}{2 - 7v - 4v^2}dv = 0 \Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} + \frac{4}{3}\frac{dv}{4v - 1} + \frac{2}{3}\frac{dv}{v + 2} = 0$$

yazılır. Terim terime intgeral alınarak,

$$\ln x_1 + \frac{1}{3}\ln\left(4v - 1\right) + \frac{2}{3}\ln\left(v + 2\right) = \ln C \Rightarrow x_1^3\left(4v - 1\right)\left(v + 2\right)^2 = C$$

olur. $y_1 = vx_1 \Rightarrow v = \dfrac{y_1}{x_1} = \dfrac{y - 1}{x - 1}$ olduğundan denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(x-1\right)^3\left(4\frac{y-1}{x-1}-1\right)\left(\frac{y-1}{x-1}+2\right)^2=C\Rightarrow\left(x-1\right)^3\left(\frac{4y-x-3}{x-1}\right)\left(\frac{y+2x-3}{x-1}\right)^2=C$$

Buradan sadeleştirme işlemleri yapılırsa,

$$\left(4y-x-3\right)\left(y+2x-3\right)^2=C$$

elde edilir.

Örnek 4.5

$\left(x+y\right)dx+\left(3x+3y-4\right)dy=0$ **denklemini çözünüz.**

Çözüm :

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=1$ olduğundan $x=x_1+h$ ve $y=y_1+k$ dönüşümleri yapamayacağız.

Burada $x+y=t\Rightarrow dy=dt-dx$ dönüşümü yapılırsa,

$$tdx+\left(3t-4\right)\left(dt-dx\right)=0\Rightarrow\left(4-2t\right)dx+\left(3t-4\right)dt=0$$

değişkenlerine ayrılabilir forma gelir. Buna göre,

$$dx+\frac{\left(3t-4\right)}{\left(4-2t\right)}dt=0\Rightarrow\int dx+\int\frac{\left(3t-4\right)}{\left(4-2t\right)}dt=0\Rightarrow x-\frac{3}{2}t+\ln\left(\frac{1}{2-t}\right)=C$$

yazılır. $x+y=t$ olduğundan denklemde yerine yazılırsa,

$$x-\frac{3}{2}\left(x+y\right)+\ln\left(\frac{1}{2-x-y}\right)=2x-3\left(x+y\right)+2\ln\left(\frac{1}{2-x-y}\right)=C$$
$$x+3y+2\ln\left(2-x-y\right)=C_1$$

elde edilir.

4.2.2. $xf\left(xy\right)dx+xg\left(xy\right)dy=0$ Tipinde Olan Denklemler

Bu tipteki denklemler için

$$xy=z\Rightarrow y=\frac{z}{x}\Rightarrow dy=\frac{xdz-zdx}{x^2} \qquad \text{(III.8)}$$

dönüşümü yapılarak denklem,

$$P(x,z)dx + Q(x,z)dz = 0 \tag{III.9}$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir hale getirilir.

Örnek 4.6: $\left(y - xy^2\right)dx - \left(x + x^2 y\right)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözün.

Çözüm:

$$xy = z \Rightarrow y = \frac{z}{x} \Rightarrow dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$$

dönüşümü ile denklem,

$$\frac{z}{x}(1-z)dx - x(1+z)\frac{xdz - zdx}{x^2} = 0 \Rightarrow 2zdx - x(1+z)dz = 0$$

değişkenlerine indirgenir.

$$\frac{2dx}{x}dx - \frac{1+z}{z}dz = 0 \Rightarrow \int \frac{2dx}{x}dx - \int \frac{1+z}{z}dz = 2\ln x - \ln z - z = LnC \Rightarrow x^2 = Cze^z$$

çözümü bulunur. Burada $xy = z$ kullanılırsa,

$$x = Cye^{xy}$$

elde edilir.

Örnek 4.7: $y(xy+1)dx + x\left(1 + xy + +x^2y^2\right)dy = 0$ diferansiyel denklemini çözün

Çözüm:

$$xy = z \Rightarrow y = \frac{z}{x} \Rightarrow dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$$

dönüşümü ile denklem

$$\frac{z}{x}(z+1)dx + x\left(1 + v + v^2\right)\frac{xdz - zdx}{x^2} = 0$$

Olarak paydadan kurtarıp tekrar düzenlersek,

$$z^3dx - x\left(1 + z + z^2\right)dz = 0 \Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{z^3} - \int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z} = 0$$

Buradan

$$\ln x+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{z}-\ln z=C_1 \Rightarrow C_1 z^2=2z^2\ln\left(\frac{z}{x}\right)-2z-1$$

Buradan $xy=z$ dönüşümü denklemde yerine yazılırsa çözüm,

$$2x^2y^2\ln y-2xy-1=C_1x^2y^2$$

olur.

Uygulamalar

1) Homojen denklem ismini hem

$$y' + p(x)y = 0$$

2) Diferansiyel denklemi için hem de y/x in fonksiyonu olan

$$y' = q(y/x),$$

3) Diferansiyel denklemi için kullandıoğımızı fakat ikisinin de farklı oldukalarını görün

Uygulama Soruları

1) $y' = \dfrac{x^2 + 2y^2}{xy}$ diferansiyel denklemin çözümünmü bulunuz.

2) $3xy^2 y' = y^3 + x$ diferansiyel denklemini $y = vx$ dönüşümü yaparak çözünüz.

3) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ homojen diferansiyel denklemin çözümünü bulunuz.

4) $y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$, $y(-1) = 2$ başlangıç değerli homojen diferansiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, Homojen tipte diferansiyel denklemlerin ve bazı değişkenlere ayrılabilir forma getirilebilen denklemlerin çözümü için uğraşıldı. Diğer yandan tam diferansiyel denklemlere bir altyapı kazanıldı.

Bölüm Soruları

A) Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$

2. $(3x+2y+1)dx-(3x+2y-1)dy=0$

3. $(1-xy+x^2y^2)dx+(x^3y-x^2)dy=0$

B) Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $y(2+x)y'=y^2-1$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y^2-1=C(x+2)^2$

b) $y-1=C(x-2)^2$

c) $y^2-1=C(x+2)$

d) $y^{1/2}+2=C(x-2)^2$

e) $y=C(x-2)^2$

2) $xydx+(1+x^2)dy=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y^2(1-x^2)=C$

b) $y^2(1+x^2)=C$

c) $y(1+x^2)=C$

d) $y^3(1+x^2)=C$

e) $y(1+x)=C$

3) $x^2y'=y(y+2x)$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y(1-x^2C)=Cx$

b) $y(1-C)=Cx^2$

c) $y(5-xC)=Cx^{-2}$

d) $y(1-xC)=Cx^2$

e) $y\left(5-x^2C\right)=Cx^{-3}$

4) Aşağıdaki fonksiyonların hangisi homojen değildir?

a) x^2-xy

b) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

c) $\sqrt{x^2+2xy+3y^2}$

d) $x\sin y+y\sin x$

e) Hiçbiri

5) $xydy+\left(y^2+x^2\right)dx=0$ denkleminin x=1,y=-1 için özel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $x^4+2x^2y^2=3$

b) $x^4+2x^2y=3$

c) $x+2x^2y^2=3$

d). $x^4+2x^3y^2=3$

e) $x+2xy^2=5$

6) $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a). $(y-x)^2(y+x-1)^3=C$

b) $(y-x+1)^2(y+x-1)^3=C$

c) $(y-x+1)^{-3}(y+x-1)^3=C$

d) $(y+x-1)^2(y-x-1)^3=C$

e) $(y+x-1)^2(y-x-1)=C$

7) $y(1+2xy)dx)+x(1-xy)dy=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y=Cx^3e^{-1/xy}$

b) $y=Cxe^{-1/xy}$

c) $y=Cx^2e^{-1/xy}$

d) $y=Cx^2e^{-1/y}2$

e) $y=Cx^2e^{-y}2$

8) $(3x+2y+1)dx-(3x+2y-1)dy=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\ln(15x+10y-1)+\frac{5}{2}(x+y)=C$

b) $y=Cxe^{-1/xy}$

c) $\ln(15x-10y)+\frac{5}{2}(x-y)=C$

d) $\ln(15x+10y-1)+\frac{5}{2}(x-y)=C$.

e) $y=Cx^2e^{-1/xy}$

Cevaplar

1) a, **2)** b, **3)** b, **4)** d, **5)** a, **6)** b, **7)** c, **8)** d

5. TAM DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

5.1. Tam Diferansiyel Denklemler

5.2. İntegrasyon Çarpanları

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Bir diferansiyel denklem homojen değilse nasıl homojen hale getiririz?

2) Homojen olmayan diferansiyel denklemleri nasıl çözeriz?

$3x^2 ydx + 4x^3 dy = 0$ denklemini değişkenlere ayırmadan nasıl çözebiliriz?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Tam Diferansiyel Denklemler	Tam Diferansiyel Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
İntegrasyon Çarpanları	Tam olmayan diferansiyel denklemleri İntegrasyon Çarpanları kullanrak tam hale getirip çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.

Anahtar Kavramlar

- Tam diferansiyel denklemler
- İntegrasyon çarpanları

Giriş

Bu bölümde öncelikle tam diferanssiyel denklemler ve çözümleri incelenir. Daha sonra tam olmayan fakat tam hale getirilebilen diferansiyel denklemleri için gerekli integrasyon çarpanlarını irdelenir

5.1. Tam Diferansiyel Denklemler

$M(x,y)$ ve $N(x,y)$, xy düzleminin bir dikdörtgen bölgesinde tanımlı iki fonksiyon olsun. Bu fonksiyonlar ile birlikte x ve y ye göre birinci mertebeden kısmi türevleri de tanımlanan bölgede sürekli olsun ve $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ diferansiyel denkleminin tam diferansiyel denklem olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x} \qquad \text{(III.10)}$$

bağıntısının sağlanmasıdır. Bu tam diferansiyelli denklemin $U(x,y)=c$ biçiminde çözümü olsun ve buradan heriki tarafın diferansiyeli alınınarak,

$$dU(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad \text{(III.11)}$$

yazılısın. Bu eşitlikten

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=M(x,y)\Rightarrow U(x,y)=\int^{x}M(x,y)dx+\phi(y)$$

Burada $\phi(y)$, x' e göre intgeral sabitidir.Daha sonra $\phi(y)$ nin bulunması için,

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y)\Rightarrow\frac{\partial}{\partial y}\left(\int^{x}M(x,y)dx+\phi(y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int^{x}M(x,y)dx\right)+\frac{d\phi(y)}{dy}=N(x,y)$$

denklemi çözülür. Son olarak $\phi(y)$ değeri yerine yazılarak çözüm $U(x,y)=c$ biçiminde bulunur.

Örnek 5.1: $(e^{-x}+2y)dy=(ye^{-x}-\sin x)dx$ denkleminin çözümünü bulun.

Denklem

$$(ye^{-x}-\sin x)dx-(e^{-x}+2y)dy=0$$

formuna getirilirse $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan tam bir differansiyel denklemdir.

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=(ye^{-x}-\sin x)\Rightarrow U(x,y)=\int(ye^{-x}-\sin x)dx=\cos x-ye^{-x}+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=-e^{-x}+\varphi(y)'=-e^{-x}-2y\Rightarrow\varphi(y)'=-2y\Rightarrow\varphi(y)=-y^{2}+c$$

buradan, $U(x,y)=\cos x - ye^{-x} - y^2 = c$ biçiminde türetilebilir fonksiyonlardır.

Örnek 5.2: $\left(x+\sin y\right)dx+\left(x\cos y+y\right)dy=0$ denkleminin çözümünü bulun.

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos y=\frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan tam bir diferansiyel denklemdir.

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=(ye^{-x}-\sin x)\Rightarrow U(x,y)=\int(x+\sin y)dx=x^2/2+x\sin y+\varphi(y)$$

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=N(x,y)=x\cos y+\varphi(y)'=x\cos y+y\Rightarrow\varphi(y)'=y\Rightarrow\varphi(y)=y^2/2+c$$

buradan, $U(x,y)=x^2/2+y^2/2+x\sin y=c$ biçiminde türetilebilir fonksiyonlardır.

5.2. İntegrasyon Çarpanları

$M(x,y)dt+N(x,y)dy=0$ diferansiyel denklemi tam olmadığı zaman yani

$$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

ise bu denklem , $\mu=\mu(x,y)$ integrasyon sabiti ile çarpılarak,

$$\mu M(x,y)dt+\mu N(x,y)dy=0 \qquad \text{(III.12)}$$

Tam diferansiyel denklemine dönüştürülebilir. Bu durumda

$$\frac{\partial\mu M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial\mu N(x,y)}{\partial x} \qquad \text{(III.13)}$$

bağıntısı tüm $\left(x,y\right)$ için gerçeklenir.Buradan $\mu=\mu(x,y)$ integrasyon sabiti için aşağıdaki farklı durumları göz önüne alınırsa,

1. $\mu=\mu(x)$ olsun (μ , sadece x e bağlı). Bu durumda Denklem (III.13)

$$\mu\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\mu\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}+N(x,y)\frac{d\mu}{dx}\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=f(x)dx=\frac{M_y-N_x}{N}dx \qquad \text{(III.14)}$$

biçimini alır . $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$ olmak üzere integrasyonla $\mu=e^{\int f(x)dx}$ elde edilir.

Örnek 5.3: $\left(x^2+y^2+x\right)dx+xydy=0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y,\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=y\Rightarrow\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan tam diferansiyel denklem değildir. Bu durumda

$$\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow\mu=e^{\int f(x)dx}=x$$

integral çarpanı elde edilir. Denklem bu çarpanla çarpıldığında,

$$\left(x^3+y^2x+x^2\right)dx+x^2ydy=0$$

elde edilir. Buradan tam diferansiyel denklemde yapılan işlemler uygulanırsa çözüm

$$U(x,y)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2y^2}{2}=c$$

bulunur.

2. $\mu=\mu(y)$ olsun (μ , sadece y e bağlı). Bu durumda Denklem(II.13)

$$\mu\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}+M(x,y)\frac{d\mu}{dy}=\mu\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\Rightarrow\frac{d\mu}{\mu}=g(y)dy=\frac{\left(N_x-M_y\right)dy}{M}\qquad\text{(II.15)}$$

biçimini alır . $\frac{N_x-M_y}{M}=g(y)$ olmak üzere integrasyonla $\mu=e^{\int g(y)dy}$ elde edilir. Elde edilen bu integrasyon sabiti ile denklem tam hale getirilip yukardaki işlemler yapılır.

Örnek 5.4: $(2x-3)\,ydx+\left(y^2-x^2+3x\right)dy=0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2x-3,\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-2x+3\Rightarrow\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

olduğundan tam diferansiyel denklem değildir. Bu durumda

$$\frac{N_x-M_y}{M}=\frac{-2x+3-2x+3-M_y}{(2x-3)\,y}=\frac{-2}{y}=g(y)\Rightarrow\mu(y)=e^{\int g(y)dy}=e^{\int\frac{-2}{y}dy}=\frac{1}{y^2}$$

integral çarpanı elde edilir. Denklem bu çarpanla çarpıldığında,

$$(2x-3)\frac{1}{y}dx+\left(1-\frac{x^2}{y^2}+3\frac{x}{y^2}\right)dy=0$$

elde edilir. Buradan denklem tam hale getirlir. Tam diferansiyel denklemde yapılan işlemler uygulanırsa

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M\left(x,y\right) \Rightarrow U(x,y) = \int (2x-3)\frac{1}{y}dx + \varphi(y) = \left(x^2-3x\right)\frac{1}{y} + \varphi(y) \quad (*)$$

Bulunur. Diğer yandan

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N\left(x,y\right) \Rightarrow \frac{3x-x^2}{y^2} + \varphi'(y) = 1 - \frac{x^2}{y^2} + \frac{3x}{y^2} \Rightarrow \varphi'(y) = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y$$

Elde edilir. Bulunan $\varphi(y)$ değeri $(*)$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$U\left(x,y\right) = \left(x^2-3x\right)\frac{1}{y} + y$$

ve C ye eşitlenirse genel çözüm,

$$\left(x^2-3x\right)\frac{1}{y} + y = C$$

elde edilir.

3. $\mu = \mu(xy)$ olsun. Yani $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ denklemi

$$xf(xy)dx + yg(xy)dy = 0$$

formunda yazılabiliyorsa Denklem (II.13)

$$\frac{\partial \mu}{\partial x}N(x,y) - \frac{\partial \mu}{\partial y}M(x,y) = \mu\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) \qquad \text{(III.16)}$$

şeklini alır. Buradan $v = yx$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial \mu}{\partial v},$$
$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial v}.\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial \mu}{\partial v}$$

elde edilir.Bu değerler Denklem(II.16) da yerine yazılıp birtakım düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Ny-Mx}\left(M_y - N_x\right)dx \qquad \text{(III.17)}$$

bulunur. Burada $\frac{1}{Ny-Mx}\left(M_y-N_x\right)$ ifadesi yx in bir fonksiyonu ise $v=yx$ için Denklem(III.17),

$$\frac{d\mu}{\mu}=F\left(v\right)dv$$

halini alır. Buradan $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ diferansiyel denklemin bir integrasyon çarpanı

$$\mu=\mu\left(v\right)=e^{\int F(v)dv}=e^{\int F(yx)d(yx)} \qquad \text{(III.18)}$$

kullanılarak tam hale getirilir.

Örnek 5.5: $3ydx+5xdy=0$ denklemini çözünüz.

$$\frac{1}{Ny-Mx}\left(M_y-N_x\right)=\frac{3-5}{5xy-3xy}=-\frac{1}{xy}=F(xy)$$

Olduğundan integrasyon çarpanı,

$$\mu=\mu\left(xy\right)=e^{\int -\frac{1}{xy}d(yx)}=\frac{1}{xy}$$

elde edilir. Diferansiyel denklem $\frac{1}{xy}$ çarpılırsa

$$\frac{3}{x}dx+\frac{5}{y}dy=0$$

ve terim terime integral alınırsa,

$$x^3y^5=c$$

çözümü elde edilir.

4. $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ homojen ise , $\mu=\frac{1}{Mx+Ny}$ şeklinde bir intgerasyon çarpanı olup olmadığına bakalım. Bunun için denklemi μ ile çarpılırsa,

$$\frac{M(x,y)}{Mx+Ny}dx+\frac{N(x,y)}{Mx+Ny}dy=0 \qquad \text{(III.19)}$$

olur. Tam diferansiyel denklem olma şartına göre türev alma kuralından ve Euler teoreminden bakılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{M(x,y)}{Mx+Ny}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N(x,y)}{Mx+Ny}\right)$$

Olduğu görülür. Dolayısıyla homojen denklemler için $\frac{1}{Mx+Ny}$ daima bir integral çarpanıdır.

Örnek 5.6 : $\left(x^4+y^4\right)dx-xy^3dy=0$ denklemini çözünüz.

$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^4 f(x,y)$ şeklinde yazılabidiğinden bu denkleme 4.dereceden homojen denklemdir. Dolayısıyla

$$\frac{1}{Mx+Ny}=\frac{1}{x\left(x^4+y^4\right)-xy^3y}=\frac{1}{x^5+xy^4-xy^4}=\frac{1}{x^5}$$

integral çarpanı ile denklem çarpılırsa

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5}\right)dx-\frac{y^3}{x^4}dy=0$$

şeklini alır ve bu denklem bir tam diferansiyel denklemdir (Niçin?). Buradan

$$\mu(x,y)=\int^x\left(\frac{1}{x}+\frac{y^4}{x^5}\right)dx=\ln x-\frac{1}{4}\frac{y^4}{x^4}+\phi(y)$$

elde edilir. Böylece

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=-\frac{y^3}{x^4}+\phi'(y)=N(x,y)=-\frac{y^3}{x^4}\Rightarrow\phi'(y)=0$$

olur. Dolayısıyla denklemin çözümü,

$$\ln x-\frac{1}{4}\frac{y^4}{x^4}=C$$

bulunur.

5) Bazı diferansiyel denklemler için uygun bir intgerasyon çarpanı deneme yanılma yöntemiyle de bulunabilir. Fakat bu genel anlamda uygulanabilir bir yöntem değildir. Tam olmayan bazı diferansiyel denklemler yeniden düzenleme ile uygun gruplandırılarak kolayca intgere edilebilirler.

Örnek 5.7: $xdx-ydy=\sqrt{x^2-y^2}\tan ydy$ denkleminin çözümünü bulun.

$$\frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \tan ydy \Rightarrow d(\sqrt{x^2 - y^2}) = \tan ydy \Rightarrow \int d(\sqrt{x^2 - y^2}) = \int \tan ydy$$

$$\sqrt{x^2 - y^2} = \ln|\sec y| + c$$

elde edilir.

Uygulamalar

1) Bir diferansiyel denklemi tam hale getirmek için kullanılan integral çarpanları ile ilgili uygulamalar yapın.

Uygulama Soruları

1) $\left(4x^3y^3+3x^2\right)dx+\left(3x^4y^2+6y^2\right)dy=0$ diferansiyel denkelminin çözümünü bulunuz.

2) $\left(3x^2y^2\right)dx+\left(6x^3y\right)dy=0$ diferansiyel denklemi tam difertansiyel denklem mi? Değil se integrasyon çarpanları kullanarak tam hale getrip çözümü bulununz.

3) $\left(4x+7y\right)dx+\left(3x+4y\right)dy=0$ diferansiyel denklemi tam difertansiyel denklem mi? Değil se integrasyon çarpanları kullanarak tam hale getrip çözümü bulununz.

4) $\left(x^3y^4+x\right)dx+\left(x^4y^3+y\right)dy=0$ tam difertansiyel denklemin çözümünü bularak çözüm eğrisinin grafiğini $\left\{-1\le x\le 1,-1\le y\le 1\right\}$ bölgesinde çiziniz.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde dersimiz için önemli bir yer teşkil eden tam diferanssiyel denklemleri tanıtıldı. Ayrıca tam olmayan diferansiyel denklemleri tam hale getirmek için bazı integrasyon çarpanlarının nasıl kullanıldığı irdelendi.

Bölüm Soruları

A) Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz

1. $\left(x^2+y^2+x\right)dx+2xydy=0$

2. $\left(1+e^{2\theta}\right)d\rho+2\rho e^{2\theta}d\theta=0$.

3. $\left(2x\cos y+3x^2y\right)dx+\left(x^3-x^2\sin x-y\right)dy=0$ denkleminin $y\left(0\right)=2$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

B) Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz

1. $\left(x+x^4+2x^2y^2+y^4\right)dx+ydy=0$ denkleminin çözümünü bulun

2. $ydy-\left(2y-x\right)dx=0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

3. $y-x=\frac{1}{2}\frac{dy}{dx},\quad y\left(0\right)=\frac{3}{2}$ başlangıç değer problemini çözünüz.

4. $\left(3x+\frac{6}{y}\right)dx+\left(\frac{x^2}{y}+3\frac{y}{x}\right)dy=0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

C) .Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $x^4+6xy+y^2-2y=C$

b) $\left(y-x+1\right)^2\left(y+x-1\right)^3=C$

c) $x^3+6xy+y^2-2y=C$

d) $\left(y+x-1\right)^2\left(y-x-1\right)^3=C$

e) $\left(y-5x+1\right)^2\left(y+5x-1\right)^3=C$

2) Aşağıdaki diferansiyel denklemlerden hangi tam diferansiyel denklemdir?

a) $\left(x^2-y\right)dx-xdy=0$

b) $y(x-2y)dz-x^2dy=0$

c) $x^3+6xy+y^2-2y=C$

d) $dx=\sqrt{a^2-x^2}\,dy$

e) $dx=\sqrt{a-x^2}\,dy$

3) Aşağıdaki diferansiyel denklemlerden hangisi tam diferansiyel denklem değildir?

a) $\left(3x^2-6xy\right)dx-\left(3x^2+2y\right)dy=0$

b) $y(x-2y)dz-x^2dy=0$

c) $\left(3x^2+3xy^2\right)dx-\left(3x^2y-3y^2+2y\right)dy=0$

d) $\left(xy^2-y\right)dx+x(xy-1)dy=0$

e) Hiçbiri

4) $\left(x^2+2ye^x\right)y'+2xy+2y^2e^{2x}=0,\ y(0)=1$ başlangıç değerli denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $xy+ye^{2x}=1$

b) $x^2y+y^2e^x=1$

c) $x^2y+y^2e^{2x}=1$

d) $(y+x-1)^2(y-x-1)^3=C$

e) $x^2y+y^3e^x=1$

5) Aşağıdaki diferansiyel denklemlerden hangi tam diferansiyel denklemdir?

a) $dx=\left(a^2-x^2\right)dy$

b) $y(x-y)dz-x^2dy=0$

c) $x^3+6xy+y^2-2y=C$

d) $\left(y^2-x\right)dx+2xydy=0$

e) $dx = \sqrt{a - x^2}\,dy$

Değerlendirme sorularının cevapları

1-A, 2-A,3-D, 4-C 5-D

Cevaplar

1)d, 2)a, 3)c, 4)a, 5)c

6. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

6.1. Lineer Denklemler

6.2. Lineer Hale Getirilebilen Denklemler

6.2.1. Bernoulli Denklemi

6.2.2. Riccati Diferansiyel Denklemi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) $y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$, $y(-1) = 2$ Lineer Diferansiyel Denklem nedir?

2) $xy' + 2y = 4x^2$, $y(1) = 2$ başlangıç değerli diferansiyel denkleminin çözümünü bulun.

3) $y' - y = xy^2$ diferansiyel denklemini lineer midir?Nasıl lineer hale getirip çözeriz?

Hem lineer hem de Bernoulli denklemini bünyesinde barındıran denklemin ismi nedir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Lineer Denklemler	Birinci mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemleri kavrayabilmek.	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Lineer Hale Getirilebilen Denklemler	Lineer Hale Getirilebilen Diferansiyel Denklemleri kavrayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Bernoulli Denklemi	Bernoulli Denklemini çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Riccati Diferansiyel Denklemi	Riccati Diferansiyel Denklemini çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek

Anahtar Kavramlar

- Lineer Diferansiyel denklem
- Bernoulli Diferansiyel denklem
- Riccatti Diferansiyel denklem
- Varlık ve teklik teoremi

Giriş

Bu haftadaki dersimizde diferansiyel denklemlerin en önemlilerinden olan lineer denklemlerin nasıl çözüleceğini öğrenilir. Lineer denklemlerin düşük ve yüksek mertebelileri vardır. Bu dersimizde, daha çok birinci dereceden lineer denklemlere odaklanılır. Ayrıca lineeer diferansiyel denkleme dönüştürülen Bernoulli ve Riccati denklemleri incelenir.

6. Birinci Mertebeden ve Birinci Dereceden Denklemler

Öncelikle bu bölümde aşağıdaki 3 sorunun cevabını arayacağız:

1) Verilen bir başlangıç değerli diferansiyel denklemin bir çözümü var mıdır?

