

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию

---

Пензенский государственный университет

# СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Методические указания  
и контрольные задания  
для выполнения курсовых работ  
(для студентов заочного факультета)*



Издательство  
Пензенского государственного  
университета  
Пенза 2005



УДК 539.4

С 64

Даны методические указания и задания по сопротивлению материалов для выполнения курсовых работ студентами заочного факультета.

Методические указания подготовлены на кафедре “Надежность машин и приборов” и предназначены для студентов специальностей 151001, 151002, 150201, 150202, 150408, 190201, 190205.

Ил. 26, табл. 10, библиогр. 5 назв.

**С о с т а в и т е л и : И. Н. Гонтарь, А. Н. Литвинов, В. В. Данилов**

**П о д р е д а к ц и е й А. Н. Литвинова**

**Р е ц е н з е н т К. К. Нежданов**, доктор технических наук,  
профессор кафедры «Строительные конструкции»  
Пензенского государственного университета  
архитектуры и строительства

## Введение

Методические указания составлены с целью оказания методической помощи студентам, обучающимся на заочном факультете, при выполнении курсовых работ по сопротивлению материалов.

Темы курсовых работ и объем выполняемых заданий определяются преподавателем в зависимости от специальности, на которой обучается студент, и срока его обучения.

Перед выполнением курсовой работы необходимо изучить соответствующие разделы курса сопротивления материалов по одному из рекомендованных учебников [1–3] и учебному пособию [4].

Данные для выполнения каждой задачи выбираются из таблицы согласно шифру, который определяется по номеру зачетной книжки и буквам русского алфавита (а, б, в, г, д, е). Буква “а” соответствует последней цифре номера зачетной книжки, которая помещается в начале шифра:

– номер зачетной книжки	03	ЗТН	6124
– расположение букв	аб	вгде	
– полученный шифр	43	6124	
	аб	вгде	

Записав шифр и под каждой его цифрой соответствующую букву, из таблицы выбирают число, которое находится на пересечении соответствующих строки (буквы) и столбца (цифры). Причем вначале берется буква, а затем находится соответствующая ей цифра. Номер зачетной книжки и соответствующий ему шифр задания указываются на титульном листе курсовой работы.

Перед решением задачи необходимо записать полностью ее название, условие, вычертить расчетную схему и указать все исходные данные. На расчетной схеме должны быть указаны условными обо-

значениями все внешние нагрузки, соответствующие варианту задания.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны только в условных обозначениях. При использовании формул и данных, отсутствующих в рекомендуемых учебниках, необходимо кратко и точно указать источник применяемой литературы. Подстановка цифр должна выполняться полностью, без сокращений. Вычисления должны вестись с точностью до трехзначных цифр с обязательным указанием размерности полученного результата.

Порядок и последовательность решения задач приведены в примерах, помещенных после условия задачи.

Курсовая работа оформляется в соответствии с методическими указаниями [5].

# 1 Методические указания по темам курса

При самостоятельном изучении курса основным учебником считается [1]. При его отсутствии допускается пользоваться учебниками [2, 3]. По каждой теме указаны соответствующие разделы учебной литературы.

## 1.1 Основные понятия

(§ 1–7 [1]; § 1–5 [2]; § 1.1–6.1 [3])

Задачи и методы сопротивления материалов. Реальный объект и расчетная схема. Внешние и внутренние силы. Классификация внешних сил. Внутренние силы, внутренние силовые факторы. Метод сечений.

Основные гипотезы о деформируемом теле. Перемещения и деформации. Напряжение (полное, нормальное, касательное). Связь напряжений с внутренними силовыми факторами. Принцип независимости действия сил. Общие принципы расчета элементов конструкции.

## 1.2 Растяжение и сжатие

(§ 8, 9, 11–19 [1]; § 6–17 [2]; § 1.2–10.2 [3])

Внутренние силы и напряжения, возникающие в поперечных сечениях прямого стержня при растяжении и сжатии. Эпюры продольных сил. Абсолютные продольное и поперечное удлинения. Относительные продольная и поперечная деформации. Закон Гука при растяжении и сжатии. Модуль упругости. Коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона). Определение осевых перемещений поперечных сечений. Жесткость при растяжении и сжатии.

Экспериментальное изучение свойств материалов при растяжении и сжатии. Диаграмма растяжения и её характерные параметры: пределы пропорциональности, упругости, текучести, прочности. Истинная диаграмма растяжения. Закон разгрузки и повторного нагружения. Механические свойства при сжатии. Диаграмма сжатия. Пластическое и хрупкое состояние материалов, типы разрушений.

Допускаемое напряжение. Выбор коэффициента запаса прочности при статическом нагружении для хрупких и пластичных материалов. Условие прочности. Проектировочный и проверочный расчеты на прочность. Определение допускаемой нагрузки.

Статически неопределимые системы. Степень статической неопределимости. Уравнения совместности деформаций. Порядок расчета статически неопределимых систем. Особенности их расчета (подбор сечений, влияние температуры, монтажные напряжения).

Понятие о концентрации напряжений. Влияние концентрации напряжений на прочность хрупких и пластичных материалов. Принцип Сен-Венана.

### 1.3 Кручение

(§ 20, 21, 22 [1]; § 36, 45–50 [2]; § 1.4–4.4, 1.6–4.6 [3])

Чистый сдвиг и его особенности. Касательные напряжения при сдвиге. Закон парности касательных напряжений. Угол сдвига. Закон Гука при сдвиге. Зависимость между тремя упругими постоянными для изотропного тела ( $E$ ,  $G$ ,  $\mu$ ).

Кручение прямого стержня круглого поперечного сечения. Построение эпюры крутящих моментов. Основные гипотезы теории кручения. Напряжения в поперечном сечении. Формула для максимальных касательных напряжений. Эпюра напряжений. Полярный момент инерции и момент сопротивления поперечного сечения. Угол закручивания. Эпюра углов закручивания. Жесткость стержня при кручении. Условие прочности. Условие жесткости. Расчеты на прочность и жесткость.

Расчет статически неопределимых валов. Условие совместности деформаций.

Особенности расчета на прочность стержней некруглого сечения.

## 1.4 Геометрические характеристики плоских сечений

(§ 25, 26, 27 [1]; § 65–70 [2]; § 1.5–7.5 [3])

Статические моменты площади. Осевые, полярные и центробежные моменты инерции площади. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте осей. Определение координат центра тяжести сечения. Главные центральные оси. Главные моменты инерции. Главные центральные моменты инерции простейших поперечных сечений (прямоугольное, круглое, кольцевое). Геометрические характеристики стандартных профилей.

## 1.5 Изгиб прямых стержней

(§ 28–31, 37–39 [1]; § 55–61, 63, 64, 73–76, 82, 86, 90, 105–108 [2]; § 1.7–8.7, 11.7, 16.7, 4.11, 5.11 [3])

Опоры и опорные реакции. Понятия о поперечном, чистом и косом изгибе. Внутренние силовые факторы при поперечном изгибе ( $M_x$ ,  $Q_y$ ). Построение эпюр. Правила знаков для  $M_x$  и  $Q_y$ . Дифференциальные зависимости между  $M_x$  и  $Q_y$  и интенсивностью внешней нагрузки  $q$ . Нормальные напряжения при изгибе. Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении. Определение максимальных нормальных напряжений. Условие прочности по нормальным напряжениям. Момент сопротивления при изгибе. Расчет на прочность балок из пластичных и хрупких материалов. Касательные напряжения при поперечном изгибе (формула Д. И. Журавского). Эпюра касательных напряжений. Условие прочности по касательным напряжениям. Рациональные формы поперечных сечений балок при изгибе.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и его интегрирование. Метод начальных параметров. Физический смысл начальных параметров и их определение при различных способах закрепления концов балки. Определение перемещений с помощью интеграла Максвелла–Мора. Способ Верещагина.

## 1.6 Статически неопределимые системы, работающие на изгиб

(§ 42–45, 47 [1]; § 109, 111, 112 [2]; § 1.12–6.12 [3])

Определение степени статической неопределимости. Основная система. Метод сил. Система канонических уравнений метода сил. Вычисление коэффициентов системы канонических уравнений. Использование условий симметрии и кососимметрии при выборе основной системы. Построение результирующих эпюр изгибающих моментов. Деформационная проверка и ее физический смысл. Определение перемещений в статически неопределимых системах (балки, плоские рамы).

## 1.7 Основы теории напряженного и деформированного состояния. Теории прочности

(§ 48–50, 52–58 [1]; § 28–30, 33–35, 37–41 [2]; § 1.3–3.3, 6.3–9.3, 1.8, 2.8 [3])

Напряженное состояние в точке. Тензор напряжений. Главные площадки и главные напряжения. Классификация напряженного состояния (линейное, плоское, объемное). Относительные деформации. Обобщенный закон Гука. Полная удельная потенциальная энергия деформации в общем случае напряженного состояния.

Понятие о теориях прочности. Теории прочности для хрупких материалов и область их применимости: первая теория (критерий наибольших напряжений), вторая теория (критерий наибольших относительных деформаций), экспериментальный критерий Мора. Теории прочности для пластичных материалов и область их применимости: третья теория (критерий наибольших касательных напряжений), четвертая теория (энергетический критерий).



## 1.8 Сложное сопротивление

(§ 33, 34 [1]; § 119–126 [2]; § 1.9–4.9, 6.9 [3])

Примеры сложного сопротивления. Общий метод расчета.

Косой изгиб. Внутренние силовые факторы. Определение нормальных напряжений. Нейтральная линия. Условие прочности. Определение перемещений при косом изгибе.

Внецентренное растяжение и сжатие. Внутренние силовые факторы. Определение нормальных напряжений. Нейтральная линия. Условие прочности. Понятие о ядре сечения.

Изгиб с кручением стержней круглого поперечного сечения. Внутренние силовые факторы. Напряженное состояние. Расчетные формулы для эквивалентных напряжений и моментов по третьей и четвертой теориям прочности. Условие прочности. Расчет на прочность.

## 1.9 Устойчивость равновесия деформируемых систем

(§ 90–92, 94, 95 [1]; § 154–160 [2]; § 1.13–4.13 [3])

Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Устойчивость сжатых стержней. Критическая нагрузка. Формула Эйлера при различных опорных закреплениях и пределы ее применимости. Гибкость стержня. Предельная гибкость. Понятие о потере устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности. Формула Ф. С. Ясинского и условия ее применимости. Полная диаграмма для критических напряжений. Расчет на устойчивость по коэффициентам уменьшения допускаемых напряжений ( $\varphi$ ).

## 1.10 Динамическое действие нагрузок

(§ 113 [1]; § 164, 165, 173–175, 179, 180 [2]; § 1.14–4.14 [3])

Динамические нагрузки. Примеры их возникновения. Вычисление напряжений при равноускоренном движении. Формула для коэффициента динамичности.

Действие ударной нагрузки на упругую систему (продольный, поперечный удар). Коэффициент динамичности, его физический смысл.

Упрощенная формула для коэффициента динамичности. Расчет динамических напряжений и перемещений при ударе. Испытания на удар.

### 1.11 Расчеты за пределами упругости

(§ 77–81 [1]; § 147–150, 153 [2]; § 1.17–5.17 [3])

Упругопластический изгиб и кручение стержней. Разгрузка и остаточные напряжения. Понятие о расчете по допускаемым напряжениям. Схематизация диаграмм растяжения.

### 1.12 Заключение

Современные проблемы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость. Использование новых материалов в машиностроении и особенности их расчета. Применение ЭВМ в расчетах на прочность. Новые экспериментальные методы исследования напряжений и деформаций.

## 2 Расчет статически неопределимых систем при растяжении, сжатии и кручении

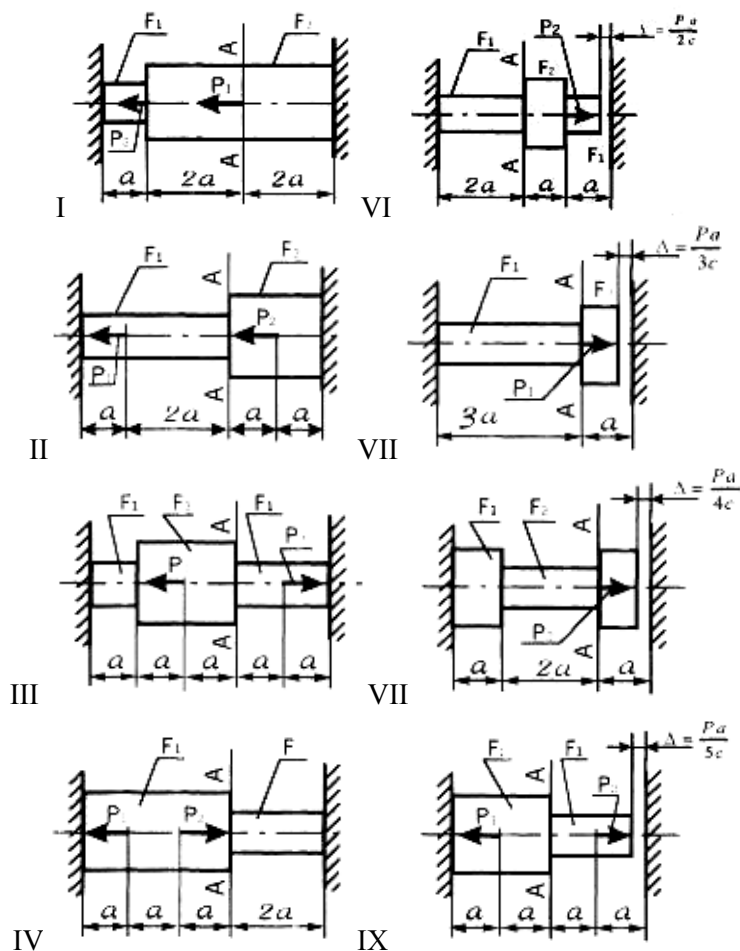
### 2.1 Задача 1

Ступенчатый брус (рисунок 2.1), участки которого имеют площади поперечных сечений  $F_i$ , нагружен продольными силами  $P_i$ . Внешние нагрузки  $P_i$ , площади поперечных сечений  $F_i$ , материал и длины отдельных участков известны.

Определить коэффициент запаса прочности бруса и вертикальное перемещение сечения А-А бруса.

При решении задачи в конечный ответ подставить значение силы  $P = 100 \cdot 10^3$  Н, площади  $F = 10 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, длины участков  $a = 0,5$  м.

Данные, необходимые для расчета, принять по таблице 2.1, полагая (см. рисунок 2.1)  $C = EF$ .



