测度论导论第一章第一节习题

丁　珍 AND 程预敏

1. Solution of Ex 1.1.4

Let $d_1, d_2 \geq 1$, and let $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ be elementary sets. Show that $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ is elementary, and $m^{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = m^{d_1}(E_1) \times m^{d_2}(E_2)$.

证明. 根据 Lemma 1.1.2，可以将 E_1, E_2 分割为不相交的 boxes 的有限并：

$$E_1 = B_1^1 \cup \cdots \cup B_n^1, \quad E_2 = B_1^2 \cup \cdots \cup B_m^2.$$

则 $E_1 \times E_2 = \cup_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}} B_i^1 \times B_j^2$。考虑 $B_i^1 = I_{i,1}^1 \times \cdots \times I_{i,d_1}^1$ 和 $B_j^2 = I_{j,1}^2 \times \ldots I_{j,d_2}^2$，则

$$B_i^1 \times B_j^2 = I_{i,1}^1 \times \cdots \times I_{i,d_1}^1 \times I_{j,1}^2 \times \ldots I_{j,d_2}^2.$$

显然有 $B_i^1 \times B_j^2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$。此外

$$m^{d_1+d_2}(B_i^1 \times B_j^2) = \left|I_{i,1}^1\right| \times ... \times \left|I_{i,d_1}^1\right| \times \left|I_{j,1}^2\right| \times ... \times \left|I_{j,d_2}^2\right| = m^{d_1}(B_i^1) \times m^{d_2}(B_j^2).$$

由于 E_1 和 E_2 均由不相交的 boxes 所分割，则卡氏积 $E_1 \times E_2$ 同样也是不相交的。由此，我们可以得到

$$m^{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = \sum_{\substack{i=1\ldots n \\ j=1\ldots m}} m^{d_1}(B_i^1) \times m^{d_2}(B_j^2) = m^{d_1}(E_1) \times m^{d_2}(E_2).$$

□

2. Solution of Ex 1.1.18

证明. Let $E \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded set. (1) Show that E and the closure $\overline{E}$ of E have the same Jordan outer measure.

任给 $\epsilon > 0$，根据外测度 $m^{*,(J)}(E)$ 的定义 (Definition 1.1.4), 存在一个基本集 $B \supset E$，使得

$$m(B) \leq m^{*,(J)}(E) + \epsilon,$$

且 B 可以分割为不相交 boxes 的有限并：$B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$。其次，令 $B' = \overline{B}$，我们有

$$B' = \overline{B} = \overline{B_1 \cup \cdots \cup B_n} = \bigcup_{i=1\ldots n} \overline{B_i}.$$

当 $\overline{B_i}$ 是不相交的 boxes 时，

$$m^{*,(J)}(B') = \sum_{i=1\ldots n} m(\overline{B_i}) = \sum_{i=1\ldots n} m(B_i) = m_{*,(J)}(B') = m(B).$$

当 $\overline{B_i}$ 中存在相交的 boxes 时，可以对其重新分割使得上式成立。显然 B' 是包含 E 的闭集，由 $\overline{E}$ 的最小性，则 $\overline{E} \subset B'$，于是

$$m^{*,(J)}(\overline{E}) \leq m^{*,(J)}(B') \leq m^{*,(J)}(E) + \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性和测度对基本集的单调性，我们有 $m^{*,(J)}(\overline{E}) = m^{*,(J)}(E)$。
(2) Show that E and the interior E^o of E have the same Jordan inner measure.

