

测度论导论第一章第一节习题

丁 珍 AND 程预敏

1. SOLUTION OF EX 1.1.4

Let $d_1, d_2 \geq 1$, and let $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}, E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ be elementary sets. Show that $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ is elementary, and $m^{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = m^{d_1}(E_1) \times m^{d_2}(E_2)$.

证明. 根据 Lemma 1.1.2, 可以将 E_1, E_2 分割为不相交的 boxes 的有限并:

$$E_1 = B_1^1 \cup \cdots \cup B_n^1, \quad E_2 = B_1^2 \cup \cdots \cup B_m^2.$$

则 $E_1 \times E_2 = \bigcup_{j=1 \dots m} \bigcup_{i=1 \dots n} B_i^1 \times B_j^2$. 考虑 $B_i^1 = I_{i,1}^1 \times \cdots \times I_{i,d_1}^1$ 和 $B_j^2 = I_{j,1}^2 \times \cdots \times I_{j,d_2}^2$, 则

$$B_i^1 \times B_j^2 = I_{i,1}^1 \times \cdots \times I_{i,d_1}^1 \times I_{j,1}^2 \times \cdots \times I_{j,d_2}^2.$$

显然有 $B_i^1 \times B_j^2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$. 此外

$$m^{d_1+d_2}(B_i^1 \times B_j^2) = |I_{i,1}^1| \times \cdots \times |I_{i,d_1}^1| \times |I_{j,1}^2| \times \cdots \times |I_{j,d_2}^2| = m^{d_1}(B_i^1) \times m^{d_2}(B_j^2).$$

由于 E_1 和 E_2 均由不相交的 boxes 所分割, 则卡氏积 $E_1 \times E_2$ 同样也是不相交的。由此, 我们可以得到

$$m^{d_1+d_2}(E_1 \times E_2) = \sum_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots m}} m^{d_1}(B_i^1) \times m^{d_2}(B_j^2) = m^{d_1}(E_1) \times m^{d_2}(E_2).$$

□

2. SOLUTION OF EX 1.1.18

证明. Let $E \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded set. (1) Show that E and the closure \overline{E} of E have the same Jordan outer measure.

任给 $\epsilon > 0$, 根据外测度 $m^{*,(J)}(E)$ 的定义 (Definition 1.1.4), 存在一个基本集 $B \supset E$, 使得

$$m(B) \leq m^{*,(J)}(E) + \epsilon,$$

且 B 可以分割为不相交 boxes 的有限并: $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$. 其次, 令 $B' = \overline{B}$, 我们有

$$B' = \overline{B} = \overline{B_1 \cup \cdots \cup B_n} = \bigcup_{i=1 \dots n} \overline{B_i}.$$

当 $\overline{B_i}$ 是不相交的 boxes 时,

$$m^{*,(J)}(B') = \sum_{i=1 \dots n} m(\overline{B_i}) = \sum_{i=1 \dots n} m(B_i) = m_{*,(J)}(B') = m(B).$$

当 $\overline{B_i}$ 中存在相交的 boxes 时, 可以对其重新分割使得上式成立。显然 B' 是包含 E 的闭集, 由 \overline{E} 的最小性, 则 $\overline{E} \subset B'$, 于是

$$m^{*,(J)}(\overline{E}) \leq m^{*,(J)}(B') \leq m^{*,(J)}(E) + \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性和测度对基本集的单调性, 我们有 $m^{*,(J)}(\overline{E}) = m^{*,(J)}(E)$ 。

(2) Show that E and the interior E° of E have the same Jordan inner measure.

