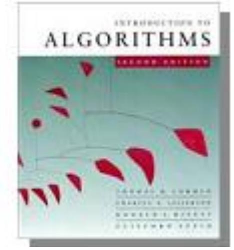
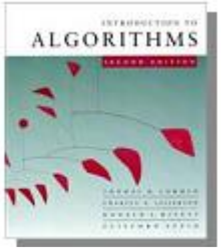
3.Hafta
Master Teorem ve Böl-Fethet Metodu



Ana Metod (The Master Method)

- Ana method aşağıda belirtilen yapıdaki yinelemelere uygulanır:
- $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, burada $a \geq 1$, $b > 1$, ve f asimptotik olarak pozitiftir.

- $T(n)$ bir algoritmanın çalışma süresidir.
  - ***n/b*** boyutunda ***a*** tane alt problem recursive olarak çözülür ve her biri ***T(n/b)*** süresindedir.
  - ***f(n)*** problemin bölünmesi ve sonuçların birleştirilmesi için geçen süredir.
  - **Örnek:** Merge-sort için $T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$ yazılabilir.



Ana Metod (The Master Method) Üç yaygın uygulama

$f(n)$'i $n^{\log_b a}$ ile karşılaştırın:

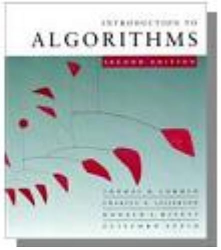
1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ $\varepsilon > 0$ sabiti durumunda;
   - $f(n)$ polinomsal olarak $n^{\log_b a}$ göre daha yavaş büyür(n^{ε} faktörü oranında).

   Çözüm: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$ $k \geq 0$ sabiti durumunda;
   - $f(n)$ ve $n^{\log_b a}$ benzer oranlarda büyürler.

   Çözüm: $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.

Ana Metod (The Master Method) Üç yaygın uygulama



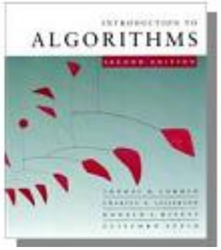
$f(n)$'i $n^{\log_b a}$ ile karşılaştırın:

3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ $\varepsilon > 0$ sabiti durumunda;
   - $f(n)$ polinomsal olarak $n^{\log_b a}$ 'ye göre daha hızlı büyür (n^{ε} faktörü oranında),

ve $f(n)$, ***düzenlilik koşulunu*** $af(n/b) \leq cf(n)$ durumunda, $c < 1$ olmak kaydıyla karşılar.

Çözüm: $T(n) = \Theta(f(n))$.

c=(1-ε), ε >0



Örnekler

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n.$

Durum 1: $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ $\varepsilon = 1$ için.

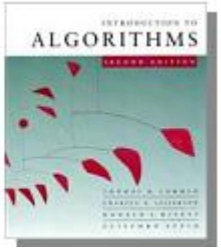
$\therefore\ T(n) = \Theta(n^2).$

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n^2$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^2.$

Durum 2: $f(n) = \Theta(n^2 \lg^0 n)$, yani, $k = 0$.

$\therefore\ T(n) = \Theta(n^2 \lg n).$



Örnekler

Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$

$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^3.$

DURUM 3: $f(n) = \Omega(n^{2+\varepsilon})$ $\varepsilon = 1$ için

ve $4(n/2)^3 \le cn^3$ (düz. koş.) $c = 1/2$ için

$\therefore\ T(n) = \Theta(n^3).$

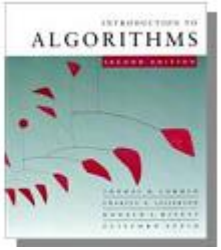
Ör. $T(n) = 4T(n/2) + n^2/\lg n$

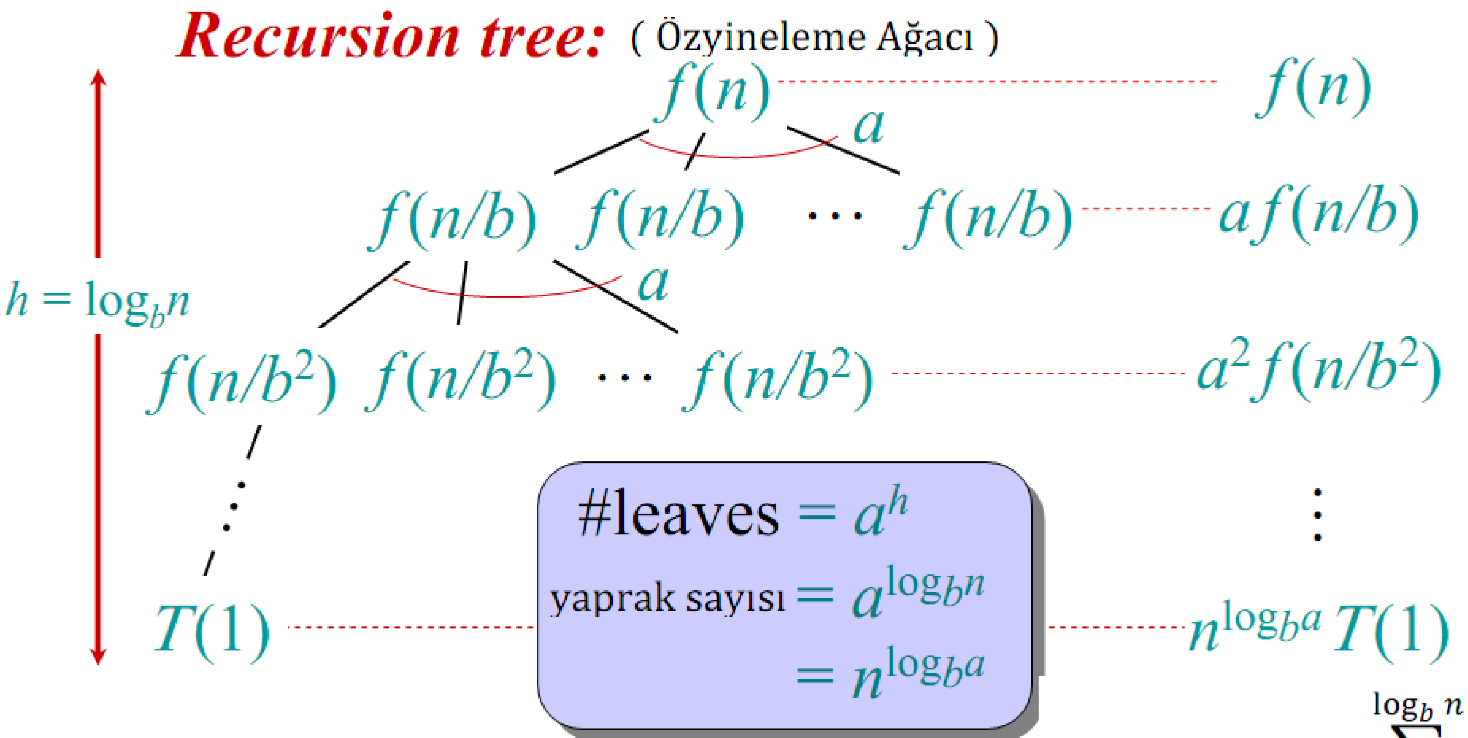
$a = 4,\ b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^2;\ f(n) = n^2/\lg n.$

Ana metod geçerli değil. Özellikle,

$\varepsilon > 0$ olan sabitler için $n^{\varepsilon} = \omega(\lg n)$ elde edilir.

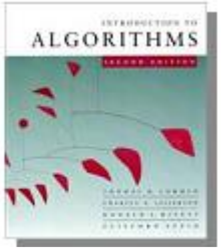
Master teoremdeki düşünce





$$T(n) = n^{\log_b a} + \sum_{j=0}^{\log_b n} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$$

Master teoremdeki düşünce



Yineleme Ağacı:

$h = \log_b n$

$f(n)$ .... $f(n)$

a

$f(n/b) \quad f(n/b) \quad \cdots \quad f(n/b)$ .... $a f(n/b)$

a

$f(n/b^2) \quad f(n/b^2) \quad \cdots \quad f(n/b^2)$ .... $a^2 f(n/b^2)$

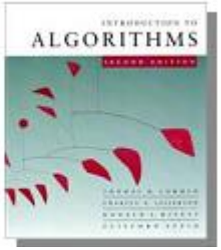
$\vdots$

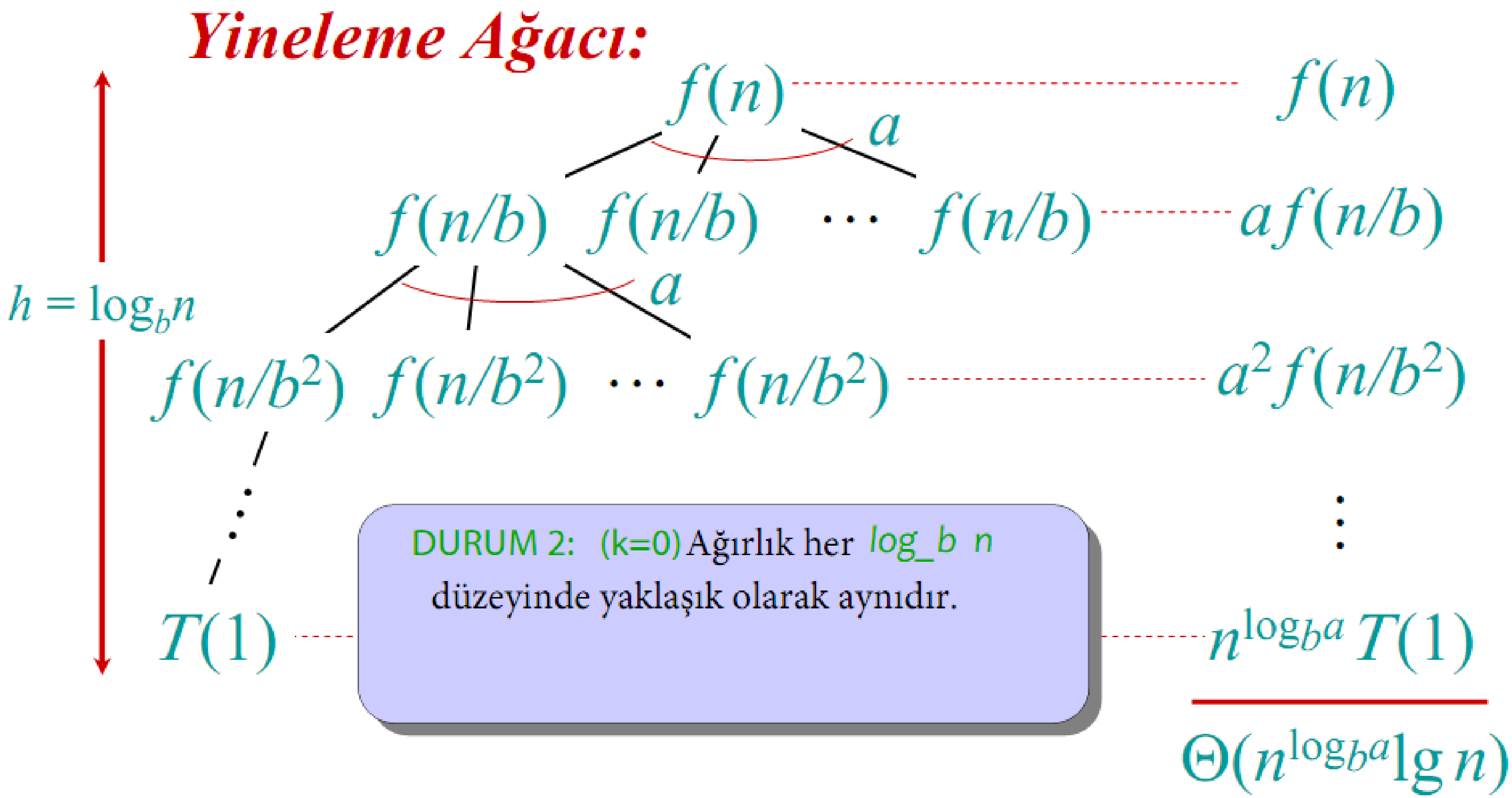
$T(1)$ .... $n^{\log_b a} T(1)$

$\Theta(n^{\log_b a})$

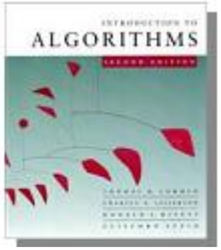
DURUM 1: Ağırlık (weight) kökten yapraklara doğru geometrik olarak artar. Yapraklar toplam ağırlığın sabit bir oranını taşır.

Master teoremdeki düşünce

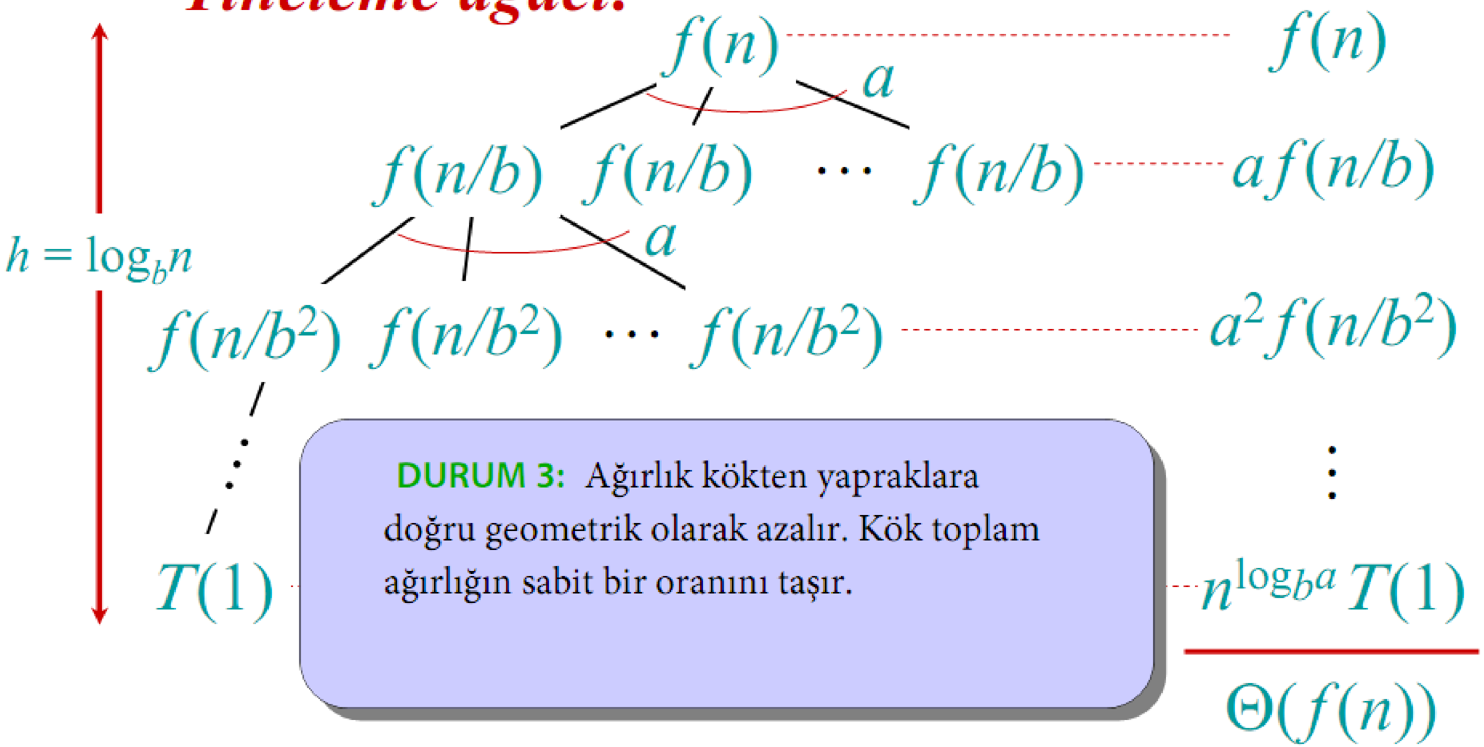




Master teoremdeki düşünce

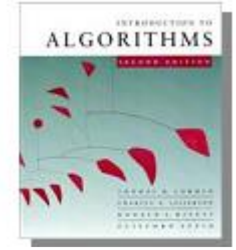


Yineleme ağacı:



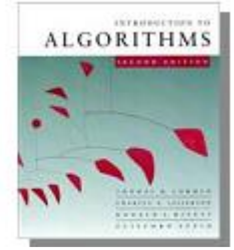
DURUM 3: Ağırlık kökten yapraklara doğru geometrik olarak azalır. Kök toplam ağırlığın sabit bir oranını taşır.

Master teoremi ispat



- **Durum 2:** Eğer $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right), ise\ T(n) = \theta\left(n^{log_b a} logn\right)$
- **İspat:** Eğer $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right), o\ zaman\ f(n) \le cn^{log_b a}\ olur$

- $T(n) = n^{log_b a} + \sum_{j=0}^{log_b n-1} a^j f\left(\frac{n}{b^j}\right)$
- $\le\ n^{log_b a} + c\sum_{j=0}^{log_b n-1} a^j \left(\frac{n}{b^j}\right)^{log_b a}$
- $=\ n^{log_b a} + cn^{log_b a} \sum_{\boxed{j=0}}^{log_b n-1} a^j \left(\frac{1}{b^{log_b a}}\right)^j$ a
- $=\ n^{log_b a} + cn^{log_b a} \sum_{j=0}^{log_b n-1} 1 = n^{log_b a} + cn^{log_b a} log_b n$
- $\le cn^{log_b a} \log n$
- Bu yüzden, $f(n) = \theta\left(n^{log_b a}\right)\ ise\ T(n) = O\left(n^{log_b a} logn\right)$ dir.
- Durum 1 ve Durum 3 te benzerdir.(Önerilen ders kitabını inceleyiniz)



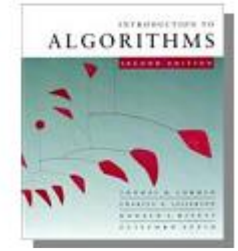
Master teoremi

- **Örnek:** $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n, n \geq 3\ ve\ T(1) = 1$ ise çalışma zamanını bulunuz?

