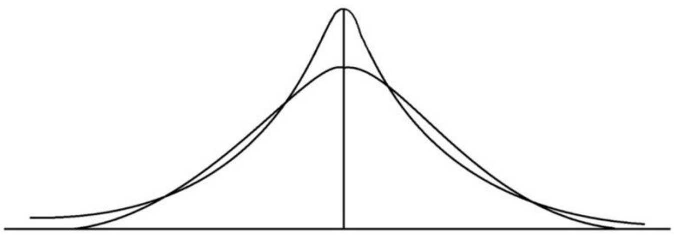
ÇARPIKLIK VE BASIKLIK

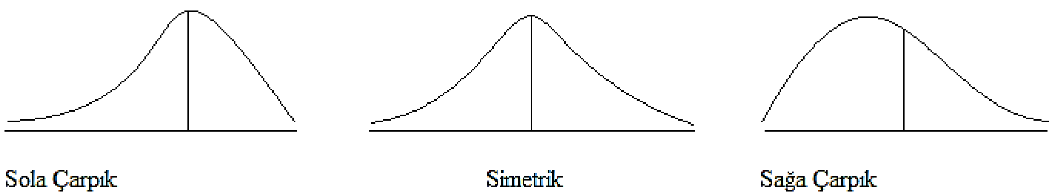
DAĞILIM BİÇİMLERİ

Serinin betimlenmesinde ortalama ve değişkenlik ölçüleri yeterli olmayabilir. Örneğin aşağıdaki şekilde verilen iki frekans dağılımı, aynı ortalama ve aynı standart sapma ölçülerine sahiptir. Ancak serilerden biri basık diğeri diktir. Bununla birlikte her iki seride simetrik olma özelliğine sahiptir.

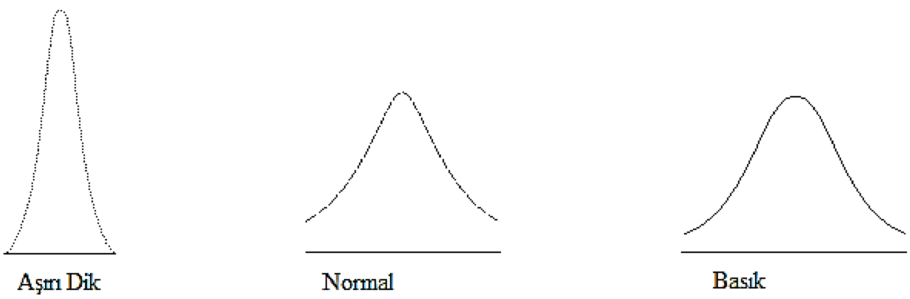


Şekil 5.1.
Basık ve Dik Seriler

Bir frekans serisinde frekansların dağılımlarının simetrik olup olmaması ve frekans dağılımının dik veya basık olması sırasıyla çarpıklık ve basıklık ölçüleriyle ölçülebilir. Çarpıklık açısından bir seri de şu üç durum ortaya çıkabilir. Sola çarpıklık (negatif asimetri), simetrik, sağa çarpık (pozitif asimetri). Aşağıdaki bu üç duruma ilişkin şekiller görülmektedir.



Şekil 5.2.
Çarpıklık Açısından Üç Ayrı Durum



Şekil 5.3.
Basıklık Açısından Üç Ayrı Durum

Basıklık açısından ise yine üç durumdan söz edilebilir. Dik durum, Normal durum, Basık durum. Yukarıda bu üç duruma ilişkin şekiller görülmektedir.

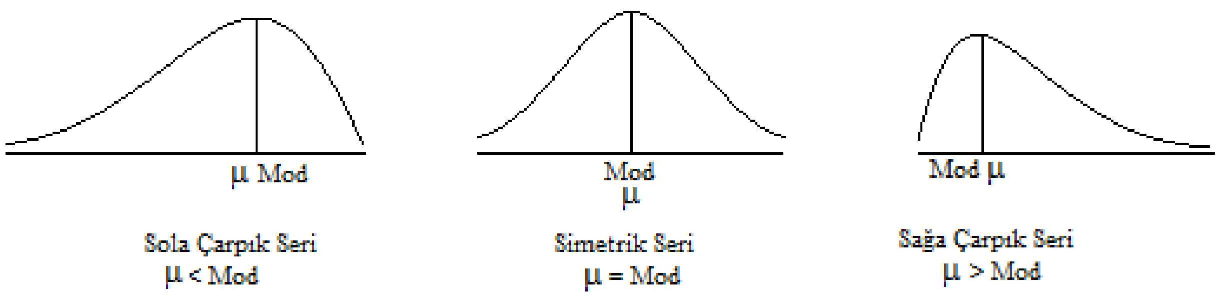
Frekans genişliğinin varyans ile doğru orantılı olduğu sezilebilir. Frekans eğrisi genişledikçe varyans artar. Frekans eğrisi daraldığı ölçüde varyans küçülür. Çarpıklık ve basıklık için yukarıda sayılan üç durum uç(aşırı) halleri belirtilmek içindir. Elbette bu uç hallerin arasında sayısız ara haller mevcuttur. Bu sayısız hallerin biriyle mukayese edilebilmesi için çarpıklık ve baskınlığın sayısal ölçülerini bulmak gerekir.

