测度论导论 §1.3 习题

丁　珍 AND 程预敏

1. Solution of Ex 1.3.2

(Basic properties of the complex-valued simple integral). Let $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ be absolutely integrable simple functions.

(i) (*-linearity) We have

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.1}$$

and

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} cf(x)\,\mathrm{d}x = c \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.2}$$

for all $c \in \mathbb{C}$. Also we have

$$\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{1.3}$$

证明. 我们首先考虑绝对收敛的实数值简单函数的情形, 即 $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. 由于 f, g 都是简单函数, 则 $h = f + g$ 也是简单函数. 且

$$h_+ - h_- = (f_+ - f_-) + (g_+ - g_-).$$

由于 f, g 都是绝对收敛的简单函数, 则易证上面的函数是绝对收敛的非负简单函数. 且我们有

$$h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+. \tag{1.4}$$

根据非负简单函数积分的线性性, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h_+(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_-(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g_-(x)\,\mathrm{d}x = \\ \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h_-(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_+(x)\,\mathrm{d}x + \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g_+(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

将上式整理后, 就可以得到可加性 (1.1).

当 $c \geq 0 \in \mathbb{R}$ 时, 显然有

$$\begin{aligned}\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} cf(x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} cf_+(x)\,\mathrm{d}x - \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} cf_-(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_+(x)\,\mathrm{d}x - c \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_-(x)\,\mathrm{d}x \\ &= c \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

当 $c = -1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} -f(x)\,\mathrm{d}x &= \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_-(x)\,\mathrm{d}x - \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_+(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -1 \times \operatorname{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

根据上面两式, 不难证明 (1.2) 对所有 $c \in \mathbb{R}$ 成立. 同时, 根据复数值简单函数的积分定义, 不难将上面两个性质推导到复数值简单函数的情形.

当 f 是绝对收敛的复数值简单函数, 且 $f=\sum_{i=1}^n c_i 1_{E_i}$ 时, 易证

$$\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n c_i\cdot m(E_i). \tag{1.5}$$

这时我们有 $\overline{f}=\overline{\sum_{i=1}^n c_i 1_{E_i}}=\sum_{i=1}^n \overline{c_i} 1_{E_i}$, 且

$$\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f}(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n \overline{c_i}\cdot m(E_i)=\overline{\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

□

(ii) (Equivalence) If f and g agree almost everywhere, then we have $\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 我们首先考虑实数值简单函数的情形. 若 f 和 g 是几乎处处相等的绝对收敛的实数值简单函数, 则 f_+ 和 g_+、f_- 和 g_- 也几乎处处相等. 这时, 根据非负简单函数的相等性, 我们有

$$\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_+(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g_+(x)\,\mathrm{d}x,\quad \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f_-(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g_-(x)\,\mathrm{d}x.$$

结合上式, 我们有 $\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x$.

当 f 和 g 是几乎处处相等的绝对收敛的复数值简单函数时, $Re(f)$ 和 $Re(g)$、$Im(f)$ 和 $Im(g)$ 也几乎处处相等, 根据实数值简单函数的相等性, 可以得到 f 和 g 的积分值相等. □

(iii) (Compatibility with Lebesgue measure) For any Lebesgue measurable E, one has $\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} 1_E(x)\,\mathrm{d}x=m(E)$.

证明. 显然, $1_E(x)$ 是非负简单函数, 根据非负简单函数的勒贝格测度的相容性, 可以得到这一结论. □

(iv) (Uniqueness) Show that the complex-valued simple integral

$$f\to \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x$$

is the only map from the space $\mathrm{Simp}^{abs}(\mathbb{R}^d)$ of absolutely integrable simple functions to $\mathbb{C}$ that obeys all of the above properties.

