Homogen Denklem Sistemi ve Çözümü

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

veya

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

denklem sistemine homogen denklem sistemi denir.

(4) nolu Denklem Sisteminin Çözümü

Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı 0 dan farklı ise $x_1 = x_2 = x_3 \ldots x_n = 0$ aşikar çözümü vardır. Aksi takdirde yani $\det A = 0$ ise daha önceki metotda gördüğümüz gibi rankı hesaplanıp aşikar olmayan çözümleri de elde edilir. (Aşikar olanlar da dahildir.)

(5) nolu Denklem Sisteminin Çözümü

(5) nolu homogen denklem sisteminin çözümü de $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ aşikar çözümlerinin yanında aşikar olmayan çözümleri de bulunacaktır.

Örnek 9.29.

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

$x_1 + 3x_2 - x_3 = 0,$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 3}$

$r = 2,\quad n = 3,$ ve $n - r = 3 - 2 = 1$ adet bilinmeyen keyfi seçilir. $x_3 = k$ dersek,

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$ aşikar çözümleri yanında

$$\begin{aligned} & 2x_1 - x_2 = -3k \\ + \; & x_1 + 3x_2 = k \\ \hline & 6x_1 - 3x_2 = -9k \\ + \; & x_1 + 3x_2 = k \\ \hline \end{aligned}$$

$7x_1 = -8k \Rightarrow x_1 = -\dfrac{8k}{7},\; x_2 = \dfrac{5k}{7},\; x_3 = k$

KARAKTERİSTİK DEĞERLER VE KARAKTERİSTİK VEKTÖRLER

Tanım 9.20. A herhangi bir karesel matris $\lambda \in R$, I_n de A nın mertebesinde birim matris olmak üzere

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

denklemine karakteristik denklem, bu denklemin kökleri olan $\lambda \in R$ değerlerine de verilen matrisin **karakteristik değerleri** adı verilir.

Elde edilen bu karakteristik değerlere karşılık gelen

$A\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha}$ eşitliğini sağlayan $\vec{\alpha}$ vektörlerine de **karakteristik vektörler** adı verilir.

Örnek 9.30.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrisinin karakteristik değerlerini ve karşılık gelen karakteristik vektörleri bulalım.

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{array}$$

$\lambda = 1$ için $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

$$A\vec{\alpha} = 1.\vec{\alpha} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 - \alpha_3 = \alpha_1 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_3 + \alpha_3 = \alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = -\alpha_2$$

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = \alpha_3$$

$\vec{\alpha} = (\alpha_1, -\alpha_1, 0)$ $\quad \alpha_1 = k$ dersek $\vec{\alpha} = (k,\ -k,\ 0)$ olur.

$\lambda = 2$ için $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$A.\vec{\beta} = 2\vec{\beta} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$\beta_1 - \beta_3 = 2\beta_1 \qquad \Rightarrow -\beta_3 = \beta_1$$

$$\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 = 2\beta_2 \quad \Rightarrow \beta_2 = \frac{\beta_3}{2}$$

$$2\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 = 2\beta_3 \quad \Rightarrow \beta_2 = -\frac{\beta_1}{2}$$

$\vec{\beta} = \left(\beta_1, -\frac{1}{2}\beta_1, -\beta_1\right)$ $\quad \beta_1 = t$ dersek $\vec{\beta} = \left(t, -\frac{t}{2}, -t\right)$ olur.

$\lambda = 3$ için $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$$A\vec{\gamma} = 3\vec{\gamma} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \gamma_1 - \gamma_3 = 3\gamma_1 \Rightarrow \gamma_3 = -2\gamma_1$$

$$\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 = \gamma_2$$

$$2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 3\gamma_3 = 3\gamma_3 \qquad \vec{\gamma} = (\gamma_1, -\gamma_2, -2\gamma_1)$$

$$\gamma_1 = -\gamma_2 \qquad \gamma_1 = x \text{ dersek}$$

$$\vec{\gamma} = (x, -x, -2x)$$

Cebirsel Denklemlerin Köklerinin Bulunması

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ denklemi katsayıları (a_i) birer rasyonel sayı olan n. dereceden bir denklem olsun katsayıları rasyonel olan bu denklemin katsayılarının ekok'u bulunur. Denklemin her iki tarafı bu ekok ile çarpılır. Böylece denklem katsayıları tamsayı olan cebirsel bir denkleme dönüşür. Bu denklemin rasyonel bir kökü $x_0 = \frac{p}{q}$ olsun