ÇARPIKLIK ÖLÇÜLERİ

Çarpıklığın sayısal olarak ölçülmesini sağlayan, biri Pearson tarafından geliştirilmiş ortalamalara dayanan ve diğerleri Bowley tarafından geliştirilmiş kartillere dayanan ölçü olmak üzere, iki ölçüye yer verilmiştir.

PEARSON ÇARPIKLIK ÖLÇÜSÜ

Simetrik bir frekans dağılımında aritmetik ortalama ile mod çakışır. Sola çarpık bir seride frekansların çoğunluğu modun solunda yer aldığından serideki değerlerin çoğu moddan küçük demektir ve aritmetik ortalama moddan daha küçük olur. Bunun tersine olarak, sağa çarpık bir seride ise aritmetik ortalama moddan büyük çıkar.



Şekil 5.4.
Çarpıklığın Ortalamalarla Yorumu

Şu halde (μ-*Mod*) farkı çarpıklık için bir ölçüdür. Fakat bunun standart sapma ile ölçeklendirilmesi gerekir. Böylece Pearson asimetri ölçüsü,

$$As = \frac{\mu - Mod}{\sigma}$$

biçiminde elde edilir. Bu ölçünün, simetrik serilerde sıfır, sola çarpık serilerde negatif, sağa çarpık serilerde ise pozitif çıkacağı tabiidir. Bir frekans serisinde medyan daima mod ile aritmetik ortalama arasında, fakat aritmetik ortalamaya daha yakın, yer alır. Aşırı asimetrik olmayan serilerde ($\bar{X}$ - Mod) farkı ($\bar{X}$ - Me) farkının yaklaşık üç katıdır. Bu bilgiden hareketle, bir seride mod hesabının zor olduğu durumlarda Pearson asimetri ölçüsü medyan yardımıyla,

$$As = \frac{3(\mu - Me)}{\sigma}$$

Formül ile yaklaşık olarak hesaplanabilir. Pearson asimetri ölçüsünün değişim aralığı teorik olarak artı-eksi 3 ise de uygulamalarda çoğu kez artı-eksi 1 aralığında değişmektedir.1'e yakın değerler serinin daha fazla asimetrik olduğunu gösterir.

ÖRNEK 1:

Bir önceki bölümde verilen X, Y ve Z frekans serilerinin bu kez çarpıklığını inceleyelim.

X	f_1
50-60	5
60-70	8
70-80	12
80-90	20
90-100	5

Y	f_2
50-60	5
60-70	10
70-80	20
80-90	10
90-100	5

Z	f_3
50-60	5
60-70	20
70-80	12
80-90	8
90-100	5

X serisi: frekansların çoğu mod grubundan önce yani mod grubunun solunda yer aldığından, sola çarpık, negatif asimetrik bir seridir.

Y serisi : frekanslar mod grubuna göre simetrik olduğundan çarpık olmayan, yani simetrik bir seridir.

Z serisi: frekansların çoğu mod grubundan sonra yani mod grubunun sağında yer aldığından sağa çarpık, pozitif asimetrik bir seridir.

Bu üç seri için ara sonuçlar ve asimetri ölçüleri şöyledir.

Ölçüler	X serisi	Yserisi	Z serisi
μ	77.4	75.0	72.6
Mod	82.9	75.0	67.1
Me	80.0	75.0	70.0
σ	11.4	10.9	11.4
As = $\frac{\mu - Mod}{\sigma}$	-0.48	0.0	0.48
As= $\frac{3(\mu - Me)}{\sigma}$	-0.68	0.0	0.68

Bu verilere göre X serisi 0.48 şiddetinde negatif asimetrik, Yserisi simetrik, Z serisinin de 0.48 şiddetinde pozitif asimetriktir. Ters yönde olmakla birlikte X ve Y serilerinin aynı oranda çarpıktırlar.

5.3. MOMENTLER

Momentler bazen tek başına istatistiksel bir anlamı olan, bazen de başka istatistiksel ölçüler içerisinde ara değer olarak kullanılan, bir seriye ilişkin analitik formüllerdir. Basit, sınıflandırılmış ve gruplandırılmış bir seri için genel moment formüllü sırasıyla,

$$\mu_r = \frac{\Sigma(X - \theta)^r}{N} \qquad \mu_r = \frac{\Sigma f_j (X_j - \theta)^r}{\Sigma f_j} \qquad \mu_r = \frac{\Sigma f_j (\bar{X}_j - \theta)^r}{\Sigma f_j}$$

şeklinde yazılır ve X serisinin θ ya göre r inci mertebeden momenti adı verilir. Teorik olarak θ yerine herhangi bir rakam yazılabilirse de uygulamada $\theta = 0$ veya $\theta = \mu$ olarak alınır ki,

sıfır alındığında sıfıra göre moment, μ alındığında ortalamaya göre moment adı verilir. Sıfıra göre momentler M_r ortalamaya göre momentler ise μ_r ile gösterilir.