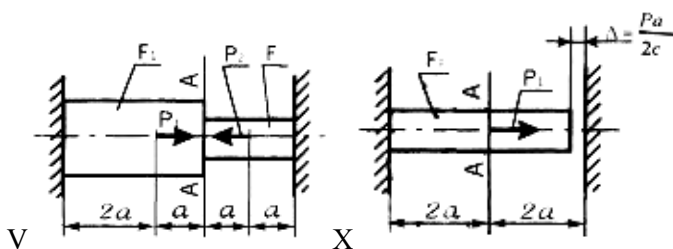


Рисунок 2.1

Таблица 2.1

Номер строки	Схемы по рисунку	$P_i$		$F_i$		Материал бруса	Предел текучести $\sigma_T$ , Па	Модуль упругости $E$ , Па
		$P_1$	$P_2$	$F_1$	$F_2$			
1	I	$P$	$P$	$F$	$2F$	Сталь 20	$25 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
2	II	$P$	$P$	$F$	$2F$	Сталь 30	$30 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
3	III	$P$	$P$	$2F$	$F$	Сталь 40	$34 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
4	IV	$P$	$2P$	$F$	$2F$	Сталь 50	$38 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
5	V	$P$	$3P$	$F$	$2F$	Сталь 40X	$80 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
6	VI	$P$	$2P$	$2F$	$2F$	Сталь 40XH	$90 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
7	VII	$P$	$3P$	$2F$	$F$	Сталь 45	$37 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
8	VIII	$P$	$2P$	$F$	$2F$	Бронза	$11 \cdot 10^7$	$1,2 \cdot 10^{11}$
9	IX	$P$	$2P$	$2F$	$2F$	Д16	$34 \cdot 10^7$	$0,75 \cdot 10^{11}$
0	X	$2P$	$3P$	$F$	$2F$	Сталь У8	$70 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
Буква шифра	е	в	а	д	б	г		

### Пример 1.

В соответствии с условиями задачи 1 выполним расчет бруса (рисунок 2.2,а) при  $P = 100 \cdot 10^3$  Н,  $F = 10 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $a = 0,5$  м.

Материал бруса – Сталь 30, предел текучести  $\sigma_T = 30 \cdot 10^7$  Па, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $C = EF$ .

### Решение.

2.1.1 Отбросим верхнюю заделку, заменив ее действие опорной реакцией  $R_1$ . Под действием внешней силы зазор  $\Delta$  перекрывается, и

со стороны нижней опоры на брус действует реакция  $R_2$ . Схема сил показана на рисунке 2.2,б.

2.1.2 Для полученной системы составим уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на ось  $Z$ )

$$\sum Z = R_1 - P_1 + R_2 = 0. \quad (2.1)$$

Имеем одно уравнение равновесия и два неизвестных ( $R_1$  и  $R_2$ ), т. е. система статически неопределима.

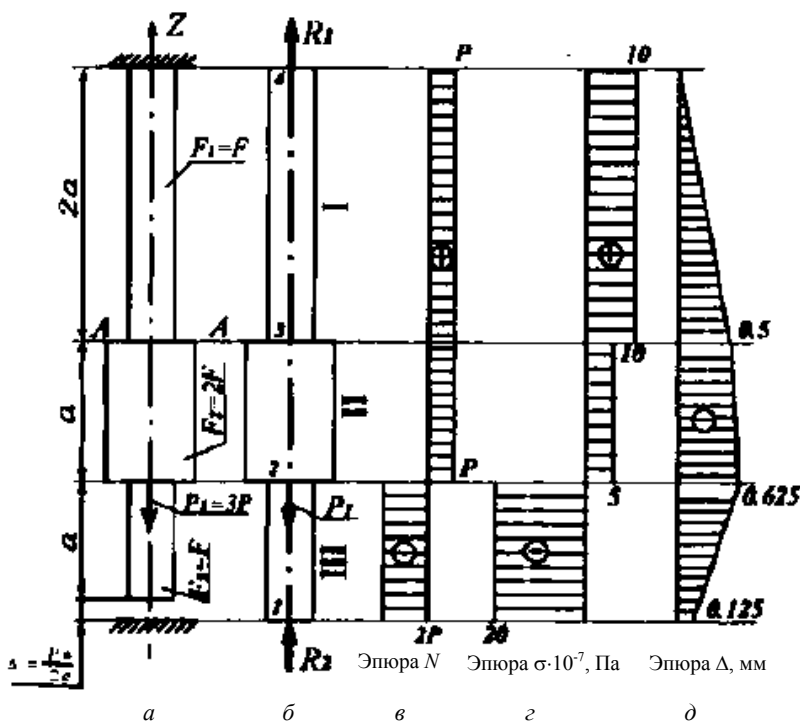


Рисунок 2.2

2.1.3 Условие совместности деформаций имеет вид

$$\Delta l = \Delta, \quad (2.2)$$

где  $\Delta l$  – перемещение нижнего сечения бруса, которое по принципу независимости действия сил можно представить в виде

$$\Delta l = \Delta l(P_1) + \Delta l(R_2) = \Delta. \quad (2.3)$$

Согласно закону Гука, абсолютное удлинение бруса, вызванное силой  $P_1$ , равно

$$\Delta l(P_1) = \frac{P_1 a}{EF_2} + \frac{P_1 2a}{EF_1}. \quad (2.4)$$

Абсолютное укорочение стержня, вызванное силой  $R_2$ , равно

$$\Delta l(R_2) = -\left(\frac{R_2 a}{EF_3} + \frac{R_2 a}{EF_2} + \frac{R_2 2a}{EF_1}\right). \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) и (2.5) в уравнение (2.3) и учитывая, что

$$P_1 = 3P, \quad \Delta = \frac{Pa}{2c} = \frac{Pa}{2EF},$$

получим уравнение

$$\frac{3Pa}{E2F} + \frac{3P \cdot 2a}{EF} - \left(\frac{R_2 a}{EF} + \frac{R_2 a}{E2F} + \frac{R_2 \cdot 2a}{EF}\right) = \frac{Pa}{2EF},$$

из решения которого следует, что  $R_2 = 2P$ .

Из (2.1) следует:  $R_1 = P_1 - R_2 = 3P - 2P = P$ .

Так как усилия  $R_1$  и  $R_2$  положительны, то их направления совпадают с направлениями, принятыми на рисунке 2.2,б.

2.1.4. Построим эпюры продольных сил  $N$ .

Разбиваем брус на участки: I, II, III (см. рисунок 2.2,б).

На I участке  $N_1 = R_1 = P$ .

На II участке  $N_2 = R_1 = P$ .

На III участке  $N_3 = -R_2 = -2P$ .

По полученным результатам строим эпюру продольных сил  $N$ , показанную на рисунке 2.2,в.

2.1.5 Определим нормальные напряжения:

$$\text{на I участке } \sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{P}{F} = \frac{100 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 10 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$\text{на II участке } \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{P}{2F} = \frac{100 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$\text{на III участке } \sigma_3 = \frac{N_3}{F_3} = -\frac{2P}{F} = -\frac{200 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -20 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

По найденным значениям строим эпюру нормальных напряжений  $\sigma$ , показанную на рисунке 2.2,з.

Из эпюры  $\sigma$  следует, что наиболее нагруженным является III участок, т. е.

$$\max \sigma = \sigma_3 = -20 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

2.1.6 Так как сталь является пластичным материалом, то коэффициент запаса прочности определяем по формуле

$$n = \frac{\sigma_T}{|\max \sigma|} = \frac{30 \cdot 10^7}{20 \cdot 10^7} = 1,5.$$

2.1.7 Построим эпюру перемещений сечений стержня.

Для этого вычислим абсолютные перемещения сечений, обозначенных цифрами 1, 2, 3, 4 на рисунке 2.2,б:

$$\Delta_1 = -\Delta = -\frac{Pa}{2EF} = -\frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4}} = -0,125 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,125 \text{ мм}$$

(знак минус указывает на то, что сечение I перемещается вниз на величину зазора  $\Delta$ );

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \Delta_1 - \frac{N_3 a}{EF_3} = -0,125 \cdot 10^{-3} - \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = \\ &= -0,625 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,625 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \Delta_2 + \frac{N_2 a}{EF_2} = -0,625 \cdot 10^{-3} + \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = \\ &= -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,5 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 + \frac{N_1 2a}{EF_1} = -0,5 \cdot 10^{-3} + \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0.$$

По полученным значениям строим эпюру продольных перемещений  $\Delta$ , показанную на рисунке 2.2,д.

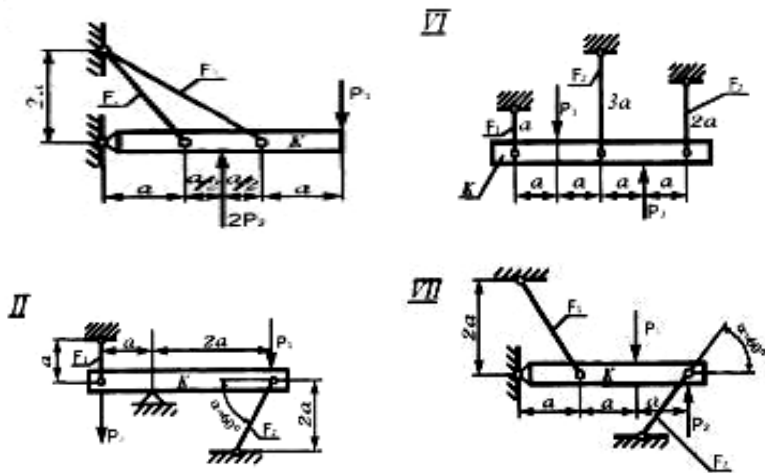
2.1.8 Из эпюры перемещений следует, что сечение А-А перемещается вниз на величину

$$\Delta_{A-A} = -0,5 \text{ мм.}$$

## 2.2 Задача 2

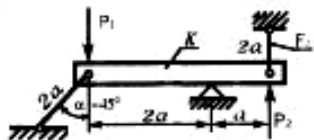
Абсолютно жесткая балка К, показанная на рисунке 2.3, шарнирно прикреплена к опоре стальными стержнями, имеющими площади поперечных сечений  $F_i$ , длина которых  $a_i$ , или с помощью опорных устройств. Балка нагружена силами  $P_i$ . Выполнить проектировочный расчет, т. е. найти площади поперечных сечений стержней, принимая

$$\sigma_{T(P)} = \sigma_{T(C)} = \sigma_T.$$





III



VIII

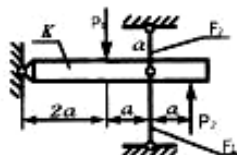
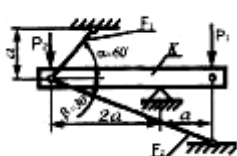
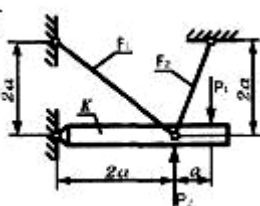


Рисунок 2.3. Начало

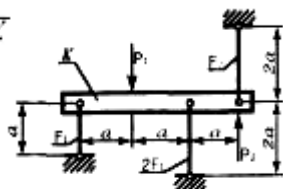
IV



IX



V



VI

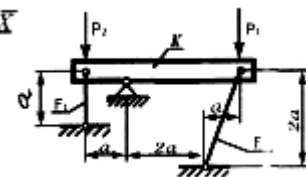


Рисунок 2.3. Окончание

Коэффициент запаса прочности конструкции принять равным  $n = 2$ .

Данные, необходимые для решения, принять по таблице 2.2 при  $P = 10 \cdot 10^3$  Н.

Таблица 2.2

Номер строки	Схема по рисунку 2.3	$P_i$		$F_i$		Материал стержня, марка стали	Предел текучести $\sigma_T$ , Па
		$P_1$	$P_2$	$F_1$	$F_2$		
1	1	$P$	—	$F$	$2F$	20	$25 \cdot 10^7$
2	II	$2P$	$P$	$2F$	$F$	У8	$70 \cdot 10^7$
3	III	—	$P$	$F$	$2F$	40	$34 \cdot 10^7$
4	IV	$P$	—	$3F$	$F$	50	$38 \cdot 10^7$

5	V	$P$	$2P$	$2F$	$3F$	40XH	$90 \cdot 10^7$
6	VI	–	$P$	$3F$	$F$	40X	$80 \cdot 10^7$
7	VII	$3P$	$P$	$2F$	$3F$	30	$30 \cdot 10^7$
8	VIII	$2P$	–	$3F$	$F$	20	$25 \cdot 10^7$
9	IX	–	$2P$	$2F$	$2F$	40XH	$90 \cdot 10^7$
0	X	$P$	$3P$	$F$	$3F$	У8	$70 \cdot 10^7$
Буква шифра	е	г	д	в	б	а	

### Пример 2.

В соответствии с условием задачи 2 выполнить проектировочный расчет системы, показанной на рисунке 2.4,а при  $P = 10 \cdot 10^3$  Н;  $F_1 = 2F$ ;  $F_2 = F$ ;  $P_1 = P$ ;  $P_2 = 0$ .

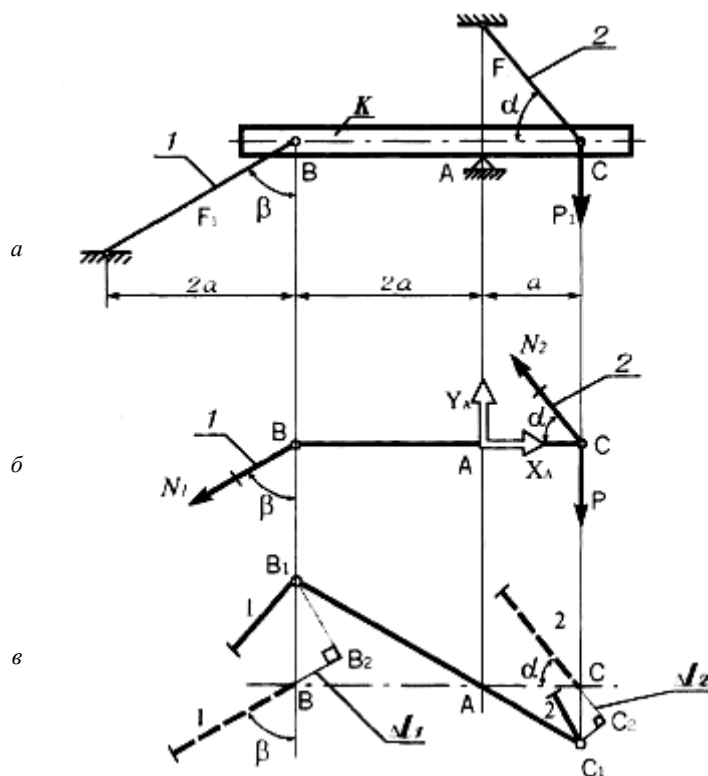


Рисунок 2.4

Материал стержней – Сталь 20, предел текучести  $\sigma_T = 25 \cdot 10^7$  Па, модуль упругости  $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Коэффициент запаса прочности  $n = 2$ .

### Решение.

2.2.1 Применяя метод сечений к заданной конструкции (см. рисунок 2.4,а), мысленно рассечем оба стержня, укажем неизвестные усилия  $N_1$  и  $N_2$ , действующие в них, и, отбросив опору А, заменим ее действие на балку К опорными реакциями  $X_A$ ,  $Y_A$ . Полученная схема усилий показана на рисунке 2.4,б.

