



華東師範大學

EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

第二讲

常微分方程数值求解

—— 微分方程的应用

微分方程应用

微分方程应用

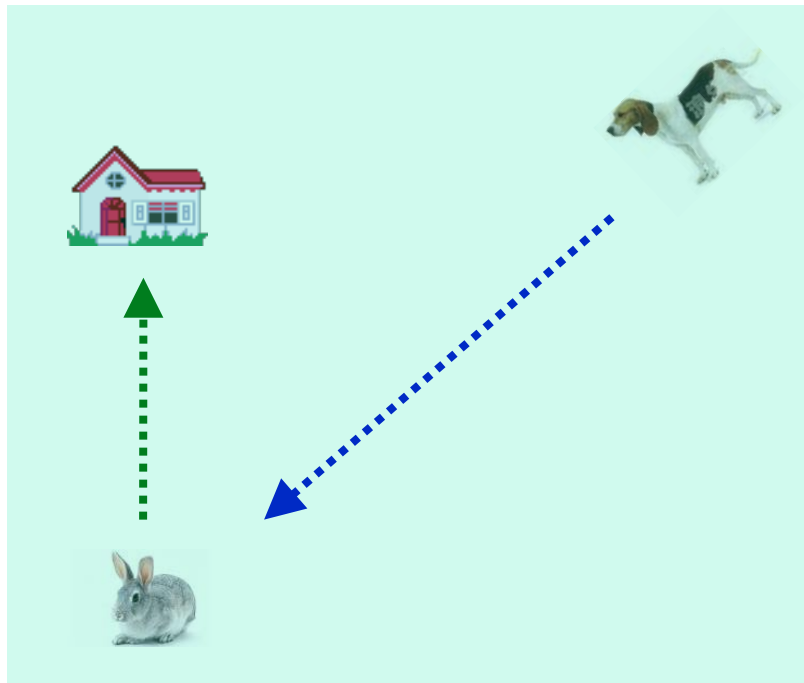
—— 猎狗追兔问题

问题描述：

在旷野上有一只野兔和一条猎狗，猎狗发现野兔并开始追踪，同时野兔也发现猎狗，开始跑向兔穴。

假定猎狗的追踪方向始终对着野兔，猎狗和野兔的奔跑速度分别为 u 和 v 。

问：猎狗能否在野兔进洞前抓住野兔？



微分方程应用

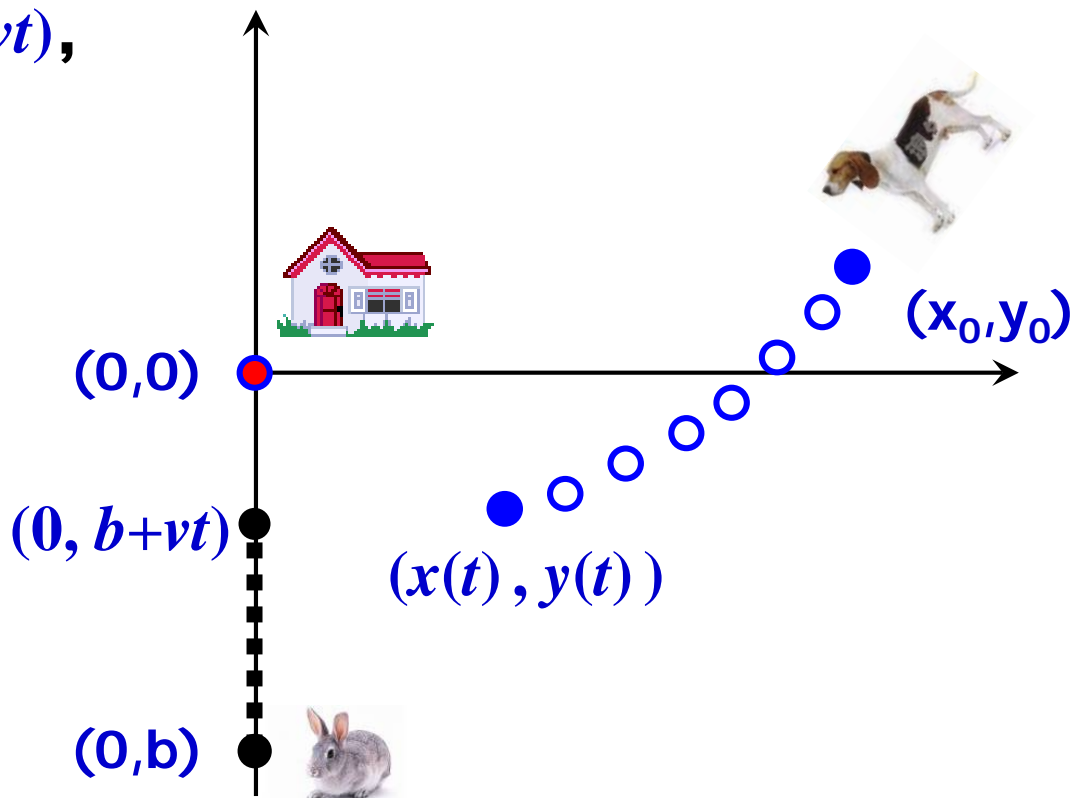
分析：

建立坐标系：设兔子的家为原点 $(0,0)$ ，兔子与猎狗的初始位置分别为 $(0, b)$ 和 (x_0, y_0) ，其中 $b < 0$ ， $x_0 > 0$

在时刻 t ：兔子位于 $(0, b+vt)$ ，
设猎狗位于 $(x(t), y(t))$ 。

由于猎狗的追踪方向始终
对着野兔，故有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - (b + vt)}{x}$$




微分方程应用

猎狗在 $[0, t]$ 内走过的路程为

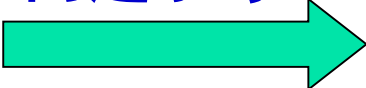
$$u t = \left| \int_{x_0}^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \right| = \int_x^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

其中 u 是猎狗奔跑的速度。

消去变量 t


$$xy' = y - b - \frac{v}{u} \int_x^{x_0} \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