2) Eğer bir çözüm varsa bu çözüm tek midir?

3) Eğer bir çözüm varsa bu çözümü nasıl bulabiliriz?

Şuana kadar ilk 2 soruyu ihmal edip hep 3.soru ile ilgilendik. Şimdi bu bölümde ise öncelikle ilk 2 soruyu tartışacağız yani bir diferansiyel denklemi çözmeden önce çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili ne tür bilgi türetebiliriz? Sorusuna cevap arayacağız. Bunun için aşağıdaki hem birinci hem de daha yüksek mertebeden lineer denklemler içimn kullanışlı olan Varlık ve teklik teoremini verelim.

6.1. Lineer Denklemler

Teorem 6.1(Varlık ve tekliğin Lineer temel teoremi):

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x), \quad y\left(x_0\right) = y_0$$

Başlangıç değerli problemi düşünelim. Eğer $P\left(x\right)$ ve $Q\left(x\right)$ fonksiyonları bir $\alpha < x_0 < \beta$ açık aralığında sürekli iseler, bu başlangıç değerli problemin $\left(\alpha, \beta\right)$ aralığında tanımlı tek bir çözümü vardır.

Örnek 6.1: $\left(x^2 - 9\right) y' + 2y = \ln|20 - 4x|, \quad y\left(4\right) = -3$

Başlangıç değerli problemin çözümünü bulmadan çözüm için geçerli aralığı tespit ediniz.

Öncelikle diferansiyel denklemi teoremde verilen formatta yani y' nün katsayısı 1 olacak şekilde yazalım:

$$y' + \frac{2y}{x^2 - 9} = \frac{\ln|20 - 4x|}{x^2 - 9}, \quad y\left(4\right) = -3$$

Olur. $P\left(x\right) = \dfrac{2}{x^2 - 9}$ ve $Q\left(x\right) = \dfrac{\ln|20 - 4x|}{x^2 - 9}$ olmak üzere fonksiyonlarının süreksizlik noktaları $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3, \quad 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5$ olduğundan hem $P\left(x\right)$ in hem de $Q\left(x\right)$ in sürekli olduğu aralıklar: $\left(-\infty, -3\right)$, $\left(-3, 3\right)$, $\left(3, 5\right)$ ve $\left(5, \infty\right)$ olur. Diferansiyel denklemin çözümü için gerekli olan aralık ise aralıklardan başlangıç değer olan $x = 4$ değerini içeren aralıktır. Bu durumda çözüm aralığı $\left(3, 5\right)$ dir.

Şimdi çözümün varlık ve tekliğini gördükten sonra lineer denklemlerin nasıl çözüleceğini öğreneceğiz. Daha çok birinci dereceden lineer denklemlere odaklanacağız. Birinci mertebeden lineer denklem, bağımlı değişken ve birinci türevi lineer olmak şartıyla

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x) \tag{IV.1}$$

formunda verilir. Burada y ve y' nün daha yüksek derecesi bulunmaz.

Örneğin,

$\frac{dy}{dx} + 4xy = \cos x$ lineerdir ama $\frac{dy}{dx} + 4xy^2 = \cos x$ lineer değildir.

Bu denklemin çözümünün bulunması için öncelikle $Q(x) = 0$ ise lineer 1.mertebeden homojen denklemi göz önüne alalım.Bu form denklemin değişkenlerine ayrılabilir durumdadır. Önce $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$ homojen deklemi çözülür. Buradan

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \ln y = -\int P(x)dx + \ln c \Rightarrow y = ce^{-\int P(x)dx} \tag{IV.2}$$

bulunur. Bu ifadenin ikinci tarafı $Q(x)$ olan denklemin çözümü olabilmesi için, c nin nasıl bir $r(x)$ fonksiyonu olması gerektiğini araştıralım. Bunun için $c = r(x)$ olduğuna göre $y = r(x)e^{-\int P(x)dx}$ değerinin iki taraflı denklemi sağlama şartını bulalım. Denklem (IV.1) da bu değer ve

$$y' = \frac{dr}{dx}e^{-\int P(x)dx} + \frac{d}{dx}\left(-\int P(x)dx\right)r(x)e^{-\int P(x)dx}$$
$$y' = \frac{dr}{dx}e^{-\int P(x)dx} - P(x)r(x)e^{-\int P(x)dx}$$

türevi yazılırsa,

$$\frac{dr}{dx}e^{-\int P(x)dx} - P(x)r(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)r(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$
$$\frac{dr}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \Rightarrow \frac{dr}{dx} = e^{\int P(x)dx}Q(x) \Rightarrow r(x) = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c_1$$

$r(x)$ in bu değeri $y = r(x)e^{-\int P(x)dx}$ de yerine yazılırsa ikinci tarafı $Q(x)$ olan denklemin genel çözümü,

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)\,dx + c_1\right] \qquad \text{(IV.3)}$$

elde edilir.

İkinci alternatif bir yol :

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = Q(x)$$

olacak şekilde integral çarpanı,

$$e^{\int P(x)dx} \qquad \text{(IV.4)}$$

olarak alınırsa denklemin çözümü(ilkeli),

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x).e^{\int P(x)dx} dx + C \qquad \text{(IV.5)}$$

Bulunur.

Örnek 6.2 : $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$ denklemini çözünüz.

Öncelikle $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$ homojen denkleminin çözümü aranır:

$$\frac{dy}{y} = -2xdx \Rightarrow \ln y = -x^2 + \ln c \Rightarrow y = ce^{-x^2}$$

bulunur. $c = r(x)$ için $y = r(x)e^{-x^2} \Rightarrow y' = r'(x)e^{-x^2} - 2xr(x)e^{-x^2}$ değerleri difereansiyel denklemde yerine yazılırsa,

$$r'(x)e^{-x^2} - 2xr(x)e^{-x^2} + 2xr(x)e^{-x^2} \Rightarrow r(x) = \int e^{x^2} 4xdx \Rightarrow r(x) = 2e^{x^2} + c_1$$

İntegral çarpanının bu değeri çözümde yerine yazılırsa,

$$y = r(x)e^{-x^2} \Rightarrow y = e^{-x^2}\left(2e^{x^2} + c_1\right) = 2 + c_1e^{-x^2}$$

elde edilir. Bu problemi ikinci yoldan çözmek istersek,

$\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x \Rightarrow$integral çarpanı:$e^{\int 2xdx} = e^{x^2} \Rightarrow$ Çözüm:$ye^{x^2} = \int 4xe^{x^2} dx = 2e^{x^2} + C \Rightarrow y = 2 + Ce^{-x^2}$
elde edilir.

Örnek 6.3 : $y' + 2xy = e^{x-x^2}, \quad y(0) = -1.$ denklemini çözün.

Çözüm: Bu problemi 2. yolla yapalım:

İntegral çarpanı:

$$e^{\int 2x dx} = e^{x^2}$$

olur. Bu durumda denklemin çözümü

$$ye^{x^2} = \int e^{x-x^2}.e^{x^2}dx + C = e^x + C \Rightarrow y = e^{x-x^2} + Ce^{-x^2}$$

Genel çözüm olarak bulunur. $y(0) = -1 \Rightarrow -1 = 1 + C \Rightarrow C = -2$ olur. Bu durumda çözüm

$$y = e^{x-x^2} - 2e^{-x^2}$$

elde edilir.

Örnek 6.4 : $y' - 2y + 3 = 0, \quad y(0) = 1.$ denklemini çözün

Çözüm: 2. yolla yaparsak:

İntegral çarpanı:

$$e^{\int -2dx} = e^{-2x}$$

olur. Bu durumda denklemin çözümü

$$ye^{-2x} = \int -3.e^{-2x}dx = \frac{3}{2}e^{-2x} + C \Rightarrow y = \frac{3}{2} + Ce^{2x}$$

Genel çözüm olarak bulunur. $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{3}{2} + C \Rightarrow C = \frac{-1}{2}$ olur. Bu durumda çözüm

$$y = \frac{3 - e^{2x}}{2}$$

elde edilir.

6.2. Lineer Hale Getirilebilen Denklemler

Birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklemlerin bazı sınıfları uygun dönüşümlerle birinci mertebeden lineeer diferansiyel denklem haline getirilebilmektedir. Şimdi bunları inceleyelim:

6.2.1. Bernoulli Denklemi

Yerine konulduğunda daima çalışması için genel bir kuralı olan denklemlerin bazı formları vardır. Bunlardan bir örneği Bernoulli denklemidir. $P(x)$, $Q(x)$ x'in sürekli fonksiyonları ve $n \neq 0, n \neq 1, n \in$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x) \qquad \text{(IV.6)}$$

şeklindeki diferansiyel denkleme **Bernoulli Diferansiyel Denklemi** denir. Eğer bu denklemde $n = 0, n = 1$ olsaydı denklem lineer olurdu ve biz onu çözebilirdik. Aksi durumda $y^{1-n} = v$ dönüşümü ile Bernoulli denklemi lineer denkleme dönüşür. Diğer yandan

$$y^{1-n} = v \Rightarrow y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \frac{dv}{dx} \qquad \text{(IV.7)}$$

eşitliği yazılır.

Örnek 6.5: $\frac{dy}{dx} - y = xy^5$ denklemini çözünüz.

Öncelikle

$$y^{-5} \frac{dy}{dx} - y^{-4} = x \Rightarrow y^{-4} = v \Rightarrow -4y^{-5} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \Rightarrow y^{-5} \frac{dy}{dx} = -\frac{dv}{4dx}$$

dönüşümü kullanılırsa diferansiyel denklem,

$$\frac{dv}{dx} + 4v = -4x$$

olarak lineer hale getirilir. Buradan integral çarpanı;

$$e^{\int 4dx} = e^{4x}$$

bulunur. Denklemin çözümü,

$$ve^{4x} = \int -4xe^{4x} dx = -4\{x\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{4x}}{16} + C\} \Rightarrow v = -x + \frac{1}{4} + Ce^{-4x}$$

Orijinal diferansiyel denklemin çözümü ise

$$y^{-4} = v \Rightarrow y = \frac{1}{(-x+\frac{1}{4}+Ce^{-4x})^4}$$

bulunur.

Örnek 6.6 $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2\left(\cos x - \sin x\right)$ denklemini çözünüz.

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2\left(\cos x - \sin x\right) \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} + y^{-1} = \cos x - \sin x$$

yazılsın.

$$y^{-1} = v \Rightarrow -y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dv}{dx}$$

dönüşümü kullanılırsa diferansiyel denklem

$$-\frac{dv}{dx} + v = \cos x - \sin x \Rightarrow \frac{dv}{dx} - v = \sin x - \cos x$$

olarak lineer hale getirilir. Buradan integral çarpanı;

$$e^{\int -dx} = e^{-x}$$

bulunur. Denklemin çözümü,

$$ve^{-x} = \int\left(\sin x - \cos x\right)e^{-x}dx = -e^{-x}\sin x + C$$

Buradan denklemin çözümü

$$y = \frac{1}{-\sin x + Ce^{x}}$$

elde edilir.

6.2.2. Riccati Diferansiyel Denklemi

$P(x), R(x)$ *ve* $Q(x)$ x'in sürekli fonksiyonlar ve $R(x) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) + R(x)y^2 = Q(x) \qquad \text{(IV.8)}$$

formundaki bir diferansiyel denkleme **Riccati Diferansiyel Denklemi** denir.

Eğer $R(x)=0$ olsaydı denklem lineer diferansiyel denklem, $Q(x)=0$ olsaydı denklem Bernoulli diferansiyel denklem şeklini alırdı. Bu iki halin dışında denklemin genel halde çözülemeyeceği Bernoulli tarafından gösterilmiştir.Fakat denklemin bir özel çözümü biliniyorsa genel çözüme ulaşılabilir. Buradan hareketle bir $y_1(x)$ özel çözümü verildiğinde genel çözümü bulmak için,

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{v(x)} \tag{IV.9}$$

dönüşümü yapılarak $v(x)$ in gerçeklediği

$$v' - \left[P(x) + 2y_1(x)R(x)\right]v - Q(x) = 0$$

doğrusal denklemi veya doğrusal denkleme indirgenebilir bir denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü olan $v(x)$, Denklem (III.9) da yerine yazılarak Riccati diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur.Diğer taraftan bu genel çözümü bulmak için $y(x) = y_1(x) + v(x)$ dönüşümü de uygulanabilir. Bu halde Riccati denklemi Bernoulli denklemine dönüşür.

Örnek 6.7: $y' - y^2 + 2xy - x^2 - 1 = 0$ denkleminin $y_1 = x$ özel çözümü için genel çözümü bulunuz

Çözüm:

$$y = x + v(x) \Rightarrow y' = 1 + v'$$

olur. Denklemde yerine yazılırsa

$$1 + v' - (x+v)^2 + 2x(x+v) - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow v' - v^2 = 0$$

bulunur. Buradan terim terime integrasyon alınırsa,

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int dx \Rightarrow v = \frac{1}{C-x}$$

bulunur. Bu değere göre denklemin genel çözümü,

$$y = x + \frac{1}{C-x}$$

biçimindedir.

Örnek 6.8 : $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x$ diferansiyel denklemin $y_1 = \sec x$ özel çözümü için genel çözümü bulun.

Çözüm:

$$y' + 0.y + y^2 \sin x = -2\tan x \sec x$$

Riccati formuna getirelim.

$$y(x) = \sec x + \frac{1}{v(x)} \Rightarrow y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{v'}{v^2} = \tan x \sec x - \frac{v'}{v^2}$$

Bu değerler denklemde yerine yazılır gerekli basitleştirmeler yapılırsa,

$$v' - 2v\tan x = \sin x$$

Birinci mertebeden lineer denklem elde edilir. Bunun için integral çarpanı

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int -2\tan x dx} = \cos^2 x$$

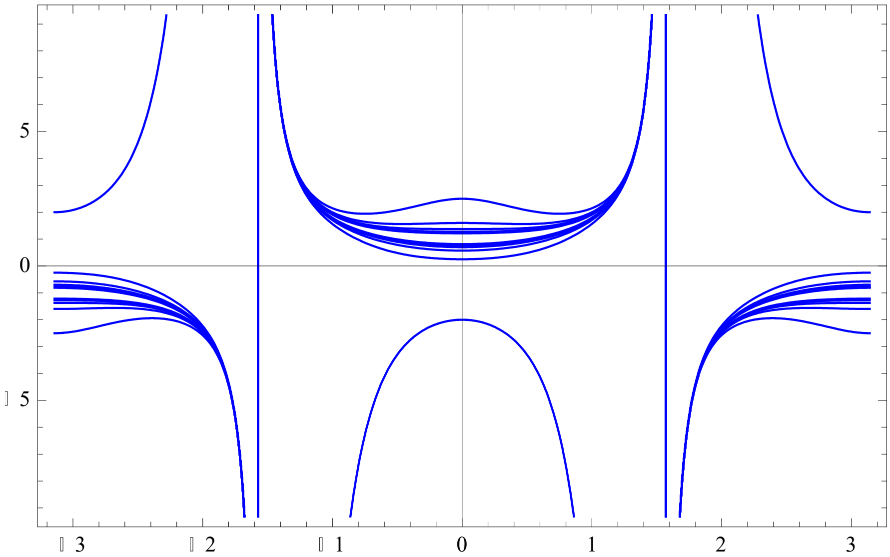
bulunur.Buradan

$$v.\cos^2 x = \int \cos^2 x.\sin x dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C \Rightarrow v = -\frac{\cos^3 x}{3} + C\sec^2 x$$

yazılır. Bu durumda denklemin genel çözümü:

$$y(x) = \sec x + \frac{1}{-\dfrac{\cos^3 x}{3} + C\sec^2 x}$$

bulunur ve çözüm eğrilerinin bazısının grafiği Şekil IV.1 de verilir:



Şekil IV.:1. $y' = 2\tan x \sec x - y^2 \sin x$ diferansiyel denkleminin genel çözüm grafiği

Uygulamalar

1) Newton'un soğuma kanunun: Eğer bir nesnenin t anındaki sıcaklığı $T(t)$, $T_m(t)$ orta sıcaklığında ise t anındaki sıcaklık değişimi $T(t)-T_m(t)$ ile orantılıdır. T sıcaklığı aşağıdaki diferansiyel denklemi sağlar:

$$T' + kT = kT_m,\ k \in \mathbb{R}$$

Bu denklem birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü için uğraşın.

Uygulama Soruları

1) $xy' + 2y = 4x^2, \quad y(1) = 2$ başlangıç değerli problemin çözümünü bulun.

2) $y' + y = y^2$ Bernoulli diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, lineer diferansiyel denklemlere ve Bernoulli ile Riccati gibi lineer hale getirilebilen diferansiyel denklemlere odaklanıldı.

Bölüm Soruları

1) $y' = x^3 + \frac{2}{x} y - \frac{1}{x} y^2$ diferansiyel denklemin bir özel çözümü $y_1 = -x^2$ dir. Genel çözümü bulunuz**.**

2) $y' + y^2 - 1 = 0$ diferansiyel denklemin bir özel çözümü $y_1 = 1$ dir. Genel çözümü bulunuz

Aşağıda verilen Bernoulli diferansiyel denklemlerini çözünüz

1. $x^2 \ln x\, y + xy = 1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

2. $y' + \cos x . y = \cos x,\; y(0) = 1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

3. $xy' = y(1 - x\tan x) + x^2 \cos x$ diferansiyel denklemini çözünüz.

4. $y' - y = xy^2$

5. $xdy + ydx = x^3 y^6 dx$

6. $yy' - xy^2 + x = 0$

7. $\left(2xy^5 - y\right)dx + 2xdy = 0$

8. $4y' + y\sin x = y^{-3} \sin x$

9. $xy' + y(x+1) + xy^5 = 0,\quad y(1) = 1$ diferansiyel denklemini çözün

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x},\; y(0) = 3$ başlangıç değerli denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = e^{-x} + 2e^{-2x}$

b) $y = e^{-x} + 2e^{2x}$

c) $y = e^{x} + 2e^{-2x}$

d) $y = e^{-2x} + 2e^{-2x}$

e) $y = 5e^{x} + 2e^{-x}$

2) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = 4x^2,\ y(1) = 4$ başlangıç değerli denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = \dfrac{3}{x} + x^2$

b) $y = \dfrac{3}{x^2} + x^2$

c) $y = \dfrac{3}{x^3} + x^2$

d) $y = \dfrac{3}{x^2} + x$

e) $y = \dfrac{1}{x^2} + 4x$

3) $y' - 2xy = x,\ y(0) = 1$ başlangıç değerli denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}e^{x^2}$

b) $y = \dfrac{3}{x} + e^{x^2}$

c) $y = \dfrac{3}{x^2} + e^{x^2}$

d) $y = \dfrac{3}{2}e^{x^2} + x$

e) $y = \dfrac{3}{2}e^{x} + x^2$

4) $3y' + 3\dfrac{y}{x} = 2x^4y^4$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(xy)^{-3} + x = C$

b) $(xy)^{-2} + x^2 = C$

c) $(xy)^{-1}+x^2=C$

d) $(xy)^{-3}+x^2=C$

e) $(xy)^{-3}+x^{-2}=C$

5) $y'+3yx^2=xy^2e^{x^3}$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $ye^{x^3}(C-x)=2$

b) $ye^{x}(C-x^2)=2$

c) $ye^{x^3}(C-x^2)=2$

d) $ye^{2x}(C-x^2)=2$

e) $ye^{x}(C-3x^2)=2$

6) $\dfrac{dy}{dx}-y^2+\dfrac{1}{x}y+\dfrac{1}{x^2}=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y=\dfrac{1}{x}+2x(C-x^2)^{-1}$

b) $y=\dfrac{1}{x^2}+2x(C-x^2)^{-1}$

c) $y=\dfrac{1}{x}+2x^2(C-x^2)^{-1}$

d) $y=\dfrac{1}{x}+2x(C-x^2)^{-2}$

e) $y=\dfrac{1}{x^2}+2x(C-x^{-2})^{-2}$

7) $\dfrac{dy}{dx}=y^2-2(x-1)y+x^2-2x+1,\ y_1(x)=x$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y(C+x)=x(C-x)+e^{2x}$

b) $y(C-x)=x(C-x)+e^{x}$

c) $y(C-x)=x(C-x)+e^{2x}$

d). $y(C-x)=x(C-x)+e^{-2x}$

e) $y(C-x)=x^{2}(C-x)+e^{2x}$

8) $\left(\frac{dy}{dx}x-y\right)\left(\frac{dy}{dx}y+x\right)=2\frac{dy}{dx}$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y^{2}=Cx^{2}+\frac{3C}{1+C}$

b) $y^{3}=Cx^{2}-\frac{2C}{1+C}$

c) $y^{2}=Cx^{2}-\frac{2C}{1+C}$

d) $y^{2}=Cx-\frac{2C}{1+C}$

e) $y^{2}=Cx^{4}-\frac{2C}{1+C}$

9) $\frac{dy}{dx}x(x-2)+\frac{dy}{dx}(2y-2xy-x+2)+y^{2}+y=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(y+Cx+3C)(y-Cx+1)=0$

b) $(y-Cx+C)(y-Cx-3)=0$

c) $(y-Cx+2C)(y-Cx+1)=0$

d) $(y-4Cx+2C)(y-4Cx+1)=0$

e) $(y-5Cx+2C)(y-4Cx^{2}+1)=0$

Cevaplar

1) a, **2)** b, **3)** a, **4)** d, **5)** c, **6)** a, **7)** c, **8)** c, **9)** c

7. İKİNCİ VE YÜKSEK MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

7.1. Claıraut Diferansiyel Denklemi

7.2. Değişkenlerden Birini İçermeyen İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

7.2.1**.** Bağımlı Değişkeni Bulundurmayan Denklemler

7.2.2. Bağımsız Değişkeni Bulundurmayan Denklemler

7.3. Lineer Bağımsızlık…

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) $y = xy' + F(y')$ yapısında bir diferansiyel denklem yazınız.

2) $y = x\dfrac{dy}{dx} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ yukarda bahsedilen yapıda mı? Bu yapıdaki denklemleri nasıl çözeriz?

3) $y'' + y' = 2x + 5$ denkleminde bağımlı değişken var mı? Nasıl çözülür?

Fonksiyonların lineer bağımsızlığı ne demektir?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Clairaut Diferansiyel Denklemi	Clairaut Diferansiyel Denklemini çözebilmek.	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Değişkenlerden Birini İçermeyen İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler	Değişkenlerden Birini İçermeyen İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Bağımlı Değişkeni Bulundurmayan Denklemler	Bağımlı Değişkeni Bulundurmayan Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Bağımsız Değişkeni Bulundurmayan Denklemler	Bağımsız Değişkeni Bulundurmayan Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Lineer Bağımsızlık	Fonksiyonların lineer bağımsızlığını saptayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek

Anahtar Kavramlar

- Claıraut Diferansiyel Denklemi
- Bağımlı değişkeni içermeyen diferansiyel denklemelr
- Bağımsız değişkeni içermeyen diferansiyel denklemler
- Lineer baağımsızlık

Giriş

Bu bölümde öncelikle Claıraut diferansiyel denklemlerinden bahsedilir. Daha sonra değişkenlerden birini içermeyen ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerle karşılaşıldığı zaman diferansiyel denklemin çözümünü bulmada nasıl bir taktik izleneceği belirlenir. Ayrıca Matematik ve birçok bilimde önemli yer tutan lineer bağımsızlıktan bahsedilir.

7.1. Clairaut Diferansiyel Denklemi

$$y = \frac{dy}{dx}x + f(\frac{dy}{dx}) = px + f\left(p\right) \qquad \text{(IV.10)}$$

şeklindeki denkleme '*Clairaut diferansiyel denklemi'* denir. Clairaut denkleminin genel

çözümü bu denklemdeki $y' = \frac{dy}{dx}$' ler yerine bir C keyfi sabiti koymak suretiyle elde edilir. Yani genel çözüm:

$$y = Cx + f(C) \qquad \text{(IV.11)}$$

şeklindendir.

Örnek 7.1: $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)x - \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dp}{dx}$$

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dx}\right)x - p = 0 \Rightarrow p = \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dp}{dx}\right)x$$

denklem Clairaut diferansiyel denklemi formatındadır. Bu Clairaut denklemin genel çözümü

$$p = Cx + C^2$$

olduğundan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p = Cx + C^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{Cx^2}{2} + C^2x + c_1$$

Buradan genel çözüm:

$$y = \frac{Cx^3}{6} + \frac{C^2x^2}{2} + c_1x + c_2$$

elde edilir.

Örnek 7.2: $y = 3\frac{dy}{dx}x + 6y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Bu denklem Clairaut' u anımsattığından bu denkleme indirgeyebiliriz. Bunun için denklemi y^2 ile çarparsak

$$y^5 = 3y^2 \frac{dy}{dx} x + 6y^4 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

bulunur. Burada $y^3 = v \Rightarrow 3y^2 \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$ dönüşümleri kullanılarak ifade

$$v = x\frac{dv}{dx} + \frac{2}{3}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2$$

şeklini alır. Bu denklemin çözümü

$$v = xC + \frac{2}{3}C^2$$

elde edilir. Soruda verilen diferansiyel denklemin çözümü:

$$y^3 = Cx + \frac{2}{3}C^2 \Rightarrow y = \sqrt[3]{Cx + \frac{2}{3}C^2}$$

yazılır.

7.2. Değişkenlerden Birini İçermeyen İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bazı ikinci mertebeden diferansiyel denklemler, bağımlı değişkene bir dönüşüm uygulanarak birinci mertebeden denklemlere indirgenir. Yeni denklem buraya kadar öğrenilen yöntemlerle çözülür ve bu çözümden yararlanarak ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü bulunur.

7.2.1. Bağımlı Değişkeni Bulundurmayan Denklemler

Bu tür denklemler sıklıkla karşımıza 2 tipte çıkar:

1. $$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f(x)$$

(V.1)

Bu tipteki diferansiyel denklemi çözmek için art arda iki integral almak yeterlidir. Yani,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=f\left(x\right)\Rightarrow d\left(\frac{dy}{dx}\right)=f\left(x\right)dx\Rightarrow\int d\left(\frac{dy}{dx}\right)=\int f\left(x\right)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\int f\left(x\right)dx+C_1=F\left(x\right)+C_1\Rightarrow\int dy=\int\left(F\left(x\right)+C_1\right)dx$$

$$y=\int F\left(x\right)dx+C_1x+C_2$$

elde edilir. Sonuç C_1 ve C_2 gibi keyfi sabiti içerdiğinden genel çözümdür.