- **Çözüm:** a=9, b=3, $f(n) = n$ ve $n^{log_b a} = n^{log_3 9} = \theta(n^2)$

- **Durum 1:** $f(n) = O(n^{log_3 9 - \varepsilon})$, $\varepsilon = 1$ için

- $T(n) = \theta(n^{log_3 9}) = \theta(n^2)$



Master teoremi

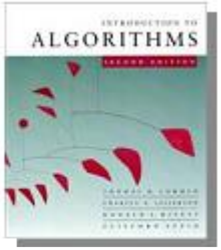
- **Örnek:** $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1, n \geq 3\ ve\ T(2) = 1$ ise çalışma zamanını bulunuz?

- **Çözüm:** a=1, b=3/2 , $f(n) = 1$ ve

  $$n^{log_b a} = n^{log_{3/2} 1} = \theta(n^0)$$

- **Durum 2:** $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n) \quad k \geq 0$

  $$T(n) = \theta(logn)$$



Master teoremi

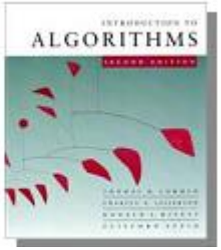
- **Örnek:** $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + nlogn, n \geq 4\ ve\ T(1) = 1$ ise çalışma zamanını bulunuz?

- **Çözüm:** a=3, b=4 , $f(n) = nlogn$ ve

$$n^{log_b a} = n^{log_4 3} = O(n^{0.793})$$

- **Durum 3:** $f(n) = \Omega(n^{log_4 3+\varepsilon})$, burada $\varepsilon \approx 0.2$ için düzenlilik koşulu, *a*f(n/b)≤c*f(n),* büyük *n* değerleri ve *c<1* olmak koşuluyla
- *3(n/4)log(n/4) ≤ (3/4) nlogn, c=3/4<1* için

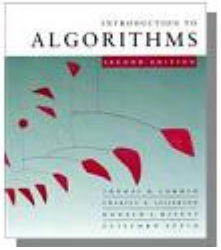
$$T(n) = \theta(nlogn)$$



Master teoremi ispat

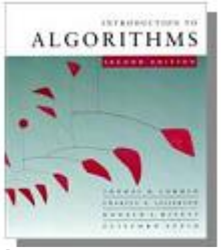
- **Örnek**: $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + nlogn$ için master-metot durumları uygulanmaz?
- Burada *a=2, b=2,* $n^{log_b a} = n^{log_2 2} = O(n)\ ve\ f(n) = nlogn$ dir.
- *f(n),* polinomsal olarak $n^{log_b a}$ göre hızlı büyüdüğünden **Durum 3** uygulanır.
- Büyüme oranı, asimptotik olarak çok büyük olmasına rağmen polinomsal olarak çok ta büyük değildir.
- Büyüme oranı ***f(n)/*** $\boldsymbol{n^{log_b a}}$***=(n logn)/n=logn'*** dir. Bu oran herhangi bir pozitif ε sabiti için n^{ε}' den asimptotik olarak azdır.
- Sonuç olarak çözüm Durum2 ve Durum3 arasına düşer.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Doğrusal Yineleme (Rekürans) Bağıntısı**
- Bir yinelemeli bağıntıda t_n, dizinin önceki terimlerinin katlarının toplamına eşitse doğrusal (lineer) dır. ($t_n \rightarrow$ T(n))
  - $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ doğrusal
  - $t_n = t_{n-1} + t^2_{n-2}$ doğrusal değildir, t^2_{n-2} önceki terimin katı değildir.

- **Homojen Yineleme (Rekürans) Bağıntısı**:
- t_n sadece önceki terimlerin katlarına bağlı ise homojen (türdeş) olarak adlandırılır.
  - $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ homojen
  - $t_n = 2t_{n-1} + 1$ homojen değildir. "+1" terimi t_j katı değildir.

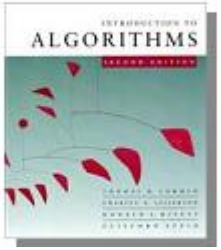


Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme

- Yinelemeli bağıntıdaki terimlerin katsayıları sabit ise; sabit katsayılı homojen doğrusal yineleme formu aşağıdaki gibidir.

$$c_0t_n+c_1t_{n-1}+\ldots+c_kt_{n-k}= 0$$

- Burada,
  - t_i : özyinelemeli bağıntının değerlerini,
  - c_i : sabit katsayılı terimlerini ifade eder.
    - c_i ,reel sayılardır ve $c_i \neq 0$.
  - k : ise özyinelemeli bağıntının derecesidir.



Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme

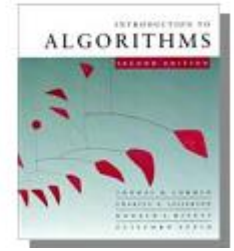
- Doğrusal özyinelemelerde $\boldsymbol{t_{i+j}}$, $\boldsymbol{t_i^2}$ şeklinde terimler bulunmaz.
- Öz yineleme homojendir, çünkü $\boldsymbol{t_i}$ nin doğrusal kombinasyonundan dolayı *0 (sıfır)*' a eşittir.
- Bu öz yinelemeler ***k*** başlangıç koşullarını içerir.

$$t_n=c_0 \quad t_1=c_1 \quad \ldots \quad t_k=c_k$$

- Fibonacci dizisi için özyineleme
  - $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$, $\rightarrow$ $f_n-f_{n-1}-f_{n-2}=0$,

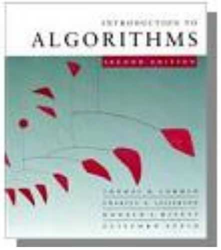
    burada **k=2,** $c_0=1$ ***ve*** $c_1=c_2=-1$ *dir.*

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



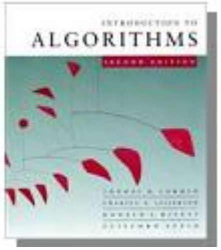
- Sabit katsayılı homojen doğrusal yineleme bağıntılarını çözmek için basit bir yöntem vardır. Bu yöntem;
  - ***k*** bir sabit olmak üzere, $\boldsymbol{t_k = x^k}$;
  - $t_n=c_1t_{n-1}+c_2t_{n-2}+\ldots+c_kt_{n-k}$' nın bir çözümü kabul edilir ve bağıntıda yerine konulursa
  - $\boldsymbol{x^n = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \ldots + c_kx^{n-k}}$ elde edilir. Burada, ***x*** bilinmeyen bir sabit ve $\boldsymbol{x \neq 0}$ dır.
- Bu ifadenin her iki yanını x^{n-k} ile bölersek:
  - $\boldsymbol{x^k - c_1 x^{k-1} - c_2 x^{k-2} - \ldots - c_k = 0}$ bulunur ve derecesi ***k*** olan ve genelde k adet kökü olan bu polinoma yineleme bağıntısının **karakteristik denklemi** (characteristic equation) adı verilir. Bu denklemin kökü birden fazla veya karmaşık olabilir.

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



- **İşlem Adımları**
- **Adım 1**
  - $x^2 - c_1 x - c_2 = 0$ karakteristik denklemi için
  - İkinci dereceden bir denklem olduğundan karakteristik kökleri r_1 ve r_2 olup
  - $x_{1,2} = \frac{c_1 \pm \sqrt{(c_1)^2 + 4c_2}}{2}$
- **Adım 2**
  - **Durum 1:** Köklerin hiç biri aynı değilse
  - $\boldsymbol{t_n = c_1 {x_1}^n + c_2 {x_2}^n}$
  - **Durum 2:** Köklerde aynı olan değer var ise $(x_1 = x_2)$
  - $\boldsymbol{t_n = c_1 {x_0}^n + c_2 {x_1}^n + + c_3 n {x_1}^n}$

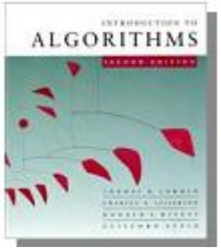
Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



- **Adım 3**
  - Bir önceki adımda elde edilen denklemlere ilk koşulları uygulayınız.
  - Durum I: Kökler eşit değil
  - $t_0 = c_1 {x_1}^0 + c_2 {x_2}^0 = c_1 + c_2$
  - $t_1 = c_1 {x_1}^1 + c_2 {x_2}^1 = c_1 x_1 + c_2 x_2$
  - Durum 2: Kökler eşit ($x_2 = x_1 = x_0$)
  - $t_0 = c_1 {x_0}^0 + c_2 .0. {x_0}^0 = c_1$
  - $t_1 = c_1 {x_0}^1 + c_2 .1. {x_0}^1 = (c_1 + c_2) x_0$
- **Adım 4**
  - c_1, c_2'yi bulunuz
- **Adım 5**

