测度论导论 §1.3 习题

丁　珍 AND 程预敏

1. Solution of Ex 1.3.2

(Basic properties of the complex-valued simple integral). Let $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ be absolutely integrable simple functions.

(i) (*-linearity) We have

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

and

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} cf(x)\,\mathrm{d}x = c \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

for all $c \in \mathbb{C}$. Also we have

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{1.3}$$

证明. 我们首先考虑绝对收敛的实数值简单函数的情形，即 $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。由于 f, g 都是简单函数，则 $h = f + g$ 也是简单函数。且

$$h_+ - h_- = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-).$$

由于 f, g 都是绝对收敛的简单函数，则易证上面的函数是绝对收敛的非负简单函数。且我们有

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+. \tag{1.4}$$

根据非负简单函数积分的线性性，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h_+(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_-(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g_-(x)\,\mathrm{d}x = \\ \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h_-(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_+(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g_+(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

将上式整理后，就可以得到可加性 (1.1)。

当 $c \geq 0 \in \mathbb{R}$ 时，显然有

$$\begin{aligned}\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} cf(x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} cf_+(x)\,\mathrm{d}x - \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} cf_-(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_+(x)\,\mathrm{d}x - c \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_-(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $c = -1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} -f(x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_-(x)\,\mathrm{d}x - \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_+(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -1 \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据上面两式，不难证明 (1.2) 对所有 $c \in \mathbb{R}$ 成立。同时，根据复数值简单函数的积分定义，不难将上面两个性质推导到复数值简单函数的情形。

当 f 是绝对收敛的复数值简单函数，且 $f=\sum_{i=1}^{n} c_i 1_{E_i}$ 时，易证

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot m(E_i). \tag{1.5}$$

这时我们有 $\overline{f}=\overline{\sum_{i=1}^{n} c_i 1_{E_i}}=\sum_{i=1}^{n}\overline{c_i}1_{E_i}$，且

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d}\overline{f}(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\overline{c_i}\cdot m(E_i)=\overline{\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

□

(ii) (Equivalence) If f and g agree almost everywhere, then we have
$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x=\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 我们首先考虑实数值简单函数的情形。若 f 和 g 是几乎处处相等的绝对收敛的实数值简单函数，则 f_+ 和 g_+、f_- 和 g_- 也几乎处处相等。这时，根据非负简单函数的相等性，我们有

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_+(x)\,\mathrm{d}x=\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g_+(x)\,\mathrm{d}x,\quad \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_-(x)\,\mathrm{d}x=\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g_-(x)\,\mathrm{d}x.$$

结合上式，我们有 $\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x=\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x$。

当 f 和 g 是几乎处处相等的绝对收敛的复数值简单函数时，$Re(f)$ 和 $Re(g)$、$Im(f)$ 和 $Im(g)$ 也几乎处处相等，根据实数值简单函数的相等性，可以得到 f 和 g 的积分值相等。 □

(iii) (Compatibility with Lebesgue measure) For any Lebesgue measurable E, one has $\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} 1_E(x)\,\mathrm{d}x=m(E)$.

证明. 显然，$1_E(x)$ 是非负简单函数，根据非负简单函数的勒贝格测度的相容性，可以得到这一结论。 □

(iv) (Uniqueness) Show that the complex-valued simple integral

$$f\to\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x$$

is the only map from the space $\operatorname{Simp}^{abs}(\mathbb{R}^d)$ of absolutely integrable simple functions to $\mathbb{C}$ that obeys all of the above properties.

证明. 对于绝对收敛的复数值简单函数 f，考虑它的典范表示：$f=\sum_{i=1}^{n} c_i 1_{E_i}$，其中 c_i 各异且 E_i 不交。若 $\sum_{j=1}^{m} s_j 1_{F_j}$ 也是 f 的一个典范表示。易证在这两个表示中，$m=n$ 且存在从 i 到 j 的一个双射 σ 使得 $s_{\sigma(i)}=c_i, F_{\sigma(i)}=E_i$。也就是说，典范表示具有唯一性。根据 (1.5)，我们有

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot m(E_i)$$

根据典范表示和 Lebesgue 测度的唯一性，我们可知，绝对收敛的简单函数的简单积分具有唯一性。 □

2. Solution of Ex 1.3.4

Let $f:\mathbb{R}^d\to[0,+\infty]$. Show that f is a *bounded* unsigned measurable functions if and only if f is the *uniform* limit of *bounded* simple functions.