任给 $\epsilon > 0$, 根据内测度 $m_{*,(J)}(E)$ 的定义 (Definition 1.1.4), 存在一个基本集 $A \subset E$, 使得

$$m(A) \geq m_{*,(J)}(E) - \epsilon,$$

且 A 可以分割为不相交 boxes 的有限并: $A = A_1 \cup \cdots \cup A_k$ 。同时, 令 $A^\circ = \cup_{i=1 \dots k} A_i^\circ$, 我们有

$$A^\circ \subset A \subset E, \quad A^\circ \text{ 是开集,}$$

同时

$$m_{*,(J)}(A^\circ) = \sum_{i=1 \dots k} m_{*,(J)}(A_i^\circ) = \sum_{i=1 \dots k} m(A_i) = m(A).$$

由 E° 的最大性, 我们有 $A^\circ \subset E^\circ$, 则

$$m_{*,(J)}(E^\circ) \geq m_{*,(J)}(A^\circ) = m(A) \geq m_{*,(J)}(E) - \epsilon.$$

由 ϵ 的任意性, 我们有 $m_{*,(J)}(E^\circ) = m_{*,(J)}(E)$ 。

(3) Show that E is Jordan measurable if and only if the topological boundary ∂E of E has Jordan outer measurer zero.

\Rightarrow 根据上文, 当 E 是 Jordan 可测集时, E° 和 \bar{E} 都是 Jordan 可测集。则 $\partial E = \bar{E} \setminus E^\circ$ 是 Jordan 可测集, 且

$$m(\partial E) = m(\bar{E}) - m(E^\circ) = 0.$$

故 ∂E 的外测度也为 0。

\Leftarrow 设 ∂E 的外测度为 0。由于基本测度的非负性, $m_{*,(J)}(\partial E) = 0$, 且

$$m_{*,(J)}(\partial E) \geq \left[m_{*,(J)}(\bar{E}) - m_{*,(J)}(E^\circ) \right] \geq \left[m_{*,(J)}(\bar{E}) - m^{*,(J)}(E^\circ) \right],$$

则 E° 是 Jordan 可测集。故 \bar{E} 和 E 也是 Jordan 可测集。

(4) Show that the *bullet-riddled square* $[0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, and the set of bullets $[0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$, both have Jordan inner measure zero and Jordan outer measure one. In particular, both sets are not Jordan measurable.

(a) $m_{*,(J)}([0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2) = 0$ 。显然, 任给 $[0, 1]^2$ 上的 box B , 若 $m^2(B) \neq 0$, 则存在 $a < b, c < d \in [0, 1]$ 使得 $O = (a, b) \times (c, d) \subset B$ 。对于开 box O , 存在点 $p = (r_1, r_2) \in O$, 且 r_1, r_2 均为有理数。故 $O \not\subset [0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, 且 $B \not\subset [0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ 。也就找不出除空集和零测度 box 以外的基本集包含在 $[0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ 中, 故 $[0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ 的内测度为 0, 同理 $[0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2$ 的内测度也是 0。

(b) $m^{*,(J)}([0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2) = 1$ 。显然 $[0, 1]^2$ 是一个包含 $R = [0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ 的基本集, 且 $m^{*,(J)}([0, 1]^2) = 1$ 。故 $m^{*,(J)}(R) \leq 1$ 。又任给基本集 S 使得 $S \cap [0, 1]^2 \neq [0, 1]^2$, 则令 $S' = S \cap [0, 1]^2 \subsetneq [0, 1]^2$ 。显然, S' 和 $[0, 1]^2 \setminus S'$ 也是非空基本集。若存在 box $B \subset [0, 1]^2 \setminus S'$, 使得 $m^2(B) \neq 0$, 则存在无理数 $i_1, i_2 \in [0, 1]$, 使得 $(i_1, i_2) \in B$ 且 $(i_1, i_2) \notin S$ 。这也就是说, 对于任意的基本集 $S \supset R$, 其或者是 $[0, 1]^2$ 的覆盖, 或者在 $[0, 1]^2$ 上, 与之相差有限个零测度 box。故 $\forall S_{\text{elementary}} \supset R$, 有 $S \cap [0, 1]^2 \supset R$, 且 $m(S \cap [0, 1]^2) = 1$ 。故 $m^{*,(J)}([0, 1]^2 \setminus \mathbb{Q}^2) = 1$ 。同理 $m^{*,(J)}([0, 1]^2 \cap \mathbb{Q}^2) = 1$ 。□

3. SOLUTION OF EX 1.1.19

Let $E \subset \mathbb{R}^d$ be a bounded set, and let $F \subset \mathbb{R}^d$ be an elementary set. Show that $m^{*,(J)}(E) = m^{*,(J)}(E \cap F) + m^{*,(J)}(E \setminus F)$.