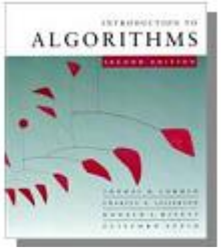
t_n için genel çözümü yaz

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme

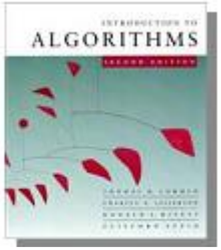


- **Örnek:** İlk koşullar $t_0 = 2$ ve $t_1 = 7$ olarak verildiğine göre
- $t_n = t_{n-1} + 2t_{n-2}$ yinelemeli bağıntıyı çözünüz
- Karakteristik denklem: $x^2 - x - 2 = 0$
- Kökler $x_1 = 2$ ve $x_2 = -1$, kökler eşit değil. Durum 1'i kullanılacak.
- $t_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n$
- $t_0 = 2 = c_1 + c_2$, $t_1 = 7 = c_1.2 + c_2.(-1)$
- $c_1 = 3$ *ve* $c_2 = -1$ olarak bulunur.
- Bu değerleri yerine yazarsak
- $t_n = 3.2^n + (-1).(-1)^n = 3.2^n - (-1)^n$ olarak bulunur.
- $t_n \in \theta(2^n)$

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



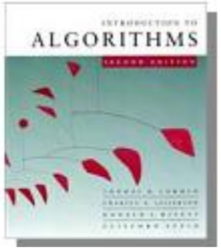
- **Örnek:** İlk koşullar $t_0 = 0$ ve $t_1 = 1$ ve $n \geq 2$ olarak verildiğine göre
- $t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0$ için yinelemeli bağıntıyı çözünüz
- Karakteristik denklem: $x^2 -3x -4=0$
- Kökler $x_1=-1$ ve $x_2= 4$, kökler eşit değil. Durum 1'i kullanılacak.
- $t_n = c_1(-1)^n + c_2 4^n$
- $t_0 = 0 = c_1 + c_2$, $t_1 = 1 = c_1.(-1) + 4c_2$
- $c_1 = -1/5$ *ve* $c_2 = 1/5$ olarak bulunur.
- Bu değerleri yerine yazarsak
- $t_n = 1/5[4^n - (-1)^n]$ olarak bulunur.
- $t_n \in \theta(4^n)$



Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme

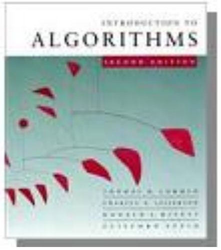
- **Örnek:** Fibonacci özyinelemeli bağıntı
- $t_0 = 0$ ve $t_1 = 1$ ve $n \geq 2$ olarak verildiğine göre
- $t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$ için yinelemeli bağıntıyı çözünüz
- Karakteristik denklem: *x^2 -x -1=0*
- Kökler $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, kökler eşit değil. ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, altın oran)
- Durum 1'i kullanılacak. $t_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$
- $t_n(0) = 0 = c_1 + c_2$,$t_1 = 1 = c_1.\frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
- $c_1 = 1/\sqrt{5} ve\ c_2 = -1/\sqrt{5}$olarak bulunur.
- Bu değerleri yerine yazarsak
- $t_n = 1/\sqrt{5}[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n]$ olarak bulunur ve sonuç olarak
- $t_n \in \theta(((1+\sqrt{5})/2)^n)$

Karakteristik denklemler kullanarak özyinelemeleri çözme



- **Örnek:** $t_0 = 0, t_1 = 1$ ve $t_2 = 2$ve $n \geq 3$ olarak verildiğine göre
- $t_n = 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3}$ için yinelemeli bağıntıyı çözünüz
- Karakteristik denklem: $x^3 -5x^2 +8x -4=0$, veya $(x-1)(x-2)^2$
- Kökler $x_1 = 1$, ve $x_2 = x_3 = 2$, (iki kök eşit). Eşit kökler bulunduğundan Durum 2 kullanılacak
- $t_n = c_1(1)^n + c_2(2)^n + c_3 n(2)^n$
- Başlangıç şartlarına göre;
- $c_1 + c_2 = 0; (n = 0),$
- $c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 1; (n = 1),$
- $c_1 + 4c_2 + 8c_3 = 2; (n = 2),$
- $c_1 = -2, c_2 = 2$ ve $c_3 = -1/2$ olarak bulunur.
- Bu değerleri yerine yazarsak
- $t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$ olarak bulunur.

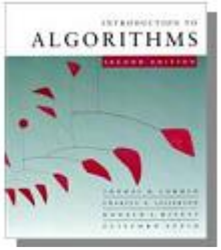
Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Homojen Olmayan Yineleme Bağıntıları**
- t_n sadece önceki terimlerin katlarına bağlı değil ise homojen olmayan bağıntı olarak adlandırılır.
  - $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ homojen
  - $t_n = 2t_{n-1} + 1$ homojen değildir. "+1" terimi t_j katı değildir.

- Yinelemeli bağıntıların genel formu $c_0 t_n + c_1 t_{n-1} + \ldots + c_k t_{n-k} = f(n)$ şeklinde ifade edilir. f(n) =0 eşit ise homojen, sıfırdan farklı ise homojen olmayan yinelemeli bağıntıdır.
- $f(n) = b^n p(n)$
- şeklinde ifade edilirse *b* sıfırdan farklı bir sabiti *p(n)* ise *d.* dereceden *n* nin bir polinomudur.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Örnek:** Aşağıda verilen reküransı çözünüz
- $t_n - 2t_{n-1} = 3^n$ burada b=3, p(n)^d=1 ve polinom derecesi d=0’ dır.

- İlk olarak her iki tarafı 3 ile çarpalım:

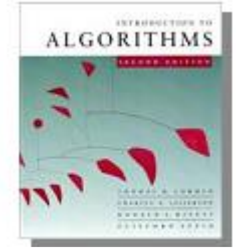
  $$3t_n - 6t_{n-1} = 3^{n+1}$$

- Eğer n, n+1 ile yer değiştirirsek:

  $t_{n+1} - 2t_n = 3^{n+1}$ denklemini elde ederiz.

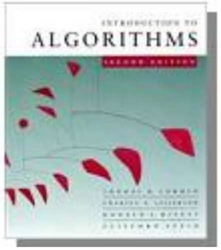
- Her iki denklemi bir birinden çıkarırsak yeni denklem
- $t_{n+1} - 5t_n + 6t_{n-1} = 0$ olur.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



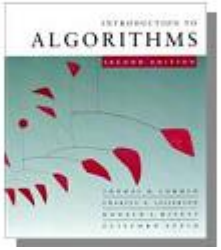
- Homojen durumda olduğu gibi çözüm yaparsak karakteristik denklem
- $x^2-5x+6=0, \quad \rightarrow \quad (x-2)(x-3)=0$
- Dikkat edilecek olursa (x-2) değeri orijinal rekürans ta sol tarafı, x-3 ise sağ taraftaki polinomu ifade etmekte. Buna göre karakteristik denklemin basit genel formunu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz:
- $(c_0 x^k + c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + \ldots + c_k)(x-b)^{d+1} = 0,$
- burada *d,* p(n) polinomunun derecesidir. Bu denklem elde edildikten sonra homojen durumunda olduğu gibi çözüm yapılır.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Örnek:** Aşağıda verilen Hanoi Kulesi problemine ait reküransı çözünüz
- $t_n = 2t_{n-1} + 1;\ n \geq 1$ ve $t_0 = 0$;
- Burada b=1 p(n)=1 ve polinom derecesi 0 dır.
- Karakteristik denklem: (x-2)(x-1)=0 olur.
- $t_n = c_1 1^n + c_2 2^n,\ t_0 = c_1 + c_2 = 0,\ t_1 = 2t_0 + 1 = 1\ ise$
- $t_1 = c_1 1 + 2c_2 = 1$ olur. $c_1 = -1, c_2 = 1$ bulunur
- $t_n = 2^n - 1$ elde ederiz. Sonuç olarak ;
- $t_n \in \theta(2^n)$ olur.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme

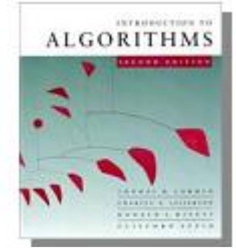


- $c_0t_n+c_1t_{n-1}+\ldots+c_kt_{n-k}=b^np(n)$ homojen olmayan denklemler için verilen basit genel formu daha da genelleştirirsek

- $c_0t_n+c_1t_{n-1}+\ldots+c_kt_{n-k}=b_1^np_1(n)+b_2^np_2(n)+\ldots$ formunu elde ederiz. Buna göre karakteristik denklem:

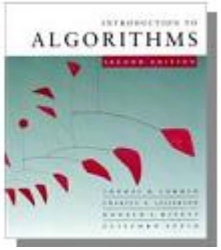
- $(c_0x^k+c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+\ldots+c_k)(x-b_1)^{d1+1}(x-b_2)^{d2+1}\ldots=0,$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Örnek:** $n \geq 1$ ve $t_0=0$ başlangıç şartları için $t_n = 2t_{n-1} + n + 2^n$ problemine ait reküransı çözünüz
- $t_n - 2t_{n-1} = n+2^n$, *burada* $b_1=1$, $p_1(n)=n$, $b_2=2$, $p_2(n)=1$, $d_1=1$,$d_2=0$, n polinom derecesidir.
- Karakteristik denklem: $(x-2)(x-1)^2(x-2)=0$ olur. Kökler, 1, 1, 2, 2 dir.
- Buna göre genel çözüm $t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n$
- $t_1 = 0 + 1 + 2^1 = 3, t_2 = 12, t_3 = 35$
- $n = 0 \; için \;\; c_1 + c_3 = 0,$
- $n = 1 \; için \;\; c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 = 3,$
- $n = 2 \; için \;\; c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 = 12,$
- $n = 3 \; için \;\; c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 24c_4 = 35,$
- $t_n = -2 - n + 2^{n+1} + n2^n$ elde ederiz. Sonuç olarak ;
- $t_n \in \theta(n2^n)$ olur.