证明. 对于绝对收敛的复数值简单函数 f, 考虑它的典范表示: $f=\sum_{i=1}^n c_i 1_{E_i}$, 其中 c_i 各异且 E_i 不交. 若 $\sum_{j=1}^m s_j 1_{F_j}$ 也是 f 的一个典范表示. 易证在这两个表示中, $m=n$ 且存在从 i 到 j 的一个双射 σ 使得 $s_{\sigma(i)}=c_i, F_{\sigma(i)}=E_i$. 也就是说, 典范表示具有唯一性. 根据 (1.5), 我们有

$$\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^n c_i\cdot m(E_i)$$

根据典范表示和 Lebesgue 测度的唯一性, 我们可知, 绝对收敛的简单函数的简单积分具有唯一性. □

2. Solution of Ex 1.3.4

Let $f:\mathbb{R}^d\to[0,+\infty]$. Show that f is a *bounded* unsigned measurable functions if and only if f is the *uniform* limit of *bounded* simple functions.

证明. (i) (充分性) 考虑 $\{f_n\}$ 是一致收敛到 f 的有界非负简单函数列. 显然, f 是非负函数. 根据 Lemma 1.3.9 (ii), f 是 Lebesgue 可测函数. 另一方面, 对于 $\epsilon=1$, 存在 $n_1\geq 1$ 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f_{n_1}(x)-f(x)|\leq 1,\quad f(x)\leq f_{n_1}(x)+1,\quad \forall x\in\mathbb{R}^d.$$

令 M_{n_1} 是函数 f_{n_1} 的上界, 则 $f(x)\leq M_{n_1}+1,\forall x\in\mathbb{R}^d$. 也就是说 f 是有界非负的可测函数.

(ii) (必要性) 考虑 f 是有界的非负可测函数, $M\in\mathbb{N}$ 是它的一个上界. 令 $\{f_n\}$ 是如下定义的函数序列:

$$f_n(x)=\sum_{m=0}^{2^n\times M}\frac{m}{2^n}\times 1_{\{\frac{m}{2^n}\le f(x)<\frac{m+1}{2^n}\}},\quad n\in\mathbb{N}^+.$$

显然, 由于 f 是可测函数, 则 $f^{-1}([\frac{m}{2^n},\frac{m+1}{2^n}))$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的可测集, 故 f_n 是有界简单函数, 且下列不等式成立:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f_n(x)-f(x)|\le\frac{1}{2^n}.$$

故, $\{f_n\}$ 是一致收敛到 f 的有界非负简单函数序列. □

3. Solution of Ex 1.3.6

Let $f:\mathbb{R}^d\to[0,+\infty]$ be an unsigned measurable function. Show that the region $\mathcal{D}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\le t\le f(x)\}$ is a measurable subset of $\mathbb{R}^{d+1}$.

证明. 我们首先考虑简单函数的情况. 任给可测集 E 上的示性函数 $1_E(x)$, 显然 $\mathcal{D}_E=\{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\le t\le 1_E(x)\}$ 是由 $E\times[0,1]$ 所生成的可测集. 由此, 任给简单函数 $g(x)$, $\mathcal{D}_g=\{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\le t\le g(x)\}$ 是可测集.

对于任意非负可测函数 f, 我们记 $f^n(x)=\min(f(x),n)$. 令 $\{f_n\}$ 是如下定义的函数序列:

$$f_n(x)=\sum_{m=0}^{2^n\times n}\frac{m}{2^n}\times 1_{\{\frac{m}{2^n}\le f^n(x)<\frac{m+1}{2^n}\}},\quad n\in\mathbb{N}^+.$$

