MATRİSLER VE DETERMİNANTLAR

Tanım 9.1. $m, n \in N$ olmak üzere $m \times n -$ tane reel veya kompleks sayıdan oluşan aşağıda göstermiş olduğumuz A tablosuna $\boldsymbol{m \times n}$ **tipinde matris** denir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Bir matrisi kısaca $A = [a_{ij}]$ şeklinde gösterebiliriz. Burada $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots n$ indisleri sırasıyla matrisin satır ve sütün adreslerini göstermektedir. A matrisinin yatık konumundaki elamanlarına satır elemanları, dik konumundaki elemanlarına da sütun veya kalan elemanları denir. $m \times n$ ye de matrisin mertebesi veya tipi diyeceğiz.

Matrisleri yukarıda da gördüğümüz gibi alfabenin büyük harfleri ile göstereceğiz.

Tanım 9.2. Bütün elemanları sıfır olan matrise **sıfır matrisi** denir O ile gösterilir.

Tanım 9.3. (iki matrisin eşitliği) $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ matrisleri aynı tipten yani satır ve sütün sayıları aynı olan iki matris olmak üzere $\forall i, j$ için $a_{ij} = b_{ij} \Rightarrow A = B$ dir denir.

MATRİSLER ARASINDA YAPILAN İŞLEMLER

1. Matrislerde Toplama ve Çıkarma İşlemleri

Tanım 9.4. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ aynı tipten iki matris olmak üzere $\forall i, j$ için $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ şeklinde tanımlanan $C = [c_{ij}]$ matrisine $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ **matrislerinin toplamı** denir.

$$C = [c_{ij}] = [a_{ij}] + [b_{ij}] = A + B$$

şeklinde gösterilir.

Basit bir örnek verecek olursak,

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere,

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 5 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7 & 5\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}=C \text{ olacaktır.}$$

2. Matrislerin Bir Skalar ile Çarpılması

Tanım 9.5. $k\in R$ veya **C** ve A harhangi bir matris olmak üzere, bir k skaları ile bir A matrisinin skalar çarpımından elde edilen kA matrisi, A matrisinin bütün elemanlarının k skaları ile çarpılmasından ibarettir.

Örnek 9.1.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix} \text{ matrisini 2 ile çarparsak}$$

$$2A=\begin{bmatrix}2 & 4 & 6\\ 6 & 4 & 2\\ 4 & 2 & 6\end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

3. Matrislerde Çıkarma

Tanım 9.6. $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{ij}]$ matrisleri aynı tipten olmak üzere

$C=A-B=[a_{ij}]-[b_{ij}]=[a_{ij}-b_{ij}]$ matrisi, B matrnisinin (-1) ile çarpılıp A matrisi ile toplamına denir.

Örnek 9.2.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \text{ ve } B=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -4\\ -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

Matrislerde Toplama Ve Skalar İle Çarpmanın Özellikleri

F_n^m, $m\times n$ tipindeki matrislerin uzayı, A, B ve $C\in F_n^m$ ve $k_1, k_2\in F$ olmak üzere

1. $A+B=B+A$

2. $A+(B+C)=(A+B)+C$

3. $A+0=0+A$

4. $A+(-A)=(-A)+A$

5. $k_1(A+B)=k_1A+k_1B$

6. $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$

7. $(k_1k_2)A=k_1(k_2A)=k_2(k_1A)$

4. Matris Çarpımı

Matris çarpımı her zaman tanımlı değildir. Tanımlı olabilmesi birinci matrisin sütun sayısı, ikinci matrisin satır sayısına eşit olması ile mümkündür.

Tanım 9.7. $A=[a_{ik}]_{m\times t}$, $B=[b_{kj}]_{t\times n}$ olmak üzere

$$AB=[a_{ik}]_{m\times t}[b_{kj}]_{t\times n}=\left[c_{ij}=\sum_{k=1}^{t}a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times n}=C$$

c_{ij} leri açık olarak yazarsak, $1\le i\le m,\quad 1\le j\le n$

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{t}a_{1k}b_{k1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots a_{1t}b_{t1}$$

$$c_{12}=\sum_{k=1}^{t}a_{1k}b_{k2}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots a_{1t}b_{t2}$$