任给 $\epsilon > 0$，根据内测度 $m_{*,(J)}(E)$ 的定义 (Definition 1.1.4), 存在一个基本集 $A \subset E$，使得

$$m(A) \geq m_{*,(J)}(E) - \epsilon,$$

且 A 可以分割为不相交 boxes 的有限并：$A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$。同时，令 $A^o = \cup_{i=1\ldots k} A_i^o$，我们有

$$A^o \subset A \subset E, \quad A^o\text{是开集},$$

同时

$$m_{*,(J)}(A^o) = \sum_{i=1\ldots k} m_{*,(J)}(A_i^o) = \sum_{i=1\ldots k} m(A_i) = m(A).$$

由 E^o 的最大性，我们有 $A^o \subset E^o$，则

$$m_{*,(J)}(E^o) \geq m_{*,(J)}(A^o) = m(A) \geq m_{*,(J)}(E) - \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性，我们有 $m_{*,(J)}(E^o) = m_{*,(J)}(E)$。

(3) Show that E is Jordan measurable if and only if the topological boundary ∂E of E has Jordan outer measuer zero.

$\Rightarrow$ 根据上文，当 E 是 Jordan 可测集时，E^o 和 $\overline{E}$ 都是 Jordan 可测集。则 $\partial E = \overline{E} \backslash E^o$ 是 Jordan 可测集，且

$$m(\partial E) = m(\overline{E}) - m(E^o) = 0.$$

故 ∂E 的外测度也为 0。

$\Leftarrow$ 设 ∂E 的外测度为 0。由于基本测度的非负性，$m_{*,(J)}(\partial E) = 0$，且

$$m_{*,(J)}(\partial E) \geq \left[m_{*,(J)}(\overline{E}) - m_{*,(J)}(E^o) \right] \geq \left[m_{*,(J)}(\overline{E}) - m^{*,(J)}(E^o) \right],$$

则 E^o 是 Jordan 可测集。故 $\overline{E}$ 和 E 也是 Jordan 可测集。

(4) Show that the *bullet-riddled square* $[0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2$, and the set of bullets $[0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$, both have Jordan inner measure zero and Jordan outer measure one. In particualr, both sets are not Jordan measurable.

(a) $m_{*,(J)}([0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2) = 0$。显然，任给 $[0,1]^2$ 上的 box B，若 $m^2(B) \neq 0$，则存在 $a < b, c < d \in [0,1]$ 使得 $O = (a,b) \times (c,d) \subset B$。对于开 box O，存在点 $p = (r_1, r_2) \in O$，且 r_1, r_2 均为有理数。故 $O \not\subset [0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2$，且 $B \not\subset [0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2$。也就找不出除空集和零测度 box 以外的基本集包含在 $[0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ 中，故 $[0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ 的内测度为 0，同理 $[0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ 的内测度也是 0。

(b) $m^{*,(J)}([0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2) = 1$。显然 $[0,1]^2$ 是一个包含 $R = [0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ 的基本集，且 $m^{*,(J)}([0,1]^2) = 1$。故 $m^{*,(J)}(R) \leq 1$。又任给基本集 S 使得 $S \cap [0,1]^2 \neq [0,1]^2$，则令 $S' = S \cap [0,1]^2 \subsetneq [0,1]^2$。显然，$S'$ 和 $[0,1]^2 \backslash S'$ 也是非空基本集。若存在 box $B \subset [0,1]^2 \backslash S'$，使得 $m^2(B) \neq 0$，则存在无理数 $i_1, i_2 \in [0,1]$，使得 $(i_1, i_2) \in B$ 且 $(i_1, i_2) \notin S$。这也就是说，对于任意的基本集 $S \supset R$，其或者是 $[0,1]^2$ 的覆盖，或者在 $[0,1]^2$ 上，与之相差有限个零测度 box。故 $\forall S_{\text{elementary}} \supset R$, 有 $S \cap [0,1]^2 \supset R$, 且 $m(S \cap [0,1]^2) = 1$。故 $m^{*,(J)}([0,1]^2 \backslash \mathbb{Q}^2) = 1$。同理 $m^{*,(J)}([0,1]^2 \cap \mathbb{Q}^2) = 1$。 □

3. Solution of Ex 1.1.19

Let $E \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded set, and let $F \subset \mathbb{R}^d$ be an elementary set. Show that $m^{*,(J)}(E) = m^{*,(J)}(E \cap F) + m^{*,(J)}(E \backslash F)$.