Для полученной схемы сил составим уравнения равновесия.

$$\Sigma X = 0; X_A - N_1 \sin \beta - N_2 \cos \alpha = 0. \quad (2.6)$$

$$\Sigma Y = 0; Y_A - N_1 \cos \beta - N_2 \sin \alpha - P = 0. \quad (2.7)$$

$$\Sigma m_A = 0; N_1 \cdot 2a \cdot \cos \beta + N_2 \cdot a \cdot \cos \alpha - Pa = 0. \quad (2.8)$$

Система содержит 4 неизвестных ( $N_1$ ,  $N_2$ ,  $X_A$ ,  $Y_A$ ) и для нее можно составить только три линейно независимых уравнения равновесия (2.6), (2.7), (2.8). Таким образом, рассматриваемая система является один раз статически неопределимой, т.е. необходимо составить одно уравнение совместности деформаций.

Так как в проектном расчете необходимо определить усилия  $N_1$  и  $N_2$ , то в дальнейшем будем рассматривать только уравнение (2.8), а уравнения равновесия (2.6) и (2.7), содержащие неизвестные  $X_A$  и  $Y_A$ , можно не рассматривать – это не повлияет на степень статической неопределимости системы.

2.2.2 Раскроем статическую неопределимость системы, для чего изобразим начальное и конечное состояние системы после ее деформации.

На рисунке 2.4,в показана схема перемещений, которая строится по следующему принципу: на исходной конструкции показываются предполагаемые перемещения узлов В и С, в которых стержни прикреплены к жесткой балке К. Так как величина деформаций мала, то считаем, что перемещения узлов В и С при повороте балки относительно опоры А происходят не по дугам с радиусами АВ и АС, а по касательным к этим дугам ВВ<sub>1</sub> и СС<sub>1</sub>, которые перпендикулярны ра-

диусам АВ и АС соответственно ( $BB_1 \perp AB$ ,  $CC_1 \perp AC$ ). Предполагаемое положение балки показано прямой  $B_1AC_1$  (см. рисунок 2.4,в). Удлинения стержней определяются отрезками

$$\Delta l_1 = BB_2; \quad \Delta l_2 = CC_2. \quad (2.9)$$

При составлении схемы перемещений (см. рисунок 2.4,г) необходимо следить за тем, чтобы направления абсолютных деформаций стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  соответствовали выбранному направлению внутренних усилий  $N_1$  и  $N_2$  на схеме усилий (см. рисунок 2.4,б). В частности, так как на схеме усилий показаны растягивающие силы  $N_1$  и  $N_2$ , то на схеме перемещений им соответствуют удлинения стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  соответственно (укорачиваться при выбранном направлении усилий стержни не могут, так как это противоречит физическому смыслу).

Условие совместности деформаций составим из подобия треугольников  $\Delta ABB_1$  и  $\Delta ACC_1$ , в соответствии с которым

$$\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}. \quad (2.10)$$

Из  $\Delta BB_2B_1$  и  $\Delta CC_2C_1$  с учетом (2.9) следует, что

$$BB_1 = \Delta l_1 / \cos \beta; \quad CC_1 = \Delta l_2 / \cos \alpha. \quad (2.11)$$

С учетом (2.11) уравнение совместности деформации принимает вид

$$\frac{\Delta l_1}{2a \cdot \cos \beta} = \frac{\Delta l_2}{a \cdot \cos \alpha}. \quad (2.12)$$

Выражая абсолютные деформации стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  через усилия  $N_1$  и  $N_2$ , действующие в них,

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} \quad (2.13)$$

и учитывая, что по условию задачи

$$E_1 = E_2 = E; \quad F_1 = 2F; \quad F_2 = F; \quad l_1 = \frac{2a}{\sin \beta}; \quad l_2 = \frac{a}{\cos \alpha}$$

(см. рисунок 2.4,а), уравнение совместности деформаций (2.12) запишем в виде

$$\frac{N_1 2a}{2a \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot E \cdot 2F} = \frac{N_2 a}{a \cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot EF}$$

или окончательно

$$N_1 - N_2 \frac{\sin 2\beta}{\cos^2 \alpha} = 0. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) является дополнительным уравнением и совместно с уравнением (2.8) образует систему уравнений для определения искомых усилий  $N_1$  и  $N_2$ .

2.2.3 Решая совместно систему уравнений (2.8) и (2.14), получим:

$$N_1 = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\beta \cos \beta + \cos^3 \alpha} \cdot P; \quad (2.15)$$

$$N_2 = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin 2\beta \cos \beta + \cos^2 \alpha} \cdot P.$$

С учетом заданных значений (см. рисунок 2.4,а)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2a}{a} = 2, \text{ т. е. } \beta = 64^\circ, \text{ а } \alpha = 45^\circ \text{ и } P = 10 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

получим

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\sin 128^\circ}{\sin 128^\circ \cos 64^\circ + \cos^3 45^\circ} \cdot 10 \cdot 10^3 = \\ &= \frac{0,788 \cdot 10 \cdot 10^3}{0,788 \cdot 0,438 + 0,353} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ Н.} \end{aligned}$$

$$N_2 = \frac{\cos^2 45^\circ}{\sin 128^\circ \cos 64^\circ + \cos^3 45^\circ} \cdot 10 \cdot 10^3 = \frac{0,5 \cdot 10 \cdot 10^3}{0,788 \cdot 0,438 + 0,353} = 7,16 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

2.2.4. Определим нормальные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{11,3}{2F} = \frac{5,65 \cdot 10^3}{F}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{7,16 \cdot 10^3}{F}.$$

Так как напряжения во втором стержне больше, чем в первом

$$|\max \sigma| = \max[\sigma_1; \sigma_2] = \frac{7,16 \cdot 10^3}{F},$$

то условие прочности следует записать для второго стержня.

2.2.5 Условие прочности имеет вид

$$\max \sigma = \frac{7,16 \cdot 10^3}{F} \leq [\sigma], \quad (2.16)$$

где допускаемые напряжения  $[\sigma] = \frac{\sigma_r}{2} = \frac{25 \cdot 10^7}{2} = 12,5 \cdot 10^7 \text{ Па}$ .

Из уравнения (2.16) получим

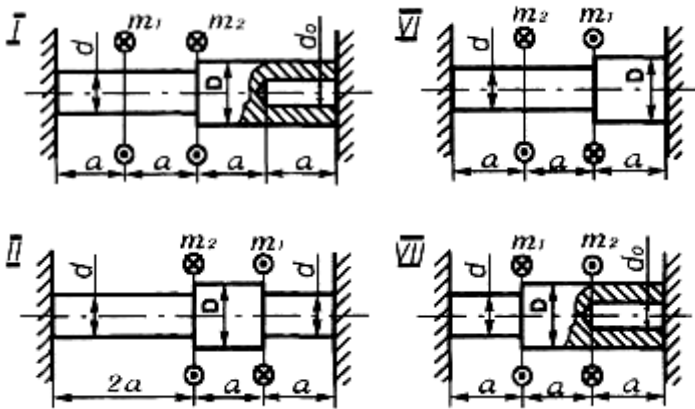
$$F \geq \frac{7,16 \cdot 10^3}{[\sigma]} = \frac{7,16 \cdot 10^3}{12,5 \cdot 10^7} = 0,573 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 57,3 \text{ мм}^2.$$

2.2.6 Окончательно примем следующие значения площадей поперечных сечений стержней:

$$F_1 = 2F = 114,6 \text{ мм}^2; \quad F_2 = F = 57,3 \text{ мм}^2.$$

### 2.3 Задача 3

Стальной брус зашпелен обоими концами (рисунок 2.5), нагружен крутящими моментами  $m_i$  и имеет круглое или кольцевое поперечные сечения.



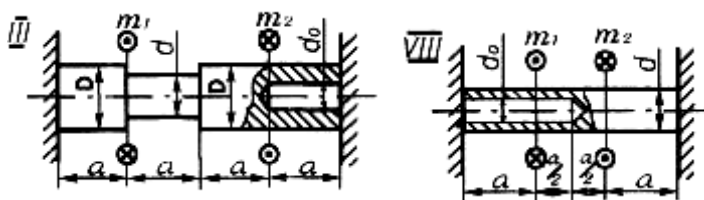


Рисунок 2.5. Начало

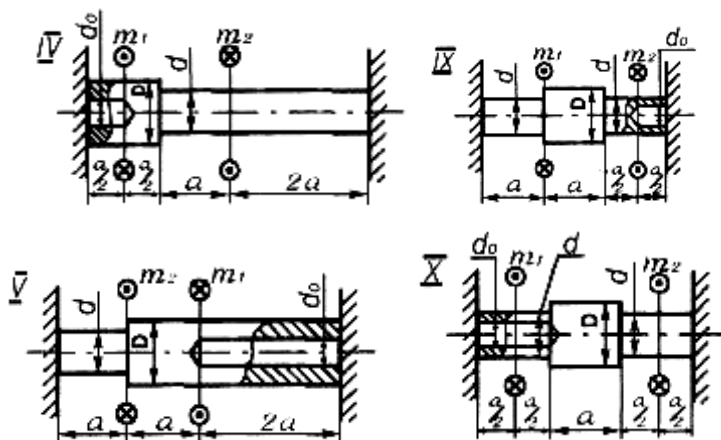


Рисунок 2.5. Окончание

Подобрать размеры поперечного сечения бруса, принимая значение момента  $m = 0,5 \cdot 10^3$  Н·м, и построить эпюру углов закручивания  $\varphi$ .

Данные для решения задач принять из таблицы 2.3.

Таблица 2.3

Номер строки	Схема по рисунку 2.5	$m_i$		Размеры поперечных сечений		Допускаемое напряжение $[\tau]$ , Па
		$m_1$	$m_2$	$D$	$c = d_0/D$	

1	I	$m$	$2m$	$1,2d$	0,7	$6 \cdot 10^7$
2	II	$2m$	$m$	$1,5d$	0,8	$8 \cdot 10^7$
3	III	$m$	$3m$	$1,4d$	0,7	$10 \cdot 10^7$
4	IV	$2m$	$m$	$2d$	0,8	$12 \cdot 10^7$
5	V	$3m$	$m$	$1,5d$	0,8	$7 \cdot 10^7$
6	VI	$2m$	$3m$	$2d$	0,7	$9 \cdot 10^7$
7	VII	$m$	$3m$	$1,8d$	0,6	$10 \cdot 10^7$
8	VIII	$2m$	$m$	$d$	0,8	$6 \cdot 10^7$
9	IX	$m$	$2m$	$2d$	0,7	$5 \cdot 10^7$
0	X	$3m$	$m$	$1,5d$	0,8	$6 \cdot 10^7$
Буква шифра	а	б	е	г	д	в

### Пример 3.

В соответствии с условиями задачи 3 выполнить расчет стального бруса, показанного на рисунке 2.6,а при  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 4m$ ,  $m = 0,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $D = 2d$ ,  $c = \frac{d_0}{d} = 0,8$  допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 6 \cdot 10^7 \text{ Па}$ .

### Решение.

2.3.1 Для расчета на прочность необходимо построить эпюру крутящих моментов. Эту эпюру можно построить только после определения величины реактивных моментов  $M_A$  и  $M_B$ , возникающих в опорах А и В (рисунок 2.6,б). В рассматриваемом случае можно составить только одно уравнение равновесия

$$\Sigma_{\text{мом}_z} = 0; -M_A + m + 4m - M_B = 0$$

или

$$M_A + M_B = 5m. \quad (2.17)$$

Так как для определения двух неизвестных ( $M_A$  и  $M_B$ ) имеется только одно уравнение равновесия (2.17), то рассматриваемая система является один раз статически неопределимой.

2.3.2 Для раскрытия статической неопределимости составим одно уравнение совместности деформаций. Для этого отбросим левую опору и заменим ее действие на брус моментом  $M_A$  (см. рисунок 2.6,б).



Условием совместности деформаций в данном случае является равенство нулю угла поворота поперечного сечения  $A$ :  $\varphi_A = 0$ .

В соответствии с принципом независимости действия сил уравнение совместности деформаций для расчетной схемы имеет вид

$$\varphi_A = \varphi_A(M_A) + \varphi_A(m) + \varphi_A(4m) = 0. \quad (2.18)$$

В соответствии с законом Гука при кручении угол поворота сечения  $A$  от каждого крутящего момента ( $M_A$ ,  $m$  и  $4m$ ) определяется из выражений (нумерация участков показана на рисунке 2.6,б):

$$\varphi_A(M_A) = -\frac{M_A \cdot 2a}{GJ_p^I} - \frac{M_A \cdot a}{GJ_p^{II}} - \frac{M_A \cdot a}{GJ_p^{III}} - \frac{M_A \cdot 2a}{GJ_p^{IV}};$$



$$\varphi_A(m) = \frac{m \cdot a}{GJ_p^{\text{II}}} + \frac{m \cdot a}{GJ_p^{\text{III}}} + \frac{m \cdot 2a}{GJ_p^{\text{IV}}}; \quad (2.19)$$

$$\varphi_A(4m) = \frac{4m \cdot 2a}{GJ_p^{\text{IV}}}.$$

Вычислим полярные моменты инерции поперечных сечений для всех участков бруса

$$J_p^{\text{I}} = J_p^{\text{II}} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$J_p^{\text{III}} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (2d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2};$$

$$J_p^{\text{IV}} = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) = \frac{\pi d^4}{32} (1 - 0,8^4) = 0,59 \frac{\pi d^4}{32}.$$

Из полученных результатов следует, что

$$J_p^{\text{II}} = J_p^{\text{I}}; J_p^{\text{III}} = 16J_p^{\text{I}}; J_p^{\text{IV}} = 0,59J_p^{\text{I}}. \quad (2.20)$$

Подставляя выражения (2.19) с учетом соотношений (2.20) в уравнение совместности деформаций (2.18), получим

$$-\frac{M_A a}{GJ_p^{\text{I}}} \left(2 + 1 + \frac{1}{16} + \frac{2}{0,59}\right) + \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{2}{0,59} + \frac{8}{0,59}\right) = 0. \quad (2.21)$$

Решая уравнение (2.21), определим значение момента  $M_A$ :

$$M_A = \frac{18,013m}{6,453} = 2,791m.$$

Из уравнения (2.17) получим

$$M_B = 5m - M_A = 5m - 2,791m = 2,209m.$$

Так как значения моментов  $M_A$  и  $M_B$  оказались положительными, то их направления на рисунке 2.6,б показаны верно.

**2.3.3** Вычислим значения крутящих моментов на каждом участке. При этом используем следующее правило знаков: внешний крутящий момент считается положительным, если для наблюдателя, смотряще-

го на рассматриваемое сечение со стороны внешней нормали, он направлен против часовой стрелки.

Применяя метод сечений для каждого участка, получим:

$$\text{I участок: } M_{\text{кр}}^{\text{I}} = M_A = 2,791m;$$

$$\text{II и III участки: } M_{\text{кр}}^{\text{II}} = M_{\text{кр}}^{\text{III}} = 2,791m - m = 1,791m;$$

$$\text{IV участок: } M_{\text{кр}}^{\text{IV}} = M_A - m - 4m = 2,791m - m - 4m = -2,209m.$$

Эпюра крутящих моментов показана на рисунке 2.6,в.

