De Moivre Laplace Teoremi:

Binom dağılımında n büyüdükçe binom olasılıklarını hesaplamak zorlaşacağından, binom dağılımın De Moivre Laplace Teoremi ile normal dağılıma yaklaşımı yapılır.

$X \sim Binom(n,p)\ \ iken\ E(X) = np\ ve\ Var(X) = npq\ , \mu_p = np, \sigma^2{}_p = npq\ alınarak, X' \sim N(\mu_p, \sigma^2{}_p)$ olur.

X tesadüfi değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$p_x \cong f_{x'}(x)$$

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_p}{\sigma_p}\right)^2}$$

yaklaşımı yapılır. Bu yaklaşımı yapmak büyük fayda sağlayacaktır. Örneğin n=1000 ve p=0,01 için $P(X \leq 378)$ olasılığını bulmak çok güçtür çünkü bu olasılık aşağıdaki gibi hesaplanmalıdır:

$$P(X \leq 387) = \sum_{X=0}^{387} \binom{1000}{x} (0{,}01)^X (0{,}99)^{n-x}$$

Bu işlemler oldukça uzun ve yorucu olduğundan,

$$P(X' \leq 387) = P\left(\frac{X' - \mu_P}{\sigma_P} \leq \frac{387 - \mu_P}{\sigma_P}\right) = P\left(Z \leq \frac{387 - \mu_P}{\sigma_P}\right)$$

olasılığı, standart normal dağılım yardımı ile kolayca bulunur. Bununla birlikte küçük örneklemler için de süreklilik düzeltmesi yapılarak tam sonuca yakın olasılıklar hesaplanabilir. Süreklilik düzeltmesi için aşağıdaki yaklaşımlar yapılabilir:

1)

$$P(X = x) \cong P(x - 0{,}5 \leq X' \leq x + 0{,}5)$$

2)

$$P(X \leq x) \cong P(X' \leq X + 0{,}5)$$

3)

$$P(X < x) \cong P(X' \leq x - 0{,}5)$$

4)

$$P(X \geq x) \cong P(X' \geq x - 0{,}05)$$

5) $$P(X > x) \cong P(X' \geq x + 0{,}5)$$

6) $$P(x_1 \leq X \leq x_2) \cong P(x_1 - 0{,}5 \leq X' \leq x_2 + 0{,}5)$$

Örnek 5.21: Bir atölyede üretilen ürünlerin %5'inin kalitesiz olduğu biliniyor. Buna göre üretilen ürünlerden 150 adet çekilmiş olup bunlardan en çok 10 tanenin kalitesiz olma olasılığı nedir?

Çözüm:

Kaliteli ürünlerin oranı %95, kalitesiz ürünlerin oranı %5. X tesadüfi değişkeni üretilen 150 adet üründen kalitesiz ürün sayısını gösterirken $X \sim Binom(150; 0{,}05)$ olur. En fazla 10 tane ürünün kalitesiz olması olasılığı:

$$P(X \leq 10) = \sum_{x=0}^{10} \binom{150}{x} (0{,}05)^x (0{,}95)^{150-x}$$

$$= 0{,}86776$$

Süreklilik düzeltmesi yapıldığında,

$$E(X) = np = 150(0{,}05) = 7{,}5; Var(X) = npq = 7{,}125$$

De Moivre Laplace yaklaşımının ikinci özelliğinden

$$P(X \leq 10) = P(X' \leq 10{,}5) = P\left(Z \leq \frac{10{,}5 - 7{,}5}{\sqrt{7{,}125}}\right) = P(Z \leq 1{,}124)$$

$$= 0{,}8686$$

Örnek 5.22: Tura gelme olasılığı %65 olan hileli bir para 100 kez atılıyor.

- **a)** En çok 50 tura gelmesi olasılığı nedir?
- **b)** 60 ile 70 arasında (sınırlar dahil) tura gelmesi olasılığı nedir?
- **c)** 75 den az tura gelmesi olasılığı nedir?

