華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

第三讲

矩阵特征值计算

—— 幂法与反幂法

主要内容

- **特征值基本性质**
- **幂法与反幂法**
- **正交变换与矩阵分解**
- **QR 方法**
- **应用：Google 网页排名**

特征值性质

特征值与特征向量

$$\boxed{Ax = \lambda x} \qquad (\lambda \in C,\ x \neq 0)$$

基本性质

(1) $Ax = \lambda x \Rightarrow (A - \mu I)x = (\lambda - \mu)x$

(2) $Ax = \lambda x \Rightarrow A^k x = \lambda^k x$

(3) $B = P^{-1}AP, Ax = \lambda x \Rightarrow By = \lambda y,\ y = P^{-1}x$

(4) 若 A 对称，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^T AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$$

Rayleigh 商

定理： 设 A 是 n 阶实对称矩阵，其特征值为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$$

则对任意非零向量 x，有

$$\boxed{\lambda_n \leq \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_1}$$

且

$$\boxed{\lambda_1 = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}, \quad \lambda_n = \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}}$$

- $R(x) = \dfrac{x^T A x}{x^T x}$ 称为矩阵 A 关于 x $(x \neq 0)$ 的 **Rayleigh 商**

幂 法

幂法

- **幂法（乘幂法，幂迭代）**
  - **计算矩阵的主特征值（按模最大）及其特征向量**

假设：(1) $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n| \geq 0$

(2) 对应的 n 个线性无关特征向量为： $x_1, x_2, \ldots, x_n$

计算过程：

(1) 任取一个非零向量 v_0，要求满足 $(x_1, v_0) \neq 0$

(2) 对 $k = 1, 2, \ldots,$ 直到收敛，计算

$$v_k = Av_{k-1}$$

幂法的收敛性

- **收敛性分析**

设 $v_0 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \quad (\alpha_1 \neq 0)$

$$\Rightarrow v_1 = A v_0 = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n x_n$$

$$\vdots$$

$$v_k = A v_{k-1} = \alpha_1 \lambda_1^k x_1 + \alpha_2 \lambda_2^k x_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^k x_n$$

$$= \lambda_1^k \left[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k x_2 + \cdots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k x_n \right]$$

$$\rightarrow \lambda_1^k \alpha_1 x_1$$

$\left| \dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$ 越小，收敛越快

幂法的收敛性

当 k 充分大时，有

$$\left.\begin{aligned} v_k &\approx \lambda_1^k \alpha_1 x_1 \\ v_{k+1} &\approx \lambda_1^{k+1} \alpha_1 x_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_{k+1} \approx \lambda_1 v_k$$

$$\left.\begin{aligned} & v_{k+1} \approx \lambda_1 v_k \\ \text{又 } & v_{k+1} = A v_k \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{(v_{k+1})_j}{(v_k)_j} \approx \lambda_1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Rightarrow A v_k \approx \lambda_1 v_k$$

$\Downarrow$

v_k 为 λ_1 的近似特征向量

幂法的收敛性

定理： 设 A 有 n 个线性无关的特征向量，其特征值满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

则由幂法生成的向量满足

$$\lim_{k\to\infty} \frac{v_k}{\lambda_1^k} = \alpha_1 x_1, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{(v_{k+1})_j}{(v_k)_j} = \lambda_1$$

- 注：幂法的收敛速度取决于 $\left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ 的大小

幂法

- **幂法中存在的问题**

$$v_k \approx \lambda_1^k \alpha_1 x_1 \rightarrow \begin{cases} \infty, & |\lambda_1| > 1 \\ 0, & |\lambda_1| < 1 \end{cases}$$

改进方法：规范化

$$v_{k+1} = Av_k \Rightarrow u_{k+1} = Av_k, \quad v_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|_2}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} v_k = \pm \frac{x_1}{\|x_1\|_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_k^T A v_k \rightarrow \frac{x_1^T A x_1}{\|x_1\|_2^2} = \lambda_1}$$

改进的幂法

改进的幂法

(1) 任取一个非零向量 v_0，要求满足 $(x_1,v_0)\neq 0$

(2) 对 $k = 1, 2, \ldots$ ， 直到收敛，计算

$$u_{k+1} = Av_k, \quad v_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|_2}$$

定理： 设 A 有 n 个线性无关的特征向量，其特征值满足

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$$

则由改进的幂法生成的向量满足

$$\lim_{k\to\infty} v_k = \pm\frac{x_1}{\|x_1\|_2}, \quad \lim_{k\to\infty} v_k^T A v_k = \lambda_1$$