Örnek 7.3 : $y''=x^2+1$ diferansiyel denklemini çözün

Çözüm: Her iki tarafın iki defa integrali alınırsa,

$$\frac{dy}{dx}=\int\left(x^2+1\right)dx+C_1=\frac{x^3}{3}+x+C_1$$

$$y=\int\left(\frac{x^3}{3}+x+C_1\right)dx=\frac{x^4}{12}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$$

2. $$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=f\left(x,y'\right) \qquad \text{(V.2)}$$

bu tip diferansiyel denklemlerin çözümü için

$$y'=\frac{dy}{dx}=p\Rightarrow y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=f\left(x,y'\right)$$

dönüşümü yapılarak 1. mertebeden bir diferansiyel denkleme dönüştürülmüş olur.

Örnek 7.4 : $xy''+y'=4x$ denkleminin çözümünü bulun.

$$y'=p\Rightarrow y''=\frac{dp}{dx}$$

dönüşümleri denklemde yerine yazılırsa,

$$x\frac{dp}{dx}+p=4x\Rightarrow\frac{dp}{dx}+p\frac{1}{x}=4$$

Birinci mertebeden lineer bir diferansiyel denkleme dönüştürülür. Buradan integral çarpanı

$$e^{\int\frac{1}{x}dx}=x$$

olduğundan

$$p.x=\int 4.xdx=2x^2+C_1 \Rightarrow p=2x+\frac{C_1}{x}$$

bulunur. Buradan

$$p=\frac{dy}{dx}=2x+\frac{C_1}{x} \Rightarrow y=\int\left(2x+\frac{C_1}{x}\right)dx=x^2+C_1\ln x+C_2$$

genel çözüm elde edilir.

7.2.2. Bağımsız Değişkeni Bulundurmayan Denklemler

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''=f\left(y,y'\right) \qquad \text{(V.3)}$$

İkinci mertebeden diferansiyel denklemi göz önüne alınsın. Bu denklemlerin çözümü için,

$$y'=\frac{dy}{dx}=p \Rightarrow y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}.\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy} \qquad \text{(V.4)}$$

dönüştürmeleri yapılırsa,

$$p\frac{dp}{dy}=f\left(y,y'\right) \qquad \text{(V.5)}$$

Birinci mertebeden diferansiyel denklem şekline dönüşür.

Örnek 7.5 : $yy''=\left(y'\right)^2+y\left(y'\right)^3$ denklemini çözünüz.

$$y'=p \Rightarrow y''=p\frac{dp}{dy}$$

dönüşümleri kullanılırsa,

$$yp\frac{dp}{dy}=p^2+yp^3 \Rightarrow \frac{dp}{dy}-p\frac{1}{y}=p^2 \Rightarrow p^{-2}\frac{dp}{dy}-p^{-1}\frac{1}{y}=1$$

Bernoulli denklemine dönüşür. Buradan $p^{-1}=v \Rightarrow p^{-2}\frac{dp}{dy}=\frac{dv}{dy}$

olduğundan denklem

$$\frac{dv}{dy}+v\frac{1}{y}=-1$$

halini alır. Buradan intgetral çarpanı

$$e^{\int \frac{1}{y}dy} = y$$

kullanılırsa,

$$v.y = \int -1.ydy = -\frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow v = -\frac{y}{2} + \frac{C_1}{y}$$

olur. Bu durmda

$$p = \frac{1}{-\frac{y}{2} + \frac{C_1}{y}} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \left(-\frac{y}{2} + \frac{C_1}{y} \right) dy$$

Terim terime integral alınıca,

$$x = \int \left(-\frac{y}{2} + \frac{C_1}{y} \right) dy = -\frac{y^2}{4} + C_1 \ln y + C_2$$

genel çözüm elde edilir.

7.3. Lineer Bağımsızlık

Hepsi birden sıfır olmayan $c_1, c_2, ..., c_m$ sabitleri, $\forall x \in \mathrm{I}$ için,

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + ... + c_m y_m(x) = 0 \qquad \text{(V.6)}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde varsa $y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x)$ fonksiyonları I üzerinde ***lineer (doğrusal) bağımlıdır*** denir**.** Denklem (IV.6) I aralığının içindeki her x için eğer sadece $c_1 = c_2 = ... = c_m = 0$ durumunda geçerli ise $y_1(x), y_2(x), ..., y_m(x)$ ye ***'lineer bağımsızdır'*** denir. İleriki konularımızda fonksiyonların lineer bağımsız olup olmadıklarını *Wronskiyan* determinantları denen farklı bir yöntemle göreceğiz.

Örnek 7.6 : $\sin\left(x + \frac{\pi}{2} \right)$ ve $\cos x$ fonksiyonları $c_1 = 1, c_2 = -1$ için

$$1.\sin\left(x + \frac{\pi}{2} \right) + (-1)\cos x = 0$$

olduğundan bu fonksiyonlar lineer bağımlıdırlar.

Örnek 7.7 : Keyfi bir aralıkta $y_1(x)=e^x$ ve $y_2(x)=e^{2x}$ fonksiyonları $\forall x \in \mathbb{R}$ için pozitiftirler. O halde keyfi c_1 ve c_2 sabitleri için $c_1e^x + c_2e^{2x} = 0$ olması ancak $c_1 = c_2 = 0$ ile mümkündür. O halde $y_1(x)=e^x$ ve $y_2(x)=e^{2x}$ fonksiyonları lineer bağımsızdırlar.

Bölüm Soruları

A) Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz.

1. $(x+1)y''-(x+2)y'+x=-2$
2. $2y^2y''+2y(y')^2=1$
3. $y''=(y')^2.y^{-1}$

4. $y=xy'+y'-(y')^2$ Clairaut diferansiyel denklemini çözün.

B) Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $(x+1)y''-(x+2)y'+x+2=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y=x+C_1e^x+C_2$

b) $y=x+C_1xe^x+C_2$

c) $y=\dfrac{1}{x}+2x^2\left(C-x^2\right)^{-1}$

d) $y=x+C_1xe^{-x}+C_2$

e) $y=x^2+C_1x^3e^{-x}+C_2$

2) $y''+y'=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y=C_1\sin(2x+C_2)=C_3\sin(2x)+C_4\cos(x)$

b) $y=C_1\sin(x+C_2)=C_3\sin(x)+C_4\cos(x)$

c) $y=C_1\sin\left(x^2+C_2\right)=C_3\sin(x)+C_4\cos\left(x^2\right)$

d) $y=x+C_1xe^{-x}+C_2$

e) $y=x^2+C_1xe^{-x}+C_2$

3) $y''+y(y')^3=0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $2x^2=\dfrac{1}{3}y^3-2C_1y+C_2$

b) $2x=\frac{1}{3}y^2-2C_1y+C_2$

c) $2x=\frac{1}{3}y^3-2C_1y^2+C_2$

d) $2x=\frac{1}{3}y^3-2C_1y+C_2$

e) $2x^2=\frac{1}{3}y^3-2C_1y^2+C_2$

4) $yy''=(y')^2+1$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y=\frac{1}{C_1}sh\left(C_1x+C_2\right)$

b) $y=\frac{1}{C_1}ch\left(C_1x^2+C_2\right)$

c) $y=\frac{1}{C_1}ch\left(C_1x+C_2x^3\right)$

d) $y=\frac{1}{C_1}ch\left(C_1x+C_2\right)$

e) $y=\frac{1}{C_1}ch\left(C_1x^2+C_2\right)$

5) $(y-1)y''=2(y')^2$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y\left(x^2+C_1\right)=x+C_2$

b) $y\left(x+C_1\right)=x^{-1}+C_2$

c) $y\left(x+C_1\right)=x+C_2$

d) $y\left(x+C_1\right)=3x+C_2$

e) $y\left(x^2+C_1\right)=3x^3+C_2$

6) $y=\frac{dy}{dx}x+6y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y^3 = \left(Cx + 6C^2\right)$

b) $y^2 = \left(Cx + 6C^2\right)$

c) $y\left(C - x\right) = \left(Cx + 6C^2\right) + e^{2x}$

d) $y^3 = \left(Cx^2 + 6C^2\right)$

e) $y^2 = \left(Cx^3 + 6C^2\right)$

7) $\left(\dfrac{dy}{dx}x - y\right)\left(\dfrac{dy}{dx}y + x\right) = 2\dfrac{dy}{dx}$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y^2 = Cx^2 + \dfrac{3C}{1+C}$

b) $y^3 = Cx^2 - \dfrac{2C}{1+C}$

c) $y^2 = Cx^2 - \dfrac{2C}{1+C}$

d) $y^2 = Cx - \dfrac{2C}{1+C}$

e) $y^2 = Cx^4 - \dfrac{2C}{1+C}$

Cevaplar

1) b, **2)** b, **3)** d, **4)** d, **5)** c, **6** a, **7** c

Uygulamalar

Bağımlı değişkeni bulundurmayan veya bağımsız değişkeni bulundurmayan ikinci mertebeden diferansiyel denklememler ileriki bölümlerde göreceğimiz

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x)$$

İkinci mertebeden diferansiyel denklemin özel hali olduğunu görün.

Uygulama Soruları

1) $y'' + y' = -10$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

2) $xy'' + y' = \frac{1}{x}$ denkleminin çözümünü bulun.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde Clauiret diferansiyel denklemi ile değişkenlerden birini içermeyen ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerinin nasıl bulunacağını ve lineer bağımsızlık kavramları öğrenildi.

..

8. İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

8.1. İkinci Mertebeden Homojen Lineer Diferansiyel Denklemler

8.2. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) $ay'' + by' + cy = 0$ diferansiyel denklemi isimlendiriniz.

2) $y'' + 3y' - 15y = 0$ diferansiyel denklemini nasıl çözeriz?

3) sin ile cosx lineer bağımsız mıdır?

4) e^x ile e^{2x} lineer bağımsız mıdır?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
İkinci Mertebeden Homojen Lineer Diferansiyel Denklemler	İkinci Mertebeden Homojen Lineer Diferansiyel Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler	İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.

Anahtar Kavramlar

- İkinci mertebeden diferansiyel denklem
- Homojen diferansiyel denklemler
- İkinci mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklem
- İkinci mertebeden sabit katsayılı homojen diferansiyel denklem
- Wronskian determinantı

Giriş

Bu bölümde öncelikle ikinci mertebeden homojen lineer diferansiyel denklemlerin tanımından bahsedilir. Daha sonra çözümlerine bilimsel uygulamalardaki bazı problemlerde karşılaşılan sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemleri tanınarak, onların çözüm tekniklerini irdelenir. Öncelikle ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemlerden başlanılarak daha yüksek mertebeden diferansiyel denklemlere genelleştirme yapılır.

8.1. İkinci Mertebeden Homojen Lineer Diferansiyel Denklemler

Genel olarak ikinci dereceden lineer diferansiyel denklem $A(x) \neq 0$ olmak şartıyla,

$$A(x)\, y'' + B(x)\, y' + C(x)\, y = F(x) \qquad \text{(V.7)}$$

yazılır. Buradan genellikle y'' nin katsayısını 1 yapmak için denklemin her iki yanını $A(x)$ ile

bölersek,

$$y'' + \frac{B(x)}{A(x)} y' + \frac{C(x)}{A(x)} y = \frac{F(x)}{A(x)} = y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x) \qquad \text{(V.8)}$$

daha da basitçe yazabiliriz. Lineer kavramı y, y' ve y'' nün kuvvetlerini içermediğini ifade

etmektedir. $r(x) = 0$ olduğu özel durumda

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \qquad \text{(V.9)}$$

oluşan denkleme ***homojen denklem*** denir. Aksi takdirde denkleme ***homojen değildir*** denir.

Teorem 8.1 ***(Süperposisyon)***

Eğer $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$ homojen diferansiyel denkleminin

çözümleri iseler, C_1 ve C_2 sabitlerinin keyfi değerleri için,

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad \text{(V.10)}$$

lineer kombinasyonu da diferansiyel denklemin çözümüdür.

İspat

İspat için denklem(IV.9) da $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ koymak yeterlidir.

$$
\begin{aligned}
y'' + py' + qy &= \left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)'' + p\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right)' + q\left(C_1 y_1 + C_2 y_2\right) \\
&= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1 p y_1' + C_2 p y_2' + C_1 q y_1 + C_2 q y_2 \\
&= C_1\left(y_1'' + p y_1' + q y_1\right) + C_2\left(y_2'' + p y_2' + q y_2\right) \\
&= C_1.0 + C_2.0 = 0
\end{aligned}
$$

Eğer Lineerlik $L[y]$ operatör notasyonunu kullanırsak ispat daha da kolaylaşır. Bir operatör bir çeşit bir fonksiyonu yiyen ve sayıları dışarı atan bir çeşit fonksiyondur. $L[y]$ operatörünü

$$L[y] = y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

ile tanımlarsak diferansiyel denklemden $L[y]=0$ olur. Bu durumda teoremin ispatı için

$$L[y] = L\left[C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\right] = C_1 \underbrace{L[y_1(x)]}_{0} + C_2 \underbrace{L[y_2(x)]}_{0} = 0$$

elde edilir.

Örnek 8.1:

$y'' - y = 0$ ikinci dereceden diferansiyel denklemin iki farlı kökleri $y_1 = \sinh x$ ve $y_2 = \cosh x$ dir. Bu fonksiyonların tanımlarını hatırlarsak,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ ve } \sin x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

dir. Böylece teoremden söyleyebiliriz ki bu çözümler iki üstel çözümün lineer kombinasyonudur. Diğer taraftan trigonometrik hiperbolik fonksiyonların bazı özelliklerini hatırlamakta fayda var:

$$
\begin{array}{ll}
\cosh 0 = 1 & \sinh 0 = 0 \\
\dfrac{d}{dx}\cosh x = \sinh x & \dfrac{d}{dx}\sinh x = \cosh x \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 &
\end{array}
$$

Teorem 8.2 :(Varlık ve Teklik). $p(x), q(x) ve f(x)$ sürekli fonksiyonlar ve a, b_0 ve b_1 sabitler olsun.

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = r(x),$$

Denklemi $y(a)=b_0$ *ve* $y'(a)=b_1$ başlangıç koşullarını sağlayan tamı tamına bir $y(x)$ çözümüne sahiptir.

Örnek 8.2: $y''+k^2y=0$ denklemi $y(0)=b_0$ *ve* $y'(0)=b_1$ koşullarını sağlayan

$$y(x)=b_0\cos kx+\frac{b_1}{k}\sin kx$$

çözümüne sahiptir. $y''-k^2y=0$ denklemi $y(0)=b_0$ *ve* $y'(0)=b_1$ koşullarını sağlayan

$$y(x)=b_0\cosh x+\frac{b_1}{k}\sinh x$$

çözümüne sahiptir. Bu denklemde üstelleri kullanmaktansa sinh ve cosh kullanmak, daha açık bir yolla başlangıç koşulları için denklemi çözmeye imkân sağlamıştır. İkinci mertebeden bir adi diferansiyel denklem için başlangıç koşulları iki denklemi içermektedir. En yaygın manada bize şunları anlatırlar: Eğer bizim iki keyfi sabit ve iki denklemimiz varsa başlangıç koşulları sağlayan diferansiyel denklemin bir çözümünü bulmamız ve sabitleri çözmemiz gerekir.

8.2. İkinci Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler

a,b ve c sabitler olmak üzere

$$ay''+by'+cy=0 \qquad \text{(V.11)}$$

formunda yazılan denkleme *de sabit katsayılı homojen lineer denklem* denir. Bu tür denklemlerin çözümü için λ belirlenmesi gereken bir parametre olmak üzere, $y=e^{\lambda x}$ şeklinde aranırsa ve $y'=\lambda e^{\lambda x}\Rightarrow y''=\lambda^2e^{\lambda x}$ eşitlikleri Denklem (IV.11) de yerlerine konursa,

$$a\lambda^2e^{\lambda x}+b\lambda e^{\lambda x}+ce^{\lambda x}=0\Rightarrow e^{\lambda x}\left(a\lambda^2+b\lambda+c\right)=0$$

formunu alır. $\forall\lambda,x\in\mathbb{R}$ için $e^{\lambda x}\neq 0$ olduğundan $a\lambda^2+b\lambda+c=0$ yazılır. Bu denkleme homojen denklemin '***karakteristik denklemi'*** denir. Dolayısıyla karakteristik denkleminin kökü λ ise sabit katsayılı lineer denklemin çözümü $y=e^{\lambda x}$ olacaktır. Bu denklemin kökleri diskriminanttan,

$$\text{i) }\Delta=b^2-4ac>0\Rightarrow\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

iki farklı reel kök vardır.

ii) $\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$

çift katlı eşit iki kökü vardır.

iii) $\Delta = b^2 - 4ac \langle 0$ ise reel kök yok kompleks kökü vardır.

Teorem 8.3: $p(x), q(x)$ ve $r(x)$ sürekli fonksiyonlar olsun ve $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ homojen denkleminin $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ iki lineer bağımsız çözümleri olsun. Bu denklemin bir diğer çözümü

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad \text{(V.12)}$$

bu iki çözüm lineer kombinasyonudur. Yani, $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ denklemin genel bir çözümüdür.

Örnek 8.3 : $y' + y = 0$ denkleminin çözümlerinin $y_1(x) = \sin x$ ve $y_2(x) = \cos x$ olduğunu çok rahat bulabiliriz. Fakat bu fonksiyonlardan birinin diğerinin herhangi bir katı olmadığını bir anda göremeyiz. Eğer bazı A sabiti için $\sin x = A\cos x$ olursa $x = 0$ için $0 = A.1$ den $A = 0$ olmasını gerektirir. Fakat x in bütün değerleri için $\sin x = 0$ demek mantıksız olur. Dolayısıyla $\sin x$, her zaman $\cos x$ in bir katı cinsinden yazılamaz. Yani $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ lineer bağımsızdır. Böylece

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$y' + y = 0$ Denklemlinin genel çözümüdür.

Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bağımsız olup olmadığını bir anda söylemek zordur. Bunu daha kolay saptamak için bir tanım verelim.

Tanım 8.1: $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, I üzerinde türevlenebilir iki fonksiyon olsun.

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1' \qquad \text{(V.13)}$$

Determinantına $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ 'nin Wronskiyeni denir. Keyfi bir $x \in I$ da Wronskiyenin değeri $W(y_1, y_2)(x)$ ile gösterilir. Genel halde I aralığında $(n-1)$. mertebeden türetilebilir n tane fonksiyon için n .mertebeden

$$W\left(y_1, y_2, ..., y_n\right) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad \text{(V.14)}$$

Determinantına $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonlarının Wronskiyeni denir. Keyfi bir $x \in I$ da Wronskiyenin değeri $W\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)(x)$ ile gösterilir.

Teorem 8.4 : $A(x), B(x)$ ve $F(x)$ sürekli fonksiyonlar ve $\forall x \in I$ için $A(x) \neq 0$ olsun. $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x)$ denkleminin $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ gibi iki çözümünün I da lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in I$ için $W\left(y_1, y_2\right)(x) \neq 0$ olmasıdır. Bunu $(n-1)$. mertebeden n tane çözümün olduğu denklemlere de genişletebiliriz.

Örnek 8.4 : $y_1(x) = \sin x$ ve $y_2(x) = \cos x$ fonksiyonları $y' + y = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğunu söylemiştik. Gerçekten de

$$W\left(\sin x, \cos x\right) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - -\cos^2 x = -1 \neq 0$$

olarak görülür.

Teorem 8.5 : Karakteristik denklemin λ_1 ve λ_2 iki kökü olsun. Buna göre

1. Eğer bu kökler birbirinden farklı ve Reel iseler denklem (V.11) deki sabit katsayılı homojen lineer denklemin

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

çözümü vardır.

2. Eğer kökler birbirine eşit ve Reel iseler denklem (V.11) deki sabit katsayılı homojen lineer denklemin

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}$$

çözümü vardır.

3. kökler kompleks ise,

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \; ve \; \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \Rightarrow \lambda_1 = \alpha + i\beta, \; \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

Eşlenik kökleri kullanarak diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)$$

Olacaktır.

İspat: i) ve ii) öğrenciye ödev olarak bırakılırsa

iii) İspatlayalım:

$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$ iki kök ise diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}.\left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right) \\ &= e^{\alpha x}.\left(C_1\left(\cos\beta x + i\sin\beta x\right) + C_2\left(\cos\beta x - i\sin\beta x\right)\right) \\ &= e^{\alpha x}\left(\cos\beta x\underbrace{\left(C_1 + C_2\right)}_{A} + \underbrace{i\left(C_1 - C_2\right)}_{B}\sin\beta x\right) \\ &= e^{\alpha x}\left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek 8.5 : $y'' - 3y' - 4y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$$

olur. Buradan karekteristik kökler $\lambda_1 = 4$ ve $\lambda_2 = -1$ iki farklı reel kök bulunur. Buna göre diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-x}$$

elde edilir.

Örnek 8.6 : $y'' - 8y' + 16y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Verilen denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 4) = 0$$

Olur. Buradan karekterisitik kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ eşit iki reel kök bulunur. Buna göre diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x}$$

Örnek 8.7: $y''-6y'+13y=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=10$ başlangıç değerleri altında diferansiyel denklemin çözümünü bulunuz.

Verilen denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^2-6\lambda+13=0 \Rightarrow \lambda_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i,\ \lambda_2=3-2i,$$

Komplek iki kök elde edilir. Bu durumda denklemin genel çözümü,

$$y=e^{3x}\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)$$

Yazılır. Başlangıç değerleri,

$$y(0)=0 \Rightarrow 0=1.\left(A\cos 0+B\sin 0\right) \Rightarrow A=0$$

olur. Bu durumda genel çözüm $y=e^{3x}B\sin 2x$ yazılır. Diğer başlangıç değeri için

$$y=e^{3x}B\sin 2x \Rightarrow y'=3e^{3x}B\sin 2x+2Be^{3x}\cos 2x \Rightarrow y'(0)=10=2B \Rightarrow B=5$$

bulunur. Bu değerler genel çözümde yerine yazılırsa,

$$y=5e^{3x}\sin 2x$$

elde edilir.

Örnek 8.8: $4y''-8y'+3y=0,\ y(0)=2$ ve $y'(0)=0$ başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: Verilen denklemin karakteristik denklemi,

$$4\lambda^2-8\lambda+3=0 \Rightarrow (2\lambda-3)(2\lambda-1) \Rightarrow \lambda_1=\frac{3}{2},\ \lambda_2=\frac{1}{2}$$

Reel iki kök elde edilir. Bu durumda denklemin genel çözümü,

$$y=C_1e^{\frac{3}{2}x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}$$

yazılır. Başlangıç değerleri,

$$y(0)=2 \Rightarrow 2=C_1+C_2,$$
$$y(x)=C_1e^{\frac{3}{2}x}+C_2e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow y'(x)=\frac{3}{2}C_1e^{\frac{3}{2}x}+\frac{1}{2}C_2e^{\frac{1}{2}x}$$
$$y'(0)=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}C_1+\frac{1}{2}C_2=\frac{1}{2}$$

olur. Bu durumda

$$C_1+C_2=2$$
$$\frac{3}{2}C_1+\frac{1}{2}C_2=\frac{1}{2}$$

Denklemleri ortak çözülürse $C_1=\frac{-1}{2}$, $C_2=\frac{5}{2}$ elde edilir. Bu değerler genel çözümde yerine konursa, genel çözüm

$$y=\frac{-1}{2}e^{\frac{3}{2}x}+\frac{5}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

bulunur.

Uygulamalar

1) İkinci mertebeden sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemlerin mühendislik uygulamalarını araştırınız.

2) $Ay'' + By' + Cy = 0$ İkinci mertebeden sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemlemin karekretistik denklemi $y = e^{\lambda x}$ in çözüm olarak düşünülmesiyle elde edildiğini görün.

Uygulama Soruları

1) D çapında ve L boyunda silindirik alüminyum kanatlar sıcak yüzeylerden ısının uzaklaştırılmasında kullanılırlar. Böyle bir kanat içerisindeki sıxaklık dğılımı $T=T\left(x\right)$ olmak üzere,

$$T''-\lambda T=0,\ \lambda=\frac{4h}{kD}>0$$

diferansiyel denklemiyle tanımlanır. Burada h kanat ile çevresi arasındaki ısı tra nsfer

katsayısı, k kanat malzemesinin ısı iletim katsayısıdır.
Bu denklem için $L=0.5m,\ \lambda=4m^{-1},T\left(0\right)=200^{0}C\ ve\ T'\left(0\right)=-480^{0}C/m$

verilsin.Buna göre
verildiğine göre kanat boyunca olan sıcaklık dağılımını ve kanat ucundaki (x = L=0,5 m) sıcaklığı belirleyiniz.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemlerin çözümünün nasıl elde edileceğini öğrenildi. Öncelikle ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemlerden başlayarak daha yüksek mertebeden denklemler için bir alt yapı oluşturuldu.

Bölüm Soruları

A) Aşağıdaki fonksiyon takımlarının Wronskiyenin değerini hesaplayın

1. $y_1(x) = e^{-x},\ y_2(x) = e^{2x}\ (-\infty < x < \infty)$
2. $y_1(x) = x^2,\ y_2(x) = x^3, y_3(x) = x^{-2}\ (-\infty < x < \infty)$
3. $y_1(x) = 1,\ y_2(x) = 1, y_3(x) = x^2 \quad (-\infty < x < \infty)$

B) Aşağıdaki denklemler için karşılarında verilen $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarının doğrusal bağımsız çözümler olduğunu gösterin.

1. $y'' - y' - 6y = 0,\ y_1(x) = e^{3x}$ ve $y_2(x) = e^{-2x}$
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 13y = 0,\ y_1(x) = e^{-2x}\cos 3x$ ve $y_2(x) = e^{-2x}\sin 3x$

C) Aşağıdaki denklemlerin genel çözümlerini bulunuz.

1. $2y'' + 2y' - 4y = 0$
2. $9y' - 10y = 0$
3. $2y'' + 50y = 0$
4. $y'' + 6y' + 13y = 0$

D) Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz

1. $2y'' + y' + y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = -2$
2. $2y'' + y' - 3y = 0,\ y(0) = a, y'(0) = b$
3. $y'' - 8y' + 16y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0,$
4. $y'' + 9y' = 0,\ y(0) = 1,\ y(0) = 1$

E) Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $y'' + 3y' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1e^{x} + C_2e^{2x}$

b) $y = C_1 + C_2e^{-2x}$

c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

d) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

e) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$

2) $y'' - 4y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 0$ başlangıç değerli denklemin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{4} e^{-2x}$

b) $y = \frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{4} e^{2x}$

c) $y = \frac{1}{2} e^{x} + \frac{1}{4} e^{-2x}$

d) $y = \frac{1}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{-2x}$

e) $y = \frac{1}{2} e^{4x} + \frac{1}{4} e^{-5x}$

3) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(0) = -2, y'(0) = 1$ başlangıç değerli denklemin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = -5e^{-x} + 3e^{2x}$

b) $y = -5e^{x} + 3e^{-2x}$

c) $y = -5e^{x} + 3e^{2x}$

d) $y = -5e^{-x} + 3e^{-2x}$

e) $y = -5e^{-x^2} + 3e^{-2x}$

4) $y'' + y' - 2y = 0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

b) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$

c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}$

d) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

e) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x}$

5) $y'' - 2y' - 35y = 0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1e^{5x} + C_2e^{2x}$

b) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$

c) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{6x}$

d) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$

e) $y = C_1e^{-5x} + C_2e^{7x}$

Cevaplar

1) a, **2)** c, **3)** c, **4)** b, **5)** e

9. YÜKSEK MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER DENKLEMLERE GİRİŞ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

9.1. Sabit katsayılı Yüksek mertebeden Homojen Lineer Adi Diferansiyel Denklemler

9.2. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler (D'alembert Basamak Düşürme Yöntemi)

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) $y''' - y'' - 2y' = 0$ üçüncü mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemi nasıl çözeriz?