Çözüm:

$$n = 100, \quad p = 0{,}65, \quad q = 0{,}35$$

$$E(X) = np, \quad \mu_p = 65$$

$$Var(X) = npq, \quad \sigma_P^2 = 22{,}75, \qquad \sigma_P = 4{,}77$$

$$X \sim Binom(100{,}0.65) iken X' \sim N(65; 22{,}75)$$

a) $$P(X \leq 50) \cong P(X' \leq 50{,}5) = P(Z \leq -3{,}04) = 0{,}001183$$

b) $$P(60 \leq X \leq 70) \cong P(59{,}5 \leq X' \leq 70{,}5)$$

$$= P(-1{,}5 \leq Z \leq 1{,}15) = 2(0{,}3749) = 0{,}7498$$

c) $$P(X < 75) \cong P(X' \leq 74{,}5) = P(Z \leq 1{,}99) = 0{,}9767$$

Log Normal Dağılım:

Bu dağılımın iktisat, inşaat mühendisliği ve diğer mühendislik alanlarının yanı sıra kimya gibi önemli uygulama alanları mevcuttur.

Tanım : $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olsun $Y = e^x$ tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu,

$$F_Y(y) = p(Y \leq y) = P(e^x \leq y) = P(X \leq \ln y)$$

$$= F_X(\ln y)$$

$$f_Y(y) = (\ln y)' F_x'(\ln y) = \frac{1}{y} f_x(\ln y)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{y} e^{--\frac{1}{2\sigma^2}(\ln y - \mu)^2} \;, \;\; y > 0$$

olur böylece $X = \ln Y$ normal tesadüfi değişken iken Y değişkenine de normal tesadüfi değişken denir.

Beklenen Değer ve Varyans:

$$E(Y) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$$

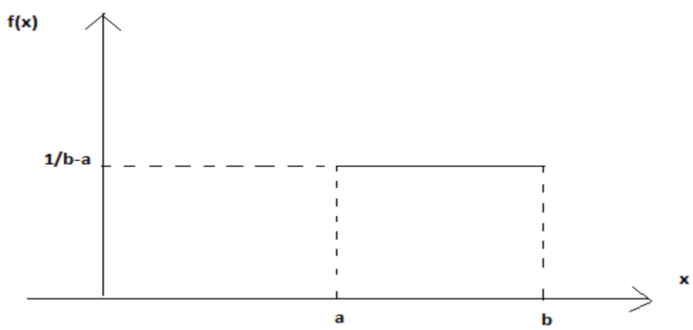
$$Var(Y) = \left(e^{\sigma^2} - 1\right) e^{2\mu + \sigma^2}$$

Düzgün Dağılım:

Tanım : X tesadüfi değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \;\; a \leq x \leq b \\ 0 & , \;\;\;\; d.d \end{cases}$$

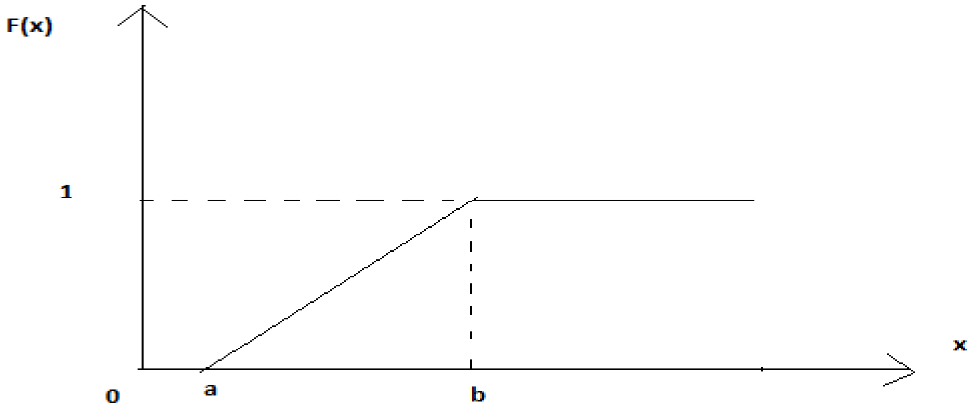
ise, X tesadüfi değişkeni [a,b] kapalı aralığında düzgün dağılıma sahiptir denir ve $X \sim U(a, b)$ biçiminde gösterilir. f(x)' in grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil $X \sim U(a, b)$' nin olasılık yoğunluk fonksiyonu.

$X \sim U(a, b)'nin\ olasılık\ yoğunluk\ fonksiyonu$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & , \quad a \le x \le b \\ 1 & , \quad x > b \end{cases}$$



Şekil $X \sim U(a,b)$' nin dağılım fonksiyonu.

