

## 测度论导论 §1.2 习题

丁 珍 AND 程预敏

### 1. SOLUTION OF EX 1.2.11

(i) (Upward monotone convergence) Let  $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}^n$  be a countable non-decreasing sequence of Lebesgue measurable sets. Show that  $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$ . (Hint: Express  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  as the countable union of the lacunae  $E_n \setminus \bigcup_{n'=1}^{n-1} E_{n'}$ .)

**证明.** 记  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 。对于任意  $k \geq 2$ , 令

$$G_1 = E_1, \quad G_2 = E_2 - E_1, \cdots, G_k = E_k - E_{k-1}.$$

根据 Lemma 1.2.13, 对于任意  $k \geq 1$ ,  $G_k$  是两两不交的可测集, 且

$$E_n = \bigcup_{k=1}^n G_k, \quad E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k.$$

因此

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m(G_k) = \lim_{N \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{k=1}^N G_k\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N).$$

□

(ii) (Downward monotone convergence) Let  $\mathbb{R}^d \supset E_1 \supset E_2 \supset \cdots$  be a countable non-increasing sequence of Lebesgue measurable sets. If at least one of the  $m(E_n)$  is finite, show that  $m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$ .

**证明.** 记  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ 。不失一般性, 我们假设  $m(E_1) < \infty$ 。令

$$G_1 = E_1 - E, \quad G_2 = E_2 - E, \cdots, G_k = E_k - E.$$

根据 Lemma 1.2.13, 对于任意  $k \geq 1$ ,  $G_k$  是两两不交的可测集, 且

$$E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$$

是一个可测集的不交并。由此, 我们有

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m(E) + \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k) = m(E) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N m(G_k) \\ &= m(E) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N (m(E_k) - m(E_{k+1})) \\ &= m(E) + m(E_1) - \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_{N+1}). \end{aligned}$$

由于  $m(E_1) < \infty$ , 且对于任意  $k > 1$ , 有  $E_k \subset E_1, m(E_k) < \infty$ 。综上, 我们有

$$m(E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_{N+1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(E_N).$$

□

(iii) Give a counterexample to show that in the hypothesis that at least one of the  $m(E_n)$  is finite in the downward monotone convergence theorem cannot be dropped.

**证明.** 令  $E_n = (n, \infty) \subset \mathbb{R}$ . 对于任意  $k \geq 1$ , 我们有  $m(E_k) = \infty$ . 同时, 令  $E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得

$$x < N, \quad x \notin E_N.$$

故  $E = \emptyset, m(E) = 0$ . 综上  $m(E) = m(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_n)$ .  $\square$

## 2. SOLUTION OF EX 1.2.12

Show that any map  $E \rightarrow m(E)$  from Lebesgue measurable sets to elements of  $[0, +\infty]$  that obeys the above empty set and countable additivity axioms will also obey the monotonicity and countable subadditivity axioms from Exercise 1.2.3, when restricted to Lebesgue measurable sets of course.

**证明.** (i) 单调性. 令  $E, G$  是两个 Lebesgue 可测集, 且  $G \subset E \subset \mathbb{R}^d$ . 设  $f$  是从 Lebesgue 可测集到  $\overline{\mathbb{R}^+}$  的满足空集和可数可加性公理的映射. 不妨设  $f(G) < \infty$ . 根据可数可加性和空集公理, 我们有

$$f(E) = f(G) + f(E \setminus G).$$

由于  $E \setminus G$  是 Lebesgue 可测集, 则  $f(E \setminus G) \geq 0$ . 于是, 我们有  $f(E) \geq f(G)$ . 若  $f(G) = \infty$ , 显然有  $f(E) = \infty \geq f(G)$ .

(ii) 可数次可加性. 令  $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$  是一个可数的 Lebesgue 可测集序列, 且对于任意  $n \in \mathbb{N}^+$  有  $f(E_n) < \infty$ . 同时记  $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$ . 此外, 令 Lebesgue 可测集序列  $\{G_k\}$  由下定义:

$$G_1 = E_1, \quad G_k = E_k \setminus \bigcup_{n'=1}^{k-1} E_{n'} : \quad \forall k \geq 2.$$

显然,  $\{G_k\}$  是可数的不交的 Lebesgue 可测集序列, 且对于任意  $N \in \mathbb{N}^+$ , 有  $\bigcup_{k=1}^N E_k = \bigcup_{k=1}^N G_k$ . 由  $f$  的可数可加性, 我们有

$$f(E) = f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f(G_k).$$

另一方面, 对于任意  $N \in \mathbb{N}^+$ , 有  $G_k \subset E_k$ , 根据  $f$  的单调性, 我们有

$$f(E_k) \geq f(G_k) : \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

综上, 我们有

$$f(E) = f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f(G_k) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f(E_k).$$

若  $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$  使得  $f(E_{n_0}) = \infty$ , 显然有  $f(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(E_k)$  成立.  $\square$

## 3. SOLUTION OF EX 1.2.14

Let  $E \subset \mathbb{R}^d$ . Show that  $E$  is contained in a Lebesgue measurable set of measure exactly equal to  $m^*(E)$ .