证明. (i) (充分性) 考虑 $\{f_n\}$ 是一致收敛到 f 的有界非负简单函数列。显然，f 是非负函数。根据 Lemma 1.3.9 (ii)，f 是 Lebesgue 可测函数。另一方面，对于 $\epsilon = 1$，存在 $n_1 \geq 1$ 使得

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f_{n_1}(x) - f(x)| \leq 1, \quad f(x) \leq f_{n_1}(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

令 M_{n_1} 是函数 f_{n_1} 的上界，则 $f(x) \leq M_{n_1} + 1, \forall x \in \mathbb{R}^d$。也就是说 f 是有界非负的可测函数。

(ii) (必要性) □

3. Solution of Ex 1.3.6

Let $f : \mathbb{R}^d \to [0, +\infty]$ be an unsigned measurable function. Show that the region $\{(x,t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(x)\}$ is a measurable subset of $\mathbb{R}^{d+1}$.

证明. □

4. Solution of Ex 1.3.10

(Inner regularity). Let $E \subset \mathbb{R}^d$ be Lebesgue measurable. Show that

$$m(E) = \sup_{K \subset E,\ K \text{ compact}} m(K).$$

证明. 对于 E 的任意紧子集 K，$m(E) \geq m(K)$ 显然成立。故我们下面证明

$$m(E) \leq \sup_{K \subset E,\ K \text{ compact}} m(K) \tag{4.1}$$

(1) 当 E 是有界集时。令 C 是包含 E 的一个有界闭集，对于任意 $\epsilon > 0$。由 Lebesgue 测度的外正则性，存在一个开集 $U \supset (C \backslash E)$，且

$$m(U) < m(C \backslash E) + \epsilon. \tag{4.2}$$

令 $K = C \backslash U$，则 K 是一个 E 的紧子集。此外，根据 Lebesgue 测度的单调性，我们有

$$m(C) \leq m(K) + m(U). \tag{4.3}$$

综合 (4.2) 和 (4.3)两式，我们可以得到

$$\begin{aligned} &m(E) + m(C \backslash E) = m(C) \leq m(K) + m(C \backslash E) + \epsilon, \\ &m(E) \leq m(K) + \epsilon. \end{aligned}$$

根据 ϵ 的任意性，我们可以得到 (4.1)。

(2) 当 E 不是有界集时。对于任意 $M < m(E)$，我们可以找到 E 的一个紧子集 K，且 $m(K) > M$: 令 $E_i = E \bigcap \overline{B_i(O)}$，其中 $\overline{B_i(O)}$ 是以原点为中心，半径为 i 的闭球。则对于任意 $i \in \mathbb{N}^+$，

$$E_i \subset E_{i+1}, \quad m(E) = \lim_{i \to \infty} m(E_i).$$

故存在一个 i_0 使得 $m(E_{i_0}) > M$，且 E_{i_0} 有界。由 (1) 可以找到紧集 $K \subset E_{i_0} \subset E$ 使得 $m(K) > M$。根据 M 的任意性，我们可以得到 (4.1)。

□

5. Solution of Ex 1.2.22

Let $d, d' \geq 1$ be natural numbers. (i) If $E \subset \mathbb{R}^d$ and $F \subset \mathbb{R}^{d'}$, show that

$$(m^{d+d'})^*(E \times F) \leq (m^d)^*(E) \times (m^{d'})^*(F), \tag{5.1}$$

where $(m^d)^*$ denotes d-dimensional Lebesgue outer measure, etc.

证明. (1) 若 E, F 中有一集合外测度为 ∞ 且另一集合外测度不为零，则上式显然成立。

(2) 故我们首先考虑 E, F 的 Lebesgue 外测度均有限的情况。令 O_E, O_F 是两个开集，且对于任意 $\epsilon > 0$ 满足如下条件

$$O_E \supset E, \quad (m^d)(O_E) = (m^d)^*(O_E) \leq (m^d)^*(E) + \epsilon;$$
$$O_F \supset F, \quad (m^{d'})(O_F) = (m^{d'})^*(O_F) \leq (m^{d'})^*(F) + \epsilon.$$