由 Ex 1.3.4 的解 2, $\{f_n\}$ 是递增且有界的非负简单函数序列, 同时 f 是 f_n 的上确界. 记 $\mathcal{D}_n=\{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\le t\le f_n(x)\}$, 显然 $\mathcal{D}_n$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的递增可测集序列:

$$\mathcal{D}_n\subset\mathcal{D}_{n+1},\quad\forall n\in\mathbb{N}^+.$$

根据单调收敛定理, $\lim_{n\to\infty}\mathcal{D}_n$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上的可测集, 记为 $\mathcal{D}_\infty$. 由于 f 是序列 $\{f_n\}$ 的上界, 故

$$\mathcal{D}_\infty\subset\mathcal{D}.$$

另一方面, 由于 f 是序列 $\{f_n\}$ 的上确界, 故任给 $(x,t)\in\mathcal{D}$（其中 $t<f(x)$）, 存在 $N\in\mathbb{N}$ 使得任给 $n\ge N$, 有 $(x,t)\in\mathcal{D}_n\subset\mathcal{D}_\infty$. 故

$$(\mathcal{D}\setminus\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}^d\})\subset\mathcal{D}_\infty.$$

又 $m(\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}^d\})=0$. 故 $m^*(\mathcal{D}\Delta\mathcal{D}_\infty)=0$, $\mathcal{D}$ 是可测集. □

4. Solution of Ex 1.3.10

(Basic properties of the lower Lebesgue integral). Let $f,g:\mathbb{R}^d\to[0,+\infty]$ be unsigned functions (not necessarily measurable)

(i) (Compatibility with the simple integral) If f is simple, then we have $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}}f(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_{\mathbb{R}^d}}f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 根据下积分的定义, 令 $h=f$, h 显然是满足 $h(x)\le f(x)$ 条件的简单函数. 故

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}}f(x)\,\mathrm{d}x\ge\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d}h(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 任给简单函数 $g(x)\le f(x)$, 显然有 $g(x)\le h(x)$ 成立, 故

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}}f(x)\,\mathrm{d}x\le\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d}h(x)\,\mathrm{d}x.$$

又由于 $\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d}h(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,\mathrm{d}x$. 则我们可以得到

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}}f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

同理, 可以证明上积分的情况. □

(ii) (Monotonicity) If $f \le g$ pointwise almost everywhere, then we have $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x$ and $\overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 任给简单函数 $h \le f$, 显然有 $h \le g$, 故

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 任给简单函数 $s \ge g$, 显然有 $s \ge f$, 故

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

□

(iii) (Homogeneity) If $c \in [0, +\infty)$, then $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} cf(x)\,\mathrm{d}x = c\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 当 $c = 0$ 时, 上式显然成立, 我们接下来考虑 $c \neq 0$ 的情形. 任给简单函数 $h \le f$, 显然有 $c \times h(x) \le c \times f(x)$ 成立, 且 $c \times h(x)$ 也是简单函数. 故由 (i) 和 (ii), 我们有

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} cf(x)\,\mathrm{d}x \ge \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} ch(x)\,\mathrm{d}x = c \times \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall h \le f, h \text{ is Simple}.$$

也就是

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} cf(x)\,\mathrm{d}x \ge c\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.1}$$

另一方面, 任给简单函数 $h \le cf$, 显然有简单函数 $\frac{1}{c}h \le f$. 故, 我们有

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{c}h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c} \times \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall h \le f, h \text{ is Simple}.$$

也就是

$$c\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} cf(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

结合 (4.1) 和 (4.2), 我们就得到了题设的结果. □

(iv) (Equivalence) If f, g agree almost everywhere, then $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x$ and $\overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 假设 f, g 在零测集 E 之外处处相等. 函数 m, M 由下式定义:

$$m(x) = M(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus E,$$

$$m(x) = 0, \quad M(x) = +\infty, \quad \forall x \in E.$$

显然, 我们有 $m \le f, g \le M$. 任给简单函数 $h \le M$, 考虑下列简单函数 h':

$$h'(x) = h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus E,$$

$$h'(x) = 0, \quad \forall x \in E.$$

显然, 我们有 $h' \le m$ 且 $\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h(x)\,\mathrm{d}x$. 由此, 我们有

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} m(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} M(x)\,\mathrm{d}x.$$

由上式和 (ii), 我们可以得到 $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x$. 同理, $\overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x$ 也成立. □