2.3.4 Наибольшие касательные напряжения на каждом участке определяются по формуле

$$\max \tau_j = \frac{M_{\text{кр}}^j}{W_p^j}, \quad (2.22)$$

где  $j = \text{I, II, III, IV}$  – номер участка.

Полярные моменты сопротивления

$$W_p^{\text{I}} = W_p^{\text{II}} = \frac{\pi d^3}{16} = 0,196d^3;$$

$$W_p^{\text{III}} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi (2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2} = 1,571d^3;$$

$$W_p^{\text{IV}} = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) = \frac{\pi d^3}{16} (1 - 0,8^4) = 0,116d^3.$$

По формуле (2.22) получим

$$\max \tau_{\text{I}} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{I}}}{W_p^{\text{I}}} = \frac{2,791m}{0,196d^3} = 14,240 \frac{m}{d^3};$$

$$\max \tau_{\text{II}} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{II}}}{W_p^{\text{II}}} = \frac{1,791m}{0,196d^3} = 9,138 \frac{m}{d^3};$$

$$\max \tau_{\text{III}} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{III}}}{W_{\text{p}}^{\text{III}}} = \frac{1,791m}{1,571d^3} = 1,140 \frac{m}{d^3};$$

$$\max \tau_{\text{IV}} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{IV}}}{W_{\text{p}}^{\text{IV}}} = -\frac{2,209m}{0,116d^3} = -19,043 \frac{m}{d^3}.$$

Очевидно, наиболее нагруженным является IV участок, а максимальные касательные напряжения в бруске  $\max \tau = |\max \tau_{\text{IV}}|$ . Эпюра касательных напряжений показана на рисунке 2.6,з.

2.3.5 Определим диаметр вала. Условие прочности имеет вид:

$$\max \tau = 19,043 \frac{m}{d^3} \leq [\tau]. \quad (2.23)$$

Из (2.23) следует, что

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{19,043m}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{19,043 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^7}} = 5,417 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 54,7 \text{ мм}.$$

Округляя диаметр до четного числа миллиметров в большую сторону, окончательно принимаем:

$$d = 56 \text{ мм}; D = 2d = l \text{ 12 мм}; d_0 = d \text{ с} = 56 \cdot 0,8 = 44,8 \text{ мм}.$$

2.3.6 Построим эпюру углов поворота  $\varphi$  поперечных сечений, используя формулу

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M_{\text{кр}} \cdot z}{GJ_p}, \quad (2.24)$$

где  $z$  – длина скручиваемого участка;  $\varphi_0$  – угол поворота поперечного сечения, расположенного в начале координат.

Эпюру углов поворота строим справа налево (см. рисунок 2.6,б), размещая начало координат в сечении В, т. е.  $\varphi_0 = \varphi_{\text{В}} = 0$ .

Используя формулу (2.24), вычислим последовательно углы поворота поперечных сечений N, K, С и А:

$$\begin{aligned}\varphi_N &= \varphi_B + \frac{M_{\text{кр}}^{\text{IV}} 2a}{GJ_p^{\text{IV}}} = 0 + \frac{-2,209m \cdot 2a}{G \cdot 0,59 \cdot J_p^{\text{I}}} = -7,488 \cdot \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \text{ рад}; \\ \varphi_K &= \varphi_N + \frac{M_{\text{кр}}^{\text{III}} a}{GJ_p^{\text{III}}} = -7,488 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} + \frac{1,791ma}{16GJ_p^{\text{I}}} = -7,376 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \text{ рад}; \\ \varphi_C &= \varphi_K + \frac{M_{\text{кр}}^{\text{II}} a}{GJ_p^{\text{II}}} = -7,376 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} + \frac{1,791ma}{GJ_p^{\text{I}}} = -5,584 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \text{ рад}; \\ \varphi_A &= \varphi_C + \frac{M_{\text{кр}}^{\text{I}} \cdot 2a}{GJ_p^{\text{I}}} = -5,584 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} + \frac{2,791m \cdot 2a}{GJ_p^{\text{I}}} = \\ &= (-5,584 + 5,582) \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} = -0,002 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \approx 0 \text{ рад.}\end{aligned}$$

При расчете использованы соотношения между полярными моментами инерции (2.20).

В результате округлений при выполнении вычислений угол поворота в сечении А оказался не равным нулю. Однако, так как погрешность вычислений

$$\delta = \frac{0,002}{5,584} \cdot 100 \% = 0,036\%,$$

т. е. не превышает 5%, то можно считать, что  $\varphi_A = 0$ .

Эпюра углов поворота, построенная по полученным данным, показана на рисунке 2.6, д.

### 3 Расчет балок на изгиб

#### 3.1 Задача 4

Стальная балка нагружена, как показано на рисунке 3.1.

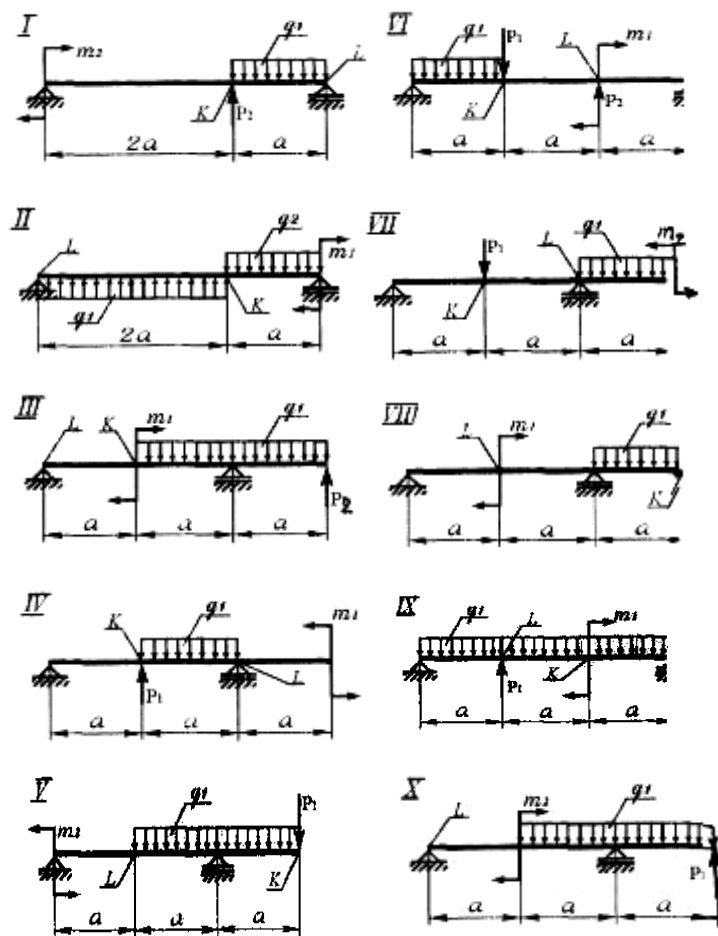


Рисунок 3.1

Требуется выполнить следующие расчеты.

3.1.1 Подобрать размеры поперечного сечения для следующих вариантов: двутаврового и состоящего из двух швеллеров; прямоугольного с соотношением сторон  $h/b = 2$  ( $h$  – высота,  $b$  – ширина сечения); круглого поперечного сечения; кольцевого поперечного сечения с соотношением  $c = d/D = 0,8$  ( $D$  – наружный диаметр,  $d$  – диаметр отверстия).

3.1.2 Определить соотношение расхода материала на единицу длины балки путем установления соотношения между площадями поперечных сечений различных балок (площадь поперечного сечения двутавра принять за единицу).

Выбрать наиболее рациональный (с точки зрения расхода материала) вид поперечного сечения. Все дальнейшие расчеты производить с балкой, имеющей рациональный вид поперечного сечения.

3.1.3 Построить эпюру нормальных и касательных напряжений для принятого поперечного сечения балки.

3.1.4 Определить прогиб сечения  $K$  и угол поворота сечения  $L$ , используя метод начальных параметров.

3.1.5 Показать примерное положение упругой линии балки с учетом полученных значений прогиба сечения  $K$  и угла поворота сечения  $L$ .

3.1.6 Исходные данные, необходимые для расчета, принять по таблице 3.1, полагая  $m = Pa = qa^2$ , причем  $q = 1 \cdot 10^4$  Н / м.

Коэффициент запаса прочности принять равным  $n = 1,5$ .

Принять  $a = 1$  м.

При выполнении работы следует:

а) все расчеты при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, определении перемещений и углов поворота выполнять в общем виде и лишь в окончательные выражения подставить необходимые данные, определяя числовые значения искомых величин;

б) считать, что силовая линия совпадает с осью наименьшей жесткости поперечного сечения балки.



Таблица 3.1

Номер строки	Схема по рисунку 3.1	Внешние нагрузки						Материал балки			
		m <sub>а</sub>	m <sub>в</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	Сталь	марка	Предел текучести, σ <sub>т</sub> , Па	Чугун
1	I	m	2m	P	2P	q	q	20	СЧ 38-60	38·10 <sup>7</sup>	140·10 <sup>7</sup>
2	II	2m	m	P	P	q	-	40X	СЧ 28-48	28·10 <sup>7</sup>	100·10 <sup>7</sup>
3	III	-	2m	-	2P	q	2q	30	СЧ 12-28	12·10 <sup>7</sup>	50·10 <sup>7</sup>
4	IV	2m	-	P	2P	q	-	40XH	СЧ 28-48	28·10 <sup>7</sup>	100·10 <sup>7</sup>
5	V	-	m	2P	-	-	q	40	СЧ 38-60	38·10 <sup>7</sup>	140·10 <sup>7</sup>
6	VI	-	m	2P	-	-	q	20	СЧ 28-48	28·10 <sup>7</sup>	100·10 <sup>7</sup>
7	VII	2m	m	P	2P	2q	q	50	СЧ 12-28	12·10 <sup>7</sup>	50·10 <sup>7</sup>
8	VIII	-	m	P	-	-	2q	40XH	СЧ 28-48	28·10 <sup>7</sup>	100·10 <sup>7</sup>
9	IX	m	m	2P	-	q	q	30	СЧ 38-60	38·10 <sup>7</sup>	140·10 <sup>7</sup>
0	X	2m	m	P	P	2q	q	40XH	СЧ 12-28	12·10 <sup>7</sup>	50·10 <sup>7</sup>
Буква шифра	a	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л

#### Пример 4.

В соответствии с условиями задачи 4 выполнить расчет стальной балки, показанной на рисунке 3.2,а, при  $q = 1 \cdot 10^4$  Н/м,  $q_1 = q$ ,  $q_2 = 2q$ ,  $a = 1$  м,  $m_1 = m = qa^2$ ,  $P_i = P = qa$ .

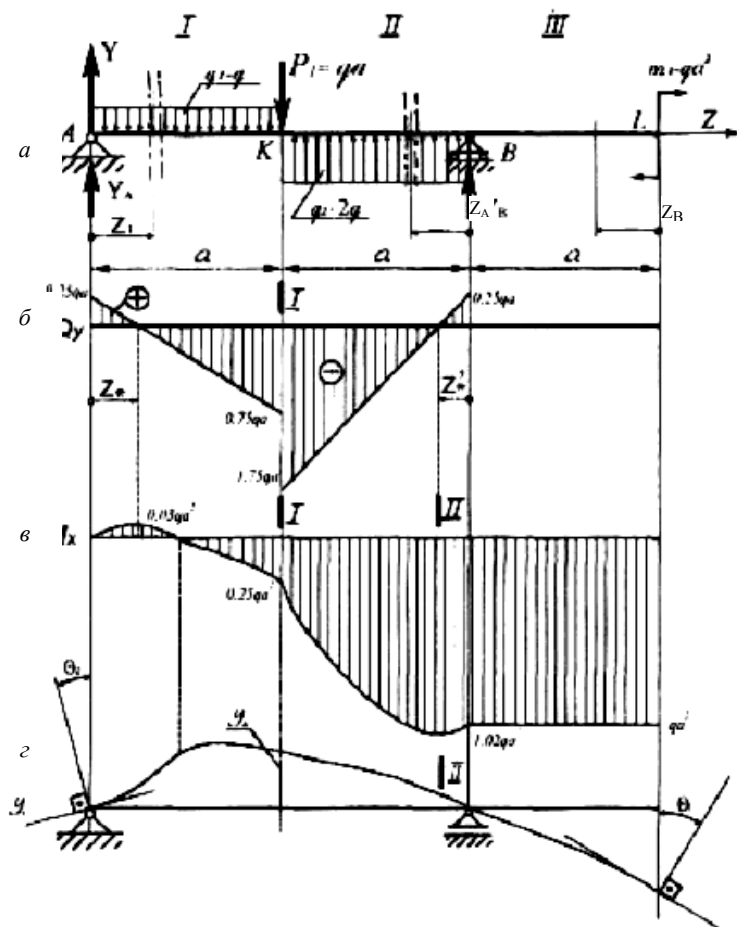


Рисунок 3.2

Материал балки – Сталь 20:  $\sigma_T = 25 \cdot 10^7$  Па,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

Коэффициент запаса прочности принимается равным  $n = 1,5$ .

### Решение.

3.1.7 Построим эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  и  $M_x$ , для чего необходимо определить опорные реакции  $Y_A$  и  $Y_B$ , показанные на рисунке 3.2,а.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\Sigma_{\text{momA}} = 0; \quad Y_B \cdot 2a - m_1 + q_2a(a + 0,5a) - P_1a - q_1a \cdot 0,5a = 0;$$

$$\begin{aligned} Y_B &= \frac{1}{2a}(m_1 - 1,5q_2a^2 + P_1a + 0,5q_1a^2) = \\ &= \frac{1}{2a}(qa^2 - 1,5 \cdot 2qa^2 + qa^2 + 0,5qa^2) = -0,25qa. \end{aligned}$$

$$\Sigma_{\text{momB}} = 0; \quad -Y_A \cdot 2a + q_1a(a + 0,5a) + P_1a - q_2a \cdot 0,5a - m_1 = 0;$$

$$\begin{aligned} Y_A &= \frac{1}{2a}(1,5q_1a^2 + P_1a - m_1 - 0,5q_2a^2) = \\ &= \frac{1}{2a}(1,5qa^2 + qa^2 - qa^2 - 0,5 \cdot 2qa^2) = 0,25qa. \end{aligned}$$

Правильность определения реакций опор проверяем с помощью уравнения равновесия  $\Sigma Y = 0$

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= Y_A - q_1a - P_1 + q_2a + Y_B = \\ &= 0,25qa - qa - qa + 2qa - 0,25qa = 0. \end{aligned}$$

Полученное тождество показывает, что опорные реакции определены верно.

Знак минус реакции  $Y_B$  указывает на то, что в действительности эта сила направлена вниз (см. рисунок 3.2,а).