2) $y''' - \dfrac{2x^3}{x^2-9}y'' + 5y = \dfrac{x+1}{x}$ diferansiyel denklemin $y(2) = 0,\ y'(2) = -2,\ y''(2) = 4$

Başlangıç değerleri için tek bir çözümü var mıdır? Varsa x in hangi aralığındadır?

3) İkinci mertyebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemleri nasıl çözeriz?

4) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1(x) = e^x$ olduğuna göre lineer bağımsız ikinci

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Sabit katsayılı Yüksek mertebeden Homojen Lineer Adi Diferansiyel Denklemler	Sabit katsayılı Yüksek mertebeden Homojen Lineer Adi Diferansiyel Denklemleri çözebilmek.	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler	. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.

Anahtar Kavramlar

- Sabit katsayılı Yüksek mertebeden Homojen Lineer Adi Diferansiyel Denklemler
- Değişken katsayılı diferansiyel denklemler
- D'Alembert Basamak Düşürme Yöntemi

Giriş

Bir önceki bölümde sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemlerinin çözümü ile uğraşılmıştı. Bu hafta ise öncelikle yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için genelleştirme yapılır. Daha sonra katsayıların değişken olması durumunda diferansiyel denklemin çözümünün bulunmasında basamak düşürme yöntemini tanıtılır. Ayrıca homojen olmayan diferansiyel denklemlerin ve çözümlerinin nasıl olacağına dair bir giriş yapılır.

9.1. Sabit Katsayılı Yüksek Mertebeden Homojen Lineer Adi Diferansiyel Denklemler

Daha yüksek mertebeden sabit katsayılı lineer homojen denklemlerin çözümü için yapılacak işlemler ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen lineer denklemelerde yapılan işlemlerle hemen hemen aynıdır. Bu durumda biraz daha fazla çözüme ihtiyaç duyulacaktır. Eğer denklemimiz $n.$mertebeden ise $n$tane lineer bağımsız çözüm gerekecektir. Bunun için örneklere geçmeden önce ikinci mertebeden yapılan işlemleri $n.$mertebeden sabit katsayılı homojen denklemler için genelleyebilirz.

Yani,

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad \text{(V.15)}$$

Sabit katsayılı homojen denklemin karakteristik denklemi,

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)...(\lambda - \lambda_n) \qquad \text{(V.16)}$$

ve karakterisitik kökleri $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ olsun.Bu durumda

a)Kökler birbirinden farklı ve reel iseler diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + ... + C_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x} + C_n e^{\lambda_n x} \qquad \text{(V.17)}$$

b) n tane katlı kökü olması durumunda,

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} + ... + C_{n-1} x^{n-1} e^{\lambda_{n-1} x} + C_n x^n e^{\lambda_n x}, \qquad \text{(V.18)}$$

λ_1 kökün r katlı olması durumunda ise,

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x} + ... + C_r x^{r-1} e^{\lambda_1 x} \qquad \text{(V.19)}$$

Genel çözümleri elde edilir.

c) n katlı kompleks kök bulunması halinde $\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta$ köklerine karşılık gelen çözümler $n-1.$ dereceden polinomlar yardımıyla belirlenir.

Örnek 9.1 : $y^{(4)} - y'' = 0$ denklemini çözün.

Çözüm: Verilen denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^4 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

Olur. Buradan karekteristik kökler $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1$ ve $\lambda_4 = 1$ eşit ve farklı reel kökler bulunur. Buna göre diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^{x}$$

Bulunur.

Örnek 9.2 : $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 0$ denklemini çözün.

Çözüm: Verilen denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 8\lambda + 4 = 0 = \left(\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1\right)^2 = \left((\lambda - 1)^2 + 1\right)^2 = 0$$

$$= \underbrace{\left((\lambda - 1)^2 + 1\right)}_{\lambda_{1,2} = 1 \pm i}\underbrace{\left((\lambda - 1)^2 + 1\right)}_{\lambda_{1,2} = 1 \pm i} = 0$$

elde edilir. Buna göre karekteristik kökler çift katlı $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$ olur.Böylece diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{x} \cos x + \left(C_3 + C_4 x\right) e^{x} \sin x$$

bulunur.

Örnek 9.3: $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$ diferansiyel denkleminin

$y(0) = 1,\ y'(0) = 2$ ve $y''(0) = 3$ başlangıç koşulları altında çözümünü bulun.

Çözüm:

Diferansiyel denklemin karakteristik denklemi,

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Buradan karekteristik kökler $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 3$ bulunur. Buna göre denklemin genel çözümü,

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{3x}$$

Bulunur. Verilen başlangıç değerleri yerine konursa,

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ y'(0) &= -C_1 + C_2 + 3C_3 = 2 \\ y''(0) &= C_1 + C_2 + 9C_3 = 3 \end{aligned}$$

Lineer denklem sistemi karşımıza çıkar. Lise bilgilerimizle veya matrislerle çözdüğümüzde $C_1 = \frac{-1}{4}$, $C_2 = 1$ ve $C_3 = \frac{1}{4}$ elde edilir. Diferansiyel denklemin belirtilen koşulları sağlayan özel çözümü

$$y = \frac{-1}{4}e^{-x} + e^{x} + \frac{1}{4}e^{3x}$$

bulunur.

9.2. İkinci Mertebeden Değişken Katsayılı Homojen Diferansiyel Denklemler(D'alembert[1] Basamak Düşürme Yöntemi)

İkinci mertebeden değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemi

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \qquad \text{(VI.1)}$$

göz önüne alınsın. Bu denklemi Bölüm IV de gösterilen ikinci mertebeden sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemin çözümünde uygulanan yöntemle çözemeyiz. Çünkü katsayılar değişken. Dolayısıyla bu bölümde değişken katsayılı denklemlerin genel çözümlerinin elde edilmesinde uygulanan D'Alembert basamak düşürme yöntemini araştırılacaktır**.** Denklem (V.1) in sıfır olmayan bir $y_1(x)$ çözümü bilindiğinde, genel çözümün verilen diferansiyel denklemin mertebesini düşürme işlemine dayanan bir yöntemle bulunur. Denklem (V.1) in sıfır olmayan bir $y_1(x)$ çözümü verilsin. Bu durumda

$y(x) = v(x)\,y_1(x)$ seçilerek y' ve y'' ifadeleri $y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$ denkleminde yerlerine konur ve düzenlenirse, yani;

$$\begin{aligned}
&y(x) = v(x)\,y_1(x)\\
&y'(x) = v'(x)\,y_1(x) + y_1'(x)v(x)\\
&y''(x) = v''(x)\,y_1(x) + 2y_1'(x)v'(x) + y_1''(x)v(x)
\end{aligned}$$

Bulunur. Bu değerler Denklem(V.1) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&v''y_1 + 2y_1'v' + y_1''v + p\left(v'y_1 + y_1'v\right) + qvy_1 = 0\\
&v''y_1 + 2y_1'v' + pv'y_1 + v\underbrace{\left(y_1'' + py_1' + qy_1\right)}_{0} = 0
\end{aligned}$$

Elde edilir. Burada gerekli basitleştirmeler yapılırsa,

[1] Fransız matematikçi Jean le Rond d'Alembert (1717 – 1783).

$$v''(x)\, y_1(x) + \left(2y_1'(x) + p(x)\, y_1(x)\right) v'(x) = 0$$

bulunur. Bulunan denklem $v'(x)$ ne göre 1.mertebeden diferansiyel denklemdir. Bu yöntemde orijinal diferansiyel denklem y ye göre 2. Mertebeden olduğu halde

$y(x) = v(x)\, y_1(x)$ ile $v'(x)$ ne göre 1. Mertebeden diferansiyel denkleme geçilmektedir, bu nedenle bu metoda ‘***Mertebe Düşürme Metodu***’ denir.

Dolayısıyla 1.mertebeden lineer diferansiyel denklem; değişkenlere ayrılabilir tipte diferansiyel denklem haline getirilerek çözülür. Bunun için $v'(x) = u(x) \Rightarrow v''(x) = u'(x)$ dönüşümü uygulanırsa,

$$u'(x)\, y_1(x) + \left(2y_1'(x) + p(x)\, y_1(x)\right) u(x) = 0 \Rightarrow \int \frac{du}{u} = -\int \left(2y_1'(x) + p(x)\, y_1(x)\right) dx = -\int g(x)\, dx$$

$$u = h(x) = e^{-\int g(x) dx}$$

yazılır. Diğer yandan

$$v'(x) = u(x) \Rightarrow v(x) = \int h(x)\, dx = \int e^{-\int g(x) dx}\, dx$$

bulunur. Son olarak genel çözüm,

$$y(x) = v(x)\, y_1(x) \Rightarrow y(x) = y_1(x).\int h(x)\, dx \qquad \text{(VI.2)}$$

elde edilir.

Örnek 9.4 : $xy'' - (x+1)\, y' + y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1(x) = e^x$ olduğuna göre lineer bağımsız ikinci bir çözüm bulunuz.

Çözüm: İkinci bir çözümü bulmak için $y_2(x) = v(x)e^x$ dönüşümü yapılırsa,

$$y_2(x) = v(x)e^x \Rightarrow y_2' = e^x(v' + v) \Rightarrow y_2'' = e^x(v'' + 2v' + v)$$

olur. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa,

$$xe^x(v'' + 2v' + v) - (x+1)e^x(v' + v) + ve^x = 0 = e^x\left[xv'' + (x-1)v'\right]$$

ve düzenlenirse,

$$xv'' + (x-1)v' = 0 \quad (0 < x < \infty)$$

doğrusal denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü için $v' = u$ dönüşümü ile

$$xu' + (x-1)u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{x-1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int -\frac{x-1}{x}dx \Rightarrow u = xe^{-x}$$

Bulunur. Son olarak

$$v' = u \Rightarrow v = \int xe^{-x}dx = (-x-1)e^{-x}$$

olur. O halde ikinci çözüm

$$y_2(x) = v(x)e^x = -(x+1)$$

biçimindedir. Bu iki çözümüm bağımsız olup olmadığını tespit etmek için,

$$W\left(e^x, -(x+1)\right) = \begin{vmatrix} e^x & -(x+1) \\ e^x & -1 \end{vmatrix} = xe^x \neq 0$$

bakılır. Buradan y_1 ve y_2 nin lineer bağımsız olduğu görülür. Bu nedenle genel çözüm C_1 ve C_2 nin uygun seçimi ile

$$y(x) = C_1 e^x + C_2(-x-1)$$

biçimindedir.

Örnek 9.5: $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$ diferansiyel denklemin bir çözümü $y_1(x) = \frac{1}{x}$ olduğuna göre lineer bağımsız ikinci bir çözüm bulunuz.

Çözüm: İkinci bir çözümü bulmak için dönüşümü yapılırsa,

$$y_2(x) = v(x)\frac{1}{x} \Rightarrow y_2' = v'\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}v \Rightarrow y_2'' = v''\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}v' + \frac{2}{x^3}v$$

olur. Bu değerler denklemde yerine yazılırsa,

$$2x^2\left(v''\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}v' + \frac{2}{x^3}v\right) + 3x\left(v'\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}v\right) - v\frac{1}{x} = 0$$

gerekli sadeleştirmeler yapılırsa,

$$2xv'' - v' = 0$$

elde edilir. Buradan $v' = u$ dönüşümü yapılarak bir önceki örnekteki gibi çözülebilir. Fakat ikinci bir çözüm yolu olarak aşağıdaki işlemleri takip edelim:

$$2xv'' - v' = 0 \Rightarrow \frac{v''}{v'} = \frac{1}{2x} \Rightarrow \int \frac{v''}{v'} dv' = \int \frac{1}{2x}$$

$$\ln v' = \frac{1}{2}\ln x + \ln C_1 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = C_1\sqrt{x} \Rightarrow \int dv = C_1\int \sqrt{x}dx$$

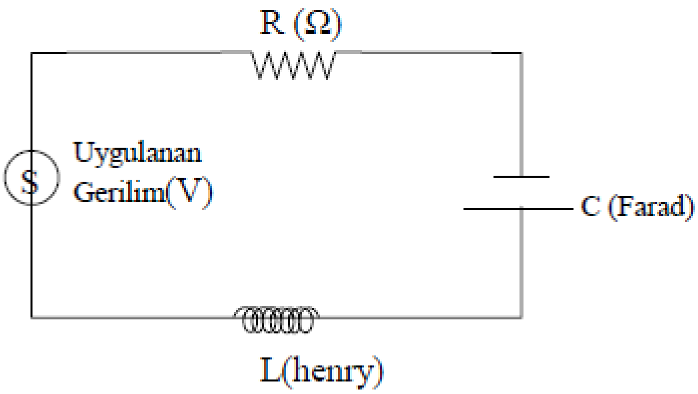
$$v = \frac{2}{3}C_1 x^{3/2} + C_2$$

bulunur. İkinci çözüm,

$$y_2(x) = v(x)\frac{1}{x} = \frac{2C_1}{3}x^{1/2} + \frac{C_2}{x}$$

bulunur. Burada C_1 ve C_2 keyfi sabitlerdir. İkinci çözümün ikinci terimine dikkat edilirse $y_1(x) = \frac{1}{x}$ in katı olduğu görülür. Fakat ilk terim ise bu çözümden bağımsızdır. Bu durumda ilk terimin katsayısı , $\frac{2C_1}{3}$ göz önüne alınmaksızın ikinci lineer bağımsız çözüm $y_2(x) = x^{1/2}$ olur.

Uygulamalar



1) Bir elektrik devresinden geçen akımı aşağıdaki diferansiyel denklemin çözümü ile bulabiliriz:

$$L\frac{d^2I}{dt^2}+R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=\frac{dE(t)}{dt}$$

Burada E(t) devreye uygulanan gerilimdir. Bu denklemin nasıl elde edildiğini araştırınız.

Uygulama Soruları

1) İki uçtan mesnetlenmiş bir kirişin sehimi

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \frac{\rho g}{E l}$$

diferansiyel denklemiyle tanımlanır. Burada ρ kirişin yoğunluğu, g yerçekimi ivmesi E kirişin malzemesinin Young modülü ve I kiriş kesitinin atalet momentidir. Verilen diferansiyel denklemin genel ve özel çözümünü bulunuz.(İpucu: Özel çözüm bulurken

Kiriş iki uçtan sabitlendiğine göre $y(0) = y(L) = 0$ alınır)

2) $x^2 y'' - 2xy' + \left(x^2 + 2\right) y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1\left(x\right) = x\cos x$ olduğuna göre lineer bağımsız ikinci bir çözüm bulunuz.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, yüksek mertebeden sabit katsayılı diferansiyel denklemeler irdelenerek, değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemlerin çözümünde D'alemdert basamak düşürme yönteminin kullanışlılığı görüldü.

Bölüm Soruları

A)

1. $y'' - 4xy' + \left(4x^2 - 2\right) y = 0$ denkleminin bir çözümü e^{x^2} alarak denklemi çözünüz.

2. $xy'' + \left(2 - x\right) y' - \left(2x + 1\right) y = 0$ denklemini, $x^{\alpha} e^{\alpha x}$ biçiminde bir özel çözüm bularak integre ediniz.

B) Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1. $\left(1 + x^2\right) y'' - 2xy' + 2y = 0$ denkleminin x^n özel çözümü için genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 x + C_2 \left(x^2 - 1\right)$ b) $y = C_1 x^{-1} + C_2 \left(x^2 - 1\right)$

c) $y = C_1 x + C_2 \left(x^3 - 1\right)$ **d)** $y = C_1 \sqrt{x} + C_2 \left(x^2 - 1\right)$

2) $xy'' - \left(x + 1\right) y' + y = 0$ denkleminin e^{mx} özel çözümü için genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^{-x} - C_2 \left(x + 1\right)$

b) $y = C_1 e^{x} - C_2 \left(x^2 + 1\right)$

c) $y = C_1 e^{x} - C_2 \left(x + 1\right)$

d) $y = C_1 e^{2x} - C_2 \left(x + 1\right)$

e) $y = C_1 e^{-2x} - C_2 \left(x^2 + 1\right)$

3) $y'' - 4xy' + \left(4x^2 - 2\right) y = 0$ denkleminin e^{x^2} özel çözümü için genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = \left(C_1 + C_2 x^2\right) e^{x^2}$

b) $y = \left(C_1 + C_2 x^2\right) e^{x}$

c) $y = \left(C_1 x + C_2 \sqrt{x}\right) e^{x^2}$

d) $y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{x^2}$

e) $y = \left(C_1 + C_2 x^4\right)e^{x^2}$

4) $xy'' - \left(x+1\right)y' + y = 0$ denkleminin e^x özel çözümü için genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^x - C_2\left(x+1\right)$

b) $y = C_1 e^x - C_2\left(x^2+1\right)$

c) $y = C_1 e^{-2x} - C_2\left(3x+1\right)$

d) $y = C_1 e^{4x} - C_2\left(x+1\right)$

e). $y = C_1 e^{4x} - C_2\left(x^3+1\right)$

5) $3y''' - 3y'' - y' + y = 0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^{-2x/\sqrt{3}} + C_2 e^{x} + C_3 e^{x/\sqrt{3}}$

b) $y = C_1 e^{-x/\sqrt{3}} + C_2 e^{x}$

c) $y = C_1 e^{-x/\sqrt{3}} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{x/\sqrt{3}}$

d) $y = C_1 e^{-x/\sqrt{3}} + C_2 e^{x} + C_3 e^{x/\sqrt{3}}$

e) $y = C_1 e^{-x/\sqrt{3}} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x/\sqrt{3}}$

6) $y''' - 7y'' + 6y = 0$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$

b) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$

c) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$

d) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{-2x}$

e) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{-2x}$

Cevaplar

1) a, **2)** c, **3)** d, **4)** a, **5) d, 6)** a

10. İKİNCİ MERTEBEDEN SABİT KATSAYILI HOMOJEN OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

10.1. Homojen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemler

10.2. Belirsiz Katsayılar Metodu

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) İkinci mertebeden sabit katsayılı homojen olmayan bir diferansiyel denklem yazınız.

2) $y'' - 2y' + y = 5\cos 2x + 10\sin 2x$ diferansiyel denklemini nasıl çözebiliriz?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Homojen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemler	Homojen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemleri kavrayabilmek.	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Belirsiz Katsayılar Metodu	Homojen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemleri, Belirsiz Katsayılar Metodu ile çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.

Anahtar Kavramlar

- Homojen çözüm
- Özel çözüm
- Genel çözüm
- Belirsiz katsayılar yöntemi

Giriş

Bu bölüme kadar genellikle homojen diferansiyel denklemlerle uğraşıldı. Şimdi ise homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm tekniklerine odaklanılır. Bunun için literatürde sıkça kullanılan yöntemlerden biri olan belirsiz katsayılar yöntemi irdelenir.

10.1. Homojen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemler

Bu bölümde homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözümü ile uğraşılacaktır. İlk olarak konunun daha iyi anlaşılması için

$$L[y] = y'' + 5y' + 6y = 2x + 1 \qquad \text{(VI.3)}$$

homojen olmayan bir diferansiyel denklemini göz önüne alalım. İkinci tarafın sıfır olduğu

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

homojen denklemin çözümü y_h ile, homojen olmayan $L[y] = 2x+1$ denklemin özel bir çözümünü de $y_ö$ ile gösterelim. Bu durumda denklem(VI.3) in genel çözümü:

$$y_g = y = y_h + y_ö \qquad \text{(VI.4)}$$

formunda yazıılr. L bir lineer operayör olmak üzere Dolayısıyla $L[y_h] = 0 \; ve \; L[y_g] = 2x+1$ dir. y_g de bir çözüm olduğundan

$$L[y] = L[y_h + y_g] = L[y_h] + L[y_g] = 0 + 2x + 1 = 2x + 1$$

olur. Niçin genel çözümü elde ettiğimizi görelim. $y_ö$ ve $\tilde{y}_ö$ iki farklı özel çözüm olsun. Bu ikisinin farkını $w = y_ö - \tilde{y}_ö$ ile gösterelim ve Denklem (VI.3) de yerine yazalım:

$$w'' + 5w' + 6w = \left(y''_ö + 5y'_ö + 6y_ö\right) - \left(\tilde{y}''_ö + 5\tilde{y}'_ö + 6\tilde{y}_ö\right) = 2x + 1 - 2x - 1 = 0$$

Dolayısıyla $w = y_ö - \tilde{y}_ö$ da homojen denklemin bir çözümüdür. Yani homojen olmayan denklemin iki çözümünün farkı homojen denklemin çözümüdür. $y_g = y = y_h + y_ö$ çözümü ise Denklem(VI.3) deki homojen olmayan denklemin bütün çözümlerini içerir. Çünkü y_h, Denklem(VI.4) deki homojen denklemin genel çözümüdür.

Teorem 10.1 $L[y] = F(x)$ lineer diferansiyel denklemi olsun. $L[y] = 0$ homojen denklemin çözümü y_h ve $L[y] = F(x)$ sağ taraflı denklemin herhangi bir özel çözümü de $y_ö$ olsun. Buna göre $L[y] = F(x)$ denkleminin genel çözümü, $y = y_h + y_ö$ dır.

Teorem 10.2 $L[y] = F(x)$ lineer diferansiyel denklemi olsun. $L[y] = 0$ homojen denklemin lineer bağımsız iki çözümü y_1 ve y_2 olsun. Bu durumda C_1 ve C_2 sabitleri için $y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$ ve $L[y] = F(x)$ sağ taraflı denklemin herhangi bir özel çözümü de $y_ö$ olsun. Buna göre $L[y] = F(x)$ denkleminin genel çözümü, $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_ö$ olur.

10.2. Belirsiz Katsayılar Metodu

Bu yöntem homojen olmayan sağ yanlı diferansiyel denklemin polinom, üstel fonksiyon, trigonometrik fonksiyon veya bu fonksiyonların çarpımı şeklinde olması durumunda uygulanır.Genel olarak

$$L_n\left[y\right]=A_0\left(x\right)y^{(n)}+A_1\left(x\right)y^{(n-1)}+...+A_1\left(x\right)y'+C\left(x\right)y=f\left(x\right)$$

(VI.5)

Denkleminin özel çözümleri $f\left(x\right)$ in aldığı fonksiyon türüne bağlı olarak belirlenir.

Buna göre

i. $f\left(x\right)$, $m.$dereceden bir polinom olsun. Yani, $L_n\left[y\right]=P_m(x)$.

Bu durumda

1. Eğer $C\left(x\right)\neq 0$ ise(y varsa) özel çözüm olarak $m.$dereceden bir polinom aranır. **(Ç1)** $y_ö=a_mx^m+....+a_1x+a_0=Q_m\left(x\right)$

2. Denklem(VI.3) deki karakteristik denklemin r katlı kökü varsa, özel çözüm:

(Ç2) $y_ö=x^r(a_mx^m+....+a_1x+a_0)$ .Burada $C\left(x\right)=0$ ise $r=1$, $A_1\left(x\right)=C\left(x\right)=0$ ise $r=2$ alınır.

ii. $f\left(x\right)$, bir üstel fonksiyon olsun. Yani, $L_n\left[y\right]=\alpha e^{sx}$.Bu durumda özel çözüm:

1.Eğer s, karakteristik denklemin r katlı kökü ise , yani

$F\left(\lambda\right)=\left(\lambda-s\right)^r G\left(\lambda\right)$ ise $y_ö=cx^re^{sx}$ **(Ç3)**

2 $y\left(x\right)=z\left(x\right)e^{sx}$ fonksiyon dönüşümü bu üstel denklemi polinom denklemine

dönüştürür.

iii. $f\left(x\right)$, hem üstel hem de polinom içeriyorsa

$F\left(\lambda\right)=\left(\lambda-s\right)^r G\left(\lambda\right)$ ise $y_ö=x^r(a_mx^m+....+a_1x+a_0)e^{sx}$ **(Ç4)**

Burada $f\left(s\right)\neq 0\Rightarrow r=0$ dır.

iv. $f(x)$, hem üstel hem de polinom hem de trigonometrik ifade içeriyorsa Yani

$P_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ veya $P_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ biçiminde olsun. $\alpha+i\beta$ değeri $F(\lambda)=0$ karakteristik denklemin r katlı kökü ise $Q_m(x)$ ve $R_m(x)$ m. Dereceden polinomlar olmak üzere

(Ç5) $y_ö = x^r e^{sx}(Q_m(x)\cos\beta x + R_m(x)\sin\beta x)$ biçimde çözüm aranır. $F(\alpha+i\beta)\neq 0 \Rightarrow r=0$ dır.

$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ biçiminde ise $L_n[y]=f(x)$ denkleminin özel çözümü, $L_n[y]=f_1(x)$ *ve* $L_n[y]=f_2(x)$ denklemlerinin özel çözümlerinin toplamıdır yani $y_ö = y_{ö_1} + y_{ö_2}$ dir.

Yukarda maddeler halinde verdiğimiz durumlara ait özel çözümlerin davranışı Tablo V.1 de özetlenmiştir. Burada Eğer 2. sütundakiler karakteristik denklemin ‘ r ’ katlı kökü iseler bu durumda tablonun 3. sütunundaki fonksiyonlar ‘ x^r ’ile çarpılırlar. Özel çözüm ondan sonra araştırılır.

Tablo V.1 Homojen olmayan denklemlerin ikinci tarafın durumuna göre özel çözümün elde edilişi

$f(x)$	Karakteristik Denklemin kökü değilse	$y_{özel}$
c(sabit)	0	A
x^n POLİNOM	0	$y_ö = a_m x^m + ... + a_1 x + a_0 = Q_m(x)$
$e^{\alpha x}$ ÜSTEL	α	$A\ e^{\alpha x}$
$\sin\beta x$	$i\beta$	$A cos\beta x + B\sin\beta x.$
$\cos\gamma x$	$i\gamma$	$A cos\gamma x + B\sin\gamma x.$
$x^n\ e^{\alpha x}$	α	$e^{\alpha x}.Q_n(x)$
$e^{\alpha x}\ \sin\beta x$	$\alpha+i\beta$	$e^{\alpha x}(Cos\beta x + \sin\beta x).$

$e^{\alpha x}\ \cos\gamma x$	$\alpha+i\gamma$	$e^{\alpha x}\left(Cos\gamma x+\sin\gamma x\right).$
$x^n\ e^{\alpha x}\ \sin\beta x$	$\alpha+i\beta$	$e^{\alpha x}Cos\gamma x.Q_n\left(x\right)+e^{\alpha x}\sin\gamma x.R_n\left(x\right)$
$x^n\ e^{\alpha x}\ \cos\gamma x$	$\alpha+i\gamma$	$e^{\alpha x}Cos\gamma x.Q_n\left(x\right)+e^{\alpha x}\sin\gamma x.R_n\left(x\right)$

Şimdi örnekler yaparak teoriyi pekiştirelim.