证明. 对于任给 $\epsilon > 0$, 根据外测度定义, 存在基本集 $S \supset E$ 使得下式成立

$$m(S) \leq m^{*,(J)}(E) + \epsilon.$$

我们可以将 S 划分为 $S \cap F$ 和 $S \setminus F$ 两部分。其中 $S \cap F \supset E \cap F$ 是基本集, 且 $m^{*,(J)}(E \cap F) \leq m^{*,(J)}(S \cap F) = m(S \cap F)$ 。另一方面, $S \setminus F \supset E \setminus F$ 是基本集, 且 $m^{*,(J)}(E \setminus F) \leq m^{*,(J)}(S \setminus F) = m(S \setminus F)$ 。综上, 我们可以得到

$$\left[m^{*,(J)}(E \cap F) + m^{*,(J)}(E \setminus F) \right] \leq \left[m(S \cap F) + m(S \setminus F) \right] = m(S) \leq m^{*,(J)}(E) + \epsilon. \quad (3.1)$$

类似地, 我们可以得到 2 个基本集 $P_1 \supset (E \cap F), P_2 \supset (E \setminus F)$ 使得下式成立

$$m(P_1) \leq m^{*,(J)}(E \cap F) + \frac{\epsilon}{2}, \quad m(P_2) \leq m^{*,(J)}(E \setminus F) + \frac{\epsilon}{2}.$$

显然, 我们有 $(P_1 \cup P_2) \supset E$ 是基本集, 故

$$m(P_1) + m(P_2) \geq m(P_1 \cup P_2) \geq m^{*,(J)}(E).$$

也就是

$$m^{*,(J)}(E) \leq m^{*,(J)}(E \cap F) + m^{*,(J)}(E \setminus F) + \epsilon. \quad (3.2)$$

结合(3.2)和(3.1), 我们可以得到题设的结论。□

4. SOLUTION OF EX 1.1.20

证明. 考虑一个特殊的分段常数函数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 它在区间 $[a, r]$ 上取值为 c_1 , 在 $[r, b]$ 上取值为 c_2 , 故 $\sum_{i=1}^n c_i |I_i| = c_1 \times (r-a) + c_2 \times (b-r)$ 。则对于任意的区间 $[a, b]$ 的划分 $\mathcal{P} = ((x_0, x_1, \dots, x_n), (x_1^*, \dots, x_n^*))$, f 在划分 \mathcal{P} 上的黎曼和 $\mathcal{R}(f, \mathcal{P})$ 与 $\sum_{i=1}^n c_i |I_i|$ 的误差受 $\Delta(\mathcal{P})$ 影响:

$$\left| \mathcal{R}(f, \mathcal{P}) - \sum_{i=1}^n c_i |I_i| \right| \leq |c_1 - c_2| \Delta(\mathcal{P}).$$

当 $\Delta(\mathcal{P}) \rightarrow 0$, 上式趋于 0。同理, 对于一般的分段常值函数 $g: [a, b] \rightarrow (c_1, c_2, \dots, c_k)$ (其中 c_i 表示在第 i 个区间上取到的常数, 可以重复), 令 $M = \max\{|c_i - c_j| : i, j \in (1, 2, \dots, k)\}$,

$$\left| \mathcal{R}(g, \mathcal{P}) - \sum_{i=1}^n c_i |I_i| \right| \leq k \times M \times \Delta(\mathcal{P}).$$

