Практическое задание. Часть I

In [1]:

```
import numpy as np
```

1. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = 1, f_3(x) = x + 1, f_4(x) = x - e^x.$$

Можно заметить, что $x - e^x = x + 1 - 1 - e^x$, то есть $f_4(x) = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x)$

Значит вектора **линейно зависимы**

2. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 2, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2, f_4(x) = (x + 1)^2.$$

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$x^2 + x + 2 \neq x^2 + 2x + 1$, посмотрим через коэффициенты α

$2\alpha_1 + x\alpha_2 + x^2\alpha_3 + \alpha_4(x + 1)^2 = 0$

$2\alpha_1 + x\alpha_2 + x^2\alpha_3 + \alpha_4 x^2 + \alpha_4 2x + \alpha_4 = 0$

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 2, \alpha_4 = -2$

$2 + 4x + 2x^2 - 2x^2 - 4x - 2 = 0$

Вектора **линейно зависимы**

3. Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10), b_2 = (2, 0, 0), b_3 = (0, 1, 0)$.

$det A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 20 \neq 0, rank = 3$

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 10 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 \end{vmatrix}$$

Координаты: (0.5, 1, 3)

4. Найти координаты вектора $3x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}^3[x]$:

а) в базисе 1, x, x^2;

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Координаты: (2, -2, 3)

б) в базисе x^2, $x - 1$, 1.

не знаю как записать смещение в матричной форме

$3x^2 - 2x + 2 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2(x-1) + \alpha_3$

$3x^2 - 2x + 2 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x - \alpha_2 + \alpha_3$

Координаты: (3, -2, 0)

5. Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

$x = (0, x_2, x_3), y = (y_1, 0, y_3)$

$x + y = (y_1, x_2, x_3 + y_3) \notin L$

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

$x = (u_1, u_2, u_n), y = (u_n, u_2, u_1)$

$x + y = (u_1 + u_n, u_2 + u_2, u_n + u_1) \in L, 2x = (2u_1, 2u_2, 2u_n) \in L$

Часть II

1. Найти скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}$:

а) $x = (0, -3, 6),\ y = (-4, 7, 9);$

$(x, y) = 0 - 21 + 54 = 33$

In [2]:

```
np.dot([0,-3, 6],[-4,7,9])
```

Out[2]:

```
33
```

б) $x = (7, -4, 0, 1),\ y = (-3, 1, 11, 2).$

$(x, y) = -21 - 4 + 0 + 2 = -23$

In [3]:

```
np.dot([7, -4, 0, 1],[-3, 1, 11, 2])
```

Out[3]:

```
-23
```

2. Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол между ними.

Манхэттенская: $||x1|| = 4 + 2 + 4 = 10, ||x2|| = 12 + 3 + 4 = 19$

In [4]:

```
np.linalg.norm([4,2,4], ord=1)
```

Out[4]:

```
10.0
```

In [5]:

```
np.linalg.norm([12,3,4], ord=1)
```

Out[5]:

```
19.0
```

Евклидова: $||x1|| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6, ||x2|| = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$

In [6]:

```
np.linalg.norm([4,2,4], ord=2)
```

Out[6]:

```
6.0
```

In [7]:

```
np.linalg.norm([12,3,4], ord=2)
```

Out[7]:

```
13.0
```

In [8]:

```
np.dot([4,2,4],[12,3,4])
```

Out[8]:

```
70
```

$cos\phi = \frac{70}{6*13} = 0.89$

Угол между векторами:

In [9]:

```
np.arccos(70/(6*13))
```

Out[9]:

```
0.45687400353266105
```

3. Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов;

Определение

Линейное пространство над полем вещественных чисел называется *евклидовым пространством*, если на нем введено правило, согласно которому каждой упорядоченной паре векторов x и y поставлено в соответствие вещественное число, называемое *скалярным произведением* и обозначаемое символом (x,y).

При этом указанное правило должно подчиняться четырем аксиомам:
1) $(x,y)=(y,x)$;
2) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$;
3) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;
4) $(x,x)\geq 0$, причем $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

In [10]:

```
a = np.linalg.norm([3,4,5], ord=2)
b = np.linalg.norm([1,2,3], ord=2)
print('ab:', a*b, 'ba:', b*a)
```

```
ab: 26.457513110645905 ba: 26.457513110645905
```

In [15]:

```
print('(5a, b) = 5(a,b) = ', 5*a*b)
```

```
(5a, b) = 5(a,b) =  132.28756555322954
```

In [16]:

```
x1 = np.array([1,2,3])
x2 = np.array([2,3,4])
y = np.array([3,4,5])
yn = np.linalg.norm(y, ord=2)
x1n = np.linalg.norm(x1, ord=2)
x2n = np.linalg.norm(x2, ord=2)
x12 = np.linalg.norm((x1+x2), ord=2)
```

In [17]:

```
print('(x1+x2, y):',x12*yn ,'(x1,y)+(x2,y):', x1n*yn + x2n*yn)
```

```
(x1+x2, y): 64.42049363362563 (x1,y)+(x2,y): 64.53637863996545
```

¯_(ツ)_/¯

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

Везде будет стандартное умножение на скаляр, поэтому пространство будет евклидовым

4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$:

а) $(1,0,0),(0,0,1);$

не образуют, т.к. для $\mathbb{R}^3$ нужно 2 вектора, а в условии 2

б) $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0),(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0),(0,0,1);$

In [18]:

```
x = np.array([1/np.sqrt(2), -1/np.sqrt(2),0])
y = np.array([1/np.sqrt(2), 1/np.sqrt(2), 0])
z = np.array([0,0,1])
```

In [21]:

```
np.linalg.norm(x, ord=2), np.linalg.norm(y, ord=2), np.linalg.norm(z, ord=2)
```

Out[21]:

```
(0.9999999999999999, 0.9999999999999999, 1.0)
```

In [23]:

```
np.dot(x,y), np.dot(x,z), np.dot(y,z)
```

Out[23]:

```
(0.0, 0.0, 0.0)
```

вектора образуют ортонормированный базис

в) $(1/2, -1/2, 0), (0, 1/2, 1/2), (0, 0, 1);$

In [24]:

```
x = np.array([1/2, -1/2, 0])
y = np.array([0, 1/2, 1/2])
z = np.array([0, 0, 1])
```

In [25]:

```
np.linalg.norm(x, ord=2), np.linalg.norm(y, ord=2), np.linalg.norm(z, ord=2)
```

Out[25]:

```
(0.7071067811865476, 0.7071067811865476, 1.0)
```

нет, т.к. первые 2 вектора не проходят по условию длины

г) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)?$

да, в условии задачи уже указан ортонормированные базис :)

In [ ]:

```

```