(v) (Superadditivity) $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 任给两个简单函数 h_1, h_2, 使得 $h_1 \le f, h_2 \le g$. 显然, $h_1 + h_2 \le f + g$, 故我们有 $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x)\,\mathrm{d}x$ 成立. □

(vi) (Subadditivity of upper integral) $\overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 任给两个简单函数 h_1, h_2, 使得 $h_1 \ge f, h_2 \ge g$. 显然, 我们有 $h_1 + h_2 \ge f + g$. 因此 $\overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x \le \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x$. □

(vii) (Divisibility) For any measurable set E, one has $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)1_E(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)1_{\mathbb{R}^d\setminus E}(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 显然, $f(x) = f(x)1_E(x) + f(x)1_{\mathbb{R}^d\setminus E}(x)$, 故由 (v), 我们有

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)1_E(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)1_{\mathbb{R}^d\setminus E}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.3}$$

另一方面, 任给简单函数 $h \le f$, 有 $h(x) = h(x)1_E(x) + h(x)1_{\mathbb{R}^d\setminus E}(x)$ 成立, 且两者都是简单函数. 此外, 显然有下式成立:

$$\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h(x)1_E(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h(x)1_{\mathbb{R}^d\setminus E}(x)\,\mathrm{d}x.$$

同时, 我们有

$$h(x)1_E(x) \le f(x)1_E(x), \quad h(x)1_{\mathbb{R}^d\setminus E}(x) \le f(x)1_{\mathbb{R}^d\setminus E}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

由此, 可以得到

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)1_E(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)1_{\mathbb{R}^d\setminus E}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

结合 (4.3) 和 (4.4), 我们可以得到题设的结果. □

(viii) (Horizontal truncation) As $n \to \infty$, $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(f(x), n)\,\mathrm{d}x$ converges to $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 我们首先考虑 $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x = A < +\infty$ 的情形. 给定 $\epsilon > 0$, 存在非负有界简单函数 g 使得 $g \le f$ 且

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x - \epsilon \le \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 g 有界, 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(g(x), n)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall n \ge N.$$

由于单调性, 我们有

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(f(x), n)\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(f(x), n+1)\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(f(x), n)\,\mathrm{d}x \ge \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(g(x), n)\,\mathrm{d}x, \quad \forall n \ge N.$$

由 ϵ 的任意性, 我们就得到了题设的结果.

当 $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ 时, 任给 $M > 0$, 存在非负有界简单函数 g 使得 $g \le f$ 且

$$\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x \ge M.$$

由于 g 有界, 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(g(x), n)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall n \ge N.$$

由于单调性, 我们有

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(f(x), n)\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(f(x), n+1)\,\mathrm{d}x \le \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(f(x), n)\,\mathrm{d}x \ge \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} \min(g(x), n)\,\mathrm{d}x, \quad \forall n \ge N.$$

由 M 的任意性, 我们就得到了题设的结果. □

(ix) (Vertical truncation) As $n \to \infty$, $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) 1_{|x| \leq n} \, \mathrm{d}x$ converges to $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) \, \mathrm{d}x$. *Hint:* From Exercise 1.2.11 one has $m(E \cap \{x : |x| \leq n\}) \to m(E)$ for any measurable set E.

证明. 我们首先考虑 $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) \, \mathrm{d}x = A < +\infty$ 的情形. 给定 $\epsilon > 0$, 存在非负且支撑有限的简单函数 g 使得 $g \leq f$ 且

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) \, \mathrm{d}x - \epsilon \leq \mathrm{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \, \mathrm{d}x.$$

由于 g 支撑有限, 则存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x) 1_{|x| \leq n} \, \mathrm{d}x = \mathrm{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \, \mathrm{d}x, \quad \forall n \geq N.$$