证明. 对于任给 $\epsilon > 0$，根据外测度定义，存在基本集 $S \supset E$ 使得下式成立

$$m(S) \leq m^{*,(J)}(E) + \epsilon.$$

我们可以将 S 划分为 $S \cap F$ 和 $S \backslash F$ 两部分。其中 $S \cap F \supset E \cap F$ 是基本集，且 $m^{*,(J)}(E \cap F) \leq m^{*,(J)}(S \cap F) = m(S \cap F)$。另一方面，$S \backslash F \supset E \backslash F$ 是基本集，且 $m^{*,(J)}(E \backslash F) \leq m^{*,(J)}(S \backslash F) = m(S \backslash F)$。综上，我们可以得到

$$\left[m^{*,(J)}(E \cap F) + m^{*,(J)}(E \backslash F)\right] \leq \left[m(S \cap F) + m(S \backslash F)\right] = m(S) \leq m^{*,(J)}(E) + \epsilon. \tag{3.1}$$

类似地，我们可以得到 2 个基本集 $P_1 \supset (E \cap F), P_2 \supset (E \backslash F)$ 使得下式成立

$$m(P_1) \leq m^{*,(J)}(E \cap F) + \frac{\epsilon}{2}, \quad m(P_2) \leq m^{*,(J)}(E \backslash F) + \frac{\epsilon}{2}.$$

显然，我们有 $(P_1 \cup P_2) \supset E$ 是基本集，故

$$m(P_1) + m(P_2) \geq m(P_1 \cup P_2) \geq m^{*,(J)}(E).$$

也就是

$$m^{*,(J)}(E) \leq m^{*,(J)}(E \cap F) + m^{*,(J)}(E \backslash F) + \epsilon. \tag{3.2}$$

结合(3.2)和(3.1)，我们可以得到题设的结论。 □

4. Solution of Ex 1.1.20

证明. 考虑一个特殊的分段常数函数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$，它在区间 $[a, r)$ 上取值为 c_1，在 $[r, b]$ 上取值为 c_2，故 $\sum_{i=1}^{n} c_i |I_i| = c_1 \times (r-a) + c_2 \times (b-r)$。则对于任意的区间 $[a, b]$ 的划分 $\mathcal{P} = ((x_0, x_1, \ldots, x_n), (x_1^*, \ldots, x_n^*))$，$f$ 在划分 $\mathcal{P}$ 上的黎曼和 $\mathcal{R}(f, \mathcal{P})$ 与 $\sum_{i=1}^{n} c_i |I_i|$ 的误差受 $\Delta(\mathcal{P})$ 影响：

$$\left|\mathcal{R}(f, \mathcal{P}) - \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i|\right| \leq |c_1 - c_2| \Delta(\mathcal{P}).$$

当 $\Delta(\mathcal{P}) \to 0$，上式趋于 0。同理，对于一般的分段常值函数 $g : [a, b] \to (c_1, c_2, \ldots, c_k)$(其中 c_i 表示在第 i 个区间上取到的常数，可以重复)，令 $M = \max\{|c_i - c_j| : i, j \in (1, 2, \ldots, k)\}$,

$$\left|\mathcal{R}(g, \mathcal{P}) - \sum_{i=1}^{n} c_i |I_i|\right| \leq k \times M \times \Delta(\mathcal{P}).$$

故而，我们可以用 $\sum_{i=1}^{n} c_i |I_i|$ 表示函数黎曼和的极限，且它与区间的划分无关。 □

5. Solution of Ex 1.1.21

证明. (1) 线性性。根据高等教育出版社出版的《数学分析上册》（第四版）第九章第 4 节中的第三小节的性质 1 和 2，黎曼可积函数具有线性性质，同时由上题可知，分段常值函数是黎曼可积函数，故其具有线性性。