故而, 我们可以用 $\sum_{i=1}^n c_i |I_i|$ 表示函数黎曼和的极限, 且它与区间的划分无关。□

5. SOLUTION OF EX 1.1.21

证明. (1) 线性性。根据高等教育出版社出版的《数学分析上册》(第四版)第九章第4节中的第三小节的性质1和2, 黎曼可积函数具有线性性质, 同时由上题可知, 分段常值函数是黎曼可积函数, 故其具有线性性。

(2) 单调性。根据上文中的性质5及其推论, 区间 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数具有单调性。故分段常值函数具有单调性。

(3) 示性函数。已知 E 是区间 $[a, b]$ 上的基本集, 则其可以表示为不相交的有限个区间的并:

$$E = I_1 \cup \dots \cup I_k.$$

故示性函数可以表示为上述区间上的分段常值函数:

$$1_E: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} = \sum_{i=1}^k 1_{I_i}.$$

由此可得

$$\text{p.c.} \int_a^b 1_E(x) dx = \sum_{i=1}^k 1 \times |I_i| = \sum_{i=1}^k m(I_i) = m(E).$$

□

6. SOLUTION OF EX 1.1.22

Let $[a, b]$ be an interval, and $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a bounded function. Show that f is Riemann integrable if and only if it is Darboux integrable.

证明. 由《数学分析上册》中的定理 9.14 (可积的第一充要条件), 黎曼可积性和达布可积性等价。□

7. SOLUTION OF EX 1.2.25

Let $[a, b]$ be an interval, and let $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ be a bounded function. Show that f is Riemann integrable if and only if the set $E^+ := \{(x, t) : x \in [a, b]; 0 \leq t \leq f(x)\}$ and $E_- := \{(x, t) : x \in [a, b]; f(x) \leq t \leq 0\}$ are both Jordan measurable in \mathbb{R}^2 , in which case one has

$$\int_a^b f(x) dx = m^2(E^+) - m^2(E_-),$$

where m^2 denotes two-dimensional Jordan measure.

证明. 不妨假设 f 在区间 $[a, b]$ 上是正值函数。

⇒ 设 f 是黎曼可积函数, 则由 6 (练习 1.1.22), 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在分段常值函数 $g = \sum_{i=1}^k c_i \times 1_{I_i}$, 使得 $f \geq g$, 且

$$\int_a^b g(x) dx = \sum_{i=1}^k c_i \times |I_i| \leq \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{i=1}^k c_i \times |I_i| + \epsilon.$$

令 $E_1 = \bigcup_{i=1}^k I_i \times [0, c_i]$, 显然是一个基本集, 且

$$m^2(E_1) = \int_a^b g(x) dx = \sum_{i=1}^k c_i \times |I_i| \geq \int_a^b f(x) dx - \epsilon. \quad (7.1)$$

同时, 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在分段常值函数 $h = \sum_{j=1}^l c_j \times 1_{I_j}$, 使得 $f \leq h$, 且

$$\int_a^b h(x) dx = \sum_{j=1}^l c_j |I_j| \geq \int_a^b f(x) dx \geq \sum_{j=1}^l c_j |I_j| - \epsilon.$$

令 $E_2 = \bigcup_{j=1}^l I_j \times [0, c_j]$, 显然是一个基本集, 且

$$m^2(E_2) = \int_a^b h(x) dx = \sum_{j=1}^l c_j \times |I_j| \leq \int_a^b f(x) dx + \epsilon. \quad (7.2)$$

由于 $g \leq f \leq h$, 则 $E_1 \subset E^+ \subset E_2$, 且

$$m^{*,(J)}(E^+) \leq m^2(E_2), \quad m_{*,(J)}(E^+) \geq m^2(E_1).$$

结合上面的 (7.1) 和 (7.2), 我们有

$$m^2(E_1) \geq m^2(E_2) - 2\epsilon.$$

同时由 ϵ 的任意性, 我们有

$$m^{*,(J)}(E^+) = m_{*,(J)}(E^+).$$

这也就是说, E^+ 是 Jordan 可测集。且

$$\int_a^b f(x) dx = m^{*,(J)}(E^+) = m_{*,(J)}(E^+) = m(E^+).$$

当 f 在区间 $[a, b]$ 上是负值函数时有类似的结果, 同理可以推广当 f 取值为 \mathbb{R} 时的情形。

\Leftarrow 当 f 在区间 $[a, b]$ 上是正值函数, 且 E^+ 是 Jordan 可测集时, 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 2 个基本集 E^1 和 E^2 使得 $E^1 \subset E^+ \subset E^2$, 且

