YMH 214 SAYISAL ANALİZ

Dr. Öğretim Üyesi Bihter DAŞ

Fırat Üniversitesi Teknoloji Fakültesi Yazılım Mühendisliği

14.Hafta

Differensiyel Denklemlerin Çözümü

- Taylor Serisi
- Euler yöntemi
- Runge Kutta yöntemi

Differensiyel Denklemlerin Çözümü

- Değişen dünyayı tanımlamak için türev içeren denklemler kullanılmaktadır.
- Mühendislik sistemlerinin analizinde ve uygulamalı disiplinlerde türev içeren diferansiyel denklemlerin çözümü büyük öneme sahiptir.
- Bir sınır değer ve/veya başlangıç değer formunda olan bu denklemlerin analitik çözümü çoğu durumda mümkün değildir.
- İstenilen yaklaşık değerde çözümler elde etmek için geliştirilen sayısal yöntemlerin birbirlerine göre avantaj ve dezavantajları vardır.

Taylor Serisi

- Bir fonksiyon sonsuz kere türevlenebilir ise, o fonksiyon seri şeklinde yazılabilmektedir.
- Bir fonksiyonun terimlerinin x=x0 noktadaki türev değerlerinden hesaplanan sonsuz toplamı şeklinde yazılması şeklindeki gösterimi/açılımıdır.

$$F(x)=\underbrace{f(x0)}_{1.\,\text{Terim}}+\underbrace{f'(x0).(x-x0)}_{2.\,\text{Terim}}+\underbrace{f''(x0).\frac{(x-x0)2}{2!}}_{3.\,\text{Terim}}+\underbrace{f'''(x0).\frac{(x-x0)^3}{3!}}_{4.\,\text{Terim}}+\ldots$$

Taylor Serisi

Soru 1 : $f(x)=e^x$ fonksiyonunun x0=1 noktasında taylor serisinin ilk dört terimini yazınız.

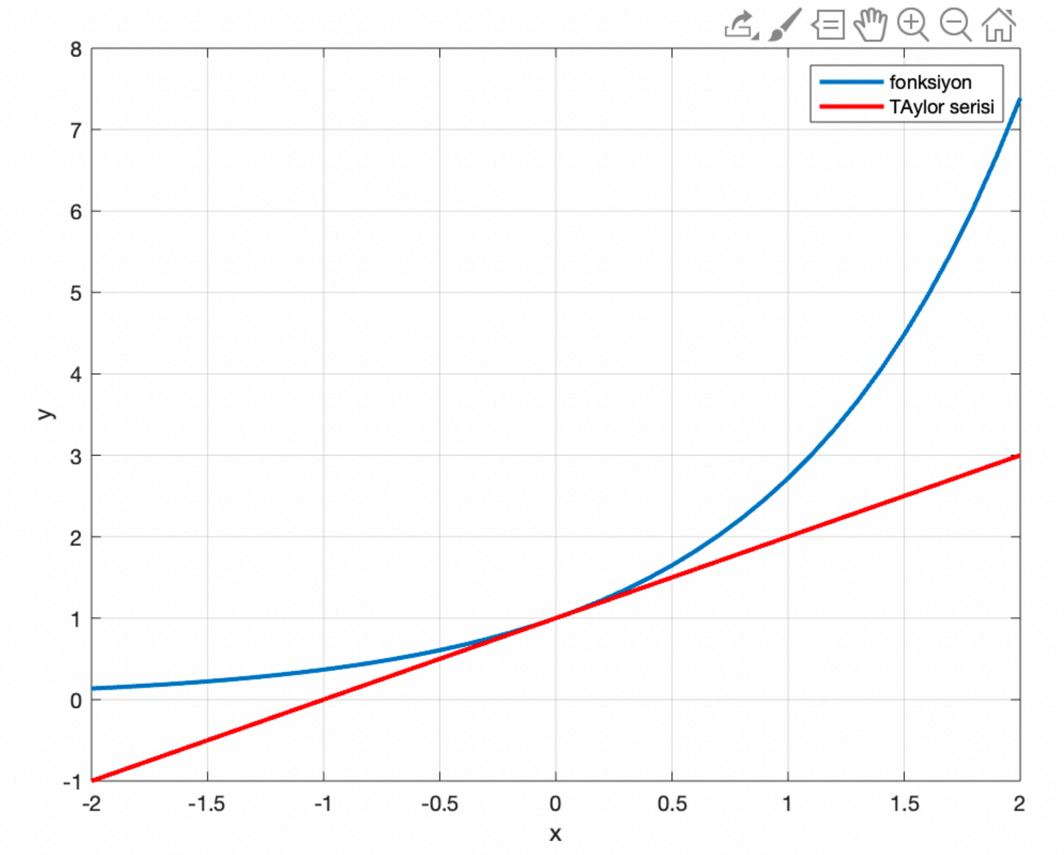
$$F(x)=f(1)+f'(1).(x-1)+f''(1).\frac{(x-1)^2}{2!}+f'''(1).\frac{(x-1)^3}{3!}$$