(2) 单调性。根据上文中的性质 5 及其推论，区间 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数具有单调性。故分段常值函数具有单调性。

(3) 示性函数。已知 E 是区间 $[a, b]$ 上的基本集，则其可以表示为不相交的有限个区间的并：

$$E = I_1 \cup \cdots \cup I_k.$$

故示性函数可以表示为上述区间上的分段常值函数：

$$1_E : [a, b] \to \mathbb{R} = \sum_{i=1}^{k} 1_{I_i}.$$

由此可得

$$\text{p.c.} \int_a^b 1_E(x)dx = \sum_{i=1}^k 1 \times |I_i| = \sum_{i=1}^k m(I_i) = m(E).$$

□

6. Solution of Ex 1.1.22

Let $[a,b]$ be an interval, and $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Show that f is Riemann integrable if and only if it is Darboux integrable.

证明. 由《数学分析上册》中的定理 9.14 (可积的第一充要条件)，黎曼可积性和达布可积性等价。 □

7. Solution of Ex 1.2.25

Let $[a,b]$ be an interval, and let $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ be a bounded function. Show that f is Riemann integrable if and only if the set $E^+ := \{(x,t) : x \in [a,b]; 0 \le t \le f(x)\}$ and $E_- := \{(x,t) : x \in [a,b]; f(x) \le t \le 0\}$ are both Jordan measurable in $\mathbb{R}^2$, in which case one has

$$\int_a^b f(x)dx = m^2(E^+) - m^(E_-),$$

where m^2 denotes two-dimensional Jordan measure.

证明. 不妨假设 f 在区间 $[a,b]$ 上是正值函数。
$\Rightarrow$ 设 f 是黎曼可积函数，则由 6 (练习 1.1.22)，对于任意 $\epsilon > 0$，存在分段常值函数 $g = \sum_{i=1}^k c_i \times 1_{I_i}$，使得 $f \ge g$，且

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^k c_i \times |I_i| \le \int_a^b f(x)dx \le \sum_{i=1}^k c_i \times |I_i| + \epsilon.$$

令 $E_1 = \bigcup_{i=1\dots k} I_i \times [0, c_i]$，显然是一个基本集，且

$$m^2(E_1) = \int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^k c_i \times |I_i| \ge \int_a^b f(x)dx - \epsilon. \tag{7.1}$$

同时，对于任意 $\epsilon > 0$，存在分段常值函数 $h = \sum_{j=1}^l c_j \times 1_{I_j}$，使得 $f \le h$，且

$$\int_a^b h(x)dx = \sum_{j=1}^l c_j \, |I_j| \ge \int_a^b f(x)dx \ge \sum_{j=1}^l c_j \, |I_j| - \epsilon.$$

令 $E_2 = \bigcup_{j=1\dots l} I_j \times [0, c_j]$，显然是一个基本集，且

$$m^2(E_2) = \int_a^b h(x)dx = \sum_{j=1}^l c_j \times |I_j| \le \int_a^b f(x)dx + \epsilon. \tag{7.2}$$

由于 $g \le f \le h$，则 $E_1 \subset E^+ \subset E_2$，且

$$m^{*,(J)}(E^+) \le m^2(E_2), \quad m_{*,(J)}(E^+) \ge m^2(E_1).$$

结合上面的 (7.1) 和 (7.2)，我们有

$$m^2(E_1) \ge m^2(E_2) - 2\epsilon.$$

同时由 ϵ 的任意性，我们有

$$m^{*,(J)}(E^+) = m_{*,(J)}(E^+).$$

这也就是说，E^+ 是 Jordan 可测集。且

$$\int_a^b f(x)dx = m^{*,(J)}(E^+) = m_{*,(J)}(E^+) = m(E^+).$$

当 f 在区间 $[a,b]$ 上是负值函数时有类似的结果，同理可以推广当 f 取值为 $\mathbb{R}$ 时的情形。
$\Leftarrow$ 当 f 在区间 $[a,b]$ 上是正值函数，且 E^+ 是 Jordan 可测集时，对任意 $\epsilon>0$，存在 2 个基本集 E^1 和 E^2 使得 $E^1\subset E^+\subset E^2$，且