$$\begin{aligned} m^2(E^1) &\leq m^2(E^+) \leq m^2(E^1) + \frac{1}{2}\epsilon, \\ m^2(E^2) &\geq m^2(E^+) \geq m^2(E^2) - \frac{1}{2}\epsilon. \end{aligned}$$

由于 E^1, E^2 是基本集, 故可以找到 2 个分段常值函数 g, h 使得 E^1, E^2 分别是其对应的图像:

$$\begin{aligned} E^1 &= \{(x, t) : x \in [a, b]; 0 \leq t \leq g(x)\}, \quad m^2(E^1) = \int_a^b g(x)dx, \\ E^2 &= \{(x, t) : x \in [a, b]; 0 \leq t \leq h(x)\}, \quad m^2(E^2) = \int_a^b h(x)dx. \end{aligned}$$

这时, 我们有 $g \leq f \leq h$, 且

$$\int_a^b h(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b h(x)dx - \epsilon,$$

由 ϵ 的任意性, 我们有 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, 也就是 f 是达布可积的。根据 6 (练习 1.1.22), f 也是黎曼可积的。当 f 在区间 $[a, b]$ 上是负值函数时有类似的结果, 同理可以推广当 f 取值为 \mathbb{R} 时的情形。□

8. SOLUTION OF EX 1.1.26

Extend the definition of Riemann and Darboux integrals to higher dimensions, in such a way that analogues of all the previous results hold.

证明. 根据上一节的结果 7, 我们可知 f 是 $[a, b]$ 上的黎曼可积函数, 当且仅当其对应的 E^+, E_- 都是基本集。我们延拓这一定义到 $\{\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}\}$ 的基本集上的有界函数。给定 $D \subset \mathbb{R}^d$ 是基本集, 且 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在 D 上的有界函数。对应地, 我们给出集合 E^+ 和 E_- 的定义:

$$E^+ := \{(x, t) \in D \times \mathbb{R} : x \in D; 0 \leq t \leq f(x)\}, \quad E_- := \{(x, t) \in D \times \mathbb{R} : x \in D; f(x) \leq t \leq 0\}.$$

我们给出当 f 是正值函数时, 即 $f : D \rightarrow \mathbb{R}^+$ 时的达布积分 (Darboux integral) 的定义。

定义 8.1. 当 f 是正值函数时, E_- 可以视为空集, 我们只需要考虑集合 E^+ , 则 f 在基本集 D 上的达布下积分为

$$\int_D f(x)dx := m_{*,(J)}(E^+) = \sup_{\substack{A \subset E^+ \\ A \text{ elementary}}} m^{d+1}(A). \quad (8.1)$$

同理, 可以定义 f 的达布上积分:

$$\overline{\int_D f(x)dx} := m^{*,(J)}(E^+) = \inf_{\substack{B \supset E^+ \\ B \text{ elementary}}} m^{d+1}(B). \quad (8.2)$$

可以验证, 基本集 A, B 可以对应到 D 上的分段常值函数, 则可以将上述的定义 (8.1) 和 (8.2) 改写为分段常值函数的形式, 则更贴近于课本 Definition 1.1.6 的内容。 f 是集合 D 上的达布可积函数, 当且仅当其对应的 E^+ 是基本集, 且

$$\int_D f(x)dx = m^{d+1}(E^+).$$

相应地, 对于 D 上的一般函数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, 称 f 是达布可积的, 当且仅当其对应的 E^+, E_- 都是基本集, 且 $\int_D f(x)dx = m^{d+1}(E^+) - m^{d+1}(E_-)$ 。□