根据 Lemma 1.2.11，开集 O_E, O_F 可以表示为几乎不交的闭的 cubes 的可数并

$$O_E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad O_F = \bigcup_{j=1}^{\infty} B'_j,$$

其中 B_i 是 $\mathbb{R}^d$ 中的闭 cube，B'_j 是 $\mathbb{R}^{d'}$ 中的闭 cube。任给 $x \in E \times F \subset \mathbb{R}^{d+d'}$，$x \in O_E \times O_F$。则 $E \times F$ 是开集 $O_E \times O_F$ 的子集，故

$$(m^{d+d'})^*(E \times F) \leq (m^{d+d'})^*(O_E \times O_F) = (m^{d+d'})^*(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_i \times B'_j).$$

由于 B_i, B'_j 都是几乎不交的闭的 cube，则

$$\begin{aligned}(m^{d+d'})^*(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_i \times B'_j) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(m^d)^*(B_i) \cdot (m^{d'})^*(B'_j) = (m^d)^*(O_E) \cdot (m^{d'})^*(O_F) \\ &\leq (m^d)^*(E) \times (m^{d'})^*(F) + \epsilon \cdot \big((m^d)^*(E) + (m^{d'})(F)\big) + \epsilon^2.\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性，我们有 (5.1) 成立。

(3) 若 E, F 中有一集合外测度为 ∞ 且另一集合外测度为零，不妨设 $(m^d)^*(E) = \infty$ 且 $(m^{d'})^*(F) = (m^{d'})(F) = 0$，这时，记 $\{K_n\}$ 为如下序列

$$K_n = F \cap B_n(O), \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

其中 $B_n(O)$ 是以原点为中心，半径为 n 的开球。这时，我们有

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad K_n \subset K_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

令 $O_E \supset E$ 是一个开集，则

$$\begin{aligned}(m^{d+d'})^*(E \times F) &\leq (m^{d+d'})(O_E \times F) \\ &= (m^d)^*(O_E) \cdot (m^{d'})^*(F) \\ &= (m^d)^*(O_E) \cdot \lim_{n\to\infty}(m^{d'})^*(K_n) \\ &= (m^d)^*(O_E) \cdot 0 = 0.\end{aligned} \tag{5.2}$$

□

(ii) Let $E \subset \mathbb{R}^d, F \subset \mathbb{R}^{d'}$ be Lebesgue measurable sets. Show that $E \times F \subset \mathbb{R}^{d+d'}$ is Lebesgue measurable, with $m^{d+d'}(E \times F) = m^d(E) \cdot m^{d'}(F)$. (Note that we allow E or F to have infinite measure, and so one may have to divide into cases or take advantage of the monotone convergence theorem for Lebesgue measure, Exercise 1.2.11.)

证明. (1) 我们从一个有限测度的特殊情况开始。假设 E, F 是两个可测集，且 $m(E), m(F) < \infty$。对于任意 $\epsilon > 0$，根据上一小题的结论，存在开集 O_E, O_F 使得

$$\begin{aligned} O_E \supset E, \quad (m^d)(O_E) &\leq (m^d)(E) + \epsilon; \\ O_F \supset F, \quad (m^{d'})(O_F) &\leq (m^{d'})(F) + \epsilon. \end{aligned}$$

另一方面，存在紧集 K_E, K_F 使得

$$\begin{aligned} K_E \subset E, \quad (m^d)(K_E) &\geq (m^d)(E) - \epsilon; \\ K_F \subset F, \quad (m^{d'})(K_F) &\geq (m^{d'})(F) - \epsilon. \end{aligned}$$

显然，我们有 $(K_E \times K_F) \subset (E \times F) \subset (O_E \times O_F)$，且 $K_E \times K_F$ 是 $\mathbb{R}^{d+d'}$ 中的紧集，故它可测，同时

$$(m^{d+d'})(K_E \times K_F) \geq (m^d)(E) \times (m^{d'})(F) - \epsilon \cdot \big((m^d)(E) + (m^{d'})(F)\big) + \epsilon^2.$$