由于单调性, 我们有

$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) 1_{|x| \leq n} \, \mathrm{d}x \leq \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) 1_{|x| \leq n+1} \, \mathrm{d}x \leq \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) \, \mathrm{d}x, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) 1_{|x| \leq n} \, \mathrm{d}x \geq \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x) 1_{|x| \leq n} \, \mathrm{d}x, \quad \forall n \geq N.$$

由 ϵ 的任意性, 我们就得到了题设的结果. 类似地, 可以证明 $\underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) \, \mathrm{d}x = +\infty$ 的情况. □

(x) (Reflection) If $f + g$ is a simple function that is bounded with finite measure support(i.e. it is absolutely integrable), then we have $\mathrm{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x) \, \mathrm{d}x = \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) \, \mathrm{d}x + \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x) \, \mathrm{d}x$.

证明. 由于 $f + g$ 是有界且支撑有限的简单函数, 且 f, g 都是非负函数, 则 f, g 都是有界且支撑有限的函数. 不失一般性, 我们假设 $f + g(x) = c \times 1_E(x)$, 其中 $c \in [0, +\infty]$ 且 E 是 $\mathbb{R}^d$ 中的有界可测集. 对于任意可测集 $F \subset E$ 上的点 x, 我们有

$$f(x) + g(x) = c, \quad \forall x \in F,$$
$$\inf f(x) + \sup g(x) = c, \quad \forall x \in F.$$

故, 考虑 F 上的任意示性函数 $c_1 \times 1_F, c_2 \times 1_F$, 若 $c_1 \times 1_F \leq f, c_2 \times 1_F \geq g$, 我们有

$$\sup c_1 \times 1_F(x) + \inf c_2 \times 1_F(x) = c, \quad \forall x \in F.$$

由此, 对于任意 E 上的简单函数 $h_1 \leq f, h_2 \geq g$, 我们有

$$\sup h_1(x) + \inf h_2(x) = c, \quad \forall x \in E.$$

考虑上、下积分的定义, 我们有

$$\mathrm{Simp} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) + g(x) \, \mathrm{d}x = \underline{\int_{\mathbb{R}^d}} f(x) \, \mathrm{d}x + \overline{\int_{\mathbb{R}^d}} g(x) \, \mathrm{d}x.$$

类似地, 我们可以将 $f + g$ 推广到更一般的非负简单函数的形式. □

Do the horizontal and vertical truncation properties hold if the lower Lebesgue integral is replaced with the upper Lebesgue integral?

证明. 截断性质对于上积分也成立. 对于任意非负函数 f, 若其上积分不为无穷大, 则对于任意 $\epsilon > 0$ 存在非负简单函数 $g \geq f$, 使得

$$\overline{\int_{\mathbb{R}^d}} (g(x) - f(x)) \, \mathrm{d}x \leq \epsilon. \tag{4.5}$$

对 $g(x)$ 的截断函数列应用单调收敛定理, 可以得到题设的结果. □

5. Solution of Ex 1.3.13

(Area interpretation of integral). If $f:\mathbb{R}^d\to[0,+\infty]$ is a measurable, show that $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x$ is equal to the $d+1$-dimensional Lebesgue measure of the region $\mathcal{D}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\le t\le f(x)\}$. (This can be used as an alternate, and more geometrically intuitive, definition of the unsigned Lebesgue integral; it is a more convenient formulation for establishing the basic convergence theorems, but not quite as convenient for establishing basic properties such as additivity.) (*Hint:* Use Exercies 1.2.22.)