$$=e+e(x-1)+e\frac{(x-1)2}{2}+e\frac{(x-1)3}{6}$$

Taylor Serisi için Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc;
x=-2:0.1:2;
y=exp(x);
fig=figure();
set(fig,'color','white')
plot(x,y,'linewidth',2)
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
N=1;
tay=0*y;
for n=0:N
    tay=tay+(x.^n)/factorial(n);
end
hold on
plot(x,tay,'r-','Linewidth',2)
legend('fonksiyon', 'TAylor serisi')
```

Ekran Çıktısı



Euler Yöntemi

- Başlangıç değer problemlerin çözümünde en basit tekniktir.
- Taylor serisinin ilk 2 adımının alınmasıyla oluşturulmuştur.

$$\boxed{y(x_i+1)=y(x_i)+y'(x_i)\Delta x} + y''(xi).\ \frac{\Delta x^{2}}{2!}\ \ldots$$

- Bazı sorularda $y(x_i)=y_i$ $\quad y'=f'(x,y)$ şeklinde karşınıza çıkabilir.

Euler Yöntemi

Soru 1:

$\frac{dy}{dx}$ - 2y=1 y(0)=0.5 başlangıç değer problemini h= Δx =0.1 değerini y(0.2) deki çözümünü Euler metodu ile hesaplayınız.

Euler Formülü:

$\mathbf{y(x_i+} \Delta x) = y(x_i) + y'(x_i)\, \Delta x$

$y(0+0.1)=y(0)+ y'(0)\ 0.1$

$y(0.1)=0.5+2*0.1$

$y(0.1)=0.7$

Yeni $x_i=0.1$ $y_i=0.7$

$y(0.2)=y(0.1)+y'(0.1)\ 0.1$

$y(0.2)=0.7+2.4*0.1$

$y(0.2)=0.7+0.24$

$y(0.2)=0.94$

Euler Yöntemi Matlab Çözümü

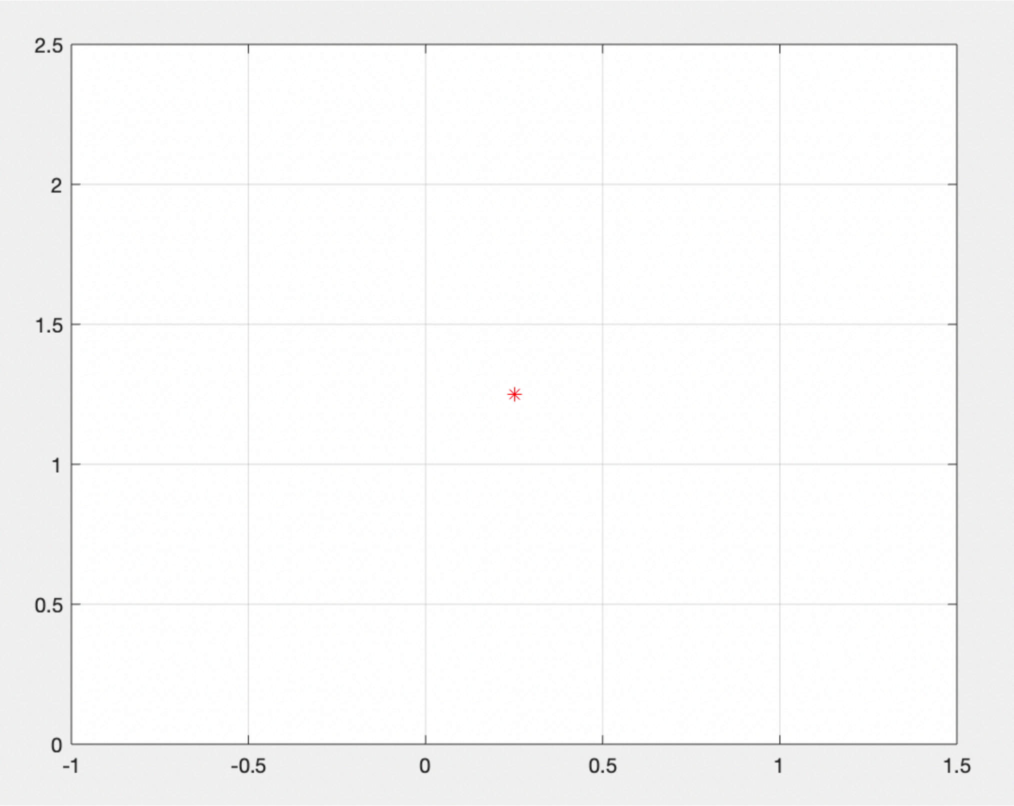
```
clear all;close all;clc;
fprintf('dy/dx+x-y=0 fonksiyonun Euler yöntemi ile  yaklaşık çözümünü bulma\n');
a=-1;
h=0.25;
y0=1;
x0=0;
for i=0.0.25:1-0.25
    x1=x0+h;
    s0=-x0+y0;
    y1=y0+h*s0;
    x0=x1;
    y0=y1;
    plot(x0,y0,'--r*');
    hold on
    grid on
end
```

Ekran Çıktısı