3.1.8 Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ , разбивая балку на три участка (см. рисунок 3.2,а). На каждом участке применяем метод сечений. Положение координат  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  показано на каждом участке. Начало координат выбирается в начале каждого участка.

В соответствии с методом сечений, перерезывающая сила в произвольном сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на левую (или правую) отсеченную часть балки.

Изгибающий момент  $M_x$  равен алгебраической сумме моментов от всех внешних сил, действующих на левую (или правую) отсеченную часть балки.

При построении эпюр используются следующие правила знаков:

- перерезывающая сила считается положительной, если она поворачивает отсеченную часть балки по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения;
- изгибающий момент считается положительным, если он сжимает верхние волокна балки.

На рисунке 3.3 правила знаков проиллюстрированы графически.

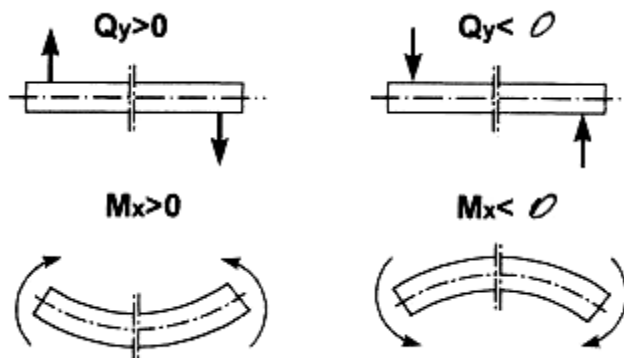


Рисунок 3.3

Рассмотрим поочередно все три участка:

I участок:  $0 \leq z_1 \leq a$ .

Выражение для перерезывающей силы в произвольном сечении с координатой  $Z_1$  имеет вид

$$Q_Y = Y_A - q_1 z_1 = 0,25qa - qz_1 = q(0,25a - z_1).$$

Выражение для  $Q_Y$  является линейной функцией координаты  $z_1$ , поэтому для построения эпюры необходимо вычислить значения  $Q_Y$  в начале ( $Z_1 = 0$ ) и в конце ( $Z_1 = a$ ) участка балки:

$$\text{при } Z_1 = 0 \quad Q_Y = 0,25qa;$$

$$\text{при } Z_1 = a \quad Q_Y = 0,75qa.$$

Эпюра  $Q_Y$  показана на рисунке 3.2,б.

Выражение для изгибающего момента имеет вид

$$M_x = Y_A z_1 - q_1 z_1 \frac{z_1}{2} = 0,25qaz_1 - 0,5qz_1^2 = 0,25 q(az_1 - 2z_1^2).$$

$M_x$  является квадратичной параболой, которая в соответствии со свойствами эпюр [1] должна быть направлена выпуклостью навстречу нагрузке  $q_1$ . Кроме того, так как между  $M_x$  и  $Q_Y$  существует дифференциальная зависимость [1]  $\frac{dM}{dz} = Q_Y$ , то в точках  $Z_*$ , где  $Q_Y = 0$  (см. рисунок 3.2,б), на эпюре изгибающего момента имеет место максимум или минимум.

Для определения координаты  $Z_*$  приравняем к нулю выражение для перегрывающей силы:

$$Q_Y = q(0,25a - z_*) = 0, \text{ т. е. } z_* = 0,25a.$$

Вычислим значения  $M_x$  в начале участка ( $Z_1 = 0$ ), при  $Z_*$  и в конце участка ( $Z_1 = a$ ):

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_1 = z_* = 0,25a \quad M_x = 0,25q[a \cdot 0,25a - 2(0,25a)^2] = 0,03qa^2;$$

$$\text{при } z_1 = a \quad M_x = 0,25q(a^2 - 2a^2) = -0,25qa^2.$$

Эпюра  $M_x$ , построенная по полученным результатам, показана на рисунке 3.2,в.

II участок:  $0 \leq z_2 \leq a$ .

Рассматривая правую отсечённую часть балки, получим:

$$Q_Y = -Y_B - q_2 z_2 = -(-0,25qa) - 2qz_2 = 0,25q(a - 8z_2),$$

$$\text{при } z_2 = 0 \quad Q_Y = 0,25qa;$$

$$\text{при } z_2 = a \quad Q_Y = -1,75qa.$$

Эпюра  $Q_Y$  показана на рисунке 3.2,б.

Изгибающий момент

$$\begin{aligned} M_x &= -m_1 + Y_B z_2 + (q_2 z_2) - \frac{1}{2} z_2 = -qa^2 - 0,25qa z_2 + qz_2^2 = \\ &= q(z_2^2 - 0,25az_2 - a^2). \end{aligned}$$

Анализ зависимости  $M_x(Z_2)$  проводится аналогично анализу участка I. Координата  $Z_*$  на II участке, где  $Q_Y = 0$  (см. рисунок 3.2,б) определяется из уравнения

$$Q_Y = 0,25q(a - 8Z_*) = 0, \text{ т. е. } Z_* = \frac{1}{8}a = 0,125a.$$

Вычисляя значения изгибающего момента, получим:

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_x = qa^2,$$

$$\text{при } z_2 = Z_* = 0,125a \quad M_x = q[(0,125a)^2 - 0,25a \cdot 0,125a - a^2] = 1,02qa^2;$$

$$\text{при } z_2 = a \quad M_x = q(a^2 - 0,25a^2 - a^2) = -0,25qa^2.$$

Эпюра  $M_x$  показана на рисунке 3.2,в.

III участок  $0 \leq z_3 \leq a$ .

Рассматривая правую часть балки, получим:

$$Q_Y = 0; \quad M_x = -m_1 = -qa^2.$$

Таким образом,  $Q_Y$  и  $M_x$  на третьем участке не зависят от координаты  $Z_3$  и являются постоянными (см. эпюры на рисунках 3.2,б,в).

3.1.9 Из анализа эпюры изгибающего момента  $M_x$  (см. рисунок 3.2,в) следует, что наиболее нагруженным является сечение II – II на втором участке, т. е.

$$\max M_x = |-1,02qa^2| = 1,02 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^2 = 1020 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Весь дальнейший расчет на прочность проводится для сечения II–II.

3.1.10 Условие прочности для пластичного материала имеет вид

$$\max \sigma = \frac{\max M}{W} \leq [\sigma], \quad (3.1)$$

$$\text{где } [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{25 \cdot 10^7}{1,5} = 16,7 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Из условия прочности (3.1) определяем требуемый момент сопротивления поперечного сечения

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]} = \frac{10200}{16,7 \cdot 10^7} = 61,08 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 61,08 \text{ см}^3.$$

По найденному  $W_x$  подберем размеры требуемых поперечных сечений.

### Двутавровое поперечное сечение.

По ГОСТ 8239–72 выбираем двутавр № 14 с моментом сопротивления  $W_x = 81,7 \text{ см}^3$  и площадью поперечного сечения  $F = 17,4 \text{ см}^2$ .

### Поперечное сечение в виде двух швеллеров.

По ГОСТ 8240–72 выбираем швеллеры № 10, у каждого из которых  $W_x = 34,8 \text{ см}^3$ . Все поперечное сечение, состоящее из двух швеллеров, будет иметь момент сопротивления  $W_x = 2 \cdot 34,8 \text{ см}^3 = 69,6 \text{ см}^3$ .

Площадь поперечного сечения одного швеллера  $F = 10,9 \text{ см}^2$ , а площадь всего сечения  $F = 2 \cdot 10,9 = 21,8 \text{ см}^2$ .

### Прямоугольное поперечное сечение ( $h = 2b$ ).

Момент сопротивления вычисляется по формуле

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 0,667b^3.$$

Получим

$$b = \sqrt[3]{\frac{W}{0,667}} = \sqrt[3]{\frac{61,08}{0,667}} = 4,5 \text{ см}; \quad h = 2b = 2 \cdot 4,5 = 9 \text{ см}.$$

Площадь поперечного сечения

$$F = b h = 4,5 \cdot 9 = 40,5 \text{ см}^2.$$

### Сплошное круглое поперечное сечение.

Момент сопротивления вычисляется по формуле

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} = 0,1D^3.$$

Получим результат, по которому поперечное сечение должно иметь диаметр

$$D = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{61,08}{0,1}} = 8,5 \text{ см}.$$

Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 8,5^2}{4} = 56,8 \text{ см}^2.$$

Кольцевое круглое поперечное сечение ( $c = 0,8$ ).

Момент сопротивления вычисляется по формуле

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c) = \frac{\pi D^3}{32} (1 - 0,8^4) = 0,058 D^3.$$

Здесь  $c = d/D$ ,

где  $d$  – диаметр отверстия стержня;  $D$  – наружный диаметр сечения.

Требуемый внешний диаметр

$$D = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,058}} = \sqrt[3]{\frac{61,08}{0,058}} = 10,2 \text{ см},$$

диаметр отверстия  $d = cD = 0,8 \cdot 10,2 = 8,16 \text{ см}$ .

Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi D^2}{4} (1 - c^4) = \frac{\pi \cdot 10,2^2}{4} (1 - 0,8^4) = 29,42 \text{ см}^2.$$

3.1.11 Определим соотношение расхода материала на единицу длины стальных балок заданных типов поперечных сечений, приняв площадь двутавра за единицу, и составим таблицу отношений площадей сечений к площади двутавра (таблица 3.2).

Таблица 3.2

Тип сечения	Площадь сечения $F_j$ , см <sup>2</sup>	Отношение площадей $F_j/F_1$
Двутавр № 14	17,4	1
Два швеллера № 10	21,8	1,25
Прямоугольник	40,5	2,33
Круг	56,8	3,26
Кольцо	29,42	1,7

Из таблицы 3.2 следует, что наиболее рациональным с точки зрения расхода материала является двутавровое поперечное сечение. Наиболее нерациональным является круглое поперечное сечение, при котором вес балки увеличится в 3,26 раза по сравнению с балкой двутаврового поперечного сечения.



Окончательно выбираем двутавровое поперечное сечение (рисунок 3.4,а) и все дальнейшие расчеты производим для двутавровой балки № 14, которая имеет следующие геометрические характеристики (ГОСТ 8239–72): момент сопротивления  $W_x = 81,7 \text{ см}^3$ , осевой момент инерции  $J_x = 572 \text{ см}^4$ , статический момент половины площади  $S_x^* = 46,8 \text{ см}^3$ ; ширина стенки двутавра  $d = 0,49 \text{ см}$ ;  $h = 14 \text{ см}$ ,  $b = 7,3 \text{ см}$ ,  $t = 0,75 \text{ см}$ .

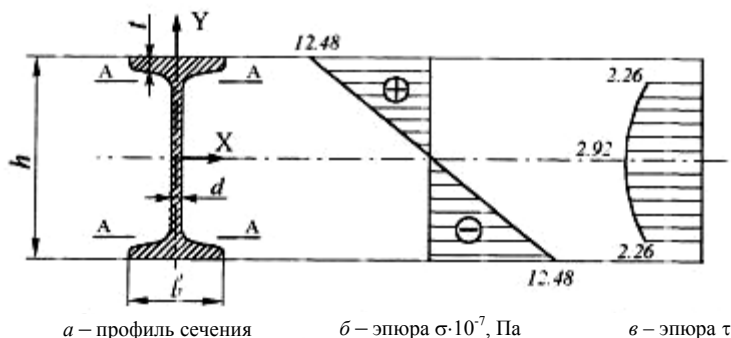


Рисунок 3.4

3.1.12 Максимальные нормальные напряжения, возникающие в сечении II–II (см. рисунок 3.2,в), определяются в [1]:

$$\max \sigma = \frac{|\max M_x|}{W_x} = \frac{10200}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 12,48 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

В соответствии с эпюрой  $M_x$  (см. рисунок 3.2,в) верхние волокна поперечного сечения являются растянутыми, а нижние – сжатыми. Эпюра нормальных напряжений  $\sigma$  приведена на рисунке 3.4,б.

Максимальные касательные напряжения определим для сечения I–I (см. рисунок 3.2,б), где перерезывающая сила является максимальной:

$$\max Q_Y = |1,75qa| = 1,75 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1 = 17,5 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

В соответствии с формулой Журавского [1]

$$\max \tau = \frac{\max Q_Y S_X^*}{J_X d} = \frac{17,5 \cdot 10^3 \cdot 46,8 \cdot 10^{-6}}{572 \cdot 10^{-8} \cdot 0,49 \cdot 10^{-2}} = 2,92 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

В месте сопряжения полок со стенкой (сечения А–А на рисунке 3.4,а) касательные напряжения определяются как

$$\tau_A = \frac{\max Q_y S_x^{\Pi}}{J_x d}, \quad (3.2)$$

где  $S_x^{\Pi}$  – статический момент полки двутавра относительно оси  $x$ , который равен [1]:

$$S_x^{\Pi} = bt\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 7,3 \cdot 0,75 \frac{1}{2} (14 - 0,75) = 36,27 \text{ см}^3.$$

По формуле (3.2) получим

$$\tau_A = \frac{17,5 \cdot 10^3 \cdot 36,27 \cdot 10^{-6}}{572 \cdot 10^{-8} \cdot 0,49 \cdot 10^{-2}} = 2,26 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Эпюра касательных напряжений, построенная в пределах стенки двутавра, показана на рисунке 3.4,в.

3.1.13 Определим прогиб сечения  $K$  и угол поворота сечения  $L$  двутавровой балки (см. рисунок 3.2,а).

Для рассматриваемой балки уравнение метода начальных параметров для определения прогибов принимает вид [1]

$$EJ_x y(z) = EJ_x y_0 + EJ_x \theta_0 z + \frac{Y_A z^3}{6} - \frac{q_1 z^4}{24} + \frac{q_1 (z-a)^4}{24} \Big|_{z>a} - \frac{P_1 (z-a)^3}{6} \Big|_{z>a} + \frac{q_2 (z-a)^4}{24} \Big|_{z>a} - \frac{q_2 (z-2a)^4}{24} \Big|_{z>2a} + \frac{Y_B (z-2a)^3}{6} \Big|_{z>2a}, \quad (3.3)$$

где разделительная черта  $|z > a_i$  указывает на то, что в уравнение войдут только те нагрузки, для которых выполняется указанное неравенство  $z > a_i$ ,  $y_0$  и  $\theta_0$  – прогиб и угол поворота поперечного сечения в начале координат.

При составлении уравнения (3.3) учтено, что распределенные нагрузки  $q_1$  и  $q_2$  обрываются. Поэтому эти нагрузки была продлены до правого конца балки и добавлены соответствующие «компенсирующие» нагрузки обратного знака. Влияние этих "компенсирующих" нагрузок учитывается в уравнении (3.3) членами

$$\frac{q(z-a)^4}{24} \Big|_{z>a} \text{ и } \frac{q_2(z-2a)^4}{24} \Big|_{z>2a}.$$

Так как в начале координат (точка А на рисунке 3.2,а) установлена опора, то прогиб  $y_0 = 0$ . Угол поворота  $\theta_0$  определяется из граничного условия: при  $z = 2a$  прогиб  $y(2a) = 0$ , так как в точке В установлена опора (см. рисунок 3.2,а).