另一方面，$(O_E \times O_F)\backslash(E \times F) \subset (O_E \times O_F)\backslash(K_E \times K_F)$，且

$$\begin{aligned} (m^{d+d'})^*\big((O_E \times O_F)\backslash(E \times F)\big) &\leq (m^{d+d'})\big((O_E \times O_F)\backslash(K_E \times K_F)\big) \\ &= (m^{d+d'})(O_E \times O_F) - (m^{d+d'})(K_E \times K_F) \\ &\leq 2\epsilon \cdot \big((m^d)(E) + (m^{d'})(F)\big). \end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性，我们可知 $E \times F$ 是 $\mathbb{R}^{d+d'}$ 中的可测集，且

$$(m^{d+d'})(E \times F) = (m^d)(E) \times (m^{d'})(F).$$

(2) 由 (5.2) 可知，若 E, F 中有一集合测度为 ∞ 且另一集合测度为零，则

$$(m^{d+d'})(E \times F) = (m^{d+d'})^*(E \times F) = (m^d)(E) \times (m^{d'})(F) = 0.$$

(3) 若 E, F 中有一集合测度为 ∞ 且另一集合测度不为零，不妨设 $(m^d)^*(E) = \infty$ 且 $(m^{d'})(F) \neq 0$，这时令序列 $\{S_n\}$ 如下定义：

$$S_n = E \cap B_n(O), \quad n = 1, 2, \cdots$$

这时，我们有 $S_n \subset S_{n+1}, \forall n \geq 1$, 且 $E = \bigcup_{n=1}^\infty S_n$。同时，令 $K_F \subset F$ 是一紧集，且 $(m^{d'})(K_F) > 0$。这时，我们有

$$(m^{d+d'})(E \times K_F) = \lim_{n\to\infty} (m^{d+d'})(S_n \times K_F) = \lim_{n\to\infty} (m^d)(S_n) \times (m^{d'})(K_F) = \infty.$$

由单调性，我们可以得到

$$(m^{d+d'})(E \times F) = (m^d)(E) \times (m^{d'})(F) = \infty.$$

□

6. Solution of Ex 1.2.23

(Uniqueness of Lebesgue measure). Show that Lebesgue measure $E \to m(E)$ is the only map from Lebesgue measurable sets to $[0, +\infty]$ that obeys the following axioms:

(i) (Empty set) $m(\emptyset) = 0$.

(ii) (Countable additivity) If $E_1, E_2, \cdots \subset \mathbb{R}^d$ is a countable sequence of disjoint Lebesgue measurable sets, then $m(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

(iii) (Translation invariance) If E is Lebesgue measurable and $x \in \mathbb{R}^d$, then $m(E + x) = m(E)$.

(iv) (Normalisation) $m([0,1]^d) = 1$.

证明. 设 $f : E \to f(E)$ 是一个从 Lebesgue 可测集到 $[0, +\infty]$ 的映射，且满足上面的测度公理。由 Exercise 1.2.8 可知，基本集是 Lebesgue 可测集，且对于任意基本集 E，$m(E) = m^{(J)}(E)$。另一方面，由 Exercise 1.1.3 可知，基本集上满足非负性、有限可加性和平移不变性的测度具有唯一性，且在相差一个常数系数的情况下等价。因此，我们考虑将 f 限制在基本集上。$f([0,1]^d) = 1$，且 f 满足上面的三条性质，故 f 在基本集上与 Lebesgue 测度 m 等价。

设 E 是一个开集，则 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$，其中 Q_i 是 d 维几乎不交的闭 cube。由于 Q_i 是几乎不交的闭 cube，则 Q_i 是基本集，且

$$f(Q_i) = m(Q_i), \quad f(E) = \sum_{i=1}^{\infty} f(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) = m(E).$$

故 f 和 m 在开集上等价。

设 E 是一个 Lebesgue 可测集，由 Lebesgue 外测度的定义，我们有

$$m(E) = m^*(E) = \inf_{E \subset U,\ U \text{ open}} m(U).$$

对任意 $\epsilon > 0$，令 $S \supset E$ 是一个开集，且 $m(S) \leq m(E) + \epsilon$。故

$$f(E) \leq f(S) = m(S) \leq m(E) + \epsilon. \tag{6.1}$$

由 ϵ 的任意性，我们有 $f(E) \leq m(E)$。另一方面

$$f(E) = f(S) - f(S \backslash E) = m(S) - f(S \backslash E) \geq m(S) - m(S \backslash E) = m(E). \tag{6.2}$$

结合 (6.1) 和 (6.2)，我们可知，f 和勒贝格测度 m 在可测集上等价。 □