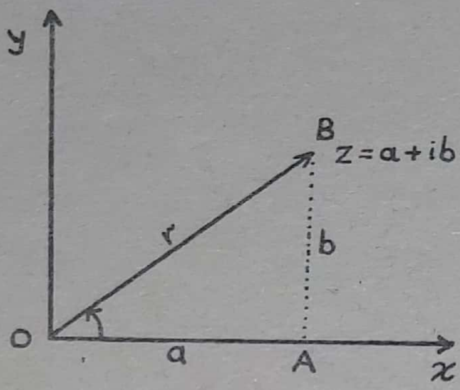
2.1.1. Kompleks Sayıların Geometrik Gösterilişi:



Şekil 2.1

Ox-eksenine reel sayılar ekseni, Oy-eksenine de imajiner (sanal) sayılar ekseni denir. (Şekil 2.1) de OAB üçgeni göz-önüne alınırsa Z = a+ib kompleks sayısının bir vektörel toplam olduğu görülür. Buradan her kompleks sayının bir vektör gösterdiğini söyleyebiliriz.

Eğer b=0 ise Z= a+ib kompleks sayısı a reel kısmından oluşur ve B noktası Ox-ekseni üzerindedir. Eğer a = 0 ise Z = a+ib kompleks sayısı, ib imajiner (sanal) kısmından oluşur ve B noktası Oy-ekseni üzerindedir.

Z = a+ib kompleks sayısının uzunluğu r ve Ox-ekseni ile yaptığı açı θ olmak üzere

$$r = \sqrt{a^2+b^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

dır. Burada r ye kompleks sayının modülü, θ ya da kompleks sayının ARGÜMANI denir.

Kartezyen formda verilen Z = a+ib kompleks sayısını kutupsal formda göstermek istersek, şekil 2.1 den

$$\cos\theta = \frac{a}{|Z|} = \frac{a}{r} \implies a = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|Z|} = \frac{b}{r} \implies b = r\sin\theta$$

bulunur. Bu ifadeler Z = a+ib de yerlerine yazılırsa,

$$Z = r\,(\cos\theta + i\,\sin\theta\,)$$

kutupsal formda gösterimi bulunur.

Euler tarafından bulunan

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

formülü gözönüne alınırsa kompleks sayının

$$Z = r\, e^{i\theta}$$

üstel gösterimi elde edilir. Kompleks sayıların üstel gösterimine Yüksek Matematik dersinde tekrar dönülecektir.

ÖRNEK 2.1.1:

$Z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ kompleks sayısını kutupsal ve üstel formda yazınız.

ÇÖZÜM:

$$r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2+2} = 2$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

böylece

$$Z = 2.(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$$

veya

$$Z = 2.\ e^{i\pi/4}$$

bulunur.

Eğer kompleks sayının üstel gösteriminde i yerine -i yazacak olursak

$$r.e^{-i\theta} = r.(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

veya

$$r.e^{-i\theta} = r.(\cos\theta - i\sin\theta)$$

bulunur.

İki kompleks sayının eşitliği ise

$$a+ib = c+id \Longleftrightarrow a=c \text{ ve } b=d$$

şeklinde tanımlanır. Bu ise

$$r_1 = r_2$$

$$\theta_1 = \theta_2$$

olmasını gerektirir.

2.1.2. İki Kompleks Sayının Toplamı ve Farkı:

$Z_1 = a+ib$ ve $Z_2 = c+id$ gibi iki kompleks sayının toplamı

$$Z_1+Z_2 = (a+c)+ i\ (b+d)$$

ve farkı da

$$Z_1-Z_2 = (a-c)+i\ (b-d)$$

şeklinde tanımlı yeni bir kompleks sayıdır. Yani toplama ve çıkarmada reel kısımlar ve kompleks kısımlar kendi aralarında toplanır ya da çıkarılır.

Toplamdan elde edilen kompleks sayının modülü ve argümanı

$$r = \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b+d}{a+c}$$

ifadelerine eşittir. Aynı şekilde iki kompleks sayının farkının modülü ve argümanı da

$$r = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

$$\tan\theta = \frac{b-d}{a-c}$$

şeklindedir.