Örnek 10.1. $y''-3y'=2x^2-5x+3$ diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm: İlk olarak

$$y''-3y'=0$$

homojen çözümü bulalım. Karakteristik denklem ve kökleri

$$F\left(\lambda\right)=\lambda^2-3\lambda=\lambda\left(\lambda-3\right)=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=3$$

Elde edilir. Buna göre

$$y_h=C_1e^{0.x}+C_2e^{3.x}=C_1+C_2e^{3.x}$$

dir. $\lambda_1=0$ tek katlı bir kök olduğundan ve ikinci taraftaki $2x^2-5x+3$ ikinci dereceden bir polinom olduğundan bu tipten bir özel çözüm:

$$y_ö=x\left(ax^2+bx+c\right)=ax^3+bx^2+cx$$

formunda bir özel çözüm aranır. Buna göre $y_ö'=3ax^2+2bx+c,\ y_ö''=6ax+2b$ değerleri diferansiyel denklemde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$6ax+2b-3\left(3ax^2+2bx+c\right)=2x^2-5x+3=-9ax^2+\left(6a-6b\right)x+2b-3c$$

İki polinomun eşitliğinden

$$a=-9/2,\ b=11/8 \text{ ve } c=-16/27$$

Bulunur. Buna göre özel çözüm:

$$y_ö=\frac{-9}{2}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{16}{27}x$$

Olduğundan genel çözüm:

$$y = y_h + y_ö = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{-9}{2} x^3 + \frac{11}{8} x^2 - \frac{16}{27} x$$

Örnek 10.2. $y'' + 2y' - 3y = 3x^2 - x + 5$ denklemini çözünüz.

Çözüm: İlk olarak

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

homojen çözümü bulalım. Karakteristik denklem ve kökleri

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda + 3)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 1$$

Elde edilir. Buna göre

$$y_h = C_1 e^{-3.x} + C_2 e^x$$

dir. ikinci taraftaki $3x^2 - x + 5$ ikinci dereceden bir polinom olduğundan bu tipten bir özel çözüm:

$$y_ö = ax^2 + bx + c$$

formunda bir özel çözüm aranır. Buna göre $y_ö' = 2ax + b,\ y_ö'' = 2a$ değerleri diferansiyel denklemde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$2a + 2(2ax + b) - 3(ax^2 + bx + c) = 3x^2 - x = -3ax^2 + (4a - 3b)x + 2ab - 3c$$

İki polinomun eşitliğinden $a = -1,\ b = -1$ ve $c = -3$ Bulunur. Buna göre özel çözüm:

$$y_ö = -x^2 + -x - 3$$

olduğundan genel çözüm:

$$y = y_h + y_ö = C_1 e^{-3.x} + C_2 e^x + -x^2 + -x - 3$$

bulunur.

Örnek 10.3 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ denklemini çözünüz.

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

homojen çözümü bulalım.

Çözüm: Karakteristik denklem ve kökleri

$$F(\lambda)=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=3$$

2 katlı kök var. Buna göre

$$y_h=C_1e^{3.x}+C_2xe^{3x}$$

dir. İkinci taraftaki üstel bir ifade olduğundan ve iki katlı $\lambda_1=3$ olduğundan

$$y_ö=ax^2e^{3x}$$

formunda bir özel çözüm aranır. Buna göre

$$y'_ö=2axe^{3x}+3ax^2e^{3x} \Rightarrow y''_ö=2ae^{3x}+6axe^{3x}+6axe^{3x}+9ax^2e^{3x}$$

değerleri diferansiyel denklemde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$y''-6y'+9y=2ae^{3x}+6axe^{3x}+6axe^{3x}+9ax^2e^{3x}-6\left(2axe^{3x}+3ax^2e^{3x}\right)+9ax^2e^{3x}=e^{3x}$$
$$2ae^{3x}=e^{3x} \Rightarrow a=1/2$$

bulunur. Buna göre özel çözüm:

$$y_ö=\frac{1}{2}x^2e^{3x}$$

olduğundan genel çözüm:

$$y=y_h+y_ö=C_1e^{3.x}+C_2xe^{3x}+\frac{1}{2}x^2e^{3x}=e^{3x}\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)$$

Bulunur.

Örnek 10.4. $y''+7y'+12y=e^{-3x}$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Homojen çözümü bulalım. Karakteristik denklem ve kökleri

$$\lambda^2+7\lambda+12=0=(\lambda+4)(\lambda+3) \Rightarrow \lambda_1=-4,\ \lambda_1=-3$$

Buna göre

$$y_h=C_1e^{-4.x}+C_2e^{-3x}$$

dir. üstel fonksiyonda x'in katsayısı (-3), karakteristik denklemin kökü olduğundan ae^{-3x}

Seçilerek $y_ö=xae^{-3x}$ Formunda bir özel çözüm aranır. Buna göre

$$y_ö = xae^{-3x} \Rightarrow y_ö' = ae^{-3x} - 3x\alpha e^{-3x},\, y_ö'' = -6ae^{-3x} + 9axe^{-3x}$$

değerleri diferansiyel denklemde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$-6ae^{-3x} + 9axe^{-3x} + 7\left(ae^{-3x} - 3x\alpha e^{-3x}\right) + 12xae^{-3x} = e^{-3x} \Rightarrow a = 1$$

Bulunur. Buna göre özel çözüm:

$$y_ö = xe^{-3x}$$

Olduğundan genel çözüm:

$$y = y_h + y_ö = C_1 e^{-4.x} + C_2 e^{-3x} + xe^{-3x}$$

Örnek 10.5. $y'' + 4y = 3\sin 2x$ denklemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklem,

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 = \lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$$

Homojen kısmın çözümü $y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. İkinci taraf trigonometrik olduğunda

özel çözüm için $3\sin 2x$ deki $i\beta = 2i$ karakteristik denklemin kökü= $F(2i) = (2i)^2 + 4 = 0$

olduğundan denklemin 1 katlı kökü olup $r = 1$ alınırsa özel çözüm,

$$y_ö = x(a\cos 2x + b\sin 2x)$$

Formunda olur. Buradan a, b katsayılarını bulmak için,

$$y_ö' = a\cos 2x + b\sin 2x + x(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x)$$
$$y_ö'' = -4a\sin 2x + 4b\cos 2x - 4x(a\cos 2x + b\sin 2x)$$

Değerleri denklemde yerine yazılırsa,

$$y'' + 4y = 3\sin 2x = -4a\sin 2x + 4b\cos 2x - 4x(a\cos 2x + b\sin 2x) + 4x(a\cos 2x + b\sin 2x)$$
$$-4a\sin 2x + 4b\cos 2x = 3\sin 2x \Rightarrow a = -3/4,\ b = 0$$

olduğundan özel çözüm

$$y_ö = x(a\cos 2x + b\sin 2x) = \frac{-3}{4} x\cos 2x$$

Genel çözüm:

$$y = y_h + y_ö = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{-3}{4} x \cos 2x$$

elde edilir.

Örnek 10.6 $y''' - 4y' = x + 3\cos x + e^{-2x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm: Karakteristik denklem:

$F(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_2 = -2$

Buna göre homojen kısmın çözümü

$y_h = C_1 + C_2 e^{2x} + C_1 e^{-2x}$

Olur. Sağ yandaki $f_1(x) = x, f_2(x) = 3\cos x, f_3(x) = e^{-2x}$ fonksiyonları için ayrı ayrı özel çözüm belirtilmelidir. $f_1(x) = x$ için $x = 0$ karakteristik denklemi sağladığından $y_{ö_1} = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$ denklemde yerine yazılırsa,

$0 - 8Ax - B = x \Rightarrow B = 0,\ A = -1/8$

elde edilir. Buradan 1.özel çözüm:

$y_{ö1} = \frac{-1}{8} x^2$

olur. $f_2(x) = 3\cos x$ için $i.1 = i$ karakteristik denklemin çözümü değildir. Şu halde özel çözüm:

$y_{ö1} = a\cos x + b\sin x \Rightarrow y'_{ö1} = -a\cos x + b\cos x \Rightarrow y''_{ö1} = a\sin x - b\sin x \Rightarrow y''_{ö1} = a\sin x - b\sin x$

$y'_{ö1} = -a\sin x + b\cos x, y''_{ö1} = -a\cos x - b\sin x, y'''_{ö1} = a\sin x - b\cos x$
$a\sin x - b\cos x - 4(-a\sin x + b\cos x) = 3\cos x \Rightarrow b = -3/5, a = 0$

elde edilir. Buradan 2.özel çözüm:

$$y_{ö1} = \frac{-3}{5} \sin x$$

olur. $f_3(x)=e^{-2x}$ için öncelikle -2 karakteristik denklemin kökü olduğundan çözüm $y_{ö3}=xAe^{-2x}$ yazılır.

$y'_{ö3}=Ae^{-2x}-2Axe^{-2x}$, $y''_{ö3}=-2Ae^{-2x}+4Axe^{-2x}$, $y'''_{ö3}=4Ae^{-2x}+4Ae^{-2x}-8Axe^{-2x}$

değerleri diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, $A=\frac{1}{8}$ bulunur. Buradan $y_{ö3}=\frac{1}{8}xe^{-2x}$ olacağından genel çözüm:

$$y=C_1+C_2e^{2x}+C_1e^{-2x}+\frac{-1}{8}x^2+\frac{-3}{5}\sin x+\frac{1}{8}xe^{-2x}$$

Elde edilir.

Örnek 10.7 $y''+25y=4x^3\sin 5x-2e^{3x}\cos 5x$ diferansiyel denkleminin özel çözümünün alabileceği formu yazınız.

Çözüm: Karakteristik denklem:

$$F(\lambda)=\lambda^2+25\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=5i,\lambda_2=-5i$$

Buna göre homojen kısmın çözümü

$$y_h=C_1\cos 5x+C_2\sin 5x$$

Olur. Sağ yandaki $f_1(x)=4x^3\sin 5x$ ve $f_2(x)=-2e^{3x}\cos 5x$ fonksiyonları için ayrı ayrı $y_1(x)$ ve $y_2(x)$özel çözümleri belirtilmelidir. $f_1(x)=4x^3\sin 5x$ için

$$y_1=\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)\cos 5x+\left(Kx^3+Lx^2+Mx+N\right)\sin 5x$$

yazılabilir.Fakat $D\cos 5x+N\sin 5x$ toplamı homejen kısmın çözümünde de olduğundan özel çözümdeki bütün terimler x ile çarpılırsa,1.özel çözüm:

$$y_1=\left(Ax^3+Bx^2+Cx+D\right)x\cos 5x+\left(Kx^3+Lx^2+Mx+N\right)x\sin 5x$$

olur. $f_2(x)=-2e^{3x}\cos 5x$ için ikinci özel çözüm

$$y_2=C_3e^{3x}\left(C_4\cos 5x+C_5\sin 5x\right)=C_6e^{3x}\cos 5x+C_7e^{3x}\sin 5x$$

yazılır. Şu halde denklemin özel çözümünün alacağı form:

$$y_{ö} = y_1 + y_2$$
$$= \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right)x\cos 5x + \left(Kx^3 + Lx^2 + Mx + N\right)x\sin 5x + C_6 e^{3x}\cos 5x + C_7 e^{3x}\sin 5x$$

Uygulamalar

1) İkinci dereceden sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemlerin belirsiz katsayılar yöntemi dışında olabilecek başka çözüm yöntemlerini araştırınız.

Uygulama Soruları

1) $y'' + 3y' + 2y = (16 + 20x)\cos x + 10\sin x$ diferansiyel denklemin

a) Homojen kısmının çözümünü bulun

b) Özel çözümünü bulun

c) Genel çözümünü bulun

2) $y'' + y = (8 - 4x)\cos x - (8 + 8x)\sin x$ diferansiyel denklemin özel çözümünün alacağı formu yazınız.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, homojen olmayan diferansiyel denklemleri tanıtılarak çözüm tekniklerine odaklanıldı. Bunun için literatürde sıkça kullanılan yöntemlerden biri olan belirsiz katsayılar yöntemi irdelendi.

Bölüm Soruları

1) $y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{-x}$

b) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$

c) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)$

d) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}$

e) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \left(x - \frac{1}{2}x^2\right)e^{-5x}$

2) $y'' - y = e^{-x}\sin e^{-x} + \cos e^{-x}$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} - e^{-x}\sin e^{-x}$

b) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - \sin e^{x}$.

c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - e^{x}$

d) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} - e^{x}\sin e^{-x}$

e) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} - e^{2x}\sin e^{-x}$

3) $y'' + 2y = e^{x} + 2$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1\cos\sqrt{2}x + +C_2\sin\sqrt{2}x + e^{-x}/3 + 1$

b) $y = C_1\cos\sqrt{2}x + +C_2\sec\sqrt{2}x + e^{x}/3 + 1$

c) $y = C_1\cos\sqrt{2}x + +C_2\sin\sqrt{2}x + e^{x}/3 + 1$

d) $y = C_1\cos\sqrt{2}x + +C_2\sin\sqrt{2}x + e^{2x}/3 - 1$

e) $y = C_1\tan\sqrt{2}x + +C_2\cot x\sqrt{2}x + e^{2x}/3 - 1$

4) $y'' + y' = x + 2$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 + +C_2 e^{x} + x + \frac{1}{2}x^2$

b) $y = C_1 e^{x} + +C_2 e^{-x} + x + \frac{1}{2}x^2$

c) $y = C_1 + +C_2 e^{-x} + x^3 + \frac{1}{2}x$

d) $y = C_1 + +C_2 e^{-x} - x + 2x^2$

e) $y = C_1 + +C_2 e^{-x} + x + \frac{1}{2}x^2$

5) $y'' + 4y' = \sin 2x$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = \left(C_1 - \frac{1}{4}\right)\cos x + C_2 \cos 2x$

b) $y = \left(C_1 - \frac{1}{4}\right)\sin 2x + C_2 \cos 2x$

c) $y = \left(C_1 - \frac{1}{4}\right)\cos 2x + C_2 \sin 2x$

d) $y = \left(C_1 - \frac{1}{4}\right)\cos x + C_2 \sin 2x$

e) $y = \left(C_1 - \frac{1}{2}\right)\cos 2x + \left(C_2 - \frac{1}{2}\right)\sin 2x$

6) $y'' + 4y' + 3y = x - 1$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x}{9}$

b) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{7}{9}$

c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + \frac{3x - 7}{9}$

d) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \dfrac{3x-7}{9}$

e) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x} + 3x^2$

7) $y^{(4)} - 16y = e^x$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \dfrac{1}{15} e^x$

b) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \dfrac{1}{15} e^x$

c) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \dfrac{1}{15} e^{-x}$

d) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \dfrac{1}{15} e^{2x}$

e) $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 12$

Cevaplar

1) a, **2** d, **3** c, **4)** e, **5)** c, **6)** c, **7)** a

11. PARAMETRELERİN DEĞİŞİMİ YÖNTEMİ VE CAUCHY-EULER DİFERANSİYEL DENKLEMELRİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

11.1. Parametrelerin Değişimi Yöntemi(Lagrange Yöntemi)

11.2. Cauchy-Euler Denklemleri

11.3. Legendre Lineer Denklemi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Belirsiz katayılar yönteminin dezavantajları nelerdir?

2) İkinci dereceden sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için alternatif yöntemler olabilir mi?

3) Wronskian determinantı ne idi?

4) İkinci dereceden sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemleri çözmek için Wronskian determinantını kullanabilir miyiz?

5) $x^2 y'' + xy' + y = 0$ denklemini belirsiz katsayılar yöntemi ile çözebilir miyiz?Niçin?

İkinci dereceden değişken

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	Kazanım	Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği
Parametrelerin Değişimi Yöntemi(Lagrange Yöntemi)	Homojen olmayan diferansiyel denklemleri Parametrelerin Değişimi Yöntemi ile çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Cauchy-Euler Denklemleri	Değişken katsayılı diferansiyel denklemlerden Cauchy-Euler Denklemlerini kavrayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Legendre Lineer Denklemi	Cauchy-Euler Denklemlerinin daha genişletilmiş hali olan Legendre Lineer diferansiyel Denklemleri çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek

Anahtar Kavramlar

- Parametrelerin Değişimi Yöntemi
- Wronskian determinantı
- Cauchy-Euler Diferansiyel Denklemleri
- Legendre Lineer Diferansiyel Denklemleri

Giriş

Bu bölümde homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden biri olan Parametrelerin Değişim yöntemi incelenir. Ayrıca değişken katsayılı diferansiyel denklemleri olan Cauchy-Euler ve Legendre denklemlerinin çözümlerinin bulunmasına odaklanılır.

11.1. Parametrelerin Değişimi Yöntemi(Lagrange Yöntemi[2])

İkinci mertebeden değişken katsayılı homojen diferansiyel denklemi

$$p_0 y'' + p_1(x)\, y' + p_2(x)\, y = f(x) \tag{VI.6}$$

göz önüne alınsın. C_1 ve C_2 sabitler olmak üzere Bu denklemin homojen kısmının çözümü

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

formunda olduğunu önceki bölümlerde gördük. Parametrelerin değişimi veya Lagrange yöntemi C_1 ve C_2 sabitlerinin yerine $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ şeklindeki fonksiyonların yazılması suretiyle Denklem (V.1) i sağlamak üzere bu fonksiyonları bulunmasıdır.

Yani $\forall x \in \mathrm{I}$ için $L[y] = f(x)$ denklemini sağlayan

$$y = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2 \tag{VI.7}$$

yazılması ve dolayısıyla çözümün bulunması $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonlarının belirlenmesine dönüşür. $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonlarının $\forall x \in \mathrm{I}$ için $L[y] = f(x)$ denklemini sağladığı kabul edilsin.Buna göre ,

$$\begin{aligned}
y &= u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2 \\
y' &= u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2' \\
y'' &= u_1'' y_1 + u_2'' y_2 + 2\left(u_1' y_1' + u_1' y_2'\right) + u_1' y_1 + u_2' y_2
\end{aligned}$$

Yazılsın. $L[y_1] = L[y_2] = 0$ olduğundan $y = u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2$ $L[y] = 0$ homojen denklemi sağladığı kabul edilirse,

$$L\left[u_1(x)\, y_1 + u_2(x)\, y_2\right] = p_0.(u_1'' y_1 + u_2'' y_2 + 2\left(u_1' y_1' + u_1' y_2'\right) + u_1' y_1 + u_2' y_2) + p_1.(u_1' y_1 + u_2' y_2) = f$$

yazılır. Burada

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \tag{VI.8}$$

kabul edilir ise

---

[2] Joseph Louis Lagrange(1736-1813)

$$
\begin{aligned}
&y' = \underbrace{u_1' y_1 + u_2' y_2}_{0} + u_1 y_1' + u_2 y_2' = u_1 y_1' + u_2 y_2' \\
&y'' = u_1' y_1' + y_1'' u_1 + u_2' y_2' + y_2'' u_2
\end{aligned}
\tag{VI.9}
$$

olur.Buradan son elde edilen $y, y'\,ve\;y''$

$$p_0 y'' + p_1(x)\,y' + p_2(x)\,y = f(x)$$

denkleminde yerine yazılırsa $L[y_1] = L[y_2] = 0$ olduğu da dikkate alınırsa,

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{f(x)}{p_0(x)} \tag{VI.10}$$

Elde eldir. Denklem(VI.8) ve (VI.10) yardımıyla u_1' ve u_2' çözülür. İntegraller alınarak da u_1 ve u_2 elde edilir.

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$$

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = \frac{f(x)}{p_0(x)}$$

Denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı y_1 ve y_2 nin Wronskiyanı dır.

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Buradan

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{f(x)}{p_0(x)} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(x)} \Rightarrow u_1 = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{f(x)}{p_0(x)} & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_2 & 0 \\ y_2' & \dfrac{f(x)}{p_0(x)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(x)} \Rightarrow u_2 = \int \frac{\begin{vmatrix} y_2 & 0 \\ y_2' & \dfrac{f(x)}{p_0(x)} \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)(x)} dx$$

Bulunarak $y = u_1(x)\,y_1 + u_2(x)\,y_2$ de yerine yazılır ve homojen olmayan denklemin çözümü elde edilir.

Örnek 11.1 $\quad y'' + y = \tan x$ denkleminin çözümünü bulun.

Homojen kısmoının çözümü için karakteristik denklem:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Kompleks kökler için çözüm,

$$y = C_1 \cos x + C_2 Sinx$$

Elde edilir. Şimdi

$$y = u_1 \cos x + u_2 sinx$$

yazarak sabitleri değiştirip yöntemi uygulayalım.

$$y' = u_1' \cos x - u_1 \sin x + u_2' sinx + u_2 \cos x \qquad (*)$$

elde edilir. Burada yeni parametrelerin türevlerini içeren toplamlar sıfıra eşitlenirse

$$u_1' \cos x + u_2' sinx = 0 \qquad (**)$$

Denklem sisteminin birincisi elde edilir.Bu durumda denklem(*) yani birinci türev,

$$y' = -u_1 \sin x + u_2 \cos x$$

Olur. İkinci denklemi bulmak için buradan tekrar türev alırsak

$$y'' = -u_1' \sin x - u_1 \cos x + u_2' \cos x - u_2 \sin x$$

Elde edilir.Bu değer orijinal denklemde yerine yazılırsa

$$-u_1' \sin x - u_1 \cos x + u_2' \cos x - u_2 \sin x + u_1 \cos x + u_2 sinx = \tan x$$

$$-u_1' \sin x + u_2' \cos x = \tan x \quad (***)$$

Buna göre denklem(**) ve (***) kullanılarak denklem sistemi

$$\begin{aligned} u_1' \cos x + u_2' sinx &= 0 \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x &= \tan x \end{aligned}$$

Olur. Buradan itibaren iki yolla çözümü bulabiliriz.

1 Klasik yok etme yöntemi ile iki bilinmeyenli denklem çözme:

$\sin x /\ \ u_1' \cos x + u_2' sinx = 0 \Rightarrow u_1' \cos x . \sin x + u_2' sin^2 x = 0$

$\cos x / -u_1' \sin x + u_2' \cos x = \tan x \Rightarrow -u_1' \sin x . \cos x + u_2' \cos^2 x = \sin x$

Denklemler alt alta toplanırsa,

$$u_2'\underbrace{\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}_{1}=\sin x \Rightarrow u_2=\int \sin x dx=-\cos x+k_1$$

Bulunur. $u_2'=\sin x$ değeri denklem sistemindeki herhangi bir denklemde yerine yazılırsa,

$$u_1'\cos x+sin^2x=0 \Rightarrow u_1'\cos x=-sin^2x \Rightarrow u_1'=\frac{-sin^2x}{\cos x}$$

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \frac{-sin^2x}{\cos x}dx=\int \cos xdx-\int \sec xdx \\ &= \sin x-\ln\left(\sec x+\tan x\right)+k_2 \end{aligned}$$

Elde edilir. Buradan çözümler:

$$u_1=\sin x-\ln\left(\sec x+\tan x\right)+k_2$$

$$u_2=-\cos x+k_1$$

Bulunur. Bu değerler $y=u_1\cos x+u_2 sinx$ çözümünde yerine yazılırsa, verilen denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned} y &= \left[\sin x-\ln\left(\sec x+\tan x\right)+k_2\right]\cos x+\left[-\cos x+k_1\right]sinx \\ &= -\cos x\ln\left(\sec x+\tan x\right)+k_2\cos x+k_1 sinx \end{aligned}$$

elde edilir.

2 Wronski determinantı' ile denklem sistemi

$$\begin{aligned} u_1'\cos x+u_2' sinx &= 0 \\ -u_1'\sin x+u_2'\cos x &= \tan x \end{aligned}$$

Denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı y_1 ve y_2 nin Wronskiyanı:.

$$W\left(y_1,y_2\right)\left(x\right)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=1$$

Buradan

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix}}{W\left(y_1, y_2\right)(x)} \Rightarrow u_1 = \int -\sin x \tan x dx = \sin x - \ln\left(\sec x + \tan x\right) + k_2$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ \sin x & \tan x \end{vmatrix}}{W\left(y_1, y_2\right)(x)} \Rightarrow u_2 = \int \sin x dx = -\cos x + k_1$$

Bulunur. Bu değerler

$$y = u_1 \cos x + u_2 sinx$$

çözümünde yerine yazılırsa, verilen denklemin genel çözümü

$$\begin{aligned} y &= \left[\sin x - \ln\left(\sec x + \tan x\right) + k_2\right]\cos x + \left[-\cos x + k_1\right] sinx \\ &= -\cos x \ln\left(\sec x + \tan x\right) + k_2 \cos x + k_1 sinx \end{aligned}$$

İlk çözümün aynısı ede edilir.

Örnek 11.2. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2}$ denkleminin çözümünü bulun.