证明. 由第 3 节 Ex 1.3.6 , 我们知道 $\mathcal{D}$ 是可测集. 任给非负简单函数 $g\le f$, 我们有

$$\mathcal{D}_g=\{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\le t\le g(x)\}\subset\mathcal{D}.$$

故我们有

$$m(\mathcal{D})\ge\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

另一方面, 由于 $m(\mathcal{D})=m(\mathcal{D}_\infty)$, 所以, 对于任意 $\epsilon>0$ 和 $m(\mathcal{D})<+\infty$, 存在非负简单函数 $h\le f$, 使得

$$\mathrm{Simp}\int_{\mathbb{R}^d} h(x)\,\mathrm{d}x\ge m(\mathcal{D})-\epsilon.$$

故我们可以得到题设的结果. 当 $m(\mathcal{D})=+\infty$ 时, 我们可以得到类似的结果. □

6. Solution of Ex 1.3.16

(Linear change of variables). Let $f:\mathbb{R}^d\to[0,+\infty]$ be measurable, and let $T:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ be a invertible linear transformation. Show that $\int_{\mathbb{R}^d} f(T^{-1}(x))\,\mathrm{d}x=|\mathrm{det}T|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x$, or equivalenctly, that $\int_{\mathbb{R}^d} f(Tx)\,\mathrm{d}x=\left|\frac{1}{\mathrm{det}T}\right|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 由于 f 是可测函数, 同时 T 是可逆线性变换, 故 $f\circ T$ 是可测函数. 对于任意 $\mathbb{R}^d$ 中的线性变换 $T\in\mathbb{GL}_d(\mathbb{R})$, 其可以表示成有限个下列基础线性变换的乘积:

$$\begin{aligned}
T_1(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)&=(x_1,\cdots,c\times x_j,\cdots,x_n),\quad c\ne0;\\
T_2(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_n)&=(x_1,\cdots,x_j+c\times x_k,\cdots,x_n),\quad k\ne j;\\
T_3(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_k\cdots,x_n)&=(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_j\cdots,x_n),\quad k\ne j.
\end{aligned}$$

显然，对于上述三种基础线性变换，我们有 $\mathrm{det}T_1=c,\mathrm{det}T_2=1,\mathrm{det}T_3=-1$. 考虑由单位标准正交基向量生成的 d-维 cube B 上的线性变换 T_1 (其中 $m(B)=1$), 显然有

$$m(T_1(B))=|\mathrm{det}T_1|\,m(B)=|c|\,.$$

同理可以证明, 对于线性变换 T_2,T_3, 我们有

$$m(T_2(B))=|\mathrm{det}T_2|\,m(B)=1=|\mathrm{det}T_3|\,m(B)=m(T_3(B)).$$

对于线性变换 A,B, 有 $\mathrm{det}(A\circ B)=\mathrm{det}A\times\mathrm{det}B$, 所以对于有限个基础线性变换的乘积 T, 有

$$m(T(B))=|\mathrm{det}T|\,m(B)=|\mathrm{det}T|\,.$$

同理, 可以证明, 将单位 cube B 换成可测集 E, 上式也依然成立:

$$m(T(E))=|\mathrm{det}T|\,m(E).\tag{6.1}$$

记 $\mathcal{D}=\{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\le t\le f(x)\}$, $\mathcal{D}_T=\{(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}:0\le t\le f(Tx)\}$. 由于 $T\in\mathbb{GL}_d(\mathbb{R})$, $\mathcal{D},\mathcal{D}_T$ 在值域上的投影相同. 任给 $a<b\in\mathbb{R}^+$, 考虑 $[a,b)$ 在映射 $f\circ T$ 下的原象 $E_{[a,b)}$, 显然有 $T^{-1}(E_{[a,b)})$ 是 $[a,b)$ 在映射 f 下的原象. 同时, 由 (6.1), 有

$$m(T^{-1}(E_{[a,b)}))=\left|\frac{1}{\mathrm{det}T}\right|m(E_{[a,b)}).$$

由此, 我们可以得到

$$m(\mathcal{D}_T) = \left|\frac{1}{\det T}\right| m(\mathcal{D}),$$

也就是题设的结果. □

7. Solution of Ex 1.3.17

(Compatibility with the Riemann integral). Let $f : [a, b] \to [0, +\infty]$ be Riemann integrable. If we extend f to $\mathbb{R}$ be declaring f to equal zero outside of $[a, b]$, show that $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明. 由 Ex 1.1.25 的结论, 我们知道, 对于任意非负 Riemann 可积函数 f, 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = m^2(E),$$