```
dy/dx+x-y=0 fonksiyonun Euler yöntemi ile  yaklaşık çözümünü bulma

ans =

    0.2500
```



Runge Kutta Yöntemi

- Alman matematikçiler Carl Runge ve Wilhelm Kutta tarafından geliştirilen Runge-Kutta yöntemlerinin formülasyonunda bazı fonksiyonların Taylor seri açılımları kullanılmaktadır.

- Başlangıç değer problemleri için 1. derece adi differensiyel denklemlerin sayısal çözümünde kullanılan bir tekniktir.
- Euler yöntemindeki formülde;

$\boxed{y(x_i+1)=y(x_i)+y'(x_i)\Delta x}$ $y'(x_i)$ yerine ϕ artış fonksiyonu kullanılır.

$y(x_i+1)=y(x_i)+\phi\,\Delta x$

Artış fonksiyonu için;

$k_1=h(fx_0,y_0)$

$k_2=hf(x_i+0.5h,y_i+0.5k_1)$ $y_1=y_0+k_2$ $x_1=x_0+2*h$

Soru1:

$y' = x+y$ denklemini $y(0)=2$, $h=0.5$ ve $n=2$ için Runge Kutta yöntemiyle hesaplayınız.

- $k_1=hf(x_0,y_0)=0.5.\ (0+2)=1$
- $k_2=hf(x_0+0.5h,\ y_0+0.5k_1)=0.5(0+0.5*0.5,\ 2+0.5*1)=1.375$

$y_1=y_0+k_2=2+1.375=3.375$ $x_1=x_0+2*h=0+2*0.5=1$

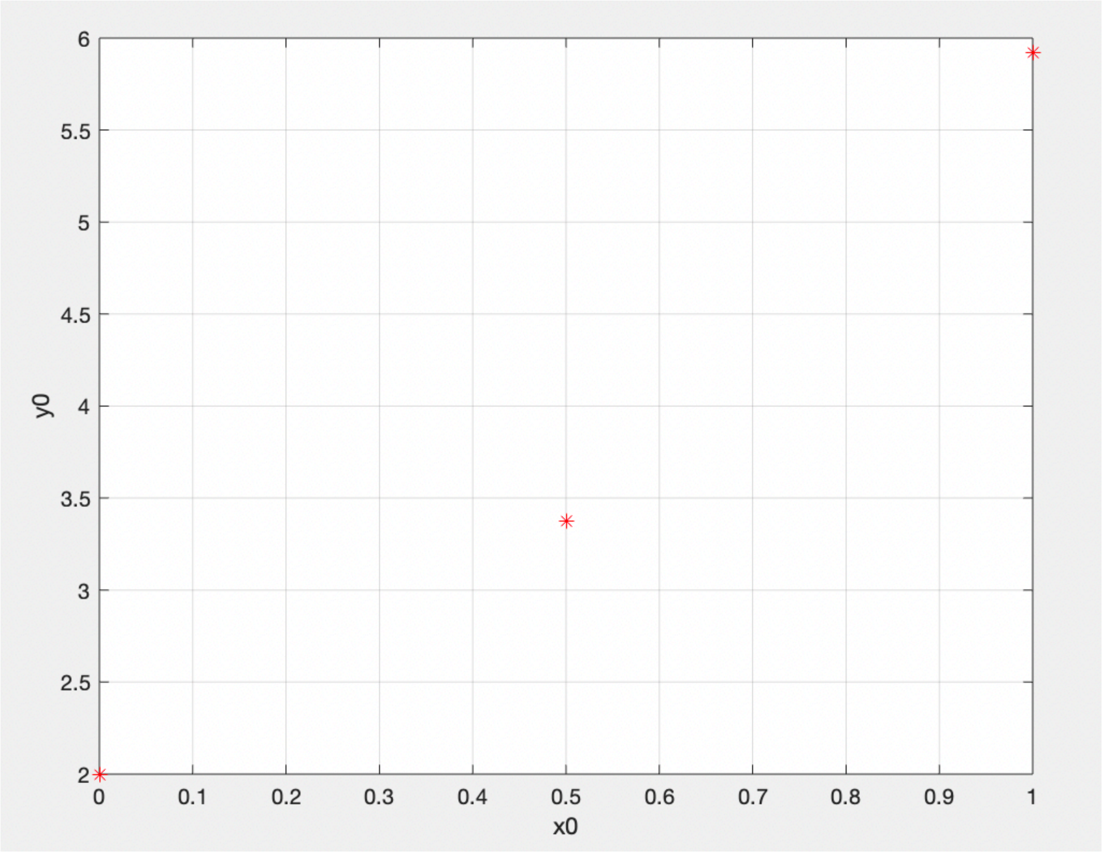
- $k_1=h(fx_1,y_1)$
- $k_2=hf(x_1+0.5h,\ y_1+0.5k_1)$

$y_2=y_1+k_2$

Runge Kutta Matlab Çözümü

```
clear all;close all;clc;
y0=2;
a=0;
b=1;
n=2;
h=(b-a)/2;
for x0=0:h:1
    k1=h*(x0+y0);
    k2=h*(x0+0.5*h+y0+k1*0.5);
    y1=y0+k2;
    plot(x0,y0,'--r*');
    hold on
    grid on
    xlabel('x0');
    ylabel('y0');
    y0=y1
end
```

Ekran Çıktısı




```
y0 =

    3.3750

y0 =

    5.9219

y0 =

   10.3730
```