Buradan $\left.\begin{array}{l}3\alpha+4\beta=0\\ \alpha^2+\beta^2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=-\frac{4}{3}\beta$

$\frac{16}{9}\beta^2+\beta^2=1 \Rightarrow \beta=\pm\frac{3}{5} \quad \alpha=\pm\frac{4}{5}$ bulunur.

Gram-Schmidt Metodu (Ortonormalleştirme Metodu)

V bir vektör uzayı, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$, V'nin lineer bağımsız bir kümesi olsun. Bu vektörleri önce bir ortogonal sisteme daha sonra da bir ortonormal sisteme dönüştüren metoda Gram-Schmidt Metodu denir. Metod aşağıdaki gibidir.

$$\vec{y}_1=\vec{x}_1$$

$$\vec{y}_2=\vec{x}_2-\frac{\langle\vec{x}_2,\vec{y}_1\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\cdot\vec{y}_1$$

$$\vec{y}_3=\vec{x}_3-\frac{\langle\vec{x}_3,\vec{y}_1\rangle}{\langle\vec{y}_1,\vec{y}_1\rangle}\vec{y}_1-\frac{\langle\vec{x}_3,\vec{y}_2\rangle}{\langle\vec{y}_2,\vec{y}_2\rangle}\cdot\vec{y}_2$$

$$\vdots$$

$$y_n=\vec{x}_n-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\langle\vec{x}_n,\vec{y}_i\rangle}{\langle\vec{y}_i,\vec{y}_i\rangle}\cdot\vec{y}_i$$

eşitlikleri yardımıyla $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ sistemi $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots,$ ortogonal sistemine dönüşür.

$$\vec{e}_1=\frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|},\quad \vec{e}_2=\frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|},\ \ldots,\ \vec{e}_n=\frac{\vec{y}_n}{\|\vec{y}_n\|}$$

eşitlikleri ile de $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n\}$ ortogonal sistemi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ ortonormal sistemine dönüşmüş

ÖRNEK : $\vec{x}_1 = (1,0)$, $\vec{x}_2 = (1,1)$ vektörlerine Gram- Schmidt metodunu uygulayınız.

Çözüm : $c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 = 0 \Leftrightarrow (c_1 + c_2, 0) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$ olduğundan $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ kümesi lineer bağımsızdır.

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1,0)$$

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \vec{y}_1 = (1,1) - \frac{\langle (1,1),(1,0) \rangle}{\langle (1,0),(1,0) \rangle} \cdot (1,0)$$

$$\Rightarrow \vec{y}_2 = (1,1) - \frac{1 \cdot (1,0)}{1} = (0,1)$$

Böylece $\vec{y}_1 = (1,0)$, $\vec{y}_2 = (0,1)$ ortogonal sistemi elde edilir.

Buradan $\vec{e}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \frac{(1,0)}{\sqrt{\langle (1,0),(1,0) \rangle}} = \frac{(1,0)}{1} = (1,0)$

ve $\vec{e}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \frac{(0,1)}{1} = (0,1)$ olup

$\{e_1, e_2\}$ ortonormal sistemi elde edilir. (Yani $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$, $\langle e_2, e_2 \rangle = 1$, $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$ bulunur.)

ÖRNEK : $\vec{x}_1 = (1,1,0)$, $\vec{x}_2 = (0,1,1)$, $\vec{x}_3 = (0,0,1)$ sistemini ortonormal sisteme dönüştürünüz.

Çözüm : $c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + c_3 \vec{x}_3 = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$ olup $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ lineer bağımsızdır.

$$\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1,1,0)$$

$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \vec{y}_1 = (0,1,1) - \frac{\langle (0,1,1),(1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0),(1,1,0) \rangle} \cdot (1,1,0)$$

$$\Rightarrow y_2 = (0,1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_2 = \left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{y}_3 = \vec{x}_3 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_1 \rangle}{\langle \vec{y}_1, \vec{y}_1 \rangle} \vec{y}_1 - \frac{\langle \vec{x}_3, \vec{y}_2 \rangle}{\langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle} \cdot \vec{y}_2$$

$$\vec{y}_3 = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1), (1,1,0) \rangle}{\langle (1,1,0), (1,1,0) \rangle} \cdot (1,1,0) - \frac{\langle (0,0,1), (-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, 1) \rangle}{\langle (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \rangle} (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$$

$$\Rightarrow \vec{y}_3 = (0,0,1) - \vec{0} - \frac{1}{\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{y}_3 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

olup $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ ortagonal sistemi elde edilir. Buradan