$$m^2(E^1)\le m^2(E^+)\le m^2(E^1)+\frac{1}{2}\epsilon,$$
$$m^2(E^2)\ge m^2(E^+)\ge m^2(E^2)-\frac{1}{2}\epsilon.$$

由于 E^1,E^2 是基本集，故可以找到 2 个分段常值函数 g,h 使得 E^1,E^2 分别是其对应的图像：

$$E^1=\{(x,t):x\in[a,b];0\le t\le g(x)\},\quad m^2(E^1)=\int_a^b g(x)dx,$$
$$E^2=\{(x,t):x\in[a,b];0\le t\le h(x)\},\quad m^2(E^2)=\int_a^b h(x)dx.$$

这时，我们有 $g\le f\le h$，且

$$\int_a^b h(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx\ge\int_a^b h(x)dx-\epsilon,$$

由 ϵ 的任意性，我们有 $\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx$，也就是 f 是达布可积的。根据6 (练习 1.1.22)，f 也是黎曼可积的。当 f 在区间 $[a,b]$ 上是负值函数时有类似的结果，同理可以推广当 f 取值为 $\mathbb{R}$ 时的情形。 □

8. Solution of Ex 1.1.26

Extend the definition of Riemann and Darboux integrals to higher dimensions, in such a way that analogues of all the previous results hold.

证明. 根据上一节的结果 7，我们可知 f 是 $[a,b]$ 上的黎曼可积函数，当且仅当其对应的 E^+,E_- 都是基本集。我们延拓这一定义到 $\{\mathbb{R}^d,d\in\mathbb{N}\}$ 的基本集上的有界函数。给定 $D\subset\mathbb{R}^d$ 是基本集，且 $f:D\to\mathbb{R}$ 是定义在 D 上的有界函数。对应地，我们给出集合 E^+ 和 E_- 的定义：

$$E^+:=\{(x,t)\in D\times\mathbb{R}:x\in D;0\le t\le f(x)\},\quad E_-:=\{(x,t)\in D\times\mathbb{R}:x\in D;f(x)\le t\le 0\}.$$

我们给出当 f 是正值函数时，即 $f:D\to\mathbb{R}^+$ 时的达布积分 *(Darboux integral)* 的定义。

定义 8.1. 当 f 是正值函数时，E_- 可以视为空集，我们只需要考虑集合 E^+，则 f 在基本集 D 上的达布下积分为

$$\underline{\int_D} f(x)dx:=m_{*,(J)}(E^+)=\sup_{\substack{A\subset E^+\\ A\ \text{elementary}}} m^{d+1}(A). \tag{8.1}$$

同理，可以定义 f 的达布上积分：

$$\overline{\int_D} f(x)dx:=m^{*,(J)}(E^+)=\inf_{\substack{B\supset E^+\\ B\ \text{elementary}}} m^{d+1}(B). \tag{8.2}$$

可以验证，基本集 A,B 可以对应到 D 上的分段常值函数，则可以将上述的定义 (8.1) 和 (8.2) 改写为分段常值函数的形式，则更贴近于课本 *Definition 1.1.6* 的内容。f 是集合 D 上的达布可积函数，当且仅当其对应的 E^+ 是基本集，且

$$\int_D f(x)dx=m^{d+1}(E^+).$$

相应地，对于 D 上的一般函数 $f:D\to\mathbb{R}$，称 f 是达布可积的，当且仅当其对应的 E^+,E_- 都是基本集，且 $\int_D f(x)dx=m^{d+1}(E^+)-m^{d+1}(E_-)$。 □