Из уравнения (3.3) получим

$$EJ_x y(2a) = EJ_x \cdot 0 + EJ_x \theta_0 \cdot 2a + \frac{0,25qa(2a)^3}{6} - \frac{q(2a)^4}{24} + \\ + \frac{q(2a-a)^4}{24} - \frac{qa(2a-a)^3}{6} + \frac{2q(2a-a)^4}{24} = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно  $\theta_0$ , получим:

$$\theta_0 = \frac{3qa^3}{16EJ_x} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^3}{16 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 1,64 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Подставляя значения начальных параметров  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 = 1,64 \cdot 10^{-3}$  в уравнение (3.3), можно вычислить прогиб в любом сечении балки с координатой  $z$ .

В сечении К при  $z = a$  прогиб равен

$$Y_K = y(a) = \theta_0 a + \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{0,25qa \cdot a^3}{6} - \frac{qa^4}{24} \right) = \\ = 1,64 \cdot 10^{-3} \cdot 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} \left( \frac{0,25 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^4}{6} - \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 1^4}{24} \right) = \\ = 1,64 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Знак плюс указывает на то, что сечение К перемещается вверх.

Для определения угла поворота  $\theta(z)$  поперечного сечения используем соотношение [1]

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz}. \quad (3.4)$$

На основании (3.4) после дифференцирования уравнения (3.3) получим уравнение для определения угла поворота

$$\begin{aligned}
 EJ_x \theta(z) = EJ_x \theta_0 + \frac{Y_A z^2}{2} - \frac{q_1 z^3}{6} + \frac{q_1 (z-a)^3}{6} \Big|_{z>a} - \frac{P_1 (z-a)^2}{2} \Big|_{z>a} + \\
 + \frac{q_2 (z-a)^3}{6} \Big|_{z>a} - \frac{q_2 (z-2a)^3}{6} \Big|_{z>2a} + \frac{Y_B (z-2a)^2}{2} \Big|_{z>2a}.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Угол поворота сечения  $L$  (см. рисунок 3.2,а) определяем по формуле (5) при  $z = 3a$

$$\begin{aligned}
 \theta_L = \theta(3a) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{0,25qa(3a)^2}{2} - \frac{q(3a)^3}{6} + \frac{q(3a-a)^3}{6} - \right. \\
 \left. - \frac{qa(3a-a)^2}{2} + \frac{2q(3a-a)^3}{6} - \frac{2q(3a-2a)^3}{6} - \frac{0,25qa(3a-2a)^2}{2} \right] = \\
 = \theta_0 - 1,58 \frac{qa^3}{EJ_x} = 1,64 \cdot 10^{-3} - 1,58 \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 1^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^8} = -1,217 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}
 \end{aligned}$$

Знак минус показывает, что сечение  $L$  поворачивается по часовой стрелке на угол  $\theta_L = -1,217 \cdot 10^{-2}$  рад.

По найденным значениям  $y_k$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_L$ , и с учетом знаков эпюры изгибающих моментов  $M_x$  (см. рисунок 3.2,в) строим приближённое положение упругой линии балки (см. рисунок 3.2,г). При этом учтено, что на участках, где  $M_x > 0$ , сжатыми должны быть верхние волокна, а на участках, где  $M_x < 0$ , сжатыми должны быть нижние волокна поперечного сечения балки.

## 3.2 Задача 5

Чугунная балка нагружена, как показано на рисунке 3.5 и имеет поперечное сечение, которое выбирается в соответствии с вариантом по рисунку 3.6.

Требуется выполнить следующие расчеты.

3.2.1 Определить положение центра тяжести поперечного сечения, положение главных центральных осей инерции, главные центральные моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ . (Все поперечные сечения имеют вертикальную ось симметрии).

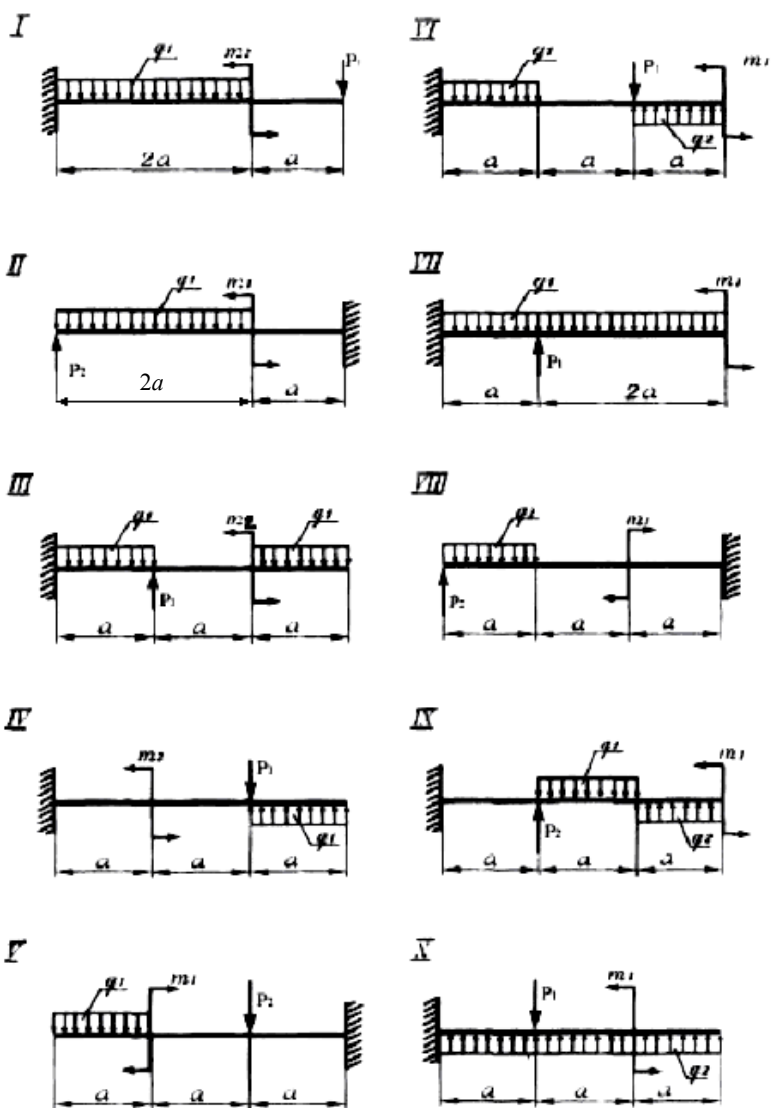


Рисунок 3.5

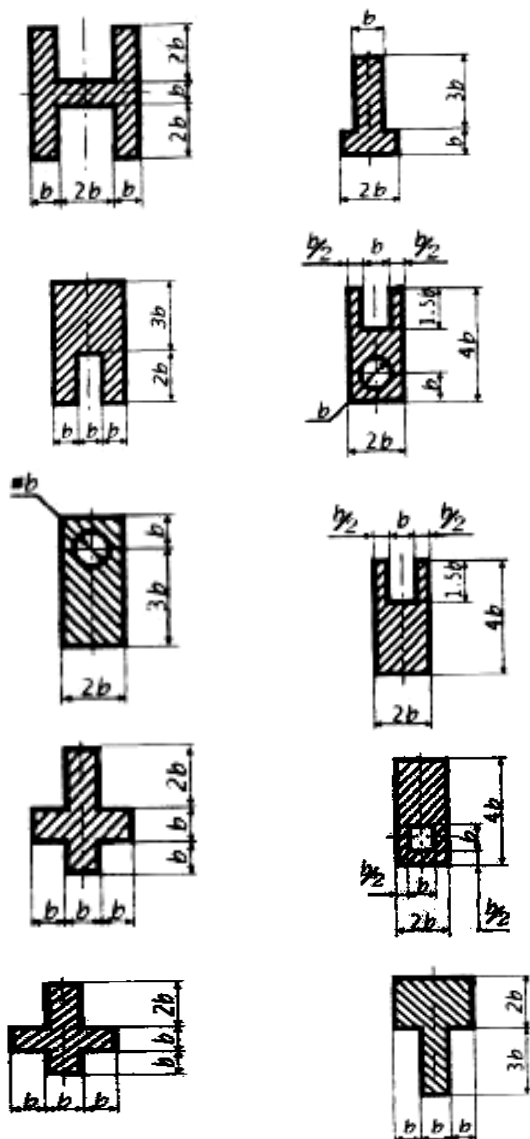


Рисунок 3.6

3.2.2 Подобрать размеры поперечного сечения из условий прочности.

3.2.3 Начертить в масштабе поперечное сечение и построить эпюры нормальных и касательных напряжений, определив их максимальные значения.

3.2.4 Проанализировать эпюру нормальных напряжений и выбрать рациональное (с точки зрения прочности) расположение поперечного сечения.

3.2.5 Исходные данные, необходимые для расчета, принять по таблице 3.1, полагая  $m = Pa = qa^2$  при  $q = 1 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ .

Коэффициент запаса прочности принять равным  $n = 2$ .

#### Пример 5.

В соответствии с условиями задачи № 5 произвести расчет на прочность чугунной балки, показанной на рисунке 3.7,а при  $q = 1 \cdot 10^4 \text{ Н/м}$ ,  $P = 2qa$ ;  $m = qa^2$ ;  $a = 1 \text{ м}$ .

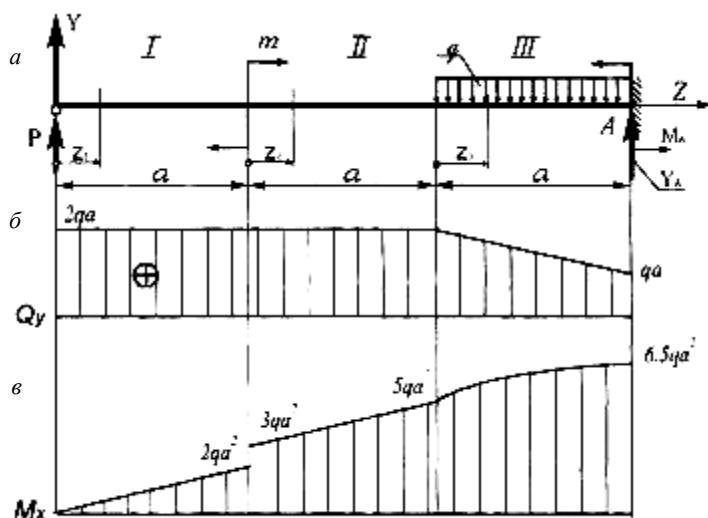


Рисунок 3.7

Материал балки – чугун СЧ 12-28;

предел прочности на растяжение  $\sigma_{B(P)} = 12 \cdot 10^7$  Па;

предел прочности на сжатие  $\sigma_{B(сж)} = 50 \cdot 10^7$  Па.

Балка имеет Т-образное поперечное сечение (рисунок 3.8).

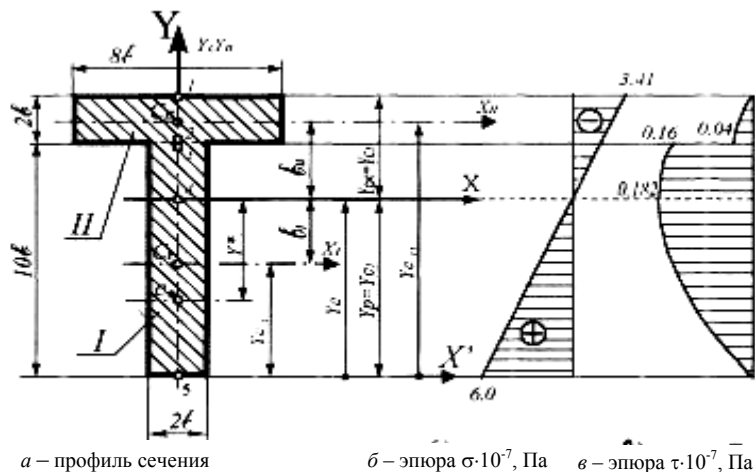


Рисунок 3.8

### Решение.

3.2.6 В жесткой заделке А возникают реакция  $Y_A$  и момент  $M_A$ . Так как балка имеет свободный конец (консольная балка), то эпюры  $Q_Y$  и  $M_x$  можно построить без определения опорных реакций  $M_A$  и  $Y_A$ , если при применении метода сечений на каждом участке рассматривать левую отсеченную часть балки, на которую действуют известные заданные внешние нагрузки.

I участок: при  $0 \leq z_1 \leq a$ .

$$Q_Y = P = 2qa;$$

$$M_x = P z_1 = 2qaz_1;$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a \quad M_x = 2qa^2.$$



II участок : при  $0 \leq z_2 \leq a$ .

$$Q_Y = P = 2qa;$$

$$M_x = P(a + z_2) + m = 2qa(a + z_2) + qa^2 = qa(3a + 2z_2);$$

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_x = 3qa^2;$$

$$\text{при } z_2 = a \quad M_x = 5qa^2.$$

III участок : при  $0 \leq z_3 \leq a$ .

$$Q_Y = P - qz_3 = 2qa - qz_3 = q(2a - z_3);$$

$$\text{при } z_3 = 0 \quad Q_Y = 2qa;$$

$$\text{при } z_3 = a \quad Q_Y = qa.$$

$$M_x = P(2a + z_3) + m - qz_3 \frac{z_3}{2} = 2qa(2a + z_3) + qa^2 - \frac{1}{2} qz_3^2 =$$

$$= q(5a^2 + 2az_3 - 0,5z_3^2);$$

$$\text{при } z_3 = 0 \quad M_x = 5qa^2;$$

$$\text{при } z_3 = a \quad M_x = 6,5qa^2.$$

По найденным значениям строим эпюры  $Q_Y$  (см. рисунок 3.7,б) и  $M_x$  (см. рисунок 3.7,в).

Из анализа эпюры  $M_x$  следует, что наиболее нагруженным является сечение А–А в заделке, где изгибающий момент достигает своего максимального значения:

$$\max M_x = 6,5qa^2 = 6,5 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^2 = 6500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

3.2.7 Для выполнения проектировочного расчета необходимо вычислить геометрические характеристики заданного поперечного сечения балки (см. рисунок 3.8,в).

Так как сечение является симметричным, то вертикальная ось симметрии  $Y$  является главной центральной. Разобьем сечение на два прямоугольника I и II, введем вспомогательную ось  $X_1$  по нижней грани сечения (см. рисунок 3.8,а) и определим положение центра тяжести всего сечения по формуле

$$Y_C = \frac{S_X}{F} = \frac{F_I Y_{C_I} + F_{II} Y_{C_{II}}}{F_I + F_{II}}, \quad (3.6)$$

где  $F_I$ ,  $F_{II}$  – площади прямоугольников I и II, а  $Y_{C_I}$ ,  $Y_{C_{II}}$  – координаты их центров тяжести  $C_I$  и  $C_{II}$  относительно оси  $X_1$ .