Kök, denklemi sağlayacağından,

$$a_0\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0 \text{ veya}$$

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \ldots + a_{n-1}\, p q^{n-1} + a_n q^n = 0$$

Burada her terim birer tamsayıdır. p ve q aralarında asal olduklarından ve her terimde $p.q$ bulunduğundan (ilk ve son terimler hariç) buna göre; p, $a_n.q_n$ terimlerinde a_n i bölmesi gerekir bu nedenle a_n nin bölenlerinden biri p tamsayıdır.

Aynı şekilde düşünülürse q nun da $a_0 p^n$ teriminde a_0 bölmesi gerekir. Böylece a_0 ın bölenlerinden biri q tamsayısıdır.

Bu sonuçlara göre kökleri bulmak için a_0 ve a_n in bölenleri bulunduktan sonra bu iki cümleyi göz önüne alarak $x = \dfrac{p}{q}$ cümlesi oluşturulur. Kökler bu cümle içerisindedir.

Deneme-yanılma metoduyla köklerden bir ya da birkaçı bulunduktan sonra verilen cebirsel denklem çarpanlarına ayrılarak en son 2. dereceden cebirsel denklemin kanonik formuna dönüştürülerek geri kalan iki kök de bulunmuş olur.

Örnek 9.31. $2x^3 - 7x^2 - 10x + 24 = 0$

p, 24 ün bölenlerinden biri $= \{\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 6, \mp 8, \mp 12, \mp 24\}$

q, 2 nin bölenlerinden biri $= \{\pm 1, \mp 2\}$

$$x = \frac{p}{q} = \left\{\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 6, \mp 12, \mp 24, \mp\frac{1}{2}, \mp\frac{3}{2}\right\}$$

	2	−7	−10	24
4	.	8	4	−24
	2	1	−6	0
−2		−4	6	
	2	−3	0	

$\rightarrow 2x^3 - 7x^2 - 10x + 24 = (x-4)(2x^2 + x - 6) = 0$

$\rightarrow 2x - 3 = 0$

$x = \dfrac{3}{2}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$

Örnek 9.32.

$$x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$$

p, 12 nin bölenlerinden $=\{\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 6, \mp 12\}$

p, -1 in bölenlerinden $=\{\mp 1\}$

$$x=\frac{p}{q}=\{\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \mp 6, \mp 12\}$$

2	1	−2	−7	8	12
	.	2	0	−14	−12
−2	1	0	−7	6	0
	.	−2	4	6	
−1	1	0	−2	3	0
	.	−1	3		
	1	−3		0	

$x-3=0 \quad x=3$

$$x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0=(x-2)(x+1)(x-3)=0$$

$$x_1=2\,,\ x_2=-2\,,\ x_3=-1\,,\ x=3$$

Örnek 9.33.

$$x^3-x^2-4x-6=0=(x-3)\overbrace{(x^2+2x+2)}^{\Delta=b^2-4ac\,=\,4-4(1).2\,<\,0}=0 \text{ başka reel kök yok}$$

p, 6 nın $b.b=\{\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 6\}$

q, 1 in $b.b=\{\mp 1\}$

$$x=\frac{p}{q}=\{\mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 6\}$$

3	1	−1	−4	6
	.	3	6	6
	1	2	2	0

Örnek 9.34.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}$$ Matrisinin karakteristik değerleri ve karşı gelen karakteristik vektörlerini bulunuz

$$\det\left(\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}2-\lambda & -2 & -1\\ -2 & 2-\lambda & 1\\ -1 & 1 & 5-\lambda\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}2-\lambda & -2 & -1\\ -2 & 2-\lambda & 1\\ -1 & 1 & 5-\lambda\end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix}2-\lambda & -2 & 1\\ -2 & 2\lambda & 1\end{matrix}$$

$$\Rightarrow [(2-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda)+4)-((2-\lambda)+(2-\lambda)4(5-\lambda)]$$

$$[(\lambda 2-4\lambda+4)(5-\lambda)+4)-(24-6\lambda)]$$

$$5\lambda^2-20\lambda+20-\lambda^3+4\lambda^2=\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2=3\\ \lambda_3=6\end{cases}$$