Çözüm:

Homojen kısmının çözümü için karakteristik denklem:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$$

Çift katlı reel kök için çözüm,

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Elde edilir. Şimdi

$$y = u_1 e^{3x} + u_2 x e^{3x}$$

yazarak sabitleri değiştirip yöntemi uygulayalım.

$$y' = \left(y = u_1 e^{3x} + u_2 x e^{3x}\right)' = u_1' e^{3x} + 3u_1 e^{3x} + u_2' x e^{3x} + u_2\left(e^{3x} + 3x e^{3x}\right) \quad \text{(a)}$$

elde edilir. Burada yeni parametrelerin türevlerini içeren toplamlar sıfıra eşitlenirse

$$u_1' e^{3x} + u_2' x e^{3x} = 0 \qquad \text{(b)}$$

Denklem sisteminin birincisi elde edilir .Bu durumda denklem(a) yani birinci türev,

$$y' = 3u_1e^{3x} + u_2\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right)$$

Olur. İkinci denklemi bulmak için buradan tekrar türev alırsak

$$\begin{aligned} y'' &= \left(3u_1e^{3x} + u_2\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right)\right)' = 3u_1'e^{3x} + 9u_1e^{3x} + u_2'e^{3x} + 3u_2e^{3x} + u_2'\left(3xe^{3x}\right) + u_2\left(3e^{3x} + 9xe^{3x}\right) \\ &= e^{3x}\left(9u_1 + 6u_2\right) + 9u_2xe^{3x} + e^{3x}\left(3u_1' + u_2'\right) + 3u_2'xe^{3x} \end{aligned}$$

Elde edilir.Bu değer orijinal denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{e^{3x}}{x^2} &= \left[e^{3x}\left(9u_1 + 6u_2\right) + 9u_2xe^{3x} + e^{3x}\left(3u_1' + u_2'\right) + 3u_2'xe^{3x}\right] \\ &\quad - 6\left[3u_1e^{3x} + u_2\left(e^{3x} + 3xe^{3x}\right)\right] + 9\left[u_1e^{3x} + u_2xe^{3x}\right] \end{aligned}$$

Denkleminde sadeleştirmeler yapılırsa,

$$e^{3x}\left(3u_1' + u_2'\right) + 3u_2'xe^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2} \quad \text{(c)}$$

Elde edilir. Buna göre denklem(b) ve (c) kullanılarak denklem sistemi

$$\begin{aligned} &u_1'e^{3x} + u_2'xe^{3x} = 0 \\ &3u_1'e^{3x} + u'\left(1 + 3x\right)e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2} \end{aligned}$$

Olur. Buradan itibaren klasik yok etme yöntemi ile iki bilinmeyenli denklem çözme:

$$\begin{aligned} &-3/\quad u_1'e^{3x} + u_2'xe^{3x} = 0 = 0 \Rightarrow -3\ u_1'e^{3x} - 3u_2'xe^{3x} = 0 \\ &3u_1'e^{3x} + u'\left(1 + 3x\right)e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2} \Rightarrow 3u_1'e^{3x} + u_2'\left(1 + 3x\right)e^{3x} = \frac{e^{3x}}{x^2} \end{aligned}$$

Denklemler alt alta toplanırsa,

$$\begin{aligned} u_2'e^{3x} &= \frac{e^{3x}}{x^2} \Rightarrow u_2' = \frac{1}{x^2} \\ u_2 &= \int \frac{1}{x^2}dx \\ &= -\frac{1}{x} + k_1 \end{aligned}$$

Bulunur. $u_2' = \frac{1}{x^2}$ değeri denklem sistemindeki herhangi bir denklemde yerine yazılırsa,

$$u_1'e^{3x} + u_2'xe^{3x} = 0 \Rightarrow u_1'e^{3x} + \frac{1}{x^2}xe^{3x} = 0 \Rightarrow u_1' = -\frac{1}{x}$$

$$u_1 = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln x + k_2$$

Elde edilir. Buradan çözümler:

$$u_1 = -\ln x + k_2$$

$$u_2 = -\frac{1}{x} + k_1$$

Bulunur. Bu değerler $y = u_1e^{3x} + u_2xe^{3x}$ çözümünde yerine yazılırsa, verilen denklemin genel çözümü:

$$\begin{aligned} y &= \left(-\ln x + k_2\right)e^{3x} + \left(-\frac{1}{x} + k_1\right)xe^{3x} \\ &= \left(k_2 - 1\right)e^{3x} + k_1xe^{3x} - \ln xe^{3x} \\ &= k_3e^{3x} + k_1xe^{3x} - \ln xe^{3x} \end{aligned}$$

Teorem 11. 1(Parametrelerin Değişimi): $p, q, f : \left(x_1, x_2\right) \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere, $y_1, y_2 : \left(x_1, x_2\right) \to \mathbb{R}$ fonksiyonları, $y'' + p\left(x\right)y' + q\left(x\right)y = 0$ homojen diferansiyel denklemin çözümü olsunlar. $W\left(y_1, y_2\right)$; y_1 ve y_2 fonksiyonlarının Wronskiyanı olmak üzere ($W\left(y_1, y_2\right) \neq 0$) $y'' + p\left(x\right)y' + q\left(x\right)y = f\left(x\right)$ homojen olmayan diferansiyel denklemin özel bir çözümü:

$$y_ö = -y_1\left(x\right)\int \frac{y_2\left(x\right)f\left(x\right)}{W\left(y_1, y_2\right)}dx + y_2\left(x\right)\int \frac{y_1\left(x\right)f\left(x\right)}{W\left(y_1, y_2\right)}dx$$

Örnek 11. 3 $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ diferansiyel denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: Homojen kısmının çözümü için karakteristik denklem:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$$

Çift katlı reel kök için çözüm, $y = C_1e^x + C_2xe^x$ elde edilir.Buradan $y_1\left(x\right) = e^x$, $y_2\left(x\right) = xe^x$ ve $W\left(y_1, y_2\right) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$.

Özel çözüm:

$$y_{ö} = -e^x \int \frac{xe^x \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} dx + xe^x \int \frac{e^x \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} dx = -xe^x + xe^x \ln x$$

olur.Genel çözüm:

$$y_g = y_h + y_{ö} = C_1 e^x + C_2 xe^x - xe^x + xe^x \ln x = C_1 e^x + C_3 xe^x + xe^x \ln x$$

11.2. Cauchy-Euler Denklemleri

Tanım 11.1 $a_{n-1},...,a_1,a_0$ katsayıları birer sabit olmak üzere $n.$ mertebeden

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad \text{(VI.11)}$$

Doğrusal denklemi **Cauchy-Euler Diferansiyel denklemi** denir. Örneğin ikinci merebeden bir Euler Denklemini göz önüne alalım:

$$x^2 y'' + axy' + by = 0$$

Burada a ve b sabitlerdir. Bu denklemin $x = 0$ için singülerite oluşturduğu çok rahat görülebilir. Varlık ve teklik teoremin ana prensibinden hareketle denklemin $x \neq 0$ ve $x > 0$ olduğu bir bölgede çözümü vardır.

Euler denklemi

$$x = e^z \text{ veya } z = \ln x \qquad (z \in \mathbb{R})$$

Değişken dönüşümü ile sabit katsayılı lineer denkleme dönüşmektedir. Şimdi bunu görelim:Türev işlemini $D \equiv \frac{d}{dz}, \mathbf{D} \equiv \frac{d}{dx}$ ile gösterilsin.Bu durumda

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}(\ln x)' = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz} \Rightarrow x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \Rightarrow x\mathbf{D}y = Dy$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right)\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2 y}{dz^2}$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \Rightarrow x^2 \mathbf{D}^2 y = \left(D^2 - D\right) y = D\left(D - 1\right) y$$

Elde edilir. Buradan tümevarımla ;

$$x\mathbf{D}y = Dy$$

$$x^2\mathbf{D}^2 y = D(D-1)\,y$$

$$x^3\mathbf{D}^3 y = D(D-1)(D-2)\,y$$

…………………………..

$$x^m\mathbf{D}^m y = D(D-1)(D-2)....(D-m-1)\,y$$

genelleştirilir. Bu değerler (V.11) de yerine yazılırsa sabit katsayılı bir denklem elde edilir.

Örnek 11.4 $x^2y'' + xy' + y = 0$ denkleminin çözümünü bulunuz.

$x = e^z$ dönüşümü ile denklem,

$$\{D(D-1) + D + 1\}\,y = 0 = (D^2+1)\,y = 0$$

Bu da $\dfrac{d^2y}{dz^2} + y = 0$ denklemidir. Karakteristik denklem ve kökleri,

$$F(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Kompleks iki kök için çözüm,

$$y = C_1 \cos z + C_2 \sin z$$

Olur. $x = e^z \Rightarrow z = \ln x$ olduğundan yerine yazılırsa diferansiyel denklemin çözümü,

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$$

Bulunur.

Örnek 11.5 $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x = e^z$ dönüşümü ile denklem,

$$\{D(D-1) + 2D - 1\}\,y = 0 = (D^2 + D - 2)\,y = 0$$

Bu da $\dfrac{d^2y}{dz^2} + \dfrac{dy}{dz} - 2y = 0$ denklemidir. Karakteristik denklem ve kökleri,

$$F(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 1$$

reel iki farklı kök için çözüm,

$$y = C_1 e^{-2z} + C_2 e^{z}$$

Olur. $x = e^{z} \Rightarrow z = \ln x$ olduğundan yerine yazılırsa diferansiyel denklemin çözümü,

$$y = C_1 e^{-2\ln x} + C_2 e^{\ln x} = \frac{C_1}{x^2} + C_2 x$$

bulunur.

11.3. Legendre Lineer Denklemi

Tanım 11.2 $a_{n-1},...,a_1,a_0,a,b$, katsayıları birer sabit olmak üzere $n.$ mertebeden

$$\left(ax+b\right)^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}\left(ax+b\right)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + a_1\left(ax+b\right)\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

(VI.12)

Doğrusal denklemi **Legendre Diferansiyel denklemi** denir.Cauchy-Euler diferansiyel denklemde yapılan aynı işlemlerle $ax+b = e^{z} \Rightarrow z = \ln\left(ax+b\right)$ dönüşümü altında ,

$$\left(ax+b\right)\mathbf{D}y = aDy$$

$$\left(ax+b\right)^2 \mathbf{D}^2 y = a^2 D\left(D-1\right) y$$

$$\left(ax+b\right)^3 \mathbf{D}^3 y = a^3 D\left(D-1\right)\left(D-2\right) y$$

……………………………..

$$\left(ax+b\right)^m \mathbf{D}^m y = a^m D\left(D-1\right)\left(D-2\right)....\left(D-m-1\right) y$$

Elde edilir. Bu değerler (VI.12) de yerine yazılırsa sabit katsayılı bir denklem elde edilir.

Örnek 11.6 $\left(x+2\right)^2 y'' - \left(x+2\right) y' + y = 0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$x+2 = e^{z} \Rightarrow z = \ln\left(x+2\right)$

dönüşümü ile denklem,

$$\{D(D-1)-D+1\}\,y=0=\left(D^2-2D+1\right)y=0$$

Bu da $\dfrac{d^2y}{dz^2}-2\dfrac{dy}{dz}+y=0$ denklemidir. Karakteristik denklem ve kökleri,

$$F(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=0\Rightarrow(\lambda-1)^2=0\Rightarrow\lambda_{1,2}=1$$

Çift katlı reel iki farklı kök için çözüm,

$$y=C_1e^z+C_2ze^z$$

Olur. $z=\ln(x+2)$ ifadesi yerine yazılırsa diferansiyel denklemin çözümü,

$$y=C_1e^{\ln(x+2)}+C_2\left(\ln(x+2)\right)e^{\ln(x+2)}=(x+2)\left(C_1+C_2\ln(x+2)\right)$$

Bulunur.

Örnek 11.7 $(3x+2)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3(3x+2)\dfrac{dy}{dx}-36y=0$ denkleminin genel çözümünü bulunuz.

$3x+2=e^z\Rightarrow z=\ln(3x+2)$ dönüşümü ile ve

$$(3x+2)\mathbf{D}y=3Dy$$

$$(3x+2)^2\mathbf{D}^2y=3^2D(D-1)\,y=9D(D-1)\,y$$

denklem,

$$\{9D(D-1)+9D-36\}\,y=\left(9D^2-36\right)y=\left(D^2-4\right)y=0$$

Bu da $\dfrac{d^2y}{dz^2}-4y=0$ denklemidir. Karakteristik denklem ve kökleri,

$$F(\lambda)=\lambda^2-4=0\Rightarrow(\lambda-2)(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=-2$$

Farklı reel iki farklı kök için çözüm,

$$y=C_1e^{-2z}+C_2e^{2z}$$

Olur. $z=\ln(3x+2)$ ifadesi yerine yazılırsa diferansiyel denklemin çözümü,

$$y = C_1 e^{-2\left(\ln\left(3x+2\right)\right)} + C_2 e^{2\left(\ln\left(3x+2\right)\right)} = \frac{C_1}{\left(3x+2\right)^2} + C_2 \left(3x+2\right)^2$$

elde edilir.

Uygulamalar

1) Euler ve Legendre tipinde olmayan İkinci mertebeden değişken katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümlerini bulan yöntemleri araştırınız.

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x)$$

2) İkinci mertebeden değişken katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklmemin $\{y_1, y_2\}$ çözümleri biliniyorsa özel çözüm:

. $y = u_1(x)\,y_1 + u_2(x)\,y_2$ (*)

3) Formunda yazılır. Dolayısıyla çözümün bulunması $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonlarının belirlenmesine dönüşür.Bu ise,

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= \frac{F}{P_0}, \end{aligned}$$

4) Denklem sisteminin çözülmesiyle mümkündür. Bulunan $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları Denklem(*) da yerine yazılarak y özel çözümü elde edilir.

Uygulama Soruları

1) $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^{9/2}$ diferansiyel denklemini $y_1 = x \ ve \ y_2 = x^2$ fonksiyonları sağlamaktadır. Buna göre dnklemin özel çözümünü bulunuz.

2) Bu denklemin homojen kısmının çözümünü bulunuz.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde homojen olmayan diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden bir diğeri olan Parametrelerin değişim yöntemi incelendi. Değişken katsayılı diferansiyel denklemler olan Cauchy-Euler ve Ledendre denklemlerinin uygun dönüşümlerle sabit katsayılı diferansiyel denklemlerine dönüştüğü ve buna göre uygun çözüm arandığı görüldü.

Bölüm Soruları

A) Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $y'' - y = e^x$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$

b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^{-x}$.

c) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2} x^2 - x \right) e^x$

d). $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x^2 e^x$

e) $y = C_1 + C_2 e^x$

2) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{-x}$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = \left(C_1 e^x + C_2 x \right) e^{2x} + \frac{1}{3} e^{-x}$

b) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - e^{-x} \sin e^x$.

c) $y = \left(C_1 + C_2 x \right) e^{-2x} + \frac{1}{3} e^x$

d) $y = \left(C_1 + C_2 x \right) e^{2x} + \frac{1}{3} e^{-x}$

e) $y = \left(C_1 + C_2 x \right) e^x + \frac{1}{3} e^{-x}$

3) $x^2 y'' + xy' - \frac{y}{4} = \sqrt{x}$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 \cos \sqrt{2} x + + C_2 \sin \sqrt{2} x + e^{-x} / 3 + 1$

b) $y = C_1 \sqrt{x} + + C_2 x + \frac{1}{6} x^2$

c) $y = C_1\sqrt{x} + +C_2\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{6}x^2\sqrt{x}$

d) $y = C_1 x + +C_2\dfrac{1}{\sqrt{x}} + x^2\sqrt{x}$

e) $y = C_1\tan\sqrt{2}x + +C_2\cot x\sqrt{2}x + e^{2x}/3 - 1$

4) $y''' + y' = \sec x$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - \ln(\csc x + \cot x) - \cos x\ln(\sin x) - x\sin x$

b) $y = C_1 + C_2\sin x + C_3 x - \ln(\csc x + \cot x) - \cos x\ln(\sin x) - x\sin x$

c) $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x - \ln(\sec x + \cot x) - \cos x\ln(\sin x) - x\sin x$

d) $y = C_1 + +C_2 e^{-x} - x + 2x^2$

e) $y = C_1 + +C_2 e^{-x} + x + \dfrac{1}{2}x^2$

5) $y'' + 4y' + 4y = \cos 2x$ denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y = \left(C_1 - \dfrac{1}{4}\right)\cos x + C_2\cos 2x$

b) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \dfrac{1}{8}\sin 2x$

c) $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-2x} + \dfrac{1}{8}\sin 2x$

d) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{x} + \dfrac{1}{8}\sin 2x$

e) $y = \left(C_1 - \dfrac{1}{2}\right)\cos 2x + \left(C_2 - \dfrac{1}{2}\right)\sin 2x$

Cevaplar

1) a, **2)** d, **3)** c, **4)** a, **5)** b

12. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

12.1. Laplace Dönüşümün Tanımı

12.2. Laplace Dönüşümün Özellikleri

12.2.1. Türevin Laplace Dönüşümü

12.2.2. Laplace Dönüşümünün Türevi ve İntegrali

12.2.3. İntegralin Laplace Dönüşümü

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Başlangıç değerli problemleri nasıl çözeriz?

2) Diferansiyel denklemleri bir takım dönüşümler kullanrak çözebilir miyiz?

3) Öyle bir dönüşüm düşünün ki bir Differensiyel denklemin tam çözümünü versin.

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Laplace Dönüşümün Tanımı	Laplace Dönüşümün Tanımını kavrayabilmek.	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Laplace Dönüşümün Özellikleri	Laplace Dönüşümün Özelliklerini kullanabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Türevin Laplace Dönüşümü	Bir fonksiyonun türevinin Laplace Dönüşümünü alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Laplace Dönüşümünün Türevi ve İntegrali	Laplace Dönüşümünün Türevini ve İntegralini aıalbilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
İntegralin Laplace Dönüşümü	İntegralin Laplace Dönüşümünü alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek

Anahtar Kavramlar

- Laplace Dönüşümü
- Gamma fonksiyonu
- Dönüşümün Lineerliği

Giriş

Bu bölümde mühendislik ve teknolojinin bir çok alanındaki problemlere uygulanan Laplace dönüşümleri tanıtılır. Bu manada Laplace dönüşümün özellikleri verilerek bazı uygulamaları incelenir.

12. Laplace[3] Dönüşümleri

Laplace dönüşümleri adi diferansiyel denklemlerin çözümü için etkili bir yöntemdir. Bir dönüşüm bir difreansiyel denklem alabilir ve bunu cebirsel bir denkleme dönüştürebilir. Eğer bu cebirsel denklem ters dönüşüm uygulanarak çözülebilirse istediğimiz çözümü elde edebiliriz. Laplace dönüşümünün sinyal işlemede, NMR spektroskopide, elektrik akım analizi gibi mühendisliğin birçok konusunda uygulamaları vardır. Bu bölümde kendisi aslında bir intgeral dönüşümü olan Laplace dönüşümü incelenecektir.

12.1. Laplace Dönüşümün Tanımı

Tanım 12.1: $t>0$ için tanımlı sürekli bir $f(t)$ fonksiyonunun $L\{f(t)\}=F(s)$ ile gösterilen Laplace dönüşümü ,

$$L\{f(t)\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt \qquad (s>0)$$

formunda tanımlanır.Bu özelliği kullanarak bazı temel örnekler verelim.

Örnek 12.1 Varsayalım $f(t)=1$ olsun.O halde,

$$L\{1\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}dt=\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_{t=0}^{\infty}=\lim_{h\to\infty}\left[\frac{e^{-sh}}{-s}\right]_{t=0}^{\infty}=\lim_{h\to\infty}\left(\frac{e^{-sh}}{-s}-\frac{1}{-s}\right)=\frac{1}{s}$$

İntegralin limiti ancak $s>0$ da vardır.Dolayısıyla $L\{1\}$, ancak $s>0$ için tanımlıdır.

Örnek 12.2 Varsayalım $f(t)=e^{\alpha t}$ olsun.Bu durumda,

$$L\{e^{\alpha t}\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{\alpha t}dt=\int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t}dt\left[\frac{e^{-(s-\alpha)t}}{-(s-\alpha)}\right]_{t=0}^{\infty}=\frac{1}{s-\alpha}$$

İntegralin limiti ancak $s-\alpha>0$ da vardır.Dolayısıyla $L\{e^{\alpha t}\}$, ancak $s>\alpha$ için tanımlıdır.

Örnek 12.3.Eğer $f(t)=\cos at$ ise,

$$L\{\cos at\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cos at\,dt=\lim_{h\to\infty}\int_0^h e^{-st}\cos at\,dt$$

Kısmi integrasyonla ,

[3] Pierre-Simon, marquis de Laplace (1749 – 1827).

$$F(s)=\lim_{h\to\infty}\left[\frac{e^{-st}\sin at}{a}\right]_{t=0}^{h}+\frac{s}{a}\int_0^h e^{-st}\sin atdt=\frac{s}{a}\int_0^\infty e^{-st}\sin atdt$$

Buradan tekrar kısmi integrasyonla,

$$F(s)=\frac{s}{a}\lim_{h\to\infty}\left\{\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\right]_{t=0}^{h}-\frac{s}{a}\int_0^h e^{-st}\cos atdt\right\}$$

$$=\frac{s}{a}\left\{\frac{1}{a}-\frac{s}{a}\underbrace{\int_0^\infty e^{-st}\cos atdt}_{F(s)}\right\}=\frac{s}{a^2}-\frac{s^2}{a^2}F(s)$$

Buradan,

$$L\{\cos at\}=F(s)=\frac{s}{s^2+a^2}$$

Örnek 12.4. Çok yaygın olarak kullanılan ve **birim adım fonksiyonu** veya **Heaviside** fonksiyonu olarak da adlandırılan ve aşağıdaki formda tanımlanan

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$

$u(t-a)$ $(a\geq 0)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

$$L\{u(t-a)\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}u(t)dt=\lim_{h\to\infty}\int_a^h e^{-st}dt=\lim_{h\to\infty}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)_a^h=\frac{e^{-sa}}{s}$$

Teorem 12.1 (Laplace Dönüşümün lineerliliği). A,B ve C sabit sayılar olsunlar. Buna göre,

$$L\{Af(t)+Bg(t)\}=AL\{f(t)\}+BL\{g(t)\}$$

Burada sıkça yapılan bir hatayı söyleyelim. Toplamın dönüşümünde bu lineerliği yazabiliyoruz. Çarpma işleminde yapamıyoruz.Yani çarpımın dönüşümü dönüşümlerin çarpımı değildir.Genel olarak,

$$L\{f(t).g(t)\}\neq L\{f(t)\}L\{g(t)\}$$

Tanım 12.2. $\forall\lambda>0$ için $\Gamma(\lambda)$ ile gösterilen **ve Gama fonksiyonu** veya genelleştirilmiş faktöryel fonksiyonu olarak da adlandırılan fonksiyon

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}dt$$

ile tanımlanır.Bu integral almak için kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\Gamma(\lambda)=\lim_{h\to\infty}\left[\frac{t^\lambda e^{-t}}{\lambda}\right]_0^h+\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^\infty t^\lambda e^{-t}dt}_{\Gamma(\lambda+1)}=\underbrace{\lim_{h\to\infty}\frac{h^\lambda e^{-f}}{\lambda}}_{0}+\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}$$

Buradan

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$$

yazılır. Özel olarak

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty t^0e^{-t}dt=1$$

Bulunur.

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1,\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2.1=2!,\Gamma(4)=3.\Gamma(3)=3.2=3!\ ,....\Gamma(n+1)=n!$$

Yazılabilir.Ayrıca, $t=x^2$ için

$$\Gamma(\lambda)=\int_0^\infty x^{2\lambda-2}e^{-x^2}2xdx=2\int_0^\infty x^{2\lambda-1}e^{-x^2}dx$$

ve buradan $\lambda=\frac{1}{2}$ için,

$$\Gamma(1/2)=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$$

Örnek 12.5. $L\{t^\lambda\}=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}t^\lambda dt \qquad (s>0)$

İntegrali için

$$st=x\Rightarrow sdt=dx$$

dönüşümü altında

$$L\left\{t^{\lambda}\right\}=F\left(s\right)=\frac{1}{s}\int_{0}^{\infty}e^{-x}\left(\frac{x}{s}\right)^{\lambda}dx=\frac{1}{s^{\lambda+1}}\underbrace{\int_{0}^{\infty}e^{-x}x^{\lambda}dx}_{\Gamma(\lambda+1)}=\frac{\Gamma\left(\lambda+1\right)}{s^{\lambda+1}}$$

Olur. Özel olarak $\lambda=n\in\mathbb{N}^{+}$ için

$$L\left\{t^{n}\right\}=\frac{\Gamma\left(n+1\right)}{s^{n+1}}=\frac{n!}{s^{n+1}}$$

elde edilir.

12.2. Laplace Dönüşümün Özellikleri

12.2.1. Türevin Laplace Dönüşümü

Teorem 12.2. Herhangi bir $\left[0,A\right]$ aralığı üzerinde f sürekli ve f' türevi parçalı sürekli olsun. $M,a\,ve\,T$ sabitleri, yeterince büyük $t\geq T$ için $\left|f\left(t\right)\right|\leq Me^{at}$ gerçeklenmek üzere var olsun.($(M>0,T>0)$. Bu koşullar altında $s>a$ için $L\left\{f'\left(t\right)\right\}$ vardır ve

$$L\left\{f'\left(t\right)\right\}=sL\left\{f\left(t\right)\right\}-f\left(0\right)$$

bağıntısı ile verilir.

İspat 12.2. f' türvinin $\left[0,A\right]$ aralığı üzerinde süreksizlik noktaları $t_1,t_2,...,t_n$ olsun. Buna göre dönüşüm,

$$L\left\{f'\left(t\right)\right\}=\int_{0}^{A}e^{-st}f'\left(t\right)dt=\int_{0}^{t_1}e^{-st}f'\left(t\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}e^{-st}f'\left(t\right)dt+...+\int_{t_n}^{A}e^{-st}f'\left(t\right)dt$$

Her integrali kısmi integrasyonla,

$$L\left\{f'\left(t\right)\right\}=f'\left(t\right)e^{-st}\Big|_{0}^{t_1}+f'\left(t\right)e^{-st}\Big|_{t_1}^{t_2}+...+f'\left(t\right)e^{-st}\Big|_{t_n}^{A}+s\left\{\int_{0}^{t_1}e^{-st}f\left(t\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}e^{-st}f\left(t\right)dt+...+\int_{t_n}^{A}e^{-st}f\left(t\right)dt\right.$$

elde edilir. f sürekli olduğundan,

$$L\left\{f'\left(t\right)\right\}=e^{-sA}f\left(A\right)e^{-st}-f\left(0\right)+s\underbrace{\left\{\int_{0}^{t_1}e^{-st}f\left(t\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}e^{-st}f\left(t\right)dt+...+\int_{t_n}^{A}e^{-st}f\left(t\right)dt\right\}}_{\int_{0}^{A}e^{-st}f(t)dt}$$

$$L\left\{f'\left(t\right)\right\}=e^{-sA}f\left(A\right)-f\left(0\right)+s\int_{0}^{A}e^{-st}f\left(t\right)dt$$

yazılır.

$$\lim_{A\to\infty} e^{-sA} f(A) \qquad\qquad (s>a)$$

olduğundan

$$L\{f'(t)\} = -f(0) + s\underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{L\{f(t)\}} = sL\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0)$$

yazılır. f'' nün dönüşümüne bakalım:

$$L\{f''(t)\} = \int_0^A e^{-st} f''(t)\,dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f''(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f''(t)\,dt + \ldots + \int_{t_n}^{A} e^{-st} f''(t)\,dt$$

Kısmi integrasyon uygulayıp

$$L\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = sF(s) - f(0)$$

yazılırsa, yeterince büyük $t \ge T$ için $\left|f(t)\right| \le Me^{at}, \left|f'(t)\right| \le Me^{at}, \ldots, \left|f^{(n-1)}(t)\right| \le Me^{at}$ için tümevarımla genelleştirirsek,

$$\begin{aligned}
L\{f''(t)\} &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\\
L\{f'''(t)\} &= s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
L\{f^{(n)}(t)\} &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \ldots. - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

Bulunur. Uygulamalarda kolaylık açısından bu türev değerlerinin bir kısmı Tablo VII.1 de gösterilmektedir.