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1,1,0)$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{y}_2}{\|\vec{y}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{y}_3}{\|\vec{y}_3\|} = \sqrt{3} \cdot \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad \left\{ \|y_3\| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \right\}$$

şeklinde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ortonormal sistemi elde edilir.
(yani $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$ ve $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 0$ olur)

<u>Vektörel Çarpım</u> $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$\vec{x} \times \vec{y}$ şeklinde gösterilir ve normu

$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \sin\theta$ şeklinde tanımlıdır. Ayrıca

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ olmak üzere vektörel çarpım

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \vec{y}_1 & \vec{y}_2 & \vec{y}_3 \end{vmatrix}$$

şeklindedir.

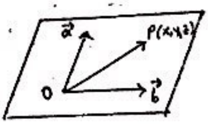
<u>ÖRNEK</u>: $\vec{x} = (0,2,1)$, $\vec{y} = (-1,0,3)$ ise $\vec{x} \times \vec{y} = ?$

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$$

Vektörlerin Düzleminin Denklemi

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ve $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ vektörlerinin belirttiği düzlemin denklemi determinant yardımıyla

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

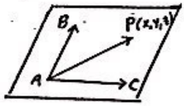


şeklindedir.

ÖRNEK : $A = (1,3,5)$, $B = (2,4,6)$ vektörlerinin belirttiği düzlemin denklemini yazınız.

ÇÖZÜM : $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 4y - 2z = 0$

ÖRNEK : $A = (1,-1,0)$, $B = (2,2,4)$, $C = (-1,2,1)$ noktalarını ihtiva eden düzlemin denklemini bulunuz.



ÇÖZÜM : $AP = P - A = (x-1,\ y+1,\ z)$

$AB = B - A = (1,3,4)$

$AC = C - A = (-2,3,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x - y + z = 0$$

ÖRNEK : $A = (3,4,\lambda)$, $B = (1,3,5)$, $C = (0,-1,2)$ vektörlerinin aynı düzlemde olması için λ ne olmalıdır?

ÇÖZÜM

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & \lambda \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 45$$

Vektörlerin Paralel Olma Koşulu

$\vec{A} = (x_1, y_1, z_1)$ ve $\vec{B} = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri paralel ise

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$ dir.

ÖRNEK : $\vec{u} = (2, 8, x)$, $\vec{v} = (1, y, -2)$ ve $\vec{u} \parallel \vec{v}$ ise $x+y=?$

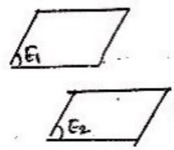
Çözüm : $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$ 'den

$$\frac{2}{1} = \frac{8}{y} = \frac{x}{-2} \Rightarrow x=-4 \ , \ y=4 \Rightarrow x+y=0$$

İki Düzlemin Paralel Olma Koşulu

$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ve $E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemlerinin paralel olması için

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



olmalıdır.

ÖRNEK : $x - ny + 4z - 2 = 0$ ile $2x + 5y + 8z - 5 = 0$ düzlemlerinin paralel olması için n ne olmalıdır?

$$\frac{1}{2} = -\frac{n}{5} = \frac{4}{8} \Rightarrow n = -\frac{5}{2}$$

İki Düzlemin Dik Olma Koşulu

$E_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ve $E_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ düzlemlerinin dik olması için

$$a_1 . a_2 + b_1 . b_2 + c_1 . c_2 = 0$$

olmalıdır.

ÖRNEK : $3x + 4y + mz - 3 = 0$ ve $-2x + 5y + 3z + 1 = 0$ düzlemleri dik ise m ne olmalıdır?

$$3.(-2) + 4.5 + m.3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{14}{3}$$