

1. Как относятся друг к другу множество и последовательность? (в ответе использовать слова типа: часть, целое, общее, частное, родитель, дочерний субъект и т.д.)

последовательность является дочерним субъектом множества

2. Прочитать высказывания математической логики, построить их отрицания и установить истинность.

2.1.

$$\forall y \in [0; 1] : \operatorname{sgn}(y) = 1$$

для всех y на отрезке от 0 до 1 функция $\operatorname{sgn}(y)$ равна 1

отрицание:

$$\exists y \in [0; 1] : \operatorname{sgn}(y) \neq 1$$

(существует y на отрезке $[0;1]$ для которого $\operatorname{sgn}(y)$ не равна 1)

2.2

$$\forall n \in \mathbb{N} > 2 : \exists x, y, z \in \mathbb{N} : x^n = y^n + z^n$$

для всех n из \mathbb{N} больше 2 существуют такие x, y, z из \mathbb{N} , что x в степени n равен сумме y^n и z^n

отрицание:

$$\exists n \in \mathbb{N} > 2 : \forall x, y, z \in \mathbb{N} : x^n \neq y^n + z^n$$

(существует n из $\mathbb{N} > 2$, для которых для всех x, y, z из \mathbb{N} x в степени n не равен сумме y и z , возведенных в степень n)

2.3

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists X \in \mathbb{R} : X > x$$

для всех x из \mathbb{R} существует такое X из \mathbb{R} , что $X > x$

отрицание:

$$\exists x \in \mathbb{R} \forall X \in \mathbb{R} : X \leq x$$

(существует x из \mathbb{R} , что для всех X из \mathbb{R} X меньше или равно x)

2.4

$$\forall x \in \mathbb{C} \nexists y \in \mathbb{C} : x > y \mid x < y$$

для всех x из \mathbb{C} не существует такого y из \mathbb{C} , что $x > y$ или $x < y$

отрицание:

$$\exists x \in \mathbb{C} \exists y \in \mathbb{C} : x > y \vee x < y$$

(существует такой x для которого существует такой y , что $x > y$ или $x < y$)

2.5

$$\forall y \in [0; \frac{\pi}{2}] \exists \varepsilon > 0 : \sin(y) < \sin(y + \varepsilon)$$

для всех y из интервала от 0 до $\pi/2$ существует такое ε больше 0, что $\sin(y) < \sin(y + \varepsilon)$

отрицание:

$$\exists y \in [0; \frac{\pi}{2}] \forall \varepsilon > 0 : \sin(y) \geq \sin(y + \varepsilon)$$

(существует y на интервале $0; \pi/2$ что для всех $\varepsilon > 0$ выполняется $\sin(y)$ больше или равно $\sin(y+\varepsilon)$)

2.6

$$\forall y \in [0; \pi) \exists \varepsilon > 0 : \cos(y) > \cos(y + \varepsilon)$$

для всех y в интервале $[0; \pi)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\cos(y) > \cos(y + \varepsilon)$

отрицание:

$$\exists y \in [0; \pi) \forall \varepsilon > 0 : \cos(y) \leq \cos(y + \varepsilon)$$

(существует y на интервале $[0; \pi)$ что для всех $\varepsilon > 0 : \cos(y)$ меньше или равен $\cos(y+\varepsilon)$)

2.7

$$\exists x : x \notin \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

существует такой x , который не входит ни в одно из множеств $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

отрицание:

$$\forall x : x \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$$

(все x входят во все множества)

2. Даны три множества a, b и c . Необходимо выполнить все изученные виды бинарных операций над всеми комбинациями множеств.