В соответствии с (I) получим координату центра тяжести всего сечения

$$Y_c = \frac{(2b \cdot 10b)5b + (2b \cdot 8b)11b}{2b \cdot 10b + 2b \cdot 8b} = 7,67b.$$

Ось  $X$  является второй главной центральной осью всего сечения. На рисунке 3.8,а показаны также главные центральные оси  $X_I Y_{CI}$  и  $X_{II} Y_{CII}$  отдельно для I и II прямоугольников, составляющих поперечное сечение.

Осевой момент инерции относительно оси  $X$

$$J_x = J_x^I + J_x^{II}, \quad (3.7)$$

где  $J_x^I = J_{xI}^I + b_I^2 F_I$ ,  $J_x^{II} = J_{xII}^{II} + b_{II}^2 F_{II}$  – моменты инерции I и II прямоугольников относительно оси  $X$ ;  $J_{xI}^I, J_{xII}^{II}$  – моменты инерции каждого прямоугольника относительно его главной центральной оси  $X_I$  и  $X_{II}$  соответственно:

$$b_I = Y_c - Y_{CI} = 7,67b - 5b = 2,67b;$$

$$b_{II} = Y_{CII} - Y_c = 11b - 7,67b = 3,33b.$$

Используя формулу для вычисления осевого момента инерции для прямоугольника [1], по формуле (3.7) получим

$$J_x = \frac{2b(10b)^3}{12} + (2,67b)^2 (2b \cdot 10b) + \frac{8b(2b)^3}{12} + (3,33b)^2 (8b \cdot 2b) = 492b^4.$$

Статический момент площади полки относительно оси  $X$

$$S_x^I = F_{II} b_{II} = (8b \cdot 2b) 3,33b = 53,3b^3.$$

Статический момент части площади сечения, расположенной ниже оси  $X$

$$S_x^{*} = F \cdot Y_c = (Y_c \cdot 2b) \frac{1}{2} Y_c = (7,67b \cdot 2b) \frac{1}{2} \cdot 7,67b = 58,8b^3,$$

где  $S_x^{*}$  – площадь рассматриваемой части сечения,

$$Y_c = \frac{1}{2} Y_c - \text{координата ее центра тяжести } C^* \text{ (см. рисунок 3.8,а)}.$$

3.2.8 Выполним проектировочный расчет. Из рассмотрения эпюры  $M_x$  в наиболее нагруженном сечении А–А следует, что  $\max M_x = 65000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ; верхние волокна сжаты, а нижние – растянуты.

Таким образом, в верхних волокнах, расположенных на расстоянии  $Y_{сж} = b_{II} + b = 3,33b + b = 4,33b$  от оси  $X$ , достигаются максимальные сжимающие напряжения, а в нижних волокнах, расположенных на расстоянии  $Y_p = Y_c = 7,67b$ , достигаются максимальные растягивающие напряжения (см. рисунок 3.8,a).

Для хрупкого материала записываются два условия прочности:

$$\text{на растяжение } \max \sigma_{(p)} = \frac{|\max M_x|}{J_x} \cdot Y_p \leq [\sigma_p]; \quad (3.8)$$

$$\text{на сжатие } \max \sigma_{сж} = \frac{|\max M_x|}{J_x} \cdot Y_{сж} \leq [\sigma_{сж}], \quad (3.9)$$

где допускаемые напряжения

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{B(p)}}{n} = \frac{12 \cdot 10^7}{2} = 6 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$[\sigma_{сж}] = \frac{\sigma_{B(сж)}}{n} = \frac{50 \cdot 10^7}{2} = 25 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Рассмотрим условие прочности на растяжение (3.8):

$$\frac{\max M_x}{492b^4} 7,67b \leq [\sigma_p],$$

откуда следует, что

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{7,67 \max M_x}{492 [\sigma_p]}} = \sqrt[3]{\frac{7,67 \cdot 65000}{492 \cdot 6 \cdot 10^7}} = 2,56 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,56 \text{ см}.$$

Из условия прочности на сжатие получим

$$\frac{\max M_x}{492b^4} \cdot 4,33b \leq [\sigma_{сж}];$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{4,33 \max M_x}{492 [\sigma_{сж}]}} = \sqrt[3]{\frac{4,33 \cdot 65000}{492 \cdot 25 \cdot 10^7}} = 1,32 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,32 \text{ см}.$$

Из двух полученных характерных размеров поперечного сечения  $b$  выбираем наибольший, т. е. окончательно принимаем  $b = 2,56 \text{ см}$ . Геометрические характеристики сечения:

$$\begin{aligned}
J_x &= 492 \cdot 2,56^4 = 21131 \text{ см}^4; \\
S_x^n &= 53,3b^3 = 53,3 \cdot 2,56^3 = 894,2 \text{ см}^3; \\
S_x^* &= 58,8 \cdot b^3 = 58,8 \cdot 2,56^3 = 986,5 \text{ см}^3; \\
Y_p^* &= 7,67 \cdot 2,56 = 19,64 \text{ см}; \\
Y_{сж}^* &= 4,33 \cdot 2,56 = 11,08 \text{ см}.
\end{aligned}$$

3.2.9 Для построения эпюр нормальных напряжений вычислим:

– максимальные растягивающие напряжения

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x}{J_x} Y_p = \frac{65000}{21131 \cdot 10^{-8}} \cdot 19,64 \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

– максимальные сжимающие напряжения

$$\max \sigma_{сж} = \frac{\max M_x}{J_x} Y_{сж} = \frac{65000}{21131 \cdot 10^{-8}} \cdot 11,08 \cdot 10^{-2} = 3,41 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рисунке 3.8,б.

3.2.10 Для построения эпюры касательных напряжений вычислим:

– касательные напряжения в верхних и нижних волокнах (уровни 1 и 5-го сечений)  $\tau_1 = \tau_5 = 0$ ;

– касательные напряжения в месте соединения полки со стенкой (уровни 2 и 3) вычисляются по формуле Журавского [1]:

$$\tau = \frac{\max Q_Y S_x(Y)}{J_x b(Y)}, \quad (3.10)$$

где  $S_x(Y)$  – статический момент площади, лежащей выше (или ниже) рассматриваемого уровня;  $b(Y)$  – ширина сечения на рассматриваемом уровне поперечного сечения,

$$\max Q_Y = 2qa = 2 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1 = 20 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

$$\tau_2 = \frac{\max Q_Y \cdot S_x^n}{J_x \cdot 8b} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 894,2 \cdot 10^{-6}}{21131 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 2,56 \cdot 10^{-2}} = 0,04 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$\tau_3 = \frac{\max Q_Y \cdot S_x^*}{J_x \cdot 2b} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 986,2 \cdot 10^{-6}}{21131 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 2,56 \cdot 10^{-2}} = 0,16 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Максимальные касательные напряжения на уровне 4, совпадающем с главной центральной осью  $X$ :

$$\max \tau = \frac{\max Q_y \cdot S_x^*}{J_x \cdot 2b} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 986,5 \cdot 10^{-6}}{21131 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 2,56 \cdot 10^{-2}} = 0,182 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Эпюра касательных напряжений показана на рисунке 3.8,в.

3.2.11 Проанализируем эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  (см. рисунок 3.8,б) при заданном расположении поперечного сечения. Из эпюры следует, что верхние сжатые волокна сечения являются существенно недогруженными. Это объясняется тем, что хрупкий материал лучше работает на сжатие, чем на растяжение ( $[\sigma_{сж}] > [\sigma_p]$ ), а при заданном расположении сечения оказалось, что  $\max \sigma_{сж} < \max \sigma_p$ , так как  $Y_{сж} < Y_p$ . Таким образом, заданный вариант расположения сечения, очевидно, следует считать нерациональным.

Для рационального расположения поперечного сечения необходимо обеспечить выполнение условия  $Y_{сж} > Y_p$ , при котором в наиболее удаленных от оси  $X$  волокнах будут возникать максимальные сжимающие напряжения. Для этого поперечное сечение, показанное на рисунке 3.8,а, необходимо повернуть на  $180^\circ$ . При этом  $Y_{сж} = 7,67b$ ;  $Y_p = 4,33b$ .

Запишем условие прочности (3.8) и (3.9) для такого перевернутого положения сечения:

$$\max \sigma_{(p)} = \frac{|\max M_x|}{492b^4} \cdot 4,33b \leq [\sigma_p],$$

откуда следует, что

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{4,33 \cdot 65000}{492 \cdot 6 \cdot 10^7}} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,1 \text{ см};$$

$$\max \sigma_{(сж)} = \frac{|\max M_x|}{492b^4} \cdot 7,67b \leq [\sigma_{сж}],$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{7,67 \cdot 65000}{492 \cdot 25 \cdot 10^7}} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,6 \text{ см}.$$

Для перевернутого положения сечения окончательно следует принять  $b = 2,1$  см. Геометрические характеристики в этом случае будут равны:  $J_x = 9569 \text{ см}^4$ ;  $Y_p = 9,1 \text{ см}$ ;  $Y_{сж} = 16,1 \text{ см}$ .

Максимальные сжимающие и растягивающие нормальные напряжения будут равны

$$\max \sigma_p = \frac{65000}{9569 \cdot 10^{-8}} \cdot 9,1 \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$\max \sigma_{сж} = \frac{65000}{9569 \cdot 10^{-8}} \cdot 16,1 \cdot 10^{-2} = 10,9 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Эпюра нормальных напряжений для перевернутого положения поперечного сечения показана на рисунке 3.9.

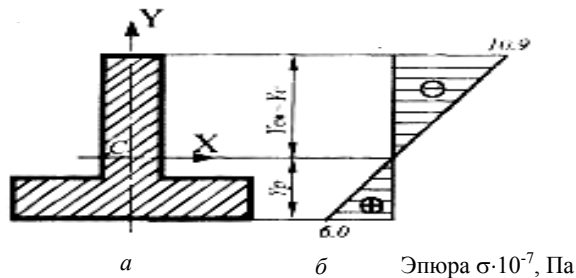


Рисунок 3.9

Из эпюры следует, что в этом случае происходит догрузка сжатой части сечения.

Кроме того, при таком расположении сечения уменьшается погонный вес балки, который определяется площадью поперечного сечения.

Если поперечное сечение расположено, как показано на рисунке 3.8, то  $F = 2b \cdot 10b + 2b \cdot 8b = 36b^2 = 36 \cdot 2,56^2 = 232,3 \text{ см}^2$ . При рациональном расположении поперечного сечения (см. рисунок 3.9)

$$F_{\text{рац}} = 36b^2 = 36 \cdot 2,1^2 = 158,8 \text{ см}^2.$$

Таким образом, погонный вес балки уменьшается в  $F/F_{\text{рац}} = 232,3/158,8 = 1,46$  раза, т. е. на 46%.

## 4 Расчет статически неопределимых плоских упругих систем

### 4.1 Задача 6

Для изображенных на рисунке 4.1 неразрезной балки и плоской рамы выполнить проектировочный расчет, принимая: а) балку (вариант а в заданной схеме) стальной двутавровой; б) раму (вариант б в заданной схеме) стальной круглого поперечного сечения; в) плоскость действия сил совпадающей с осью наименьшей жесткости сечения.

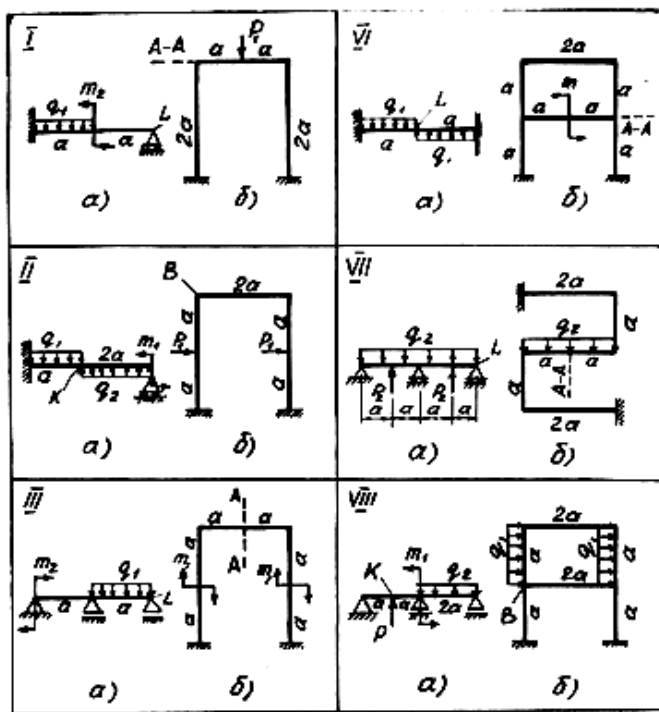


Рисунок 4.1. Начало

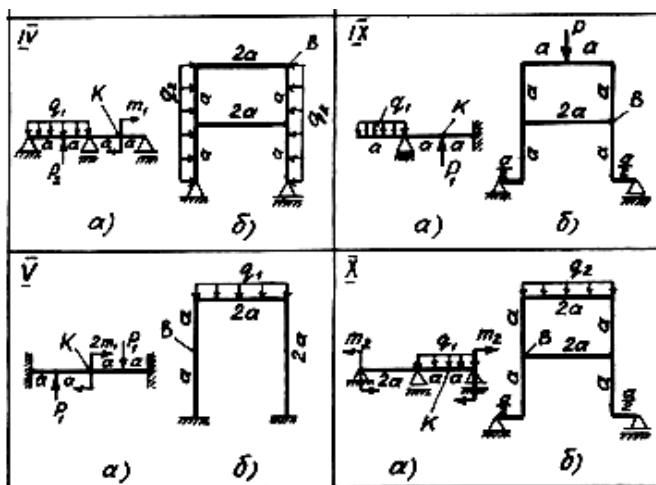


Рисунок 4.1. Окончание

Определить также прогиб сечения  $K$  или угловое перемещение сечения  $L$  балки (вариант  $a$ ) и линейное перемещение по направлению А–А или угловое перемещение сечения  $B$  рамы (вариант  $b$ ).

Расчеты при вычислении поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  для балки и изгибающего момента  $M_x$  для плоской рамы, а также определение перемещений выполнить в аналитических выражениях и лишь в расчетные формулы или окончательные выражения подставить необходимые числовые данные, находя числовые значения искомых величин.

Для балок и рам, как и в предыдущих задачах, принять:  $m = Pa = qa^2$ ; причем  $q = 10^4$  Н/м;  $a = 1$  м; запас прочности  $n = 1,5$ ; модуль упругости первого рода  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Остальные данные, необходимые для решения задачи, выбрать по таблице 4.1.