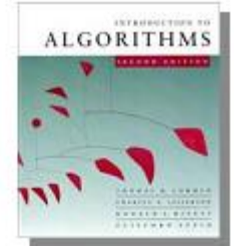
Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- Çözüm yolu: Gaus yok etme yöntemi , bilinmeyenlerin ileriye doğru elenmesi. İlk adım ilk bilinmeyeni (c_1), 2. denklemden n. Denkleme kadar elemektir.
- 2.denklem
- $a_{21}-(a_{21}/a_{11})*a_{11} + a_{22}-(a_{21}/a_{11})*a_{12} +..+ a_{2n}-(a_{21}/a_{11})*a_{1n} = c_2-(a_{21}/a_{11})*c_1$
- 3. denklem
- $a_{31}-(a_{31}/a_{11})*a_{11} + a_{32}-(a_{31}/a_{11})*a_{12} +..+ a_{3n}-(a_{31}/a_{11})*a_{1n} = c_3-(a_{31}/a_{11})*c_1$
- n.denklem
- $a_{n1}-(a_{n1}/a_{11})*a_{11} + a_{n2}-(a_{n1}/a_{11})*a_{12} +..+ a_{nn}-(a_{n1}/a_{11})*a_{1n} = c_n-(a_{n1}/a_{11})*c_1$
- Buna göre ilk durumda matrisimiz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 8 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 35 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 35 \end{bmatrix}$$

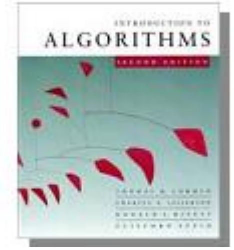
Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- İkinci adım ikinci bilinmeyeni (c_2), 3. denklemden n. denkleme kadar elemektir.
- 3.denklem
- $a_{32}-(a_{32}/a_{22})*a_{22} + a_{33}-(a_{32}/a_{22})*a_{23} +..+ a_{3n}-(a_{32}/a_{22})*a_{2n} = c_3-(a_{32}/a_{22})*c_2$
- n.denklem
- $a_{n2}-(a_{n2}/a_{22})*a_{22} + a_{n3}- (a_{n2}/a_{22})* a_{23} +..+ a_{nn}-(a_{n2}/a_{22})*a_{2n} = c_n- (a_{n2}/a_{22})* c_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \\ 35 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme

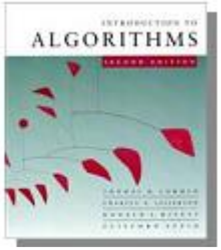


- Diğer adımlarda benzer şekilde yapılır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 26 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

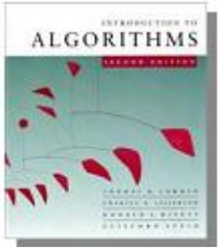
- $c_4 = 1, c_3 = 2, c_2 = -1, c_1 = -2$ olur.
- $T(n) = -2 - n + 2^{n+2} + n2^n$
- $T(n) \in \theta(n2^n)$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



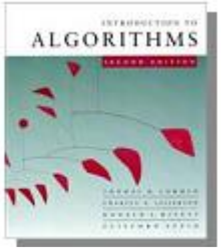
- **Değişkenlerin Değişimi:**
- T(n) şeklinde verilen bir yinelemeyi değişkenlerin değişimi ile t_k şeklinde yeni bir yineleme yazılabilir.
- **Örnek:** 2 nin kuvveti şeklinde verilen n için aşağıda verilen yinelemeyi çözünüz.
- T(n)=4T(n/2)+n, n>1
- n, değerini 2^k (burada k=log n dir) ile yer değiştirirsek $T(2^k)=4T(2^{k-1})+2^k$, elde ederiz.
- Eğer $t_k = T(2^k) = T(n)$ ise bunu , $t_k = 4t_{k-1} + 2^k$ şeklinde yazabiliriz. Yeni yinelemeyi çözersek (x-4)(x-2)=0 karakteristik denklemini elde ederiz.
- $t_k = c_1 4^k + c_2 2^k$
- *k* yerine *n* değerini yazarsak,
- $T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$ buluruz. $T(n) \in O(n^2)$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



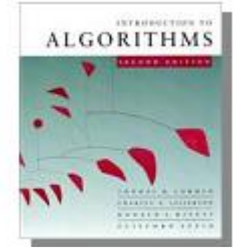
- **Örnek:** 2 nin kuvveti şeklinde verilen n için aşağıda verilen yinelemeyi çözünüz. T(n)= 2T(n/2)+nlogn, n>1
- n, değerini 2^k (burada k=logn dir) ile yer değiştirirsek $T(2^k)=2T(2^{k-1})+k2^k$, elde ederiz.
- Eğer $t_k=T(2^k)=T(n)$ ise bunu , $t_k=2t_{k-1}+k2^k$ şeklinde yazabiliriz. Yeni yinelemeyi çözersek: ($t_k-2t_{k-1}=k2^k$, burada b=2, p(k)=k ve d=1 olduğundan)
- $(x-2)^3=0$ karakteristik denklemini elde ederiz ve
- $t_k = c_1 2^k + c_2 k 2^k + c_3 k^2 2^k$
- *k* yerine *n* değerini yazarsak,
- $T(n) = c_1 n + c_2 n log n + c_3 n log^2 n$ buluruz.
- $T(n) \in O(n log^2 n)$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Örnek:** 2 nin kuvveti şeklinde verilen n için aşağıda verilen yinelemeyi çözünüz. T(n)= 3T(n/2)+cn (c bir sabittir ve n = 2^k >1
- n, değerini 2^k (burada k=logn' dir) ile yer değiştirirsek $T(2^k)=3T(2^{k-1})+ c2^k$, elde ederiz.
- Eğer t_k =T(2^k) =T(n) ise bunu , $t_k=3t_{k-1}+ c2^k$ şeklinde yazabiliriz. Yeni yinelemeyi çözersek: ($t_k-3t_{k-1}= c2^k$, burada b=2, p(k)=c ve d=0 olduğundan) (x-3)(x-2)=0 karakteristik denklemini elde ederiz ve
- $t_k = c_1 3^k + c_2 2^k$
- *k* yerine *n* değerini yazarsak,
- $T(n) = c_1 3^{logn} + c_2 n, (a^{logb} = b^{loga}\ olduğundan)$
- $T(n) = c_1 n^{log3} + c_2 n$ buluruz.
- $T(n) \in O(n^{log3})$

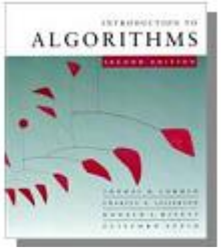
Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- **Aralık dönüşümleri (Range Transformations):** Yinelemelerin çözümünde değişkenlerin değişimi yerine bazen aralık dönüşümü kullanmak daha faydalı olabilir.

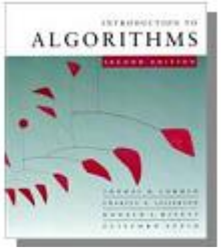
- **Örnek:** $T(n)= nT(n/2)^2$, $n>1$, $T(1)=6$
- n, değerini 2^k (burada k=logn dir) ile yer değiştirirsek $T(2^k)=2^kT(2^{k-1})^2$, elde ederiz.
- $t_k = T(2^k) = T(n)$ ise, $t_k = 2^k t^2_{k-1}$, $k>0$ için $t_0 = 6$
- İlk bakışta gördüğümüz tekniklerin hiç biri bu yineleme için uygulanamaz çünkü hem doğrusal değil, hem de katsayılardan biri sabit değildir.
- Aralık dönüşümü yapmak için $V_k = \log t_k$ koyarak yeni bir yineleme oluşturulur.