SIFIRA GÖRE MOMENTLER

Sıfıra göre moment alınırken tabiatiyle parantez içerisinde sıfırı göstermeye gerek kalmaz. Böylece m_r ile gösterilen r inci mertebeden sıfıra göre moment formülü basit, sınıflanmış ve gruplanmış seriler için sırasıyla

$$\mathrm{M_r} = \frac{\Sigma \mathrm{X^r}}{\mathrm{N}} \qquad \mathrm{M_r} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j X_j^r}}{\Sigma \mathrm{f_j}} \qquad \mathrm{M_r} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j m_j^r}}{\Sigma \mathrm{f_j}}$$

Sıfıra göre momentler r=1,2,3,4 mertebeleri için aşağıda gösterilmiştir.

Tablo incelendiğinde görülür ki, birinci mertebeden moment, aritmetik ortalamaya, ikinci mertebeden moment, karesel ortalamanın karesine eşittir.

Mertebe	**Basit seri**	**Sıfırlanmış Seri**	**Gruplanmış Seri**
r = 1	$\mathrm{M_1} = \frac{\Sigma \mathrm{X}}{\mathrm{N}}$	$\mathrm{M_r} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j X_j}}{\Sigma \mathrm{f_j}}$	$\mathrm{M_1} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j m_j}}{\Sigma \mathrm{f_j}}$
r = 2	$\mathrm{M_2} = \frac{\Sigma X^2}{\mathrm{N}}$	$\mathrm{M_2} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j X_j^2}}{\Sigma \mathrm{f_j}}$	$\mathrm{M_2} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j m_j^2}}{\Sigma \mathrm{f_j}}$
r = 3	$\mathrm{M_3} = \frac{\Sigma X^3}{\mathrm{N}}$	$\mathrm{M_3} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j X_j^3}}{\Sigma \mathrm{f_j}}$	$\mathrm{M_3} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j m_j^3}}{\Sigma \mathrm{f_j}}$
r = 4	$\mathrm{M_4} = \frac{\Sigma X^4}{\mathrm{N}}$	$\mathrm{M_4} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j X_j^4}}{\Sigma \mathrm{f_j}}$	$\mathrm{M_4} = \frac{\Sigma \mathrm{f_j m_j^4}}{\Sigma \mathrm{f_j}}$

ORTALAMAYA GÖRE MOMENTLER

Aritmetik ortalamayı μ ile simgelersek aritmetik ortalamaya göre momentlerin genel formülü basit, sınıflandırılmış ve gruplandırılmış seriler için sırasıyla şöyledir.

$$\mathrm{\mu_r} = \frac{\Sigma(X-\mu)^r}{\mathrm{N}} \qquad \mathrm{\mu_r} = \frac{\Sigma f_j (X_j-\mu)^r}{\Sigma f_j} \qquad \mathrm{\mu_r} = \frac{\Sigma f_j (m_j-\mu)^r}{\Sigma f_j}$$

r=1, 2, 3, 4 mertebeleri için ortalamaya göre momentler şöyledir:

Basit Seri	**Sınıflanmış Seri**	**Gruplanmış Seri**
$\mu_1 = \dfrac{\Sigma(X-\mu)}{N}$	$\mu_1 = \dfrac{\Sigma f_j(X_j-\mu)}{\Sigma f_j}$	$\mu_1 = \dfrac{\Sigma f_j(m_j-\mu)}{\Sigma f_j}$
$\mu_2 = \dfrac{\Sigma(X-\mu)^2}{N}$	$\mu_2 = \dfrac{\Sigma f_j(X_j-\mu)^2}{\Sigma f_j}$	$\mu_2 = \dfrac{\Sigma f_j(m_j-\mu)^2}{\Sigma f_j}$
$\mu_3 = \dfrac{\Sigma(X-\mu)^3}{N}$	$\mu_3 = \dfrac{\Sigma f_j(X_j-\mu)^3}{\Sigma f_j}$	$\mu_3 = \dfrac{\Sigma f_j(m_j-\mu)^3}{\Sigma f_j}$
$\mu_4 = \dfrac{\Sigma(X-\mu)^4}{N}$	$\mu_4 = \dfrac{\Sigma f_j(X_j-\mu)^4}{\Sigma f_j}$	$\mu_4 = \dfrac{\Sigma f_j(m_j-\mu)^4}{\Sigma f_j}$

Aritmetik ortalamadan sapmaların sıfır olmasından dolayı birinci mertebeden momentlerin sıfır olduğu, ayrıca ortalamaya göre ikinci mertebeden momentlerin varyansa eşit olduğu açıktır.