$\lambda=0$ için $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$A\vec{\alpha}=0.\vec{\alpha}=\vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & -1\\ -2 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}2\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3=0\\ -2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0\\ -\alpha_3+\alpha_2+5\alpha_3=0\end{matrix}$$

$rankA=2$

$n-r=3-2=1$ adet bilinmeyeni keyfi seçeriz. $\alpha_2=k$ dersek

$$2\alpha_1-\alpha_3=2k$$

$$-\alpha_1+5\alpha_3=-k$$

$$2\alpha_1-\alpha_3=2k$$

$$-2\alpha_1+10\alpha_3=-2k$$

$\alpha_3 = 0$

$2\alpha_3 - 2k = 0$

$\alpha_1 = k \Rightarrow \vec{\alpha} = (k, k, 0)$

$\lambda = 3$ için $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\beta_1 \\ 3\beta_2 \\ 3\beta_3 \end{bmatrix}$$

$2\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3 = 3\beta_1$

$-2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 = 3\beta_2$

$-\beta_1 + \beta_2 + 5\beta_3 = 3\beta_3$

$2\beta_2 + \beta_3 = -\beta_1$

$-2\beta_1 + \beta_3 = \beta_2$

$\beta_2 - \beta_1 = -2\beta_3$

$-\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3 = 0$

$-2\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 0$ $\qquad \beta = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$-\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = 0$

det $\beta = 0$ olduğundan $rank\beta$ ya bakılır..

$2\beta_2 + \beta_3 = -\beta_1$

$-2\beta_1 + \beta_3 = \beta_2$

$\beta_2 - \beta_1 = -2\beta_3$

$2\beta_2 + \beta_3 = -\beta_1$

$2\beta_1 - \beta_3 = -\beta_2$

$2\beta_2 + 2\beta_1 = -\beta_1 - \beta_2$

$\vec{\beta} = (k, -k, k)$

$3\beta_2 = -3\beta_1$

$\beta_2 = -\beta_1$

$\beta_1 = k \quad \beta_2 = -k$

$\beta_3 = k \Rightarrow \vec{\beta} = (k, -k, k)$

$\lambda = 6$ için $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$A\gamma = \lambda.\gamma$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\gamma_1 \\ 6\gamma_2 \\ 6\gamma_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2\gamma_1 - 2\gamma_2 - \gamma_3 = 6\gamma_1 \\ -2\gamma_1 + 2\gamma_2 + \gamma_3 = 6\gamma_2 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + 5\gamma_3 = 6\gamma_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -4\gamma_1 - 2\gamma_2 - \gamma_3 = 0 \\ -2\gamma_1 - 4\gamma_2 + \gamma_3 = 0 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 = 0 \end{matrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det\gamma = \begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-16+2+2) - (-4-4-4) = 0$$

$$\begin{matrix} -4 & -2 & -1 \\ -2 & -4 & 1 \end{matrix}$$

$rankA = 2, \quad \gamma_3 = k$ olduğundan

$-4\gamma_1 - 2\gamma_2 - k = 0 \qquad -4\gamma_1 - 2\gamma_2 - k = 0$

$-2\gamma_1 - 4\gamma_2 + k = 0 \Rightarrow -2\gamma_1 - 4\gamma_2 = -k$

$-\gamma_1 + \gamma_2 - k = 0 \qquad + \; 2\gamma_1 - 2\gamma_2 = -2k$

$-6\gamma_2 = -3k$

$-2\gamma = k \qquad \gamma_2 = -\dfrac{k}{2} \qquad \gamma_3 = k$

$-4\gamma_1 + 2\dfrac{k}{2} - k = 0, \quad \gamma_1 = 0 \Rightarrow \vec{\gamma} = \left(0, \; -\dfrac{k}{2}, \; k\right)$