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme

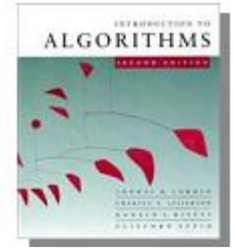


- V_k =k+2V_{k-1} , k>0 için başlangıç şartları V_0=log6=log2*3=1+log3
- V_k =k+2V_{k-1} için karakteristik denklem $(x-2)(x-1)^2=0$ ve
- $V_k = c_1 2^k + c_2 1^k + c_3 k 1^k$
- V_k =k+2V_{k-1} denkleminden V_0=1+log3, V_1=3+2log3, V_2=8+4log3 bulunur ve $V_k = c_1 2^k + c_2 1^k + c_3 k 1^k$
- $V_0 = 1 + log3 = c_1 + c_2$
- $V_1 = 3 + 2log3 = 2c_1 + c_2 + c_3$
- $V_2 = 8 + 4log3 = 4c_1 + c_2 + 4c_3$
- $c_1 = 3 + log3, c_2 = -2, c_3 = -1$
- $V_k = (3 + log3)2^k - k - 2$

Karakteristik denklemler kullanarak yinelemeleri çözme



- Sonunda $t_k = 2^{Vk}$
- $2^{Vk} = 2^{(3+log3)*2^k-k-2} \rightarrow t_k = 2^{(3+log3)*2^k-k-2}$
- k yerine n değerini yazarsak,
- $T(n) = 2^{(3+log3)*n-logn-2} \rightarrow T(n) = 2^{3n+nlog3}/(2^{logn} * 2^2)$
- $T(n) = 2^{3n-2} * \frac{3^{nlog2}}{n} = 2^{3n-2} * \frac{3^n}{n}$
- $T(n) = (2^{3n-2}3^n)/n$
- $T(n) \in O(2^{3n}3^n)$



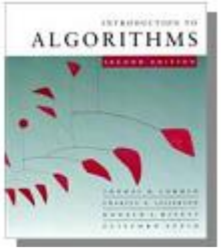
Böl-ve-Fethet (Divide & Conquer)

- Böl ve fethet tekniğiyle algoritma tasarımı:
  - Problem kendisine benzer küçük boyutlu alt problemlere bölünür. Alt problemler çözülür ve bulunan çözümler birleştirilir.
    - **Divide:** Problem iki veya daha fazla alt problemlere bölünür.
    - **Conquer:** Alt problemleri özyinelemeli olarak çözüp, onları fethet.
    - **Combine:** Alt problem çözümlerini birleştir.

Merge Sort (Birleştirme sıralaması) Algoritması

- **1. Böl:** Eğer **S** en az iki elemana sahipse (**S** sıfır veya bir elemana sahipse hiçbir işlem yapılmaz), bütün elemanlar **S** 'e n alınır ve S_1 ve S_2 adlı iki alana yerleştirilir, her biri **S** dizisinin yarısına sahiptir, (örn. S_1 ilk $\lceil n/2 \rceil$ elemana ve S_2 ise ikinci $\lfloor n/2 \rfloor$ elemana sahiptir).
- **2. Fethet:** S_1 ve S_2 Merge Sort kullanılarak sıralanır.
- **3. Birleştir:** S_1 and S_2 içindeki sıralı elemanlar tekrar **S** içerisine tek bir sıralı dizi oluşturacak şekilde aktarılır.

Birleştirme sıralaması



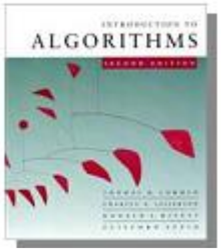
- 1. Bölmek: Kolay.
- 2. Hükmetmek: 2 alt dizilimi özyinelemeli sıralama.
- 3. Birleştirmek: Doğrusal-zamanda birleştirme.

$$T(n) = 2\,T(n/2) + \Theta(n)$$

altproblem sayısı

altproblem boyutu

bölme ve birleştirme işi



Master teoremi (hatırlatma)

$$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$$

DURUM 1: $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$, sabit $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

DURUM 2: $f(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^k n)$, sabit $k \geq 0$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.

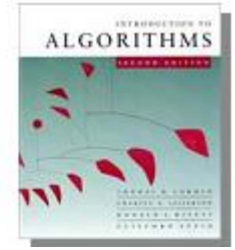
DURUM 3: $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$, sabit $\varepsilon > 0$,
ve düzenleyici koşul (regularity condition).

$\Rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$.

Birleştirme sıralaması: $a = 2, b = 2 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$

$\Rightarrow$ DURUM 2 $(k = 0) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \lg n)$.

İkili arama (Binary Search)



- Sıralı dizilimin bir elemanını bulma:

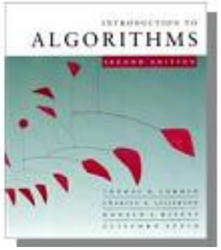
INPUT: A[1..n] – sıralı (azalmayan) integer sayı dizisi, *s* – aranan integer sayı.
OUTPUT: *j* bulunan sayının indeksi A[*j*] = *s*. *NIL*, if ∀*j* (1≤*j*≤*n*): A[*j*] ≠ *s*

```
Binary-search(A, p, r, s):
   if p = r then
      if A[p] = s then return p
      else return NIL
   q←⌊(p+r)/2⌋
   ret ← Binary-search(A, p, q, s)
   if ret = NIL then
      return Binary-search(A, q+1, r, s)
   else return ret
```

- 1. Böl: Orta elemanı belirle.
- 2. Hükmet: 1 alt dizilimde özyinelemeli arama yap.
- 3. Birleştir: Kolay.
- Örnek: 9' u bul.

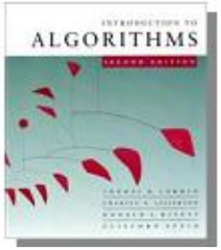
3	5	7	8	9	12	15

İkili arama (Binary Search)



3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15
3	5	7	8	9	12	15

İkili arama için yineleme



$$T(n) = 1\,T(n/2) + \Theta(1)$$

altproblem sayısı

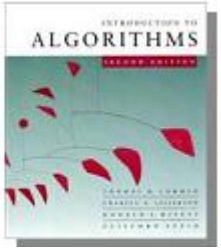
altproblem boyutu

bölme ve birleştime işi

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 1} = n^0 = 1 \Rightarrow \text{DURUM 2 } (k = 0)$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(\lg n)\,.$$

Bir sayının üstellenmesi



- **Problem:** a^n 'yi $n \in N$ iken hesaplama.
- **Saf (Naive) algorithm:** $\Theta(n)$.
- **Böl-ve-fethet algoritması:**

Algorithm Power(x, n):
Input: x sayısı ve n tamsayısı, n >= 0
Output: xn değeri
if n = 0 **then**
return 1
if n is odd **then**
y = Power(x, (n - 1)/ 2)
return x · y ·y
else
y = Power(x, n/ 2)
return y · y

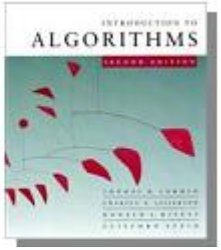
Her özyineli çağırmada n sayısını 2'ye bölüyoruz; dolayısıyla, log n özyineli çağrı yaparız. Bu metod O(log n) zamanına sahiptir.

Burada ara sonucu y değişkeni ile göstermemiz önemli; şayet metod çağırma yazarsak metod 2 defa çağrılmış olur.

$$a^n = \begin{cases} a^{n/2} \cdot a^{n/2} & n \text{ çift sayıysa;} \\ a^{(n-1)/2} \cdot a^{(n-1)/2} \cdot a & n \text{ tek sayıysa.} \end{cases}$$

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1) \;\Rightarrow\; T(n) = \Theta(\lg n) \,.$$

Fibonacci sayıları



Özyinelemeli tanım:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{eğer } n = 0; \\ 1 & \text{eğer } n = 1; \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{eğer } n \geq 2 \text{ ise.} \end{cases}$$

$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad \cdots$

Saf özyinelemeli algoritma: $\Omega(\phi^n)$

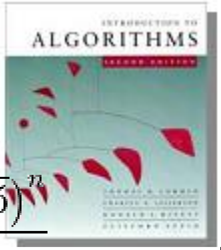
(üstel zaman), buradaki $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$

altın oran'dır (***golden ratio***).

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.61803\,39887\cdots$$

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \varphi = -\frac{1}{\varphi} \approx -0.61803\,39887$$

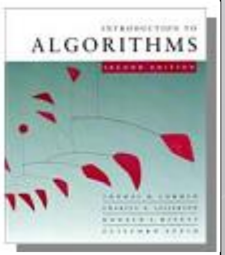
Fibonacci sayılarını hesaplama



$$F_n = F(n) = \begin{cases} 0 & n = 0; \\ 1 & n = 1; \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1. \end{cases} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (\varphi - \sqrt{5})^n}{\sqrt{5}}$$

- **Aşağıdan yukarıya algortiması:**
  - **F_0, F_1, F_2, …, F_n**'i sırayla, her sayı iki öncekinin toplamı olacak şekilde hesaplayın.
  - Yürütüm süresi: **Θ(n).**
- **Saf özyinelemeli kare alma (Naive recursive squaring) algortiması:**
- $F_n = \varphi^n/\sqrt{5}$ yakın tamsayı yuvarlaması.
- **Özyinelemeli kare alma algortiması: Θ(lg n)** zamanı.
- Bu yöntem güvenilir değildir, çünkü yüzer-nokta aritmetiği yuvarlama hatalarına gebedir.