Tablo 12.1: Türevlerin Laplace Dönüşümleri

$f(t)$	$L\{f(t)\} = F(s)$
$g'(t)$	$sG(s) - g(0)$
$g''(t)$	$s^2G(s) - sg(0) - g'(0)$
$g'''(t)$	$s^3G(s) - s^2g(0) - sg'(0) - g''(0)$

Örnek 12.6 $x''(t)+x(t)=\cos 2t,\ x(0)=0,\ x'(0)=1$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü ile çözünüz.

Eşitliğin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alalım:

$$L\{x''(t)+x(t)\}=L\{\cos 2t\}\Rightarrow L\{x''(t)\}+L\{x(t)\}=\frac{s}{4+s^2}$$

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)=\frac{s}{4+s^2}$$

Başlangıç koşulları derlenirse denklem,

$$X(s)+X(s)-1=\frac{s}{4+s^2}\Rightarrow X(s)(s^2+1)=\frac{s^2+s+4}{4+s^2}\Rightarrow X(s)=\frac{s^2+s+4}{4+s^2}=\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{4+s^2}\frac{1}{s^2+1}$$

buradan kesirlileri basit kesirlerin toplamı şeklinde yazılırsa,

$$\underbrace{X(s)}_{L\{x(t)\}}=\frac{1}{3}\underbrace{\frac{s}{s^2+1}}_{L\{\cos t\}}-\frac{1}{3}\underbrace{\frac{s}{4+s^2}}_{L\{\cos 2t\}}+\underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{L\{\sin t\}}\Rightarrow x(t)=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\cos 2t+\sin t$$

çözümü elde edilir.

Teorem 12.3. $L\{f(t)\}=F(s),\ L\{g(t)\}=G(s)$ olmak üzere Laplace dönüşümü aşağıdaki özellikleri gerçekler:

1. $L\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)\ (s>a)$: Kaydırma özelliği

2. $L\{f(t-a)H(t-a)\}=e^{-as}F(s)\ \ (a>0)$: İkinci kaydırma özelliği. Burada

$$H(t-a)=\begin{cases}0 & 0<t<a\\ f(t-a) & t\geq a\end{cases}$$

3. $L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)\quad (a>0)$

Bu özellikler tanımdan rahatlıkla gösterilir. Bu nedenle özellikleri içeren birkaç örnek verelim.

Örnek 12.7. $L\{t^n e^{at}\}=?$

$$f(t)=t^n\Rightarrow L\{t^n\}=L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}=F(s)$$

olduğundan 1.özellikten

$$L\left\{t^n e^{at}\right\} = F(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \text{ olur.}$$

Örnek 12.8. $L\left\{e^{at}\cos at\right\} = ?$

$$L\{\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}$$

olduğundan

$$L\left\{e^{at}\cos bt\right\} = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

Örnek 12.9 $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < 1 \\ (t-1)^1 & t \geq 1 \end{cases}$ ise $L\{f(t)\} = ?$

$$L\left\{t^2\right\} = \frac{2}{s^3} \Rightarrow L\{f(t)\} = e^{-s}\frac{2}{s^3}$$

12.1.2. Laplace Dönüşümünün Türevi ve İntegrali

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\big(F(s)\big) &= \frac{d}{ds}\left(\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right) \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st} f(t)\right)dt = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\,dt \\ &= -L\{t.f(t)\} \end{aligned}$$

Buradan

$$L\{t.f(t)\} = -\frac{d}{ds}\big(F(s)\big)$$

bulunur. Şimdi Laplace dönüşümün integraline bakalım:

$$\int_s^{\infty} F(s)ds = \int_s^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dtds = \int_0^{\infty}\left(\int_s^{\infty} e^{-st} f(t)\,ds\right)dt$$

$$= \int_0^{\infty}\left(f(t)\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-st}ds}_{e^{-st}/t}\right)dt = \int_0^{\infty}\left(\frac{f(t)}{t}e^{-st}\right)dt$$

$$= L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$$

Örnek 12.10. $L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = ?$

Çözüm:

$$L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(s)ds = \int_s^{\infty}\frac{a}{a^2+s^2}ds = \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$$

12.1.3. İntegralin Laplace Dönüşümü

Teorem 12.4 $L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$

İspat: $\int_0^t f(\tau)d\tau = g(t),\ g(0)=0,\ g'(t)=f(t)$ olsun.

$$F(s) = L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = sG(s) - \underbrace{g(0)}_{0} = sG(s) \Rightarrow G(s) = \frac{F(s)}{s}$$

$$G(s) = L\{g(t)\} = L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

Örnek 12.11

$$L\left\{\int_0^t \frac{\sin a\tau}{\tau}d\tau\right\} = \frac{L\left\{\frac{\sin at}{t}\right\}}{s} = \frac{\int_s^{\infty}\frac{a}{a^2+s^2}ds}{s} = \frac{1}{s}Arc\tan\frac{a}{s}$$

Not: $F(s) = \frac{P(s)}{R(s)}$ biçiminde kesirli ise bu kesri basit kesirler ayırdıktan sonra ilerde verilecek olan ters Laplace veya konvolüsyon dönüşümlerini uygulayınız.

Uygulamalar

1) Laplace dönüşümünün mühendislik ve fen alanındaki kullanım yerlerini araştırınız.

Uygulama Soruları

1) $L\left\{e^{\lambda t}\sin\omega t + e^{\lambda t}\cos\omega t\right\} = ?$ hesaplayınız.

2) $f(t) = \begin{cases} te^{t}, & 0 \le t < 1 \\ e^{t}, & t \ge 1 \end{cases}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulunuz.

Gamma fonksiyonu:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt$$

3) Olarak tanımlandığına göre $n \in \mathbb{N}^{+}$ olmak üzere $\Gamma(n+1) = n!$ olduğunu buradan hareketle

$$L\left\{t^{\alpha}\right\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\ s > 0$$

Eşitliğini gösteriniz.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde, Laplace dönüşümünün temel tanımı verilerek birkaç uygulamalarla temel özellikleri, Türev-Laplace dönüşümü, İntegral-Laplace dönüşümü örneklerle incelendi.

Bölüm Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $f(t)=t^2\cos t$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{2s^3-6s}{\left(s^2+1\right)^3}$

b) $\dfrac{2s^2-6s}{\left(s^2-1\right)^3}$.

c) $\dfrac{2s^3-6s}{\left(s^2-1\right)^3}$

d) $\dfrac{s^3-6s}{\left(s^2+1\right)^2}$

e) Hiçbiri

2) $\int_0^t \cos^2 x dx$ integralinin Laplace Dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{s^2-2}{s^2\left(s^2+4\right)}$

b) $\dfrac{s^2+2}{s^2\left(s^2+4\right)}$.

c) $\dfrac{s^2+2}{s^2\left(s^2-4\right)}$

d) $\dfrac{s+2}{s^2\left(s^2+4\right)}$

e) $\dfrac{s^2+2}{s^2\left(s+4\right)}$

3) $f(t)=\begin{cases}1-t & 0\le t\le 1\\ 1 & t>1\end{cases}$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{2s-6}{\left(s^2+1\right)^3}$

b) $\dfrac{7s+5}{(s+2)(s-1)}$.

c) $\dfrac{7s+5}{(s-2)(s-1)}$

d) $\dfrac{5s+7}{(s+2)(s-1)}$

e) $\dfrac{2s}{3s-2}$

4) $L\left\{e^{-3t}t^4\right\}=?$ Laplace Dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{24}{(s+3)^5}$

b) $\dfrac{24}{(s+3)^3}$.

c) $\dfrac{24}{(s+5)^3}$

d) $\dfrac{2}{(s-3)^5}$

e) Hiçbiri

5) $L\left\{2e^{-t}-3\sin 4t\right\}=?$ Laplace Dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{2\left(s^2-6s+10\right)}{(s+1)\left(s^2+16\right)}$

b) $\dfrac{2\left(s^2+6s-10\right)}{\left(s+1\right)\left(s^2+16\right)}$.

c) $\dfrac{2\left(s^2-6s+10\right)}{\left(s-1\right)\left(s^2-16\right)}$

d) $\dfrac{2\left(s^2-6s+10\right)}{\left(s+1\right)\left(s^2-16\right)}$

e) Hiçbiri

Cevaplar

1) a, **2)** b, **3)** b, **4)** a, **5)** d

13. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZME

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

13.1. Ters Dönüşüm

13.2. Konvolüsyon İntegralleri

13.3. Laplace Dönüşümü ile Diferansiyel Denklem Çözme

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) F(s) biliniyorsa f(t) yi nasıl buluruz?

2) İki fonksiyonun konvolüsyonu deyince ne anlıyorsunuz?

3) Konvolüsyon ile Ters Laplace dönüşümünün arasındaki bağıntı ne?

4) Laplace Dönüşümlerini kullanarak diferansiyel denklemleri çözebilir miyiz? Bunun bize ne gibi avantajı olacak?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Ters Dönüşüm	Ters Laplaca Dönüşümünü alabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek
Konvolüsyon İntegralleri	İki fonksiyonun konvolusyonunu kavrayabilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.
Laplace Dönüşümü ile Diferansiyel Denklem Çözme	Laplace Dönüşümü ile bazı özel türde Diferansiyel Denklemleri Çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek, ve bol bol örnek çözerek.

Anahtar Kavramlar

- Ters Laplaca Dönüşümü
- Konvolüsyon
- Diferansiyel Denklemler

Giriş

Bu bölümde, geçen haftaki kalınan yerden devam edilerek Laplace dönüşümlerinin ters dönüşümü, konvolüsyonu ve diferansiyel denklemelere uygulamalarına odaklanılır.

13.1. Ters Dönüşüm

Eğer $F(s)$ fonksiyonunu biliyorsak $L\{f(t)\}=F(s)$ eşitliğini sağlayan $f(t)$ fonksiyonunu bulabiliriz. Ters Laplace dönüşümü,

$L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$

formunda tanımlanır.Normalde ters Laplace dönüşümün karmaşık sayıları içeren integralli formülü vardır ama kompleks sayıları içerdiği için göründüğü kadar basit değildir. Bu nedenle Ters Laplace dönüşümü alırken aşağıdaki bazı sık kullanılan ifadelerin dönüşüm tablosu verilmiştir.

Table 13.1: Bazı Laplace Dönüşümleri (C,ω,a sabitler).

$f(t)$	$L\{f(t)\}$	$f(t)$	$L\{f(t)\}$
C	$\frac{C}{s}$	$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

Örnek 13.12. $F(s)=\frac{1}{s+1}$ ın ters dönüşümü nedir?

Tabloda da görüldüğü gibi

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)=e^{-t}$$

Ters Laplace dönüşümünün de lineerlik özelliği vardır.

Örnek 13.13. $F(s)=\frac{s^2+s+1}{s^3+s}$ olarak alırsak Ters Laplace dönüşümü nedir?

Çözüm: Tablo 13.1 deki formda F i yazacağımız biçimde verilen ifadeyi ilk olarak basit kesirlere ayırmalıyız

$$\frac{s^2+s+1}{s^3+s}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2+1}$$

Buradan Ters Laplace dönüşümü alıp lineerliliğini de kullanırsak,

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2+s+1}{s^3+s}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=1+\sin t$$

Bazı sorularda $L\left\{e^{at}f(t)\right\}=F(s-a)$ $(s>a)$ kaydırma özelliği bize kolaylık sağlar.

Örnek 13.14. $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+8}\right\}=?$

Çözüm: Öncelikle ifadeyi tam kareye benzetelim:

$$s^2+4s+8=s^2+4s+4+4=(s+2)^2+4$$

$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=\frac{1}{2}\sin(2t)$ olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle,

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4s+8}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+4}\right\}=\frac{1}{2}e^{-2t}\sin(2t)$$

13.2. Konvolüsyon İntegralleri

Biz daha önceden bir çarpımın Laplace dönüşümünün dönüşümlerin çarpımına eşit olmadığını söylemiştik. Dolayısıyla bir çarpımın farklı bir tipini kullanmalıyız.

Tanım 13.3 $f(t)$ ve $g(t)$, $t\geq 0$ için tanımlı iki fonksiyon olsun. $f(t)$ ve $g(t)$nin konvolüsyonu,

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau$$

olarak tanımlanır. Buradan da görmekteyiz ki t ye bağlı iki fonksiyonun konvolüsyonu da t ye bağlıdır.

Örnek 13.15. $f(t)=\sin\omega t$ ve $g(t)=\cos\omega t$, $t\geq 0$ için verilsin.

$$(f*g)(t)=\int_0^t \sin\omega(t-\tau)\cos\omega\tau d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\sin\omega(t-\tau+\tau)+\sin\omega(t-\tau-\tau)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\sin\omega(t)+\sin\omega(t-2\tau)\right]d\tau=\frac{1}{2}\left(\tau\sin\omega(t)+\frac{1}{2\omega}\cos\omega(t-2\tau)\right)_0^t$$

$$=\frac{1}{2}\left(t\sin\omega(t)+\frac{1}{2\omega}\cos\omega(t)-\frac{1}{2\omega}\cos\omega(t)\right)=\frac{1}{2}t\sin\omega(t)$$

Konvolüsyonun bir çarpım işlemine benzer şekilde bir çok özelliği vardır. c bir sabit, f, g ve h birer fonksiyon olsunlar.Buna göre,

1. $f*g=g*f$

2. $(cf)*g=f*(cg)=c(f*g)$

3. $(f*g)*h=f*(g*h)$

4. $f*(g+h)=(f*g)+(f*h)$

Teorem 13.5. f ve g , $s>a$ için Laplace dönüşümleri olan iki fonksiyon olsunlar. Bu takdirde,

$$L\{(f*g)(t)\}=L\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}=L\{f(t)\}.L\{g(t)\}=F(s)G(s)$$

Yani bir konvolüsyonun Laplace dönüşümü , Laplace dönüşülerin çarpımıdır.

İspat:

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx,\ G(s)=\int_0^\infty e^{-sz}g(z)dz$$

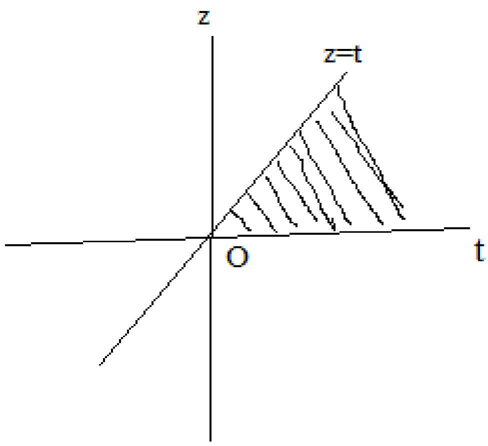
$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx.\int_0^\infty e^{-sz}g(z)dz$$

$$=\int_0^\infty g(z)\left(\int_0^\infty e^{-s(x+z)}f(x)dx\right)dz$$

Bu integrali almak için $x=t\text{-}z$ dönüşümü yapılırsa,

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty g(z)\left(\int_0^\infty e^{-st)}f(t-z)dt\right)dz$$

elde edilir. İntegrasyon bölgesi Şekil VII.1 de ki tz-düzlemindeki taralı bölge olarak değiştirilirse,



Şekil 13.1. İntegrasyon bölgesi

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty e^{-st)}\left(\int_0^\infty f(t-z)\,g(z)\,dz\right)dt=L\{f*g\}$$

olur. Konvolüsyonu bir fonksiyonun ters Laplace dönüşününü bulmada kullanabiliyoruz.

Örnek 13.16 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(s^2+3\right)^2}\right\}=?$

Çözüm:

$$\frac{1}{\left(s^2+3^2\right)^2}=\underbrace{\frac{1}{\left(s^2+3^2\right)}}_{L\left\{\frac{1}{3}\sin 3t\right\}}.\frac{1}{\left(s^2+3^2\right)}=L\left\{\frac{1}{3}\sin 3t\right\}.L\left\{\frac{1}{3}\sin 3t\right\}$$

Konvolüsyon teoremine göre,

$$f(t)=\frac{1}{3}\sin 3t=g(t)$$

olduğundan

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+3\right)^2}\right\}=f*g=\int_0^t f\left(t-\tau\right)g\left(\tau\right)d\tau=\int_0^t \frac{1}{3}\sin 3\left(t-\tau\right).\frac{1}{3}\sin 3\tau d\tau$$

$$=\frac{1}{9}\int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos\left(3t-6\tau\right)-\cos\left(3t\right)\right]d\tau=\frac{1}{18}\left[\frac{\sin\left(3t-6\tau\right)}{-6}-\tau\cos\left(3t\right)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$=\frac{1}{54}\sin 3t-\frac{t.\cos\left(3t\right)}{18}=\frac{1}{54}\left(-3t\cos 3t+\sin 3t\right)$$

Örnek 13.17 $L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+1\right)s^2}\right\}=?$

Çözüm:

$$\frac{1}{\left(s+1\right)s^2}=\frac{1}{s+1}.\frac{1}{s}=F\left(s\right)G\left(s\right)$$

Dolayısıyla soru

$$L^{-1}\left\{F\left(s\right)G\left(s\right)\right\}=?$$

formuna gelir.Konvoluisyon teoreminden

$$L^{-1}\left\{F\left(s\right)G\left(s\right)\right\}=f*g$$

olduğundan

$$F\left(s\right)=\frac{1}{s+1}\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}=e^{-t}=f\left(t\right)$$

$$G\left(s\right)=\frac{1}{s^2}\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^s}\right\}=t=g\left(t\right)$$

Buradan

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s+1\right)s^2}\right\}=\int_0^\infty e^{-\left(t-\tau\right)}\tau d\tau=e^t+t-1$$

13.3. Laplace Dönüşümü ile Diferansiyel Denklem Çözme

Soruları çözmeden önce Laplace dönüşümün s li diferansiyel denklemlere döneceğini vurgulayalım. Bunun için Laplace dönüşümüm diferansiyel denkleme nasıl uygulandığını aşağıdaki örneklerle görelim.

Örnek 13.18. $y''+2y'+y=te^{-t}$, $y(0)=1$, $y'(0)=-2$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.

Çözüm: Verilen denklemin her iki yanının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$L\{y''+2y'+y\}=L\{te^{-t}\}$$

$$L\{y''\}+2L\{y'\}+L\{y\}=L\{te^{-t}\}$$

$$s^2Y(s)-s\,\underbrace{y(0)}_{1}-\underbrace{y'(0)}_{-2}+2\left(sY(s)-\underbrace{y(0)}_{1}\right)+Y(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$Y(s)\left(s^2+2s+1\right)-s=\frac{1}{(s+1)^2}\Rightarrow Y(s)=\frac{s}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^4}$$

Bulunur. $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4}\right\}=\frac{t^3}{3!}e^{-t}$ olup $\frac{s}{(s+1)^2}$ yi basit kesirlerine ayırırsak,

$$\frac{s}{(s+1)^2}=\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}$$

Buradan ters dönüşüm alınırsa,

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}=e^{-t}-te^{-t}$$

elde edilir. Bu değerler çözümde kullanılırsa,

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{s}{(s+1)^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^4}\right\}$$

$$=\frac{t^3}{3!}e^{-t}+e^{-t}-te^{-t}$$

elde edilir.

Örnek 13.19 $y''+\omega_0^2\,y=f(t)$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$ keyfi bir $f(t)$ fonksiyonu için denklemi çözünüz

Çözüm: Verilen denklemin her iki yanının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&L\{y''+y\}=L\{f(t)\}\\
&L\{y''\}+\omega_0^2L\{y\}=L\{f(t)\}\\
&s^2Y(s)-s\,\underbrace{y(0)}_{0}-\underbrace{y'(0)}_{0}+\omega_0^2Y(s)=F(s)\\
&Y(s)\left(s^2+\omega_0^2\right)=F(s)\Rightarrow Y(s)=\frac{F(s)}{\left(s^2+\omega_0^2\right)}
\end{aligned}
$$

bulunur. $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+\omega_0^2}\right\}=\dfrac{1}{\omega_0}\sin\left(\omega_0 t\right)$ ve konvolusyon teoremi yardımıyla

$$
y(t)=L^{-1}\left\{F(s)\frac{1}{\left(s^2+\omega_0^2\right)}\right\}=\int_0^t f(\tau)\frac{1}{\omega_0}\sin\left(\omega_0\left(t-\tau\right)\right)d\tau=\frac{1}{\omega_0}\int_0^t f(\tau)\sin\left(\omega_0\left(t-\tau\right)\right)d\tau
$$

$$
=\frac{1}{\omega_0}\int_0^t \sin\left(\omega_0 t\right)f\left(t-\tau\right)d\tau
$$

Elde edilir.Varsayalım $f(t)=\cos\left(\omega_0 t\right)$ olsun. Buna göre çözüm,

$$
\begin{aligned}
y(t)&=\frac{1}{\omega_0}\int_0^t \sin\left(\omega_0 t\right)\cos\left(\omega_0\left(t-\tau\right)\right)d\tau\\
&=\frac{1}{2\omega_0}t\sin\left(\omega_0 t\right)
\end{aligned}
$$

Örnek 13.19 $y'''+y''-6y'=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0, y''(0)=5$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü kullanarak çözünüz.

Çözüm: Verilen denklemin her iki yanının Laplace dönüşümü alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&L\{y'''+y''-6y\}=L\{0\}\\
&L\{y'''\}+L\{y''\}-6L\{y'\}=0\\
&s^3Y(s)-s^2\,\underbrace{y(0)}_{1}-s\,\underbrace{y'(0)}_{0}-\underbrace{y''(0)}_{5}+s^2Y(s)-s\,\underbrace{y(0)}_{1}-\underbrace{y'(0)}_{0}-6sY(s)+6\,\underbrace{y(0)}_{1}=0\\
&s^3Y(s)-s^2-5+s^2Y(s)-s-6sY(s)+6=0\Rightarrow Y(s)\left(s^3+s^2-6s\right)=s^2+s-1
\end{aligned}
$$

buradan

$$
Y(s)=\frac{s^2+s-1}{\left(s^3+s^2-6s\right)}=\frac{s^2+s-1}{s\left(s^2+s-6\right)}=\frac{1}{6}\frac{1}{s}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+3}+\frac{1}{2}\frac{1}{s-2}
$$

bulunur. Ters dönüşüm alınarak,

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{1}{6}L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{2t}$$

elde edilir

Uygulamalar

1) Laplace dönüşümü kullanarak her tipte diferansiyel denklemleri çözebilir miyiz?

2) Kısmi türevli diferansiyel denklemelri de Laplace dönüşümü ile çözebileceğimizi araştırınız.

3) Bazı bilgisayar yazılım paketleri sembolik ifadeleri kolaylıkla hesaplamaktadır. Araştırınız.

Uygulama Soruları

1) $L^{-1}\left\{\dfrac{8}{s+5}+\dfrac{7}{s^2+3}\right\}=?$ hesaplayınız.

2) $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+8}{s^2+2s+5}\right\}=?$ hesaplayınız.

3) $F(s)=\dfrac{8-(s+2)(4s+10)}{(s+1)(s+2)^2} \Rightarrow f(t)=?$

4) $y''-6y'+5y=3e^{2t}$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$ başlangıç değerli problemin çözümünü Laplace dönüşümü ile bularak önceki yöntemlerle elde ettiğiniz çözümle karşılaştırınız.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde Laplace dönüşümlerinin ters dönüşümü ve konvolüsyonu uygulamalarla öğrenildi. Ayrıca diferansiyel denklemlerin Laplace dönüşümü ile nasıl çözüleceğine tanık olunuldu..

Bölüm Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $f(t)=\int_0^t e^{u-t}\cos u\,du$ fonksiyonunun Laplace Dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{s-1}{s^3\left(s^2+1\right)}$

b) $\dfrac{2s^2-6s}{\left(s^2-1\right)^3}$.

c) $\dfrac{s+1}{s^3\left(s^2-1\right)}$

d) $\dfrac{s^2-1}{s^3\left(s^2+1\right)}$

e) Hiçbiri

2) $\int_0^t \cos^2 x dx$ integralinin Laplace Dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\dfrac{s^2-2}{s^2\left(s^2+4\right)}$

b) $\dfrac{s^2+2}{s^2\left(s^2+4\right)}$.

c) $\dfrac{s^2+2}{s^2\left(s^2-4\right)}$

d) $\dfrac{s+2}{s^2\left(s^2+4\right)}$

e) $\dfrac{s^2+2}{s^2\left(s+4\right)}$

3) $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\}$ ters Laplace Dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\cos 2t$

b) $\sin t$

c) $\sin 2t$

d) e^{2t}

e) e^{-2t}

4) $L^{-1}\left\{\dfrac{16}{s\left(s^2+4\right)^2}\right\}$ ters Laplace Dönüşümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $t^2 - t\sin 2t - \cos 2t$

b) $1 - t\sin 2t - \cos t$

c) $1 - t\sin 2t - \cos 2t$

d) $1 - t\sin t - \cos 2t$

e) $1 - t\sin t - \cos t$

5) $y'' + 4y' - 5y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ başlangıç değerli denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y(t) = \dfrac{1}{6}\left(e^{-5t} - 5e^{t}\right)$

b) $y(t) = \dfrac{1}{6}\left(e^{5t} - 5e^{t}\right)$

c) $y(t) = \dfrac{1}{6}\left(e^{-5t} - 5e^{-t}\right)$

d) $y(t) = \dfrac{1}{6}\left(e^{-5t} - e^{t}\right)$

e) $y(t) = \dfrac{1}{6}\left(e^{-3t} - 5e^{t}\right)$

6) $y''-4y=0,\ y(0)=-1,\ y'(0)=1$ başlangıç değerli denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y(t)=\frac{1}{2}(\sin 2t-ch2t)$

b) $y(t)=\frac{1}{2}(\sin 2t-\cos 2t)$

c) $y(t)=\frac{1}{6}(e^{-5t}-\text{sh}\,t)$

d) $y(t)=\frac{1}{6}(cht-e^{t})$

e) $y(t)=\frac{1}{2}(sh2t-ch2t)$

7) $ty''+y=12t,\ y(0)=0$ başlangıç değerli denkleminin çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

a) $y(t)=e^{t}$

b) $y(t)=2t$

c) $y(t)=t$

d) $y(t)=12t$

e) $y(t)=e^{-t}$

Cevaplar

1) a, **2)** b, **3)** a, **4)** c, **5)** a, **6)** e, **7)** d

14. LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz?

14.1. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerine Giriş

14.2. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

14.2.1. Yok Etme (Eliminasyon) Yöntemi

14.2.2.Cramer Yöntemi

Bölüm Hakkında İlgi Oluşturan Sorular

1) Birden fazla fonksiyon içeren diferansiyel denklem sistemlerinin çözüm kümesini nasıl buluruz?

2) İki fonksiyonlu lineer diferansiyel denklemi örneği verin.

3) Lineer diferansiyel denklem sistemlerinin matrissel gösterimi nedir?