Beklenen Değer ve Varyans:

$$E(X) = \int_{D_X} x f(x) dx$$

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)}$$

$$= \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)}$$

$$\frac{b+a}{2}$$

Bulunur.

$$E(X^2) = \int_{DX} x^2 f(x) dx$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{(b-a)} \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}$$

$$= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)}$$

$$= \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{12}$$

Moment Çıkaran Fonksiyon:

$$M_x(t) = \int_{Dx} e^{tx} f(x)dx$$

$$M_x(t) = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{t(b-a)} e^{tx} \Big|_a^b$$

$$= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

Örnek 5.23: Bir otobüs durağına saat 10.00'da geldiğimizi varsayalım. Bu durağa otobüs, saat 10.00 ile 10.30 arasında düzgün dağılıma uygun herhangi bir zamanda gelmektedir. Buna göre,

a) Otobüsün gelmesi için 10 dakikadan fazla bekleme olasılığını hesaplayınız.
b) Eğer saat 10.15 ve otobüs hala gelmemiş ise, en az 10 dakika daha bekleme olasılığı nedir?

Çözüm:

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & 10.00 < x < 10.30 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 10.00 \\ \frac{x}{30}, & 10.00 < x < 10.30 \\ 1, & x \geq 10.30 \end{cases}$$

X: " Otobüsünün gelmesi için beklediğimiz süre" olsun

$$P(10 < X) = 1 - P(X \leq 10)$$

$$1 - \frac{10}{30} = \frac{2}{3}, \%67 \ olasılıkla \ gerçekleşir.$$

b)

$$P(X > 25 \mid X > 15) = \frac{P(X > 25)}{P(X > 15)}$$

$$= \frac{1 - P(X \le 25)}{1 - P(X \le 15)}$$

$$= \frac{1 - \frac{25}{30}}{1 - \frac{15}{30}} = \frac{1}{3} \ Bulunur.$$

Örnek : X tesadüfi değişkeni (0,1) aralığında bir düzgün tesadüfi değişken olsun. $E(X^n)$ değerini hesaplayınız. Beklenen değer tanımı kullanarak bulduğunuz sonucu kontrol ediniz.

Çözüm:

$$E(X^n) = \int_0^1 X^n . \frac{1}{1-0} dx = \int_0^1 X^n \, dx$$

$$= \frac{X^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0$$

olur. Böylece ;

$$E(X) = \frac{1}{2}, \qquad Var(X) = \frac{1}{12}$$

Olarak bulunur.

Örnek : Bir adam bir hedefe atış yapmaktadır. Eğer atış hedefin 1cm içinde ise 10 puan, 1 ile 3 cm içinde ise 5 puan ve hedefin 3 ile 5 cm içinde ise 3 puan almaktadır. Eğer atışın hedefe olan uzaklığı (0,10) arasında düzgün dağılıma sahip ise, bu adamın elde edeceği puanın beklenen değerini hesaplayınız.

Çözüm. X: "atıştan elde edilen puan" olsun.

$$E(X) = 10.\frac{1}{10} + 5.\frac{2}{10} + 3.\frac{2}{10} + 0.\frac{5}{10} = 2{,}6$$

kazanacağı ortalama puandır.

Üstel Dağılım:

Tanım : Negatif olmayan değerler alan sürekli X tesadüfi değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\lambda > 0$ için,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 \quad , & x \le 0 \end{cases}$$

İse X , λ parametreli üstel dağılıma sahiptir ve $X \sim Üstel(\lambda)$' nın dağılım fonksiyonu da,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x > 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & ,x \geq 0 \\ 1 & ,x \to \infty \end{cases}$$

Biçimindedir. Üstel dağılım özellikle bekleme hattı, güvenilirlik, sağ kalım analizi ve sürekli parametreli Markov zincirinde sıkça kullanılır.

Beklenen Değer ve Varyans:

$$E(X) = \int_{DX} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

Kısmi integralinden,

$$x = u\ ve\ \ \lambda e^{-\lambda x}dx \Longrightarrow dx = du, u = -e^{-\lambda x}$$

Olur böylece

$$E(X) = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = \left(-xe^{-\lambda x}\right)\Big|_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x}dx$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{DX} x^2\, f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

İki kez kısmi integral alındığında

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Bulunur.

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Elde edilir.