**证明.** 若  $m^*(E) = \infty$ , 令  $U = \mathbb{R}^d \supset E$ ,  $m(U) = \infty = m^*(E)$  成立.

若  $m^*(E) < \infty$ . 由外测度定义, 任给  $\epsilon > 0$  和  $i \in \mathbb{N}^+$ , 存在开集  $U_i \supset E$ , 且  $m(U_i) \leq m^*(E) + \frac{1}{i}$ . 令  $S = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$  是可测集. 显然, 对于任意  $i \in \mathbb{N}^+$ ,  $U_i \supset E$ , 故  $S \supset E$ ,  $m(S) = m^*(S) \geq m^*(E)$ . 另一方面, 对于任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $i_{\epsilon} \in \mathbb{N}$ , 使得  $\frac{1}{i_{\epsilon}} \leq \epsilon$ . 这时, 我们有

$$S \subset U_{i_{\epsilon}}, \quad m(S) \leq m(U_{i_{\epsilon}}) \leq m^*(E) + \frac{1}{i_{\epsilon}} \leq m^*(E) + \epsilon.$$

由  $\epsilon$  的任意性, 我们有  $S \supset E$  且  $m(S) = m^*(E)$ . □

#### 4. SOLUTION OF EX 1.2.15

(Inner regularity). Let  $E \subset \mathbb{R}^d$  be Lebesgue measurable. Show that

$$m(E) = \sup_{K \subset E, K \text{ compact}} m(K).$$

**证明.** 对于  $E$  的任意紧子集  $K$ ,  $m(E) \geq m(K)$  显然成立。故我们下面证明

$$m(E) \leq \sup_{K \subset E, K \text{ compact}} m(K) \quad (4.1)$$

(1) 当  $E$  是有界集时。令  $C$  是包含  $E$  的一个有界闭集, 对于任意  $\epsilon > 0$ 。由 Lebesgue 测度的外正则性, 存在一个开集  $U \supset (C \setminus E)$ , 且

$$m(U) < m(C \setminus E) + \epsilon. \quad (4.2)$$

令  $K = C \setminus U$ , 则  $K$  是一个  $E$  的紧子集。此外, 根据 Lebesgue 测度的单调性, 我们有

$$m(C) \leq m(K) + m(U). \quad (4.3)$$

综合 (4.2) 和 (4.3) 两式, 我们可以得到

$$\begin{aligned} m(E) + m(C \setminus E) = m(C) &\leq m(K) + m(C \setminus E) + \epsilon, \\ m(E) &\leq m(K) + \epsilon. \end{aligned}$$

根据  $\epsilon$  的任意性, 我们可以得到 (4.1)。

(2) 当  $E$  不是有界集时。对于任意  $M < m(E)$ , 我们可以找到  $E$  的一个紧子集  $K$ , 且  $m(K) > M$ : 令  $E_i = E \cap \overline{B_i(O)}$ , 其中  $\overline{B_i(O)}$  是以原点为中心, 半径为  $i$  的闭球。则对于任意  $i \in \mathbb{N}^+$ ,

$$E_i \subset E_{i+1}, \quad m(E) = \lim_{i \rightarrow \infty} m(E_i).$$

故存在一个  $i_0$  使得  $m(E_{i_0}) > M$ , 且  $E_{i_0}$  有界。由 (1) 可以找到紧集  $K \subset E_{i_0} \subset E$  使得  $m(K) > M$ 。根据  $M$  的任意性, 我们可以得到 (4.1)。 □

#### 5. SOLUTION OF EX 1.2.22

Let  $d, d' \geq 1$  be natural numbers. (i) If  $E \subset \mathbb{R}^d$  and  $F \subset \mathbb{R}^{d'}$ , show that

$$(m^{d+d'})^*(E \times F) \leq (m^d)^*(E) \times (m^{d'})^*(F), \quad (5.1)$$

where  $(m^d)^*$  denotes  $d$ -dimensional Lebesgue outer measure, etc.

