毕业论文概要

程预敏

摘要. 我们在这一概要中，主要考虑 Vasicek model 的矩估计量的 Berry-Esséen 上界。摘要占用。

1. 主要模型

考虑由一般高斯过程驱动的 Vasicek model，它满足下面的随机微分方程 (SDE)：

$$\mathrm{d}X_t = k(\mu - X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}G_t, \quad t \in [0,T], \tag{1.1}$$

其中 $k > 0, T \geq 0, X_0 = 0$，G_t 是一般的一维高斯过程。我们可以给出 Vasicek model 的一个解析形式：

$$X_t = \mu(1 - \mathrm{e}^{-kt}) + \int_0^t e^{-k(t-s)}\,\mathrm{d}G_s. \tag{1.2}$$

Vasicek model 在金融和经济领域有很多重要的应用，具体待补充。第一段占用。

2. 主要的估计量及其相关的结果

我们首先考虑 k 的二阶矩估计量 $\hat{k}$：

$$\hat{k} = \left[\frac{\frac{1}{T}\int_0^T X_t^2\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\right)^2}{C_\beta \Gamma(2\beta - 1)}\right]^{-\frac{1}{2\beta}}. \tag{2.1}$$

在上式中，我们可以得到关于 μ 的一阶矩估计量：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

可以将 (2.1) 类比到 Chen 和 Zhou 论文中的二阶矩估计量：

$$\tilde{\theta}_T = \left[\frac{\frac{1}{T}\int_0^T X_t^2\,\mathrm{d}t}{C_\beta \Gamma(2\beta - 1)}\right]^{-\frac{1}{2\beta}}.$$

大致可以得到：

$$\hat{k} = \left[\tilde{\theta}_T^{-2\beta} - \frac{\hat{\mu}^2}{C_\beta \Gamma(2\beta - 1)}\right]^{-\frac{1}{2\beta}}.$$

关于上面的两个矩估计量，我们有如下的定理。

Date: 2021 年 4 月 28 日.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary 60H10, 60J60, 60J65, 60G44, 60E15.

Key words and phrases. Vasicek model, general Gaussian process, Malliavin calculus, Berry-Esséen Bound.

感谢淘宝和快递公司，是他们让我的电脑得以复活。感谢大肉噶 233 在这之间的直播生涯.

定理 2.1 (Pei(2021), Theorem 1.2)**.** 基于协方差函数的相关假定，我们有 μ, k 的矩估计量的强相合性，也就是

$$\lim_{T\to\infty} \hat{\mu} = \mu, \quad \text{a.s.}$$
$$\lim_{T\to\infty} \hat{k} = k, \quad \text{a.s.}$$

在估计量的强相合性之外，Pei 等人也得到了渐近正态性的结果。

定理 2.2. 基于同样的假定，当 $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时，可以得到 $\hat{\mu}$ 的渐近正态性，也就是

$$T^{1-\beta}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{law} N(0, \frac{1}{k^2}).$$

当 $\beta \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ 时，可以得到 $\hat{k}$ 的渐近正态性，也就是

$$\sqrt{T}(\hat{k} - k) \xrightarrow{law} N(0, k\sigma_\beta^2/4\beta^2),$$

其中 $\sigma_\beta^2 = (4\beta - 1)[1 + \frac{\Gamma(3-4\beta)\Gamma(4\beta-1)}{\Gamma(2\beta)\Gamma(2-2\beta)}]$。

3. The Berry-Esséen Bound

在这一节里，我们给出两个矩估计量的 Berry-Esséen Bound 结果。首先，我们有

$$\begin{aligned} T^{1-\beta}(\hat{\mu} - \mu) &= \frac{\mu}{k}\frac{\mathrm{e}^{-kT} - 1}{T^\beta} + \frac{F_T}{T^\beta} \\ &= \frac{\mu}{k}\frac{\mathrm{e}^{-kT} - 1}{T^\beta} + \frac{1}{k}\frac{G_T - Z_T}{T^\beta}. \end{aligned}$$

我们用下式定义 A：

$$\begin{aligned} A(z) :&= \mathbb{P}\Big(kT^{1-\beta}(\hat{\mu} - \mu) \le z\Big) - \mathbb{P}(Z \le z) \\ &= \mathbb{P}(\frac{G_T - Z_T + \mu(\mathrm{e}^{-kT} - 1)}{T^\beta} \le z) - \mathbb{P}(Z \le z). \end{aligned}$$

令 $Q_T = \frac{G_T - Z_T + \mu(\mathrm{e}^{-kT} - 1)}{T^\beta}$，我们可以得到 $|A(z)|$ 的一个四阶距形式的上确界：

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(Q_T \le z) - \mathbb{P}(Z \le z)| \le \sqrt{\frac{\mathbb{E}[Q_T^4] - 3\mathbb{E}[Q_T^2]}{3\mathbb{E}[Q_T^2]^2}} + \frac{|\mathbb{E}[Q_T^2] - 1|}{\mathbb{E}[Q_T^2] \vee 1}$$

类似地，我们给出 B 的定义：

$$
\begin{aligned}
B :&= \mathbb{P}\left(\sqrt{\frac{4\beta^2 T}{\theta\sigma_\beta^2}}(\hat{k}-k) \le z\right) - \mathbb{P}(Z-z) \\
&= \mathbb{P}\left(\hat{k}-k \le \sqrt{\frac{\theta\sigma_\beta^2}{4\beta^2 T}}z\right) - \mathbb{P}(Z-z) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\frac{1}{T}\int_0^T X_t^2\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t\right)^2}{C_\beta\Gamma(2\beta-1)} \ge \left(\sqrt{\frac{\theta\sigma_\beta^2}{4\beta^2 T}}z+k\right)^{-2\beta}\right) - \mathbb{P}(Z-z) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{T}\big(\int_0^T X_t^2\,\mathrm{d}t - (\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t)^2\big) - a \ge C_\beta\Gamma(2\beta-1)\left[\left(\sqrt{\frac{\theta\sigma_\beta^2}{4\beta^2 T}}z+k\right)^{-2\beta} - \theta^{-2\beta}\right]\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\mathbb{P}(Z-z) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{T}\big(\int_0^T X_t^2\,\mathrm{d}t - (\int_0^T X_t\,\mathrm{d}t)^2\big) - a \ge a\left[\left(1+\frac{z\sigma_\beta}{2\beta\sqrt{\theta T}}\right)^{-2\beta} - 1\right]\right) - \mathbb{P}(Z-z)
\end{aligned}
$$

数学与统计学院，江西师范大学，330022，南昌，中国

Email address: chengym@jxnu.edu.cn