4) Lineer diferansiyel denklem sistemlerini hangi yöntemlerle çözebiliriz?

Bölümde Hedeflenen Kazanımlar ve Kazanım Yöntemleri

Konu	**Kazanım**	**Kazanımın nasıl elde edileceği veya geliştirileceği**
Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerine Giriş	Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerini tanıyabilmek.	Okuyarak, fikir yürüterek ve bol bol örnek çözerek
Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri	Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerini çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek ve bol bol örnek çözerek.
Yok Etme (Eliminasyon) Yöntemi	Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerini Yok Etme (Eliminasyon) Yöntemi ile çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek ve bol bol örnek çözerek
Cramer Yöntemi	Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerini Cramer Yöntemi ile çözebilmek	Okuyarak, fikir yürüterek ve bol bol örnek çözerek

Anahtar Kavramlar

- Lineer Diferansiyel Denklem Sistemi
- Yok Etme (Eliminasyon) Yöntemi
- Cramer Yöntemi

Giriş

Bu bölümde lineer diferansiyel denklem sistemlerini tanıyarak bunların birkaç çözüm yöntemleri iredelenir.

14.1. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerine Giriş

Tanım 14.1 $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbb{R}$ ve $x_1, x_2, ..., x_n$ bilinmeyenleri göstermek üzere;

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

şeklindeki bir denkleme n bilinmeyenli bir **lineer denklem** denir. Burada $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ denklemin katsayıları, b ise denklemin sabitidir. Örneğin, x_1 ve x_2 yerine x ve y koordinat eksenlerini aldığımızda $3x+2y=12$ ifadesi $(0,6)$ ve $(4,0)$ noktalarından geçen bir doğru denklemini belirtir.

Tanım 14.2 : Sonlu sayıda lineer denklemin meydana getirdiği m denklem ve n bilinmeyenden oluşan

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
&.. \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

sisteme bir lineer denklem sistemi denir. Burada x_j bilinmeyenlerin katsayıları a_{ij} ve lineer denklem sistemindeki sabitleri b_j ler göstermektedir.

Tanım 14.3 Bir veya daha fazla sayıda bağımsız değişkenin tek bir bağımlı değişkene göre türevlerinin bulunduğu denklem sistemlerine diferansiyel denklem sistemleri denir.

Örnek 13.1

$x(t)$ *ve* $y(t)$ bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}
x'' &= y' - 2x + x' + y + \ln t \\
y'' &= x' + x - 5y' + 6y + 2
\end{aligned}$$

ikinci mertebeden iki diferansiyel denklemden oluşmaktadır.Normal denklem sistemlerinde olduğu gibi bu diferansiyel denklem sistemin de çözümü her iki denklemi birlikte sağlayan $x(t)$ *ve* $y(t)$ değerleridir.Cebirsel denklemlerde olduğu gibi eğer tüm denklemler lineer ise diferansiyel denklem sisiteminin de lineer olduğunu söyleriz.Eğer sistemde bir tane lineer olmayan varsa o denklem sistemi lineer olmaz.

Örnek 13.2

$$x' = 2x - y + z + t^2$$
$$y' = x + z + 3$$
$$z' = 3x - 2y - t^2 z$$

Denklem sisteminde $z' = 3x - 2y - t^2 z$ lineer olmadığı için bu sisteme lineer denklem sistemi diyemeyiz.Önceki bölümlerden de bildiğimiz üzere $x^2, xy, xx', \sin y, \log y$ gibi terimler lineerliği bozucu terimlerdir.

Eğer bir diferansiyel denklem sisteminde yer alan tüm denklemler homojen ise bu sisteme **homojen**dir denir. Tek bir denklemin bile homojen olmaması, sistemi homojen olmaktan çıkarır.

Örnek 13.3

$$x' = 2x - y + z$$
$$y' = x + t^2 y + z$$
$$z' = 3x - 2y + 3t$$

denklem sisteminde ilk iki denklem homojen, üçüncü denklem ise $3t$ den dolayı homojen değildir. Lineer diferansiyel denklem sistemi genel olarak,

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \dots + p_{1n}(t)x_n + r_1(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \dots + p_{2n}(t)x_n + r_2(t)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \dots + p_{nn}(t)x_n + r_n(t)$$

biçiminde verilir. Burada $x_1, x_2, .., x_n$ t değişkenine bağlı bilinmeyen fonksiyonlar olup p_{ij} *ve* $r_i (i, j = 1, 2, ...n)$ bilinen fonksiyonları ve $r_i (i, j = 1, 2, ...n)$ ler homojen olmayan terimleri göstermektedirler. Bu lineer diferansiyel denklem sistemi matris vektör formda,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ . \\ r_n(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ . \\ x_n'(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}'(t)}$$

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t) = \mathbf{X}'(t)$$

olarak yazılır .Buradaki,

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

diferansiyel denklem sisteminin çözüm vektörüdür. Buna göre lineer homojen bir diferansiyel denklem aşağıdaki formdadır:

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + ... + p_{1n}(t)x_n$$
$$\frac{dx_2}{dt} = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + ... + p_{2n}(t)x_n$$
$$..$$
$$\frac{dx_n}{dt} = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + ... + p_{nn}(t)x_n$$

Son olarak standart biçimde yazılan bir diferansiyel denklem sistemindeki tüm denklemler sabit katsayılı ise, denklem sistemi de **sabit katsayılı** olarak nitelendirilir. Tek bir denklem bile değişken katsayılı olursa, sistem de **değişken katsayılı** hale gelir.

Örnek 13.4

$$x' = 2x - y + z$$
$$y' = x + t^2 y + z$$
$$z' = 3x - 2y + 5$$

Denklem sisteminde ortadaki denklem t^2 den ötürü değişken katsayılı diğerleri ise sabit katsayılı denklemlerdir. Genellersek sabit katsayılı bir diferansiyel denklem

$$\frac{dx_1}{dt} = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1n}x_n + r_1(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + ... + c_{2n}x_n + r_2(t)$$
$$..$$
$$\frac{dx_n}{dt} = c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + ... + c_{nn}x_n + r_n(t)$$

formundadır. Burada c_{ij} sabit değerlerdir.

14.2. Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözüm Yöntemleri

Lineer diferansiyel denklem sistemlerinin çözüm yöntemleri genel olarak:

1. Yok etme Yöntemi
2. Cramer Yöntemi
3. Özdeğer yöntemi
4. Matris Yöntemi
5. Laplace dönüşümü Yöntemi
6. Sayısal Yöntemi

biçiminde verilebilir. Biz bu bölümde sadece ilk ikisi üzerinde duracağız. İlk olarak yok etme yöntemi üzerinde duracağız.

14.2.1. Yok Etme (Eliminasyon) Yöntemi

Lineer sistemlerin teorisine girmeden önce, diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan en basit ve temel yöntem olan **yok etme yöntemi** üzerinde duralım. Bu yöntem *n* tane birinci mertebeden diferansiyel denklemi, mertebesi *n* olan tek bir diferansiyel denkleme dönüştürme esasına dayanır. Bu yöntem, cebirsel denklemlerdeki yok etme yöntemine benzemektedir.Orada hatırlarsak bilinmeyenlerden birini denklemde diğeri cinsinden yazıp diğer denklemde yerine yazarak kendisi dışındaki değişkeni buluruz. Daha sonra elde edilen ikinci değişkenin değeri denklemlerin herhangi birinde yerine yazılarak bulunur.

Şimdi de iki tane birinci mertebeden lineer ve sabit katsayılı diferansiyel denklemden oluşan bir sistemi göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + t \\ y' &= x + y + 3t \end{aligned}$$

Bağımlı değişkenler $x(t)$ ve $y(t)$ dir. İlk denklemden $y(t)$ çekilir ve ikinci denklemde yerine koymak için türevi gerekeceğinden türevini alırsak:

$$y = 2x - x' + t \Rightarrow y' = 2x' - x'' + 1$$

bulunur. Şimdi de bu $y(t)$ ve y' nü ikinci denklemde yerine yazıp düzenlersek

$$2x' - x'' + 1 = x + (2x - x' + t) + 3t \Rightarrow x'' - 3x' + 3x = 1 - 3t$$

Bu denklem Bölüm IV de gördüğümüz ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer bir denklem ve daha önce öğrendiğimiz çözüm yöntemleriyle çözülebilir. Hatırlarsak öncelikle ,

$$F(\lambda)=\lambda^2-3\lambda+3=0$$

Karakteristik denklemi ile λ nın farklı, çift katlı veya kompleks oluşuna göre denklemimizin homojen kısmının çözümü; karakteristik denklemin iki kökü ile kurulur. $x(t)$ ' ye ait genel çözüm ise elde edeceğimiz bu homojen çözüm ile, homojen olmayan diferansiyel denklemi sağlayan bir özel çözümün toplamından $y=y_h+y_ö$ oluştuğunu önceki bölümlerden gördük. $x(t)$ ve $x'(t)$ elde edildiğinden denklem sistemindeki herhangi bir denklemde yerine yazılarak aynı mantıkla $y(t)$ elde edilir.

Örnek 13.5

$$\frac{dx}{dt}=4x+6y,\ x(0)=1$$
$$\frac{dy}{dt}=-3x-5y,\ y(0)=0$$

Homojen Denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

İlk denklemden y yi çekelim ve t ye göre türevini alalım:

$$\frac{dx}{dt}=4x+6y\Rightarrow y=\frac{1}{6}(x'-4x)\Rightarrow y'=\frac{1}{6}(x''-4x')$$

Bu değerler ikinci denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{6}(x''-4x')=-3x-5\frac{1}{6}(x'-4x)\Rightarrow x''+x'-2x=0$$

Sabit katsayılı homojen bir diferansiyel denklem elde edilir.

Denklemin karakteristik kökleri,

$$F(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2=0\Rightarrow(\lambda+2)(\lambda-1)=0\Rightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=1$$

ve

$$x(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{t}$$

Bulunur. Buradan $x'(t)=-2C_1e^{-2t}+C_2e^{t}$ değerleri ikisinin birlikte geçtiği ilk denklemde yerine yazılırsa,

$$-2C_1e^{-2t}+C_2e^{t}=4\left(C_1e^{-2t}+C_2e^{t}\right)+6y\Rightarrow y=\frac{-1}{2}C_2e^{t}-C_1e^{-2t}$$

Bu durumda verilen diferansiyel denklemin genel çözümü,

$x(t)=C_1e^{-2t}+C_2e^{t}$ ve $y(t)=\dfrac{-1}{2}C_2e^{t}-C_1e^{-2t}$

Keyfi sabitlerin başlangıç değerleri yerine yazılırsa

$$x(0)=1\Rightarrow 1=C_1+C_2$$

$$y(0)=0\Rightarrow 0=\frac{-1}{2}C_2-C_1\Rightarrow C_1=-\frac{1}{2}C_2$$

değeri üstteki denklemde yerine yazılırsa,

$C_1=-1,\ C_2=2$ bulunur. Bu değerler yerine yazılırsa diferansiyel denklem sisteminin çözümü:

$$x(t)=-e^{-2t}+2e^{t} \text{ ve } y(t)=-e^{t}+e^{-2t}$$

Çözüm vektörü ise $X=\begin{bmatrix}-e^{-2t}+2e^{t}\\ -e^{t}+e^{-2t}\end{bmatrix}$ yazılır.

Örnek 13.6

$$\begin{aligned}Dx&=x+y\\ Dy&=4x-2y\end{aligned}$$

Diferansiyel denklem sisteminin çözümünü bulunuz.

İlk denklemden y yi çekelim ve t ye göre türevini alalım:

$$Dx=x+y\Rightarrow y=x'-x\Rightarrow y'=x''-x'$$

Bu değerler ikinci denlemde yerine yazılırsa,

$$x''-x'=4x-2\left(x'-x\right)\Rightarrow x''+x'-6x=0$$

Sabit katsayılı hmojen bir diferansiyel denklem elde edilir. Denklemin karakteristik kökleri,

$$F(\lambda)=\lambda^2+\lambda-6=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+3)=0 \Rightarrow \lambda_1=2, \lambda_2=-3$$

Ve

$$x(t)=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}$$

Bulunur. Burdan $x'(t)=-3C_1e^{-3t}+2C_2e^{2t}$ değerleri ikisinin birlikte geçtiği ilk denklemde yerine yazılırsa,

$$-3C_1e^{-3t}+2C_2e^{2t}=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}+y \Rightarrow y=-4C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}$$

Bu durumda verilen diferansiyel denklemin genel çözümü matris-vektör formda

$$X=\begin{bmatrix} C_1e^{-3t}+C_2e^{2t} \\ -4C_1e^{-3t}+C_2e^{2t} \end{bmatrix}$$

gösterilir.

Örnek 13.7

$$\begin{aligned} x' &= -2x+y \\ y' &= -3x+2y+2\sin t \end{aligned}$$

Homojen olmayan diferansiyel denklem sistemini çözünüz.

İlk denklemden y yi çekelim ve t ye göre türevini alalım:

$$x'=-2x+y \Rightarrow y=x'+2x \Rightarrow y'=x''+2x'$$

Bu değerler ikinci denklemde yerine yazılırsa,

$$x''+2x'=-3x+2(x'+2x)+2\sin t \Rightarrow x''-x=2\sin t$$

Sabit katsayılı homojen olmayan bir diferansiyel denklem elde edilir. Denklemin ilk homojen kısmının çözümü için karakteristik kökleri,

$$F(\lambda)=\lambda^2-1=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \lambda_2=-1$$

ve

$$x_h(t)=C_1e^{-t}+C_2e^{t}$$

Bulunur. Özel çözüm için belirsiz Bölüm V deki katsayılar yönteminden hareketle

$$x_{ö}(t) = A\cos t + B\sin t$$

alınıp diferansiyel denklemde yerine yazıldığında $A = 0, B = -1$ bulunur. Buna göre

$$x_{ö}(t) = -\sin t$$

elde edilir ve genel çözüm,

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - \sin t$$

yazılır. Bu ilk denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - \sin t\right)' = -2\left(C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - \sin t\right) + y \Rightarrow y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - \cos t - 2\sin t$$

Bu durumda verilen diferansiyel denklemin genel çözümü,

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - \sin t$$ ve

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} - \cos t - 2\sin t$$

elde eldir.

14.2.2. Cramer Yöntemi

Homojen olmayan lineer diferansiyel denklemi, cebirsel denklem sistemindeki uygulanan Cramer yöntemiyle çözülebilir.

$$\begin{aligned} f_1(D)x + g_1(D)y &= h_1(t) \\ f_2(D)x + g_2(D)y &= h_2(t) \end{aligned}$$

Denklem sisteminin genel çözümündeki birbirinden bağımsız olan integral sabitlerin sayısı,

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix}$$

Determinantının D derecesine eşittir. Bu derece, çözümde kaç tane integral sabitinin kullanılacağını gösterir. Burada çözümün bulunabilmesi için $\Delta \neq 0$ olmalıdır.Bu takdirde çözüm,

$$\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} h_1(t) & g_1(D) \\ h_2(t) & g_2(D) \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} f_1(D) & g_1(D) \\ f_2(D) & g_2(D) \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} f_1(D) & h_1(t) \\ f_2(D) & h_2(t) \end{vmatrix}$$

Lineer diferansiyel denklemleri çözülerek elde edilir.

Örnek 13.8

$$\left(D^2-2\right)x-3y=e^{2t}$$
$$\left(D^2+2\right)y+x=0$$

Diferansiyel denklem sistemini çözün.

Katsayılar matrisinin determinantı,

$$\begin{vmatrix} D^2-2 & -3 \\ 1 & D^2+2 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} e^{2t} & -3 \\ 0 & D^2+2 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(D^4-1\right)x=6e^{2t}$$

karakteristik denklemin kökleri ∓ 1 ve $\mp i$ olduğundan homojen kısmın çözümü,

$$x_h = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t$$

olur. Özel çözüm ise ikinci tarf üstel olduğundan $x_ö = ae^{2t}$ alınıp denklemde yerine yazılırsa,

$$\left(D^4-1\right)(ae^{2t}) = 6e^{2t} \Rightarrow 15ae^{2t} = 6e^{2t} \Rightarrow a = \frac{2}{5}$$

bulunur.Buna göre x in genel çözümü,

$$x_h = C_1e^t + C_2e^{-t} + C_3\cos t + C_4\sin t + \frac{2}{5}e^{2t}$$

bulunur. Bu değer birinci denklemde yerine yazılırsa veya

$$\begin{vmatrix} D^2-2 & -3 \\ 1 & D^2+2 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} D^2-2 & e^{2t} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(D^4-1\right)y=-e^{2t}$$

yazılarak benzer mantıkla ,

$$y = -\frac{1}{3}(C_1e^{t} + C_2e^{-t}) - (C_3\cos t + C_4\sin t) - \frac{1}{15}e^{2t}$$

elde edilir.

Örnek 13.9

$$\begin{aligned}(2D+1)x+(3D+1)y&=e^{-t}\\(D+5)x+(3D+1)y&=t\end{aligned}$$

Sistemini çözünüz.

Cramer yönteminde katsayılar determinantı,

$$\begin{vmatrix}2D+1 & 3D+1\\ D+5 & D+7\end{vmatrix}$$

olmak üzere,

$$\underbrace{\begin{vmatrix}2D+1 & 3D+1\\ D+5 & D+7\end{vmatrix}}_{-D^2-D+2}x=\underbrace{\begin{vmatrix}e^{-t} & 3D+1\\ t & D+7\end{vmatrix}}_{6e^{-t}-3-t}\Rightarrow\left(-D^2-D+2\right)x=6e^{-t}-t-3$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix}2D+1 & 3D+1\\ D+5 & D+7\end{vmatrix}}_{-D^2-D+2}y=\underbrace{\begin{vmatrix}2D+1 & e^{-t}\\ D+5 & t\end{vmatrix}}_{-4e^{-t}+t+2}\Rightarrow\left(-D^2-D+2\right)y=-4e^{-t}+t+2$$

Sabit katsayılı homojen olmayan diferansiyel denklemler elde edilir. Burada x ve y için karakteristik denklemlerin kökleri -2 ve 1 olduğundan homojen çözüm

$$x_h = C_1e^{-2t} + C_2e^{t},\ y_h = C_3e^{-2t} + C_4e^{t}$$

elde edilir. Özel çözümler için F(-1) sıfır olmadığında $x_1 = ae^{-t}$, $y_1 = be^{-t}$ alınır. Ayrıca polinomdan dolayı da $x_2 = ct + d,\ y_2 = kt + l$ alınarak özel çözümler:

$$x_{ö} = x_1 + x_2 = ae^{-t} + ct + d,\ y_{ö} = y_1 + y_2 = be^{-t} + kt + l$$

yazılır. Bu değerler ilgili denklemlerinde yerine yazılarak katsayılar bulunur. Son durumda *x* ve *y* için genel çözümler:

$$x = C_1e^{-2t} + C_2e^{t} + 3e^{-t} - \frac{t}{2} - \frac{7}{4},$$
$$y = C_3e^{-2t} + C_4e^{t} - 2e^{-t} + \frac{t}{2} + \frac{5}{4},$$

Bu değerler lineer denklem sisteminde yerlerine yazıldığında ,

$$C_3 = -\frac{3}{5}C_1,\ C_4 = -\frac{3}{5}C_2$$

elde edilir. Buna göre denklem sisteminin çözümü,

$$x = C_1e^{-2t} + C_2e^{t} + 3e^{-t} - \frac{t}{2} - \frac{7}{4},$$
$$y = \frac{-3}{5}C_1e^{-2t} - \frac{3}{4}C_2e^{t} - 2e^{-t} + \frac{t}{2} + \frac{5}{4},$$

yazılır.

Uygulamalar

1) Lineer Diferansiyel denklem sistemlerinin Cramer ve yok etme yöntemi dışında başka hangi yöntemlerle çözülebilecdeğini araştırınız.

2) Lineer cebirde gördüğünüz özdeğer ve öz vektörleri kullanarak lineer diferansiyel denklem sistemlerinin nasıl çözüldüğünü araştırın ve bu bölümdeki sorulara uygulayın.

Uygulama Soruları

1) $\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 + 2e^{4t} \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 + e^{4t} \end{aligned}$ diferansiyel denklem sistemini matris formunda yazın.

2) $y' = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} y, \ \ y(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ başlangıç değerli problemi çözün.

Bu Bölümde Ne Öğrendik Özeti

Bu bölümde diferansiyel denklemlerin lineer denklem sistemlerine nasıl uygulandığına tanık olundu. Ayrıca lineer diferansiyel denklemlerin eliminasyon ve determinantla nasıl çözüleceği incelendi.

Bölüm Soruları

Aşağıdaki soruların yanıtlarını verilen seçenekler arasından bulunuz.

1) $$\begin{aligned}&\left(D^2+D+1\right)x+\left(D^2+1\right)y=e^t\\&\left(D^2+D\right)x+D^2y=e^{-t}\end{aligned}$$

Lineer denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerin hangisidir?

a) $$\begin{aligned}&x=-e^t-2e^{-t}-C_1\\&y=2e^t+e^{-t}+C_1\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&x=-e^{-t}-2e^t-C_1\\&y=-2e^t+e^{-t}+C_1\end{aligned}.$$

c) $$\begin{aligned}&x=-e^t-2e^{-t}-C_1\\&y=2e^{2t}+e^{-t}+C_1\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}&x=-e^t-2e^{-2t}-C_1\\&y=2e^t+e^{-t}+C_1\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}&x=-e^t\\&y=2e^t\end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned}&\left(D-1\right)x+\left(D+2\right)y=1+e^t\\&\left(D+2\right)y+\left(D+1\right)z=2+e^t\\&\left(D-1\right)x+\left(D+1\right)z=3+e^t\end{aligned}$$

Lineer denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerin hangisidir?

a) $$\begin{aligned}&x=-1+te^{2t}/2+C_2e^t\\&y=e^t/6+C_1e^{2t}\\&z=2+e^t/4+C_3e^{-t}\end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned}&x=-1+te^t/2+C_2e^t\\&y=e^t/6+C_1e^{-2t}\\&z=2+e^t/4+C_3e^{-t}\end{aligned}.$$

$$x=-1+te^{t}/2+C_2e^{t}$$
c) $y=e^{t}/6+C_1e^{-t}$
$$z=2+e^{2t}/4+C_3e^{-t}$$

$$x=-1+te^{t}/2+C_2e^{t}$$
d) $y=e^{t}/6+C_1e^{-t}$
$$z=2+e^{2t}/4+C_3e^{-4t}$$

$$x=-1+t^{2}e^{t}/2+C_2e^{t}$$
e) $y=e^{t}/6+C_1e^{-2t}$
$$z=2+e^{t}/4+C_3e^{-2t}$$

3) $\begin{aligned}Dx&=x+y\\ Dy&=4x-2y\end{aligned}$

Lineer denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerin hangisidir?

a) $\begin{aligned}x&=-e^{t}-2e^{-t}-C_1\\ y&=2e^{t}+e^{-t}+C_1\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}x&=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}\\ y&=-4C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}\end{aligned}.$

c) $\begin{aligned}x&=-e^{t}-2e^{-t}-C_1\\ y&=2e^{2t}+e^{-t}+C_1\end{aligned}$

d) $\begin{aligned}x&=-e^{t}-2e^{-2t}-C_1\\ y&=2e^{t}+e^{-t}+C_1\end{aligned}$

e) $\begin{aligned}x&=e^{-3t}\\ y&=-4e^{-3t}\end{aligned}$

4) $\begin{aligned}Dx+Dy-x-3y&=e^{t}\\ Dx+Dy-x&=e^{3t}\end{aligned}$

Lineer denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerin hangisidir?

a) $\begin{aligned}x&=C_1e^{3t}+e^{t}/5\\ y&=2/3C_1e^{-3t}+e^{3t}/3-e^{t}/2\end{aligned}$

b) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{-3t} + e^t/4 \\ y &= 2/3C_1e^{-2t} + e^t/3 - e^{-t}/2 \end{aligned}.$$

c) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{-3t} + e^{2t}/4 \\ y &= 2/3C_1e^{-3t} + e^{5t}/3 - e^t/2 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{-3t} + e^t/4 \\ y &= 7/3C_1e^{-3t} + e^{3t}/3 - e^{-t}/2 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{-3t} + e^t/4 \\ y &= 2/3C_1e^{-3t} + e^{3t}/3 - e^t/2 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} Dx + Dy + 2y &= \sin t \\ Dx + Dy - x - y &= 0 \end{aligned}$$

lineer denklem sisteminin çözümü aşağıdakilerin hangisidir?

a) $$\begin{aligned} x &= C_1e^t - \frac{1}{2}\sin t \\ y &= \frac{-C_1}{3}e^t + \frac{1}{2}\sin t \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t \\ y &= \frac{-C_1}{3}e^t + \frac{1}{2}\sin t \end{aligned}.$$

c) $$\begin{aligned} x &= C_1e^t - \frac{1}{2}\cos t \\ y &= \frac{-C_1}{3}e^t + \frac{1}{2}\sin t \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x &= C_1e^t - \frac{1}{2}\sin t \\ y &= \frac{-C_1}{3}e^{2t} + \frac{1}{2}\sin t \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x &= C_1e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t \\ y &= \frac{-C_1}{3}e^{2t} + \frac{1}{2}\sin t \end{aligned}$$

Cevaplar

1) a, **2)** b, **3)** b, **4)** e, **5)** a

KAYNAKLAR

Veeh, J.A: "*Lecture Notes on Ordinary Differential Equations*", (**2002)**

Lebl, J.: "*Differential Equations for Engineers*", Creative Commons

Attribution, California (**2011**).

Teschl, G.: "*Ordinary differential equations and Dynamical Systems",*

Austria ,(**2004**)

Dernek, N., .Dernek A.: " *Diferansiyel Denklemler"*,Deniz Yayın Evi,(**1995**).

Bronson , R.: " *Outline of Theory and Problems of Differential Equations",* Schaum's Outlıne Serıes (**2003**)

Özerman,U.: "*Diferansiyel Denklemler Notlari*", İTÜ, **(2008)**.

Debnath,L.: "*Integral Transforms and Their Applications*", **(2000)**

Finney , R.L., Thomas, G.B.: "*Calculus and Analytic Geometry*", Addison-Wesley, New York, (**2009**)

Stewart , J.: "*Calculus*", 7E ed.,(**2011**)

Aksoy , Y.:"*Diferansiyel Denklemler*" Cilt 1 ,YTÜ Yayınları , **(2006)**

Recepli,Z., Özkaymak, M.,Kurt , H.: "*Mühendislikte Diferansiyel Denklemler*",Seçkin Yayıncılık, (2011).

Trench, W.F,:"*Elementary Differential Equations*", Trinity university, San Antonio, Texas, USA, December 2013.

Engin, T. , Çengel Y.A.:" *Mühendisler İçin Diferansiyel Denklemler*", Sakarya Üniversitesi, 2008.