Özyineleme ile kare alma (Recursive squaring)



Teorem: $$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n.$$

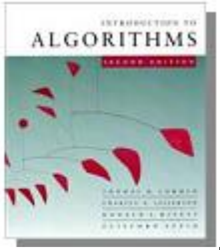
Algoritma: Özyineleme ile kare alma.

Süre = $\Theta(\lg n)$.

Teoremin ispatı. (n 'de tümevarım)

Taban ($n = 1$): $$\begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^1$$

Özyineleme ile kare alma (Recursive squaring)



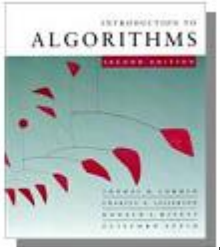
Tümevarım adımı ($n \geq 2$):

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} \qquad \blacksquare$$

Matrislerde çarpma



Girdi: $= [a_{ij}], B = [b_{ij}].$

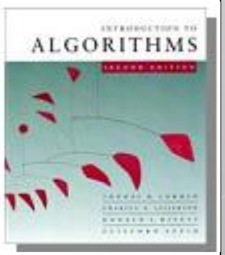
Çıktı: $C = [c_{ij}] = A \cdot B.$

$$\left.\begin{array}{l} = [a_{ij}], B = [b_{ij}]. \\ C = [c_{ij}] = A \cdot B. \end{array}\right\} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Matrislerde çarpma
Standart algoritma



for $i \leftarrow 1$ **to** n *(i 1'den n'ye kadar)*

  do for $j \leftarrow 1$ **to** n *(j 1'den n'ye kadar)*

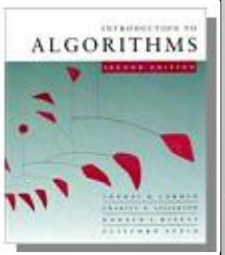
    do $c_{ij} \leftarrow 0$

      for $k \leftarrow 1$ **to** n

        do $c_{ij} \leftarrow c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$

Koşma süresi $= \Theta(n^3)$

Böl-ve-fethet algoritması



FİKİR:

$n \times n$ matris = $(n/2) \times (n/2)$ altmatrisin 2×2 matrisi:

$$\left[\begin{array}{c|c} r & s \\ \hline t & u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} e & f \\ \hline g & h \end{array}\right]$$

$$C \quad = \quad A \quad \cdot \quad B$$

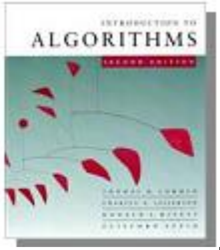
$$\left.\begin{aligned} r &= ae + bg \\ s &= af + bh \\ t &= ce + dh \\ u &= cf + dg \end{aligned}\right\}$$

recursive (özyinelemeli)

8 çarpma $(n/2) \times (n/2)$ altmatriste,

4 toplama $(n/2) \times (n/2)$ altmatriste.

Böl-ve-Fethet algoritmasının çözümlemesi



$$T(n) = 8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

altmatris sayısı

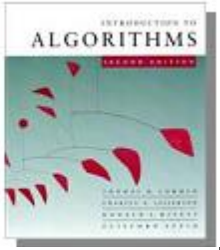
altmatris boyutu

altmatrisleri toplama işi

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 8} = n^3 \;\Rightarrow\; \text{DURUM 1} \;\Rightarrow\; T(n) = \Theta(n^3)$$

Sıradan algoritmadan daha iyi değil.

Strassen'in fikri



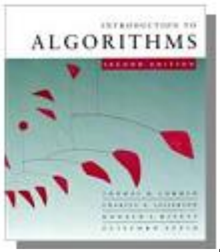
- **2×2** matrisleri yalnız **7** özyinelemeli çarpmayla çöz.

$$
\begin{aligned}
P_1 &= a \cdot (f - h) \\
P_2 &= (a + b) \cdot h \\
P_3 &= (c + d) \cdot e \\
P_4 &= d \cdot (g - e) \\
P_5 &= (a + d) \cdot (e + h) \\
P_6 &= (b - d) \cdot (g + h) \\
P_7 &= (a - c) \cdot (e + f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= P_5 + P_4 - P_2 + P_6 \\
s &= P_1 + P_2 \\
t &= P_3 + P_4 \\
u &= P_5 + P_1 - P_3 - P_7
\end{aligned}
$$

7 çarp., 18 topl. /çıkar.
Not: Çarpma işleminde **sırabağımsızlık yok!**

Strassen'in fikri

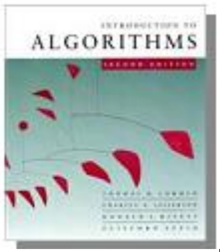


- **2×2** matrisleri yalnız **7** özyinelemeli çarpmayla çöz.

$$
\begin{aligned}
P_1 &= a \cdot (f - h) \\
P_2 &= (a + b) \cdot h \\
P_3 &= (c + d) \cdot e \\
P_4 &= d \cdot (g - e) \\
P_5 &= (a + d) \cdot (e + h) \\
P_6 &= (b - d) \cdot (g + h) \\
P_7 &= (a - c) \cdot (e + f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= P_5 + P_4 - P_2 + P_6 \\
&= (a + d)(e + h) \\
&\quad + d(g - e) - (a + b)h \\
&\quad + (b - d)(g + h) \\
&= ae + ah + de + dh \\
&\quad + dg - de - ah - bh \\
&\quad + bg + bh - dg - dh \\
&= ae + bg
\end{aligned}
$$

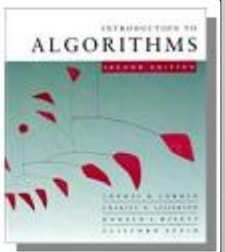
Strassen'in algoritması



- **1. Böl:** **A** ve **B**'yi **(n/2)×(n/2)** altmatrislere böl. **+** ve **–** kullanarak çarpılabilecek terimler oluştur. ($\Theta(n^2)$)
- **2. Fethet:** **(n/2)×(n/2)** altmatrislerde özyinelemeli **7** çarpma yap (P_1, P_2, P_3, …P_7.)
- **3. Birleştir:** **+** ve **–** kullanarak **(n/2)×(n/2)** altmatrislerde **C** 'yi oluştur. ($\Theta(n^2)$)

$$T(n) = 7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

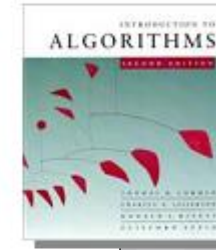
Strassen’in algoritması



$$T(n) = 7\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

$$n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} \approx n^{2.81} \;\Rightarrow\; \text{DURUM 1} \;\Rightarrow\; T(n) = \Theta(n^{\lg 7})$$

- **2.81** değeri **3**' den çok küçük görünmeyebilir ama, fark üstelde olduğu için, yürütüm süresine etkisi kayda değerdir. Aslında, **n ≥ 32** değerlerinde Strassen’in algoritması günün makinelerinde normal algoritmadan daha hızlı çalışır. Bugünün en iyi değeri (teorik merak açısından): **$\Theta(n^{2.376...})$**

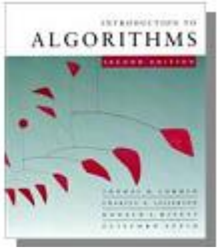


Böl ve Fethet

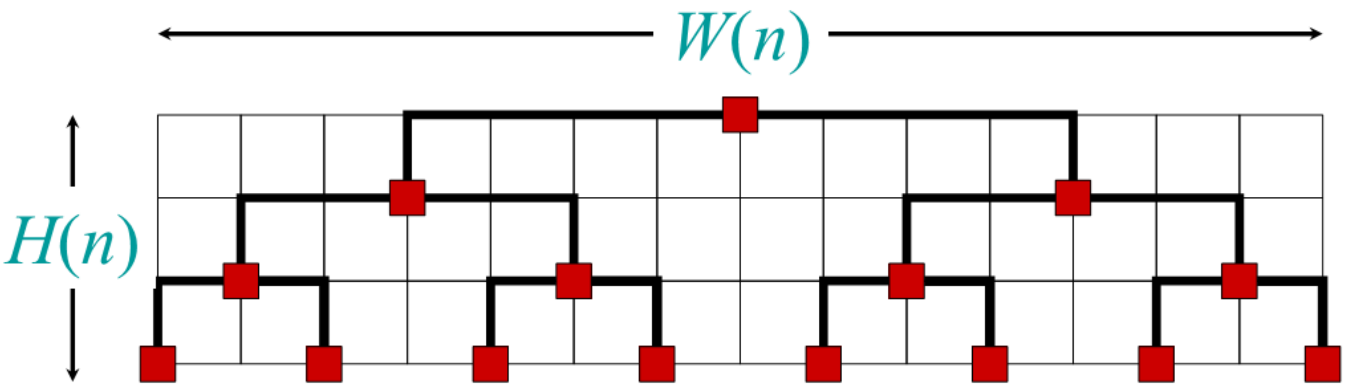
VLSI (Very Large Scale Integration) yerleşimi (Çok Büyük Çapta Tümleşim)

- Bilgisayar çipleri yada yongaları bildiğiniz gibi çok büyük çapta tümleşim kullanırlar.
- Elimizde bir devre olduğunu düşünelim ve bu devrenin de bir ikili ağaç olduğunu kabul edelim. Ama şimdilik bu devrenin bir kısmını ele alalım ama siz bunu tüm devre kabul edin.
- **Problem:** **n** yaprağı olan tam bir ikili ağacı en az alan kullanarak bir ızgaraya gömmek.