其中, $E := \{(x, t) : x \in [a, b]; 0 \le t \le f(x)\}$ 且 $m^2(\cdot)$ 表示二维 Jordan 测度. 另一方面, 由 Ex 1.3.13, 我们知道, 对于任意可测函数 f, 有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = m(\mathcal{D}).$$

由此, 接下来我们只需要证明 Riemann 可积函数是可测函数. 已知, 任意 Riemann 可积函数 f 是有限间断的连续函数, 则 f 几乎处处是连续函数. 由 Ex 1.3.8 (i), 我们知道连续函数是可测函数, 又由 Lemma 1.3.9 (ii), 连续函数也就是非负简单函数的点点极限, 则原函数 f 是非负简单函数序列的的几乎处处的点点的极限. 故 Riemann 可积函数 f 是可测的. □

8. Solution of Ex 1.3.24

Show that a function $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ is measurable if and only if it is pointwise almost everywhere limit of continuous functions $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$. (*Hint:* If $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ is measurable and $n \ge 1$, show that there exists a continuous function $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ for which the set $\{x \in B(0, n) : |f(x) - f_n(x)| \ge 1/n\}$ has measure at most $\frac{1}{2^n}$. You may find Exercise 1.3.25 below to be useful for this.) Use this (and Egorov's theorem, Theorem 1.3.26) to give an alternate proof of Lusin's theorem for arbitrary measurable functions.

证明. (i) 充分性. 设 $\{f_n\}$ 是连续函数序列, 且 $\{f_n\}$ 几乎处处点点收敛到函数 f. 由 Ex 1.3.8.(i) 和 (iv), 我们知道 $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$ 是可测函数, $\{f_n\}$ 的逐点收敛的函数极限 f 也是可测函数.

(ii) 必要性. 设 $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ 是可测函数. 由 Ex 1.3.25.(ii), 对于任给 $\epsilon > 0$, 存在测度至多为 ϵ 的可测集 E, 使得函数 f 在 E 外是局部有界的. 由此, 对于任给 $\epsilon > 0$, 存在可测集 $E_n \in \mathbb{R}^d$ 且 $m(E_n) \le \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$, 在集合 $B(0, n) \setminus E_n$ 上, 函数 f 是有界的. 记 g_n 为 f 在 $B(0, n)$ 上的限制, 显然, g_n 在 $B(0, n) \setminus E_n$ 上是绝对可积的. 根据 Theorem 1.3.20.(iii), 在 $B(0, n) \setminus E_n$ 上, 存在连续函数 f_n, 使得

$$||g_n - f_n||_{L^1(\mathbb{R}^d)} \le \frac{1}{4^n}, \quad \forall n \ge 1.$$

则由 Theorem 1.3.28.(Lusin's Theorem) 的证明, 我们知道下列集合的测度至多是 $\frac{\epsilon}{2^n}$:

$$\{x \in B(0, n) : |f(x) - f_n(x)| \ge \frac{1}{2^n}\}.$$

更进一步地, 令 $n \to \infty$, 则 f_n 几乎处处点点收敛到函数 f.

(iii) Proof of Lusin's theorem. 由 (ii), 我们知道, 对于可测函数 f, 存在连续函数序列 $\{f_n\}$, 使得 $\{f_n\}$ 几乎处处点点收敛到函数 f. 对于任意 $\epsilon > 0$, 由 Egorov's Theorem, 存在测度至多为 ϵ 的可测集 E, 使得 $\{f_n\}$ 在 E 外局部一致收敛到 f. 由此, $\{f_n\}$ 在 E 外的任意有界可测集上一致收敛到 f, 则 $f|_{\mathbb{R}^d \setminus E}$ 在 $\mathbb{R}^d \setminus E$ 上连续. □