2.1.3. İki Kompleks Sayının Çarpımı:

İki kompleks sayının çarpımı; modülü bu sayıların modülleri çarpımına ve argümanı da bu sayıların argümanları toplamına eşit olan yeni bir kompleks sayıdır. $Z = a+ib$, $Z = c+id$ kompleks sayılarının çarpımı

$$\begin{aligned} Z_1.Z_2 &= (a+ib).(c+id) \\ &= (ac-bd)+i\ (ad+bc) \\ &= m+in \end{aligned}$$

şeklindedir. Z_1 in modülü r_1 ve argümanı θ_1, Z_2 nin modülü r_2 ve argümanı da θ_2 olmak üzere $Z_1.Z_2$ nin modülü ve argümanı için,

$$r = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$$

$$= \sqrt{a^2c^2+b^2d^2-2abcd+a^2d^2+b^2c^2+2abcd}$$

$$= \sqrt{c^2(a^2+b^2)+d^2(a^2+b^2)}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2).(c^2+d^2)}$$

$$= \sqrt{(a^2+b^2)} \;.\; \sqrt{c^2+d^2}$$

$$= r_1 . r_2$$

ve

$$\tan\theta = \frac{ad+bc}{ac-bd} = \frac{\frac{ad+bc}{ac}}{\frac{ac-bd}{ac}} = \frac{\frac{d}{c}+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}.\frac{d}{c}}$$

$$\tan\theta = \frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1.\tan\theta_2}$$

$$= \tan(\theta_1+\theta_2)$$

veya

$$\theta = \theta_1+\theta_2$$

bulunur.

ÖRNEK 2.1.2:

$Z_1 = 3+4i$ ve $Z_2 = 1+i$ kompleks sayılarının çarpımını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$Z_1.Z_2 = (3+4i).(1+i)$$

$$= -1+7i$$

dir.

$$r = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$$\tan\theta = \frac{7}{-1} = -7$$

olur. Ayrıca

$$r_1 = \sqrt{9+16} = \sqrt{25}$$

$$r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

olduğundan

$$r = r_1 . r_2$$

dir. Z_1 ve Z_2 nin argümanları θ_1 ve θ_2 olmak üzere

$$\tan(\theta_1+\theta_2) = \frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1 . \tan\theta_2} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{1}}{1-\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{\frac{7}{3}}{\frac{3-4}{3}} = -7$$

olduğu görülür.

2.1.4. Moivre Formülü:

Kutupsal formda verilmiş olan

$$Z = r.(\cos\theta+i\ \sin\theta)$$

kompleks sayısı için

$$Z^n = r^n.(\cos n\theta+i\ \sin n\theta) \qquad (2.1.1)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için tümevarım metodunu kullanacağız.

n=1 için eşitliğin doğru olduğu aşikardır.

n=k için doğru olduğunu kabul edelim:

$$Z^k = r^k.(\cos k\theta+i\ \sin k\theta). \qquad (2.1.2)$$

Şimdi eşitliğin n=k+1 için doğru, yani

$$Z^{k+1} = r^{k+1}.(\cos(k+1)\theta+i\ \sin(k+1)\theta)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için (2.1.2) eşitliğinin her tarafı $Z = r.(\cos\theta+i\ \sin\theta)$ ile çarpılırsa;

$$Z^{k+1} = r^{k+1}.(\cos k\theta+i \cdot \sin k\theta).(\cos\theta+i \cdot \sin\theta)$$

$$Z^{k+1} = r^{k+1}.(\cos k\theta.\cos\theta-\sin k\theta.\sin\theta+i\ \sin k\theta.\cos\theta + i \cdot \cos k\theta.\sin\theta)$$

$$Z^{k+1} = r^{k+1}.(\cos(k+1)\theta+i \cdot \sin(k+1)\theta)$$

elde edilir. Öyleyse (2.1.1) eşitliği her n için doğrudur. r=1 için bu formüle Moivre formülü denir.

Eğer n pozitif değilse, yani negatif bir sayı ise o zaman Moivre formülünden,

$$(\cos\theta+i\ \sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta)+i\ \sin(-n\theta)$$

$$(\cos\theta+i\ \sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\ \sin n\theta$$

elde edilir. Eğer $n=\frac{p}{q}$ şeklinde ise

$$(\cos\theta+i\ \sin\theta)^{p/q} = \cos \frac{p}{q}\theta + i\ \sin \frac{p}{q}\theta$$

olacağı açıktır.

2.1.5. İki Kompleks Sayının Bölümü:

$Z_1 = a+ib$ ve $Z_2 = c+id$ gibi iki kompleks sayının bölümü;

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

şeklinde tanımlı bir kompleks sayıdır. Gerçekten

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+ib}{c+id}$$

ifadesinin sağ tarafının payı ve paydası, paydanın eşleniği olan c-id ile çarpılırsa;

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

veya

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

elde edilir.

Bölümden elde edilen kompleks sayının modülü ve argümanı ise

$$r = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\tan\theta = \tan(\theta_1-\theta_2)$$

ifadelerine eşittir. İspatı alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.