



華東師範大學

EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

# 第一讲

---

## 数值积分及其应用

- 代数精度
- Gauss 求积公式

# 数值积分的一般形式

## 基本思想

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi) \quad \xi \in (a,b)$$

一般地，用  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一些离散点

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$$

上的函数值的加权平均作为  $f(\xi)$  的近似值，可得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

机械求积公式

求积系数

求积节点

- 将定积分计算转化成被积函数的函数值的计算
- 无需求原函数，易于计算机实现

# 代数精度

**定义：** 如果对于所有次数不超过  $m$  的多项式  $f(x)$ ，求积公式都精确成立，但对次数为  $m+1$  的多项式不精确成立，则称该求积公式具有  $m$  次代数精度

## ● 代数精度的验证方法

- 将  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^m$  依次代入，公式精确成立；
- 但对  $f(x) = x^{m+1}$  不精确成立。

注：求积公式并不局限于机械求积公式

# 举例

**例：** 梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

具有一次代数精度。

**例：** 抛物线公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

具有三次代数精度。

**课后练习：** 复合梯形公式和复合抛物线公式具有几次代数精度？

# 怎样构造高精度的求积方法

考虑求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

- 含  $2n+2$  个参数 (节点与系数), 为了使该公式具有尽可能高的代数精度, 可将  $f(x) = 1, x, x^2, \dots, x^{2n+1}$  代入公式, 使其精确成立, 则可构造出代数精度至少为  $2n+1$  的求积公式!

等分点不一定最佳! 自由选取求积节点!

# 举例

**例：**试确定节点  $x_i$  和系数  $A_i$ ，使得下面的求积公式具有尽可能高的代数精度，并求出此求积公式的代数精度。

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

**解：**将  $f(x)=1, x, x^2, x^3$  代入求积公式，使其精确成立，可得

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 2 \\ A_0 x_0 + A_1 x_1 = 0 \\ A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = 2/3 \\ A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0 \end{cases} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} \begin{cases} A_0 = 1, A_1 = 1 \\ x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$
$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

该公式对  $f(x)=x^4$  不精确成立，故有 3 次代数精度！

**缺点：**非线性方程组求解较困难！

# Gauss 型求积公式

一般情形：考虑机械求积公式

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

**定义：**若存节点在  $x_i \in [a, b]$  及系数  $A_i$ ，使得上面的求积公式具有  $2n+1$  次代数精度，则称节点  $x_i$  为**高斯点**， $A_i$  为**高斯系数**，求积公式为 **高斯型求积公式**

**性质：**上面的求积公式至多具有  $2n+1$  次代数精度

将  $f(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$  代入验证即可

**Gauss 求积公式在所有机械求积公式中代数精度最高**

# Gauss 点

---

**问题：** 如何计算 Gauss 点  $x_i$  和高斯系数  $A_i$

**法一：** 解非线性方程组



太困难! 😞

**法二：** 分开计算

- 先确定 Gauss 点
- 再通过解线性方程组计算 Gauss 系数



# Gauss-Legendre 求积公式

特殊情形:  $[a, b] = [-1, 1]$

➡ Gauss 点就是 Legendre 多项式  $P_{n+1}(x)$  的零点

Legendre 正交多项式:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x,$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)x P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$
$$n = 1, 2, \dots$$

# Legendre 多项式

- Legendre 多项式:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

⋮

# 低阶 G-L 公式

- $n=0$  时,  $P_{n+1}(x) = x \rightarrow$  Gauss 点:  $x_0 = 0$

G-L 求积公式:

将  $f(x)=1$  代入求出  $A_0$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0)$$

- $n=1$  时,  $P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

$\rightarrow$  Gauss 点:  $x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

将  $f(x)=1, x$  代入  
求出  $A_0, A_1$

两点 G-L 求积公式:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

# 低阶 G-L 公式

---

●  $n = 2$  时,  $P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

➡ Gauss 点:  $x_0 = -\frac{\sqrt{15}}{5}, x_1 = 0, x_2 = \frac{\sqrt{15}}{5},$

三点 G-L 求积公式:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$$

# 更多 G-L 公式


当  $n > 3$  时，可用数值方法计算  $P_{n+1}(x)$  的零点


$n$	节点个数	Gauss点	Gauss系数
0	1	0.0000000	2.0000000
1	2	$\pm 0.5773503$	1.0000000
2	3	$\pm 0.7745967$ 0.0000000	0.5555556 0.8888889
3	4	$\pm 0.8611363$ $\pm 0.3399810$	0.3478548 0.6521452
4	5	$\pm 0.9061798$ $\pm 0.5384693$ 0.0000000	0.2369269 0.4786287 0.5688889
5	6	$\pm 0.93246951$ $\pm 0.66120939$ $\pm 0.23861919$	0.17132449 0.36076157 0.46791393

# 一般区间上的 G-L 公式

- 积分区间:  $[a, b]$ , 权函数:  $\rho(x) = 1$

 做变量代换  $x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}$

  $g(t) = f\left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}\right)$

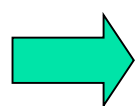
 
$$\int_a^b f(x) \, dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 g(t) \, dt \approx \sum_{i=0}^n A_i g(t_i)$$

# G-L公式举例

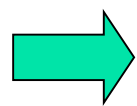
$$I[f]=0.46740110027234\dots$$

**例：**用四点 G-L 公式 ( $n=3$ ) 计算定积分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) \, dx$

**解：**令  $x = \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}$



$$g(t) = \frac{\pi^2}{16} (t+1)^2 \cos \frac{\pi}{4} (t+1)$$



$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos(x) \, dx &= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 \frac{\pi^2}{16} (t+1)^2 \cos \frac{\pi}{4} (t+1) \, dt \\ &\approx \frac{\pi}{4} [0.3479 g(-0.8611) + 0.6521 g(-0.3400) \\ &\quad + 0.6521 g(0.3400) + 0.3479 g(0.8611)] \\ &\approx 0.4674 \end{aligned}$$

# 几点注记

---

- 其它 Gauss 型求积公式

- Gauss-Chebyshev 求积公式:  $[a, b]=[-1, 1]$
- Gauss-Laguerre 求积公式:  $[a, b]=[0, +\infty]$
- Gauss-Hermite 求积公式:  $[a, b]=[-\infty, +\infty]$

- 实际应用中可以使用复合 Gauss 求积公式

- 将积分区间分隔成若干小区间
- 在每个小区间上使用 Gauss 求积公式