In [8]:

```
import numpy as np
a = np.array([1,3,5,7,9])
b = np.array([2,4,6,8])
c = np.array([1,2,3,10])
```

Объединение множеств

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

In [10]:

```
np.union1d(a, b), np.union1d(b, c), np.union1d(a, c)
```

Out[10]:

```
(array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
 array([ 1,  2,  3,  4,  6,  8, 10]),
 array([ 1,  2,  3,  5,  7,  9, 10]))
```

Пересечение множеств

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

In [11]:

```
np.intersect1d(a, b), np.intersect1d(b, c), np.intersect1d(a, c)
```

Out[11]:

```
(array([], dtype=int32), array([2]), array([1, 3]))
```

Разность

$$A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

In [12]:

```
np.setdiff1d(a, b), np.setdiff1d(b, c), np.setdiff1d(a, c)
```

Out[12]:

```
(array([1, 3, 5, 7, 9]), array([4, 6, 8]), array([5, 7, 9]))
```

Симметричная разность

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

In [13]:

```
np.setxor1d(a, b), np.setxor1d(b, c), np.setxor1d(a, c)
```

Out[13]:

```
(array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]),
 array([ 1,  3,  4,  6,  8, 10]),
 array([ 2,  5,  7,  9, 10]))
```

3. Даны 4 последовательности. Необходимо:

- исследовать их на монотонность;
- исследовать на ограниченность;
- найти пятый по счету член.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

$$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

In [15]:

```
def fa(n):  
    return 2**n - n
```

In [16]:

```
def fb(n):  
    return 1/(1-n)
```

In [43]:

```
def fc(n):  
    return (-1)**n + np.sqrt(2*n)
```

In [18]:

```
def fd(n):  
    return (-1)**(2*n) + 1/(n**2)
```

In [19]:

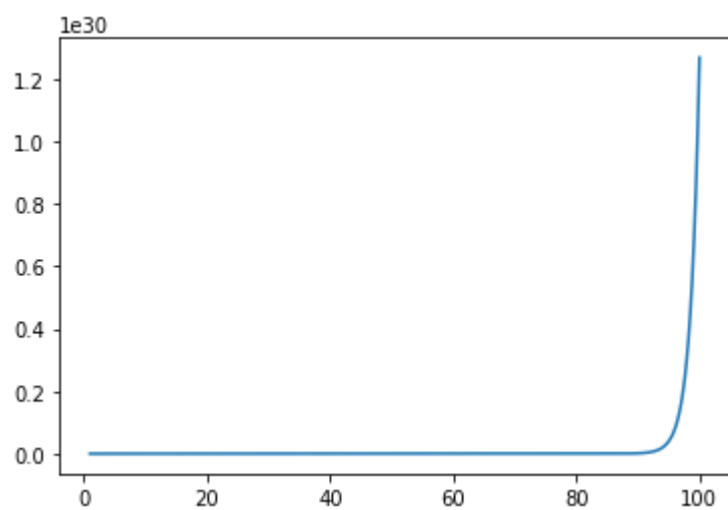
```
from matplotlib import pyplot as plt  
%matplotlib inline
```

In [44]:

```
x = np.linspace(1, 100, 1000)  
x2 = np.linspace(2, 100, 1000)
```

In [22]:

```
plt.plot(x, fa(x))  
plt.show()
```



In [49]:

```
fa(5)
```

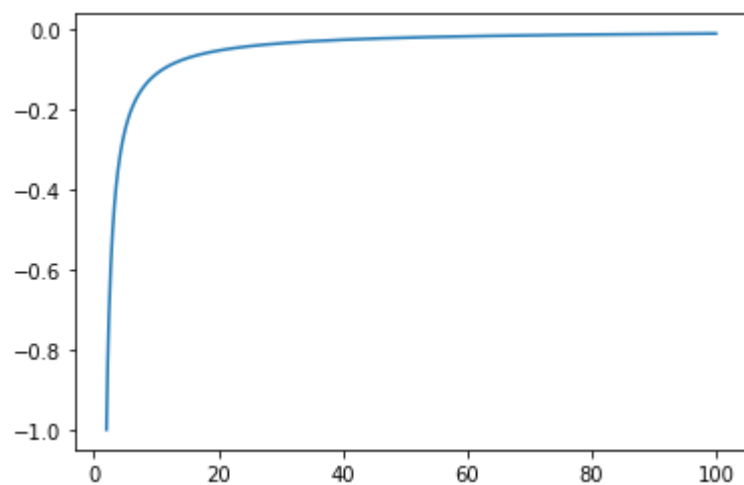
Out[49]:

27

Последовательность a возрастает и неограничена

In [24]:

```
plt.plot(x2, fb(x2))  
plt.show()
```



In [50]:

```
fb(5)
```

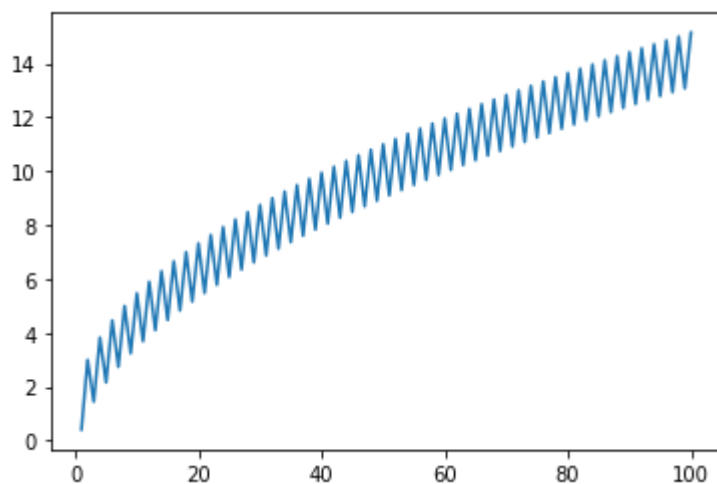
Out[50]:

-0.25

Последовательность b возрастает и ограничена

In [45]:

```
x = np.linspace(1, 100, 100)
plt.plot(x, fc(x))
plt.show()
```



In [51]:

```
fc(5)
```

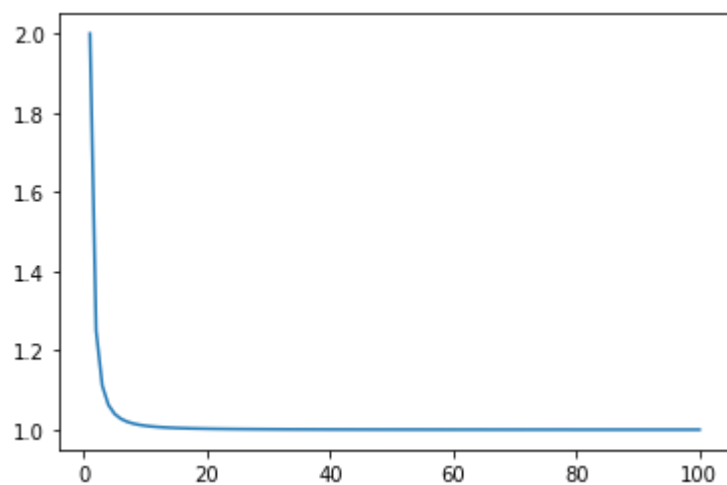
Out[51]:

2.1622776601683795

Последовательность c возрастает и неограничена

In [48]:

```
x = np.linspace(1, 100, 100)
plt.plot(x, fd(x))
plt.show()
```



In [52]:

```
fd(5)
```

Out[52]:

1.04

Последовательность d убывает и ограничена

4. Найти 12-й член заданной неявно последовательности

$$a(1) = 128, a(n+1) - a(n) = 6$$

In [53]:

```
# Ответ
a12 = 128 + 6*11
a12
```

Out[53]:

194

In [58]:

```
# Проверим. если первый член последовательности 128, то 12й будет:
a = 128
for i in range(1, 13):
    print(i, a)
    a += 6
```

```
1 128
2 134
3 140
4 146
5 152
6 158
7 164
8 170
9 176
10 182
11 188
12 194
```

5. На языке Python предложить алгоритм вычисляющий численно предел с точностью 10^{-7}

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

In [107]:

```
from math import factorial
#from scipy.special import factorial
```

In [108]:

```
def lim(n):
    return n/(factorial(n)**(1/n))
```

In [117]:

```
# Большая точность вызывает переполнение регистра,
#при данной реализации вычислить в питоне невозможно из за огромных значений факториала
e = 0.001
```

In [116]:

```
i = 1
while np.abs(lim(i+1) - lim(i)) > e:
    i += 1
print(i, lim(i))
```

```
83 2.617701998673183
```