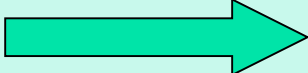
两边求导


$$xy'' = \frac{v}{u} \sqrt{1 + (y')^2} \longrightarrow \boxed{\text{猎狗奔跑的轨迹}}$$

微分方程应用

如何判断猎狗有没有在野兔跑回家前追上兔子？

计算 $x=0$ 时 y 的值！

$y < 0$  追上兔子！

微分方程应用

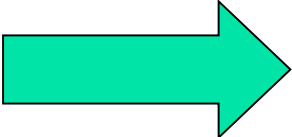
微分方程求解：

$$xy'' = \frac{v}{u} \sqrt{1 + (y')^2}$$

初值条件：

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = \frac{y_0 - b}{x_0}$$

化为方程组：令 $z=y'$


$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{v}{ux} \sqrt{1 + z^2} \end{cases}$$

微分方程应用

例：设野兔的家为原点 $(0,0)$ ，兔子与猎狗的初始位置分别为 $(0, -60)$ 和 $(70, 15)$ ，猎狗和野兔的奔跑速度分别为 5m/s 和 3m/s ，问：猎狗能否在野兔进洞前抓住野兔？

% 函数文件

```
function dy = dog(x,y)
global u v;
dy = zeros(size(y(:)));
dy(1) = y(2);
dy(2) = v/u*sqrt(1+y(2)*y(2))/x;
```

微分方程应用

```
% 脚本文件
clear all
global u v;
u = 5;
v = 3;
Y0 = [15; 15/14]; % 初值
[T,Y] = ode45(@dog,[70,0],Y0);
if Y(end,1)<=0
    disp('猎狗能抓住野兔! ')
else
    disp('猎狗抓不到野兔! ')
end
fprintf('x=0 时 y=%.4f\n', Y(end,1));
```