VLSI (Very Large Scale Integration) yerleşimi (Çok Büyük Çapta Tümleşim)



- **Problem:** **n** yaprağı olan tam bir ikili ağacı en az alan kullanarak bir ızgaraya gömmek.

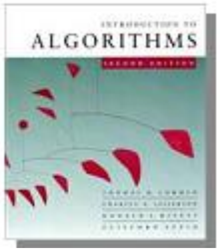


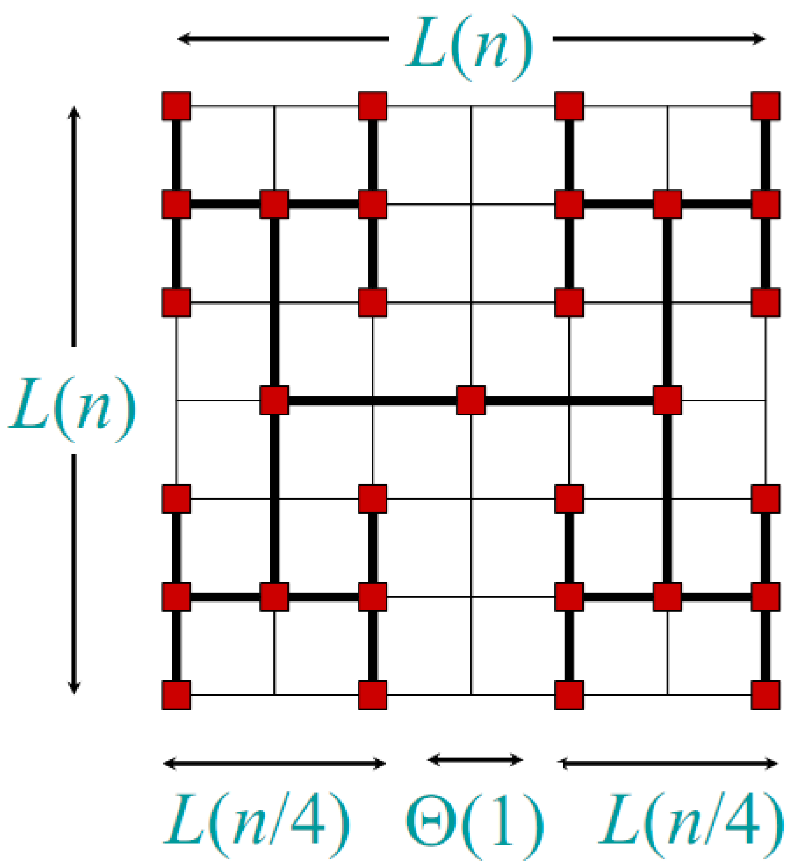
$$H(n) = H(n/2) + \Theta(1) = \Theta(\lg n)$$

$$W(n) = 2\,W(n/2) + \Theta(1) = \Theta(n)$$

$$\text{Alan} = \Theta(n \lg n)$$

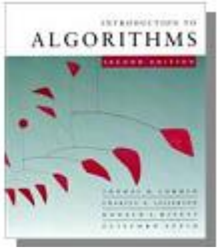
H-ağacını gömme





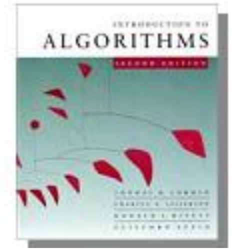
$$
\begin{aligned}
L(n) &= 2L(n/4) + \Theta(1) \\
&= \Theta(\sqrt{n})
\end{aligned}
$$

$$\text{Alan} = \Theta(n)$$



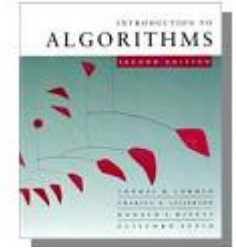
Sonuç

- Böl ve Fethet algoritma tasarımının güçlü teknikleriden sadece biridir.
- Böl ve Fethet algoritmaları yinelemeler ve Ana (Master) metot kullanarak çözümlenebilir.
- Böl ve Fethet stratejisi genellikle verimli algoritmalara götürür.



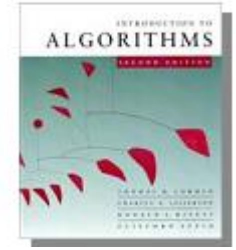
Ortak Reküranslar

Rekürans İlişkisi	Kapalı Form	Örnek
$c(1) = a$		
$c(n) = b + c(n-1)$	$c(n) = O(n)$	Linear search
$c(n) = b*n + c(n-1)$	$c(n) = O(n^2)$	Quicksort
$c(n) = b + c(n/2)$	$c(n) = O(\log(n))$	Binary search
$c(n) = b*n + c(n/2)$	$c(n) = O(n)$	
$c(n) = b + kc(n/k)$	$c(n) = O(n)$	
$c(n) = b*n + 2c(n/2)$	$c(n) = O(n\log(n))$	Mergesort
$c(n) = b*n + kc(n/k)$	$c(n) = O(n\log(n)$	
$c(2) = b$ $c(n) = c(n-1) + c(n-2) + d$	$c(n) = O(2^n)$	Fibonacci



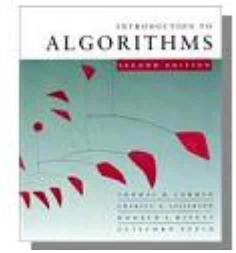
Sorular

- 1.T(n)=3T($\sqrt{2n}$)+2 tekrarlı bağıntısını çözünüz.
- 2. T(n)=3T($\lfloor n/5 \rfloor$)+n tekrarlı bağıntısının çözümünü iteratif yolla gerçekleştiriniz. Bu bağıntının Özyineleme ağacı nedir?
- 3. Özyineleme ağacını kullanarak T(n)=T(n/3)+T(2n/3)+n bağıntısının çözümünü elde ediniz.
- 4. $b \geq 1$ bir sabit olmak üzere T(n)=T(n/b)+T(b)+n tekrarlı bağıntısının Özyineleme ağacını elde ediniz ve bu bağıntının çözümü nedir?
- 5. $0<a<1$ sabit olmak üzere T(n)=T(an)+T((1-a)n)+n tekrarlı bağıntısının Özdevinim ağacını elde ediniz ve asimptotik davranışı hakkında bilgi veriniz.



Sorular

- 6.
  - a)$T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$ çalışma zamanı mertesbesininin O(nloglogn) olduğunu iterasyon veya öz yineleme ağacı ile bulunuz.
  - b) $T(n) = \sqrt{n}T(n/2) + n$
- 7. Master yöntemini kullanarak aşağıdaki tekrarlı bağıntıları çözünüz.
  - a) $T(n)=3T(n/3)+n$
  - b)$T(n)=3T(n/3)+n^2$
  - c) $T(n)=3T(n/3)+n^3$
  - d) $T(n)=3T(n/3)+n^k$
- 8. Aşağıdaki tekrarlı bağıntı verilmiş olsun.
  - $T(n)=2T(n/3)+\lg(n)$
  - a) İteratif yöntem ile bu bağıntının mertebesini (çalışma zamanını) elde ediniz.
  - b) Master yöntemi ile bu bağıntının mertebesini (çalışma zamanını) elde ediniz.



Sorular

- 9. Aşağıdaki tekrarlı bağıntıları karakteristik denklem ve üreten fonksiyon yöntemleri ile çözünüz.
  - a) $a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2}$, $a_1=36$ ve $a_0=0$
  - b) $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}+2^{n-1}+2.3^n$, $a_1=29$ ve $a_0=9$
  - c) $a_n=a_{n-2}+4n$, $a_1=4$ ve $a_0=1$
  - d) $a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}+3.2^{2n-1}$, $a_1=12$ ve $a_0=0$
- 10. Master teoremini kullanarak aşağıdaki bağıntının mertebesini (çalışma zamanını) elde ediniz.
  - $T(n)=16T(n/4)+O(n^2)$
- 11. $f(n)=n^2+4n\log n+900$ ve $g(n)=n^2+45\log n+h(n)$ fonksiyonları verilmiştir ve $h(n)$ lineer olan bir polinomdur. $f(n)$ ile $g(n)$ arasındaki asimptotik ilişki nedir? $f(n)$ ve $g(n)$ arasındaki asimptotik ilişkiyi belirlerken $h(n)$ polinomuna ihtiyaç var mıdır? Hangi durumlarda ihtiyaç duyulur veya duyulmaz?

4.Hafta

Sıralama Algoritmaları

Çabuk Sıralama, Rastgele Algoritmalar