举例

例： 用改进的幂法计算下面矩阵的主特征值和对应的特征向量

$$A=\begin{bmatrix} \mathbf{1.0} & \mathbf{1.0} & \mathbf{0.5} \\ \mathbf{1.0} & \mathbf{1.0} & \mathbf{0.25} \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{0.25} & \mathbf{2.0} \end{bmatrix}$$

Eig01.m

幂法的加速

幂法的收敛速度取决于 $r = \left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ 的大小

当 r 接近于 1 时，乘幂法收敛会很慢！

- 幂法的加速：原点平移法 → 带位移的幂法

令 $B = A - \sigma I$，则 B 的特征值为：$\lambda_i - \sigma$

选择适当的 p 满足：

(1) $|\lambda_1 - \sigma| > |\lambda_j - \sigma| \quad (j = 2, \ldots, n)$ → 保持主特征值

(2) $\max\limits_{2\le j\le n}\left|\dfrac{\lambda_j - \sigma}{\lambda_1 - \sigma}\right| < \left|\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ → 加快收敛速度

用幂法计算矩阵 B 的主特征值：$\lambda_1 - \sigma$

举例

例： 用带位移的幂法计算下面矩阵的主特征值和对应的特征向量，取 p=0.75

Eig02.m

$$A=\begin{bmatrix} 1.0 & 1.0 & 0.5 \\ 1.0 & 1.0 & 0.25 \\ 0.5 & 0.25 & 2.0 \end{bmatrix}$$

问题：如何求其它特征值？

反 幂 法

反幂法

反幂法

- 计算矩阵的按模最小的特征值及其特征向量

假设：(1) $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge \dots \ge |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$

(2) 对应的 n 个线性无关特征向量为：$x_1, x_2, \dots, x_n$

A^{-1} 的特征值为：$\left|\dfrac{1}{\lambda_1}\right| \le \left|\dfrac{1}{\lambda_2}\right| \le \cdots \le \left|\dfrac{1}{\lambda_{n-1}}\right| < \left|\dfrac{1}{\lambda_n}\right|$

对应的特征向量仍然为 $x_1, x_2, \dots, x_n$

- **反幂法**：用幂法计算矩阵 A^{-1} 的主特征值和特征向量

反幂法

● 反幂法

(1) 任取一个非零向量 v_0，要求满足 $(x_n,v_0)\neq 0$

(2) 对 $k = 1, 2, \dots$ ，直到收敛，计算

$$u_{k+1} = A^{-1}v_k, \quad v_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|_2}$$

定理： 设 A 有 n 个线性无关的特征向量，其特征值满足

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$$

则由反幂法生成的向量满足

$$\lim_{k\to\infty} u_k = \pm\frac{x_n}{\|x_n\|_2}, \quad \lim_{k\to\infty} v_k^T A v_k = \frac{1}{\lambda_n}$$

反幂法的加速

反幂法的收敛速度取决于 $r = \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}}\right|$ 的大小

⇨ 当 r 接近于 1 时，反乘幂法收敛会很慢！

可以使用原点平移法对反幂法进行加速

问题：如何选择参数 p？

⇨ 离 λ_n 越近越好（但不能相等）

Rayleigh 商加速

- **Rayleigh 商加速**

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(v_k, Av_k)}{(v_k, v_k)} = \lim_{k\to\infty} v_k^T A v_k = \frac{1}{\lambda_n}$$

(1) 任取一个非零向量 v_0，要求满足 $(x_n, v_0) \neq 0$

(2) 对 $k = 1, 2, \ldots,$ 直到收敛，计算

$$\sigma_k = v_k^T A v_k, \quad u_{k+1} = \left(A - \sigma_k I\right)^{-1} v_k, \quad v_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{\|u_{k+1}\|_2}$$

几点注记

- 带位移的反幂法中需要计算 $u_{k+1} = \left(A - \sigma_k I\right)^{-1} v_k$

$$\Longleftrightarrow \left(A - \sigma_k I\right) u_{k+1} = v_k$$

- 带位移的反幂法可以用于计算任何一个特征值 λ_k

$\Rightarrow$ 将参数 σ 取为 λ_k 附近

- 若已知特征值，计算特征向量时，可使用带位移的反幂法

$\Rightarrow$ 令 σ 足够靠近 λ_k