3. Elemanter Operasyonlar ile Lineer Denklem Sistemi Çözümü

Verilen (1) nolu lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi A; eşitliğinin sağındaki sabitlerin kolon matrisi B olmak üzere A ve B matrislerini aşağıdaki matris tablosuna yerleştirip daha sonra bu matris tablosuna bir dizi satır operasyonu sonucunda bu tablo; ikinci taraftaki matris tablosuna dönüştürülüp

$$\left[A \,\vdots\, B\right] \approx \overset{H}{\ldots\ldots} \approx \left[I_n \,\vdots\, x\right]$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ matrisi bulunarak denklem sistemi çözülmüş olur.

Buradaki I_n, A nın mertebesindeki birim matristir.

Örnek 9.24.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \end{array}\right] \underset{H_{31(-1)}}{\overset{H_{21(-2)}}{\approx}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & -8 & -3 \\ 0 & 7 & 4 & 3 \end{array}\right] \approx H_{2(1/5)} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -8/5 & -3/5 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \end{array}\right]$$

$$\underset{H_{32(-7)}}{\overset{H_{12(2)}}{\approx}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1/5 & -11/5 \\ 0 & 1 & -8/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 36/5 & -36/5 \end{array}\right] \approx H_{3(5/36)} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1/5 & -11/5 \\ 0 & 1 & -8/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{H_{23(8/5)}}{\overset{H_{13(1/5)}}{\approx}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to x_1 \\ \to x_2 \\ \to x_3 \end{array}$$

Örnek 9.25.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+4z=-2 \\ x+5y+7z=4 \end{array}\right\}$$ denklem sistemini elemanter operasyonlarla çözünüz.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & 7 & 4 \end{array}\right] \underset{H_{31(-1)}}{\overset{H_{21(-2)}}{\approx}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \overset{H_{2(-1)}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \underset{H_{32(-3)}}{\overset{H_{12(-2)}}{\approx}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -16 \end{array}\right] \overset{H_{3(-1/2)}}{\approx} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \underset{H_{23(-2)}}{\overset{H_{13(1)}}{\approx}} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \to x \\ \to y \\ \to z \end{array}$$

$x=-2 \qquad y=-10 \qquad z=8$

n Bilinmeyenli; m tane Lineer Denklem Sisteminin Çözümü

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}xn = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \qquad (3)$$

$$. \qquad .$$

$$. \qquad .$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

Lineer denklem sistemini çözmek için lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin rankı hesaplanır. Lineer denklem sisteminde bilinmeyen sayısı n olmak üzere $"n - rank\ A"$ adet bilinmeyen keyfi seçilerek diğer bilinmeyenler bu keyfi parametrelere göre çözülür. Elde edilen bu çözümlere aşikar olmayan çözümler denir.

Örnek 9.26.

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}_{2\times3} \qquad \begin{matrix} n = 3 \\ n - r = 1 \end{matrix}$$

$rankA = 2$ 1 adet keyfi bilinmeyen: $x_3 = k$ olsun

$$2x_1 - \cancel{x_2} = -3 - 3k$$

$$+ \quad 3x_1 + \cancel{x_2} = 2 + 4k$$

$$5x_1 = k - 1$$

$$x_1 = \frac{k-1}{5}$$

$$x_2 = \frac{13+17k}{5}$$

$$x_3 = k$$

Örnek 9.27.

$$2x-y+z-t=-1$$

$$x+y-z+t=3$$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}_{2\times 4}$$

$$rankA=2 \qquad n-r=4-2=2$$

$$z=m$$

$$t=n$$

$$2x-y=n-m-1$$

$$x+y=3+m-n \qquad\qquad z=m,$$

$$3x=2\Rightarrow x=\frac{2}{3} \qquad\qquad t=n,$$

$$-3y=3n-3m-7\Rightarrow y=\frac{3n-3m-7}{-3}$$

Örnek 9.28.

$$\left.\begin{aligned}x_1+3x_2-x_3&=-1\\ 2x_1-x_2+x_3&=2\\ 3x_1+9x_2-3x_3&=-3\end{aligned}\right\}$$

1. ve 3. denklemler arasında oran vardır. $\det=0$ olduğu için biri silinir.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}_{2\times 3}$$

$$rankA=2 \qquad n=3 \qquad n-r=3-2=1$$

$$x_3=k$$

$$x_1+3x_2=k-1$$

$$+\ 2x_1-x_2=2-k$$

$$x_1+3x_2=k-1$$

$$+\ 6x_1-3x_2=6-3k$$

$$7x_1=5-2k$$

$$x_1=\frac{5-2k}{7},\ x_2=\frac{5k-12}{7},\ x_3=k$$

Homogen Denklem Sistemi ve Çözümü

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

veya

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \quad (5)$$

denklem sistemine homogen denklem sistemi denir.

(4) nolu Denklem Sisteminin Çözümü

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı 0 dan farklı ise $x_1 = x_2 = x_3 \ldots x_n = 0$ aşikar çözümü vardır. Aksi takdirde yani $\det A = 0$ ise daha önceki metotda gördüğümüz gibi rankı hesaplanıp aşikar olmayan çözümleri de elde edilir. (Aşikar olanlar da dahildir.)

(5) nolu Denklem Sisteminin Çözümü

(5) nolu homogen denklem sisteminin çözümü de $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ aşikar çözümlerinin yanında aşikar olmayan çözümleri de bulunacaktır.

Örnek 9.29.

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

$x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$r = 2,\quad n = 3,$ ve $n - r = 3 - 2 = 1$ adet bilinmeyen keyfi seçilir. $x_3 = k$ dersek,

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ aşikar çözümleri yanında

$$\begin{array}{rl} & 2x_1 - x_2 = -3k \\ + & x_1 + 3x_2 = k \\ \hline & 6x_1 - 3x_2 = -9k \\ + & x_1 + 3x_2 = k \\ \hline \end{array}$$

$$7x_1 = -8k \Rightarrow x_1 = -\frac{8k}{7},\ x_2 = \frac{5k}{7},\ x_3 = k$$