**证明.** (1) 若  $E, F$  中有一集合外测度为  $\infty$  且另一集合外测度不为零, 则上式显然成立。

(2) 故我们首先考虑  $E, F$  的 Lebesgue 外测度均有限的情况。令  $O_E, O_F$  是两个开集, 且对于任意  $\epsilon > 0$  满足如下条件

$$\begin{aligned} O_E \supset E, \quad (m^d)(O_E) &= (m^d)^*(O_E) \leq (m^d)^*(E) + \epsilon; \\ O_F \supset F, \quad (m^{d'})(O_F) &= (m^{d'})^*(O_F) \leq (m^{d'})^*(F) + \epsilon. \end{aligned}$$

根据 Lemma 1.2.11, 开集  $O_E, O_F$  可以表示为几乎不交的闭的 cubes 的可数并

$$O_E = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad O_F = \bigcup_{j=1}^{\infty} B'_j,$$

其中  $B_i$  是  $\mathbb{R}^d$  中的闭 cube,  $B'_j$  是  $\mathbb{R}^{d'}$  中的闭 cube。任给  $x \in E \times F \subset \mathbb{R}^{d+d'}$ ,  $x \in O_E \times O_F$ 。则  $E \times F$  是开集  $O_E \times O_F$  的子集, 故

$$(m^{d+d'})^*(E \times F) \leq (m^{d+d'})^*(O_E \times O_F) = (m^{d+d'})^*\left(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_i \times B'_j\right).$$

由于  $B_i, B'_j$  都是几乎不交的闭的 cube, 则

$$\begin{aligned} (m^{d+d'})^*\left(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} B_i \times B'_j\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (m^d)^*(B_i) \cdot (m^{d'})^*(B'_j) = (m^d)^*(O_E) \cdot (m^{d'})^*(O_F) \\ &\leq (m^d)^*(E) \times (m^{d'})^*(F) + \epsilon \cdot ((m^d)^*(E) + (m^{d'})^*(F)) + \epsilon^2. \end{aligned}$$

由  $\epsilon$  的任意性, 我们有 (5.1) 成立。

(3) 若  $E, F$  中有一集合外测度为  $\infty$  且另一集合外测度为零, 不妨设  $(m^d)^*(E) = \infty$  且  $(m^{d'})^*(F) = (m^{d'})^*(F) = 0$ , 这时, 记  $\{K_n\}$  为如下序列

$$K_n = F \cap B_n(O), \quad \forall n \in \mathbb{N}^+,$$

其中  $B_n(O)$  是以原点为中心, 半径为  $n$  的开球。这时, 我们有

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad K_n \subset K_{n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

令  $O_E \supset E$  是一个开集, 则

$$\begin{aligned} (m^{d+d'})^*(E \times F) &\leq (m^{d+d'})^*(O_E \times F) \\ &= (m^d)^*(O_E) \cdot (m^{d'})^*(F) \\ &= (m^d)^*(O_E) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (m^{d'})^*(K_n) \\ &= (m^d)^*(O_E) \cdot 0 = 0. \end{aligned} \tag{5.2}$$

□

(ii) Let  $E \subset \mathbb{R}^d, F \subset \mathbb{R}^{d'}$  be Lebesgue measurable sets. Show that  $E \times F \subset \mathbb{R}^{d+d'}$  is Lebesgue measurable, with  $m^{d+d'}(E \times F) = m^d(E) \cdot m^{d'}(F)$ . (Note that we allow  $E$  or  $F$  to have infinite measure, and so one may have to divide into cases or take advantage of the monotone convergence theorem for Lebesgue measure, Exercise 1.2.11.)

**证明.** (1) 我们从一个有限测度的特殊情况开始。假设  $E, F$  是两个可测集, 且  $m(E), m(F) < \infty$ 。对于任意  $\epsilon > 0$ , 根据上一小题的结论, 存在开集  $O_E, O_F$  使得

$$\begin{aligned} O_E \supset E, \quad (m^d)(O_E) &\leq (m^d)(E) + \epsilon; \\ O_F \supset F, \quad (m^{d'})(O_F) &\leq (m^{d'})(F) + \epsilon. \end{aligned}$$

另一方面, 存在紧集  $K_E, K_F$  使得

$$\begin{aligned} K_E \subset E, \quad (m^d)(K_E) &\geq (m^d)(E) - \epsilon; \\ K_F \subset F, \quad (m^{d'})(K_F) &\geq (m^{d'})(F) - \epsilon. \end{aligned}$$

显然, 我们有  $(K_E \times K_F) \subset (E \times F) \subset (O_E \times O_F)$ , 且  $K_E \times K_F$  是  $\mathbb{R}^{d+d'}$  中的紧集, 故它可测, 同时

$$(m^{d+d'})(K_E \times K_F) \geq (m^d)(E) \times (m^{d'})(F) - \epsilon \cdot ((m^d)(E) + (m^{d'})(F)) + \epsilon^2.$$