$\vdots$

$$c_{mn}=\sum_{k=1}^{t}a_{mk}b_{kn}=a_{m1}b_{1n}+a_{m2}b_{2n}+\dots+a_{mt}b_{tn}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek 9.3.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&3&4\\5&2&1\end{bmatrix}_{3\times 3}\quad \text{ve } B=\begin{bmatrix}2&1\\4&-1\\0&5\end{bmatrix}_{3\times 2}$$ matrisleri için

$$A\,B=\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&3&4\\5&2&1\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}2&1\\4&-1\\0&5\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}8&1\\10&16\\18&8\end{bmatrix}_{3\times2}$$

Matris Çarpımının Özellikleri

A, B ve C çarpılabilir matrisler olmak üzere

1. $AB \neq BA$ (Bazı özel matrisler hariç)

2. $A(BC)=(AB)C$

3. $(A+B)C=AC+BC$ (A ile B toplanabilir olmalıdır)

4. $k(AB)=(kA)B=A(kB)$

Örnek 9.4.

$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&2&3\end{bmatrix}$ olmak üzere, A^3+2A^2+3A matrisini bulalım.

$$A^3+2A^2+3A=\begin{bmatrix}74&62&80\\69&61&86\\66&62&88\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}14&10&12\\11&11&14\\10&10&16\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3&2&1\\2&1&3\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}111&88&107\\97&86&123\\89&88&129\end{bmatrix}$$

ALIŞTIRMALAR

1. $A=\begin{bmatrix}3&1&0\\2&0&1\\0&2&3\end{bmatrix}$ matrisi verildiğine göre A^4-2A matrisini bulunuz.

2. $A=\begin{bmatrix}1&3&-1\\2&0&3\\-2&4&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&-1&3\\3&2&0\end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix}0&-1&2\\0&1&0\\3&4&5\end{bmatrix}$

matrisleri verildiğine göre ABC matrisini bulunuz.

Tanım 9.8. Satır sayısı sütün sayısına eşit olan matrislere **karesel matris** adı verilir. Karesel matrisin $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına esas köşegen elemanları veya diagonal elemanlar adı verilir.

Tanım 9.9. Bir karesel matrisin esas köşegen elemanları dışındaki elemanlarının hepsi "0" ise bu matrise **diagonal matris** denir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & a_{22} \ldots 0 \\ . & \ddots \\ . & \\ 0 & 0 \ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$ şeklinde gösterilir.

Tanım 9.10. Diagonal matriste $a_{11} = a_{22} = \ldots\ldots a_{nn} = k$ ise bu matrise **skalar matris** adı verilir.

$$\begin{bmatrix} k & 0 \ldots 0 \\ 0 & k \ldots 0 \\ . & \\ . & \\ 0 & 0 \ldots k \end{bmatrix}$$ şeklinde gösterilir.

Tanım 9.11. Skalar matriste özel olarak $k = 1$ alınırsa elde edilen matrise **birim matris** denir. Eğer matris $n \times n$ tipindeyse I_n ile gösterilir.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 \ldots 0 \\ . & \\ . & \\ 0 & 0 \ldots 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Özel olarak;

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ şeklinde gösterilir.

Tanım 9.12. Bir karesel matrisin esas köşegen elemanlarının altındaki elemanların hepsi 0 ise bu matrise **üst üçgensel**, esas köşegen elemanlarının üstündeki elemanların hepsi 0 ise bu matrise **alt üçgensel** matris denir.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \cdots a_{2n} \\ . & . \\ . & . \\ 0 & 0 \quad a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \cdots\cdots 0 \\ a_{21} & a_{22} \cdots 0 \\ . & . \ddots \\ . & . \\ a_{n1} & a_{n2} \quad a_{nn} \end{bmatrix}$$

Üst üçgensel　　　　Alt üçgensel

Örnek 9.5.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } A^2+2A-5I_3=?$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 6 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

DETERMİNANT

Determinant alma işlemi aşağıda vereceğimiz üç kurala göre hesaplanır.

1. Sarrus Kuralı
2. Laplace Açılımı
3. Determinantın özelliklerinden faydalanarak elemanter operasyonlar ile hesabı

1. Sarrus Kuralı

Bu kural 2×2 tipindeki ve 3×3 tipindeki matrislerin determinantında aşağıdaki gibi çaprazlama işlemi yapılarak bulunur.

det A veya $|A|$ şeklinde gösterilir.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}.a_{22}-a_{12}a_{21}$$