另一方面,  $(O_E \times O_F) \setminus (E \times F) \subset (O_E \times O_F) \setminus (K_E \times K_F)$ , 且

$$\begin{aligned} (m^{d+d'})^*((O_E \times O_F) \setminus (E \times F)) &\leq (m^{d+d'})((O_E \times O_F) \setminus (K_E \times K_F)) \\ &= (m^{d+d'})(O_E \times O_F) - (m^{d+d'})(K_E \times K_F) \\ &\leq 2\epsilon \cdot ((m^d)(E) + (m^{d'})(F)). \end{aligned}$$

由  $\epsilon$  的任意性, 我们可知  $E \times F$  是  $\mathbb{R}^{d+d'}$  中的可测集, 且

$$(m^{d+d'})(E \times F) = (m^d)(E) \times (m^{d'})(F).$$

(2) 由 (5.2) 可知, 若  $E, F$  中有一集合测度为  $\infty$  且另一集合测度为零, 则

$$(m^{d+d'})(E \times F) = (m^{d+d'})^*(E \times F) = (m^d)(E) \times (m^{d'})(F) = 0.$$

(3) 若  $E, F$  中有一集合测度为  $\infty$  且另一集合测度不为零, 不妨设  $(m^d)^*(E) = \infty$  且  $(m^{d'})(F) \neq 0$ , 这时令序列  $\{S_n\}$  如下定义:

$$S_n = E \cap B_n(O), \quad n = 1, 2, \dots$$

这时, 我们有  $S_n \subset S_{n+1}, \forall n \geq 1$ , 且  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ . 同时, 令  $K_F \subset F$  是一紧集, 且  $(m^{d'})(K_F) > 0$ . 这时, 我们有

$$(m^{d+d'})(E \times K_F) = \lim_{n \rightarrow \infty} (m^{d+d'})(S_n \times K_F) = \lim_{n \rightarrow \infty} (m^d)(S_n) \times (m^{d'})(K_F) = \infty.$$

由单调性, 我们可以得到

$$(m^{d+d'})(E \times F) = (m^d)(E) \times (m^{d'})(F) = \infty.$$

□

## 6. SOLUTION OF EX 1.2.23

(Uniqueness of Lebesgue measure). Show that Lebesgue measure  $E \rightarrow m(E)$  is the only map from Lebesgue measurable sets to  $[0, +\infty]$  that obeys the following axioms:

- (i) (Empty set)  $m(\emptyset) = 0$ .
- (ii) (Countable additivity) If  $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$  is a countable sequence of disjoint Lebesgue measurable sets, then  $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$ .
- (iii) (Translation invariance) If  $E$  is Lebesgue measurable and  $x \in \mathbb{R}^d$ , then  $m(E+x) = m(E)$ .
- (iv) (Normalisation)  $m([0, 1]^d) = 1$ .

**证明.** 设  $f: E \rightarrow f(E)$  是一个从 Lebesgue 可测集到  $[0, +\infty]$  的映射, 且满足上面的测度公理。由 Exercise 1.2.8 可知, 基本集是 Lebesgue 可测集, 且对于任意基本集  $E$ ,  $m(E) = m^{(J)}(E)$ 。另一方面, 由 Exercise 1.1.3 可知, 基本集上满足非负性、有限可加性和平移不变性的测度具有唯一性, 且在相差一个常数系数的情况下等价。因此, 我们考虑将  $f$  限制在基本集上。  $f([0, 1]^d) = 1$ , 且  $f$  满足上面的三条性质, 故  $f$  在基本集上与 Lebesgue 测度  $m$  等价。

设  $E$  是一个开集, 则  $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ , 其中  $Q_i$  是  $d$  维几乎不交的闭 cube。由于  $Q_i$  是几乎不交的闭 cube, 则  $Q_i$  是基本集, 且

$$f(Q_i) = m(Q_i), \quad f(E) = \sum_{i=1}^{\infty} f(Q_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(Q_i) = m(E).$$

故  $f$  和  $m$  在开集上等价。

设  $E$  是一个 Lebesgue 可测集, 由 Lebesgue 外测度的定义, 我们有

$$m(E) = m^*(E) = \inf_{E \subset U, U \text{ open}} m(U).$$

对任意  $\epsilon > 0$ , 令  $S \supset E$  是一个开集, 且  $m(S) \leq m(E) + \epsilon$ 。故

$$f(E) \leq f(S) = m(S) \leq m(E) + \epsilon. \quad (6.1)$$

由  $\epsilon$  的任意性, 我们有  $f(E) \leq m(E)$ 。另一方面

$$f(E) = f(S) - f(S \setminus E) = m(S) - f(S \setminus E) \geq m(S) - m(S \setminus E) = m(E). \quad (6.2)$$

结合 (6.1) 和 (6.2), 我们可知,  $f$  和 勒贝格测度  $m$  在可测集上等价。  $\square$