Таблица 4.1

Номер строки	Схема по рис. 4.1	$m_1$	$m_2$	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	Марка материала
1	I	$m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$	Сталь 20
2	II	$2m$	$m$	$P$	$P$	$q$	$2q$	Сталь 40X
3	III	$m$	$2m$	$2P$	$2P$	$q$	$2q$	Сталь 30
4	IV	$2m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$	Сталь 40X
5	V	$m$	$m$	$2P$	$P$	$2q$	$q$	Сталь 40
6	VI	$m$	$m$	$P$	$P$	$2q$	$q$	Сталь 20
7	VII	$2m$	$m$	$P$	$2P$	$2q$	$q$	Сталь 50
8	VIII	$m$	$2m$	$P$	$P$	$q$	$q$	Сталь 40
9	IX	$m$	$m$	$2P$	$P$	$q$	$q$	Сталь 30
10	X	$2m$	$m$	$P$	$P$	$2q$	$q$	Сталь 40X
Буква шифра	а	б	е			г		в

Порядок выполнения работы аналогичен решению примеров 6 и 7.

### Пример 6

Для неразрезной двутавровой балки (рисунок 4.2) выполнить проектировочный расчет, если дано  $m = Pa = qa^2$ ;  $q = 2 \cdot 10^4$  Н/м;  $a = 1,6$  м; запас прочности  $n_T = 1,5$ ; модуль упругости первого рода  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па; предел текучести при растяжении и сжатии  $\sigma_{TP} = \sigma_{TC} = 48 \cdot 10^7$  Па.

4.1.1 Определим степень статической неопределимости балки ( $n$ ). На балку наложены  $x = 4$  связи; система плоская, следовательно, можно составить только  $N = 3$  уравнения равновесия; система один раз статически неопределима ( $n = x - N = 4 - 3 = 1$ ).



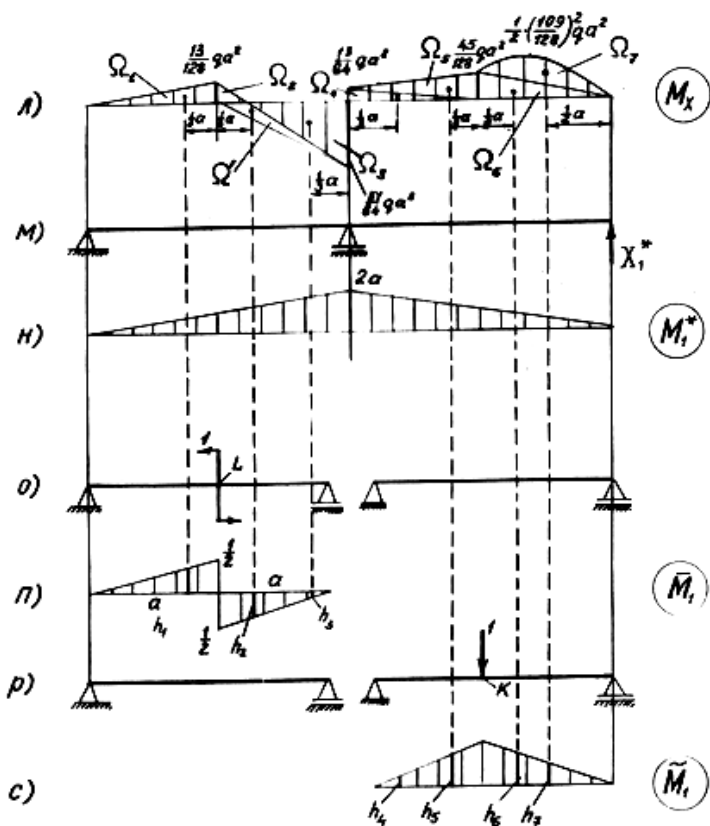


Рисунок 4.2.Окончание

4.1.2 Образует основную систему, которая получается из исходной путем отбрасывания лишних связей с точки зрения равновесия. Причем основная система должна обеспечить кинематическую неизменяемость системы, с одной стороны, и статическую определимость во всех узлах, с другой. Основная система всегда должна быть статически определимой. В данном примере принимаем основную систему, которая получается путем врезания на опоре "В" шарнира и приложенным моментом  $X_1$ , заменяющим отброшенную связь между соседними пролетами (см. рисунок 4.2,б).

4.1.3 Строим для основной системы эпюру изгибающего момента ( $M_p$ ) от действия внешних сил, для чего вначале определяем реакции в опорах для левой и правой частей балки (см. рисунок 4.2, в, д), а затем по известной методике строим эпюру  $M_p$  (см. рисунок 4.2, з, е).

4.1.4 Строим в основной системе эпюры изгибающего момента от единичных моментов по направлению лишнего неизвестного  $X_i$  (см. рисунок 4.2, з).

4.1.5 Напишем систему канонических уравнений метода сил. Она имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_k + \delta_{ip} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.1)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение по направлению  $i$ -го силового фактора под действием единичного фактора  $X_k = 1$ ;

$\delta_{ip}$  – перемещение по направлению  $i$ -го силового фактора под действием внешних сил;

$n$  – степень статической неопределимости.

Если система один раз статически неопределима, как это имеет место в нашей задаче, то каноническое уравнение (4.1) имеет вид:

4.1.6 Определим  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{11}$ , используя способ Верещагина

$$\delta_{nk} = \sum_{j=1}^m \frac{\Omega_j h_j}{(EI_x)_j}, \quad (4.3)$$

где  $\Omega_j$  – площадь  $j$ -го участка криволинейной эпюры;

$h_j$  – ордината прямолинейной эпюры  $j$ -го участка, лежащая под центром тяжести криволинейной эпюры;

$(EI_x)_j$  – жесткость на изгиб  $j$ -го участка;

$m$  – число участков.

Если криволинейная и прямолинейная эпюры лежат по одну сторону от оси эпюры на  $j$ -м участке, то перед  $j$ -м слагаемым в

данной формуле ставится знак “+” и наоборот, если по разные, то ставится знак “-”.

Если на данном участке ни одна из перемножаемых эпюр не является прямолинейной, но одна из них или обе ограничены ломаными прямыми линиями, то в этих случаях предварительно разбивают эпюры на такие участки, в пределах каждого из которых, по крайней мере, одна эпюра прямолинейна.

Если на данном участке эпюра имеет сложный вид, то она разбивается на элементарные фигуры: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и т. д., для которых величина площади  $\Omega_j$  и положение центра тяжести известны, и производится “перемножение” элементарных фигур (таблица 4.2).

Определяем  $\delta_{1p}$  как произведение площадей эпюр  $z$  и  $e$  на ординаты, взятые с эпюр  $z$  каждый раз под центром тяжести эпюр  $z$  и  $e$ :

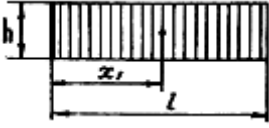
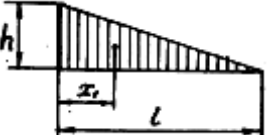

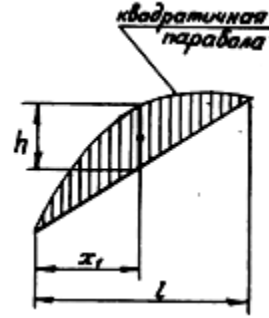
$$\begin{aligned}\delta_{1p} &= \frac{1}{EI_x} (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_3 h_3 + \Omega_4 h_4) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[ \left( -\frac{1}{2} qa^2 \right) \frac{5}{6} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 \right) \frac{2}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 \right) \frac{1}{3} a + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \right) \frac{1}{4} a \right] = \\ &= -\frac{13}{48} \cdot \frac{qa^3}{EI_x}.\end{aligned}$$

Найдем  $\delta_{11}$ , перемножая эпюру  $M_1$  саму на себя, т. е. берем составляющие площади эпюры  $z$  и умножаем на ординаты, проходящие через центр тяжести площадей той же эпюры  $z$ :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \right) \frac{2}{3} \right] \cdot 2 = \frac{4a}{3EI_x}.$$

Здесь учтено, что единичная эпюра  $M_1$  (см. рисунок 4.2,з) является симметричной, поэтому перемножение выполнено на одном участке, а результат удваивается.

Таблица 4.2

Геометрическая фигура (эпюра изгибающего момента)	Площадь $\Omega$	Координата центра тяжести, $X_1$	Примечание
	$hl$	$\frac{1}{2}l$	
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$	
	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{1}{4}l$	$h = \frac{1}{2}ql^2$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$	$h = \frac{1}{8}ql^2$

Здесь  $q$  – интенсивность распределенной внешней нагрузки на участке длины  $l$

4.1.7 Решая каноническое уравнение (4.2), находим

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{13}{64}qa^2.$$

Знак “+” указывает на то, что направление  $X_1$  первоначально выбрано правильно.

4.1.8 Строим эпюры  $Q_Y$  и  $M_x$  известными приемами отдельно для левого и правого пролетов и сочленяем соответствующие эпюры обоих пролетов (см. рисунок 4.2,к,л), предварительно определив реакции в опорах (см. рисунок 4.2,и). При построении эпюры  $M_x$  целесообразно использовать принцип суперпозиций

$$M_x = M_p + M_1 X_1 + \dots + M_n X_n, \quad (4.4)$$

где  $M_p$  – эпюра изгибающего момента от действия внешних сил, показанная на рисунке 4.2,е);

$M_i$  – эпюра изгибающего момента от действия единичной силы в направлении неизвестной  $X_i$  (в нашем случае эпюра, показанная на рисунке 4.2,в);

$X_i$  – значение  $i$ -го лишнего неизвестного.

4.1.9 Делаем деформационную проверку, которая заключается в определении перемещений в заданной системе, значения которых известны и равны нулю. Для этого выбираем новую основную систему с новыми лишними неизвестными  $X_k^*$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) и вычисляем перемещения  $\Delta_k^*$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) в направлении каждой  $X_k^*$ -й неизвестной, например по формуле Верещагина

$$\Delta_k^* = \sum_{j=1}^m \frac{\Omega_j h_{kj}^*}{(EI_x)_j}, \quad (4.5)$$

где  $\Delta_k^*$  – перемещение в новой основной системе в направлении лишней неизвестной  $X_k^*$ ;

$\Omega_j$  – площадь  $j$ -го участка эпюры результирующего изгибающего момента, полученного в результате раскрытия статической неопределимости системы;

$h_{kj}^*$  – ордината эпюры изгибающего момента от единичной силы;

$X_k^* = 1$  в новой основной системе, лежащая под центром тяжести эпюры результирующего изгибающего момента.

В направлении новых лишних неизвестных перемещения должны быть равны нулю, следовательно, если

$$\Delta_k^* = 0,$$

то деформационная проверка выполняется и результирующая эпюра построена верно.

В нашем примере за новую основную систему принимаем систему, получающуюся из исходной путем отбрасывания правой опоры  $C$ . В качестве новой лишней неизвестной принимается реакция опоры  $C$  (см. рисунок 4.2,м).

На рисунке 4.2,м показана эпюра изгибающего момента от единичной силы по направлению лишнего неизвестного  $X_1^*$ .

Как было уже сказано, эпюра результирующего изгибающего момента  $M_x$  может быть определена по принципу суперпозиций (4.4). Поэтому при проведении деформационной проверки целесообразно производить вначале перемножение эпюры  $M_p$  на эпюру изгибающего момента от единичной силы по направлению лишнего неизвестного  $X_k^*$ , затем перемножение эпюр от единичных сил по направлению лишних неизвестных  $X_i$  на эпюру от единичной силы по направлению лишней неизвестной  $X_k^*$  и на величину лишней неизвестной  $X_i$  и результаты перемножения сложить.

В нашем примере будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_1^* = \frac{1}{EI_x} & \left[ \left( -\frac{1}{2} qa^2 a \right) \frac{5}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 a \right) \frac{4}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 a \right) \frac{2}{3} a + \right. \\ & \left. + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \right) \frac{1}{2} a + 2 \left( 1 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a \right) \frac{13}{64} qa^2 \right] = \frac{qa^4}{EI_x} \left[ -\frac{5}{6} + \frac{5}{6} \right] = 0. \end{aligned}$$

4.1.10 Напишем условие прочности для проектировочного расчета

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \text{ где } [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}.$$



$$[\sigma] = \frac{48 \cdot 10^7}{1,5} = 32 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{51}{64} \cdot \frac{qa^2}{[\sigma]} = \frac{51 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^2}{64 \cdot 32 \cdot 10^7} = 0,127 \cdot 10^{-3} (\text{м}^3) = 127 \text{ см}^3.$$

По сортаменту подбираем номер двутавра (№ 18), для которого [1–4]:

$$W_x = 143 \text{ см}^3.$$

4.1.11 Определим угол поворота сечения  $L$ . Для этого приложим в основной системе единичный внешний изгибающий момент в сечении  $L$  (см. рисунок 4.2,о) и построим эпюру изгибающего момента  $\overline{M}_1$  (см. рисунок 4.2,н) от действия этого момента. Поскольку эпюра  $\overline{M}_1$  имеется только на левом пролете балки, разобьем эпюру результирующего момента  $M_x$  (см. рисунок 4.2,л) на левом пролете на элементарные фигуры и перемножим эпюры  $\overline{M}_1$  и  $M_x$  по правилу Верещагина. При разбиении эпюры  $M_x$  на втором участке площадь незаштрихованного треугольника  $\Omega'$  прибавляется к площади  $\Omega_2$  и к площади  $\Omega_3$ , причем считается, что треугольник с площадью  $\Omega_2 + \Omega'$  целиком лежит выше оси эпюры. В результате получим:

$$\begin{aligned} \theta_L = \frac{1}{EI_x} (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_3 h_3) &= \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{128} qa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{128} qa^2 a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{51}{64} qa^2 a \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{256} \cdot \frac{qa^3}{EI_x}. \end{aligned}$$

Подставив в выражение  $\theta_L$  значения  $q, a, E$  и  $I_x = 1290 \text{ см}^4$  (для двутавра № 18), получим:

$$\theta_L = \frac{17 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^3}{256 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

4.1.12 Определим прогиб сечения  $K$  балки. Для этого в основной системе в сечении  $K$  приложим единичную силу в направлении искомого прогиба (см. рисунок 4.2,*p*) и построим эпюру  $\overline{M}_1$  (см. рисунок 4.2,*c*). А далее аналогично тому, как это делали при определении угла поворота сечения, разбиваем для правого пролета балки эпюру результирующего момента  $M_x$  (см. рисунок 4.2,*л*) на элементарные фигуры и перемножим эпюры  $M_x$  и  $\overline{M}_1$  по правилу Верещагина. В результате получим:

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \frac{1}{EI_x} (\Omega_4 h_4 + \Omega_5 h_5 + \Omega_6 h_6 + \Omega_7 h_7) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{64} q a^2 a \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{128} q a^2 a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{128} q a^2 a \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \frac{2}{3} \cdot \frac{q a^2}{8} a \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \right) = \frac{119 q a^4}{128 \cdot 6 EI_x}.\end{aligned}$$

Подставив в выражение  $\Delta_k$  необходимые значения, получим:

$$\Delta_k = \frac{119 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^4}{128 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 7,87 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,787 \text{ см}.$$

### Пример 6.2

Для плоской рамы (см. рисунок 4.3,*a*) выполнить проектировочный расчет. Определить линейное перемещение  $\Delta_A$  по направлению А – А и угловое перемещение  $\theta_B$  сечения  $B$ , если дано:  $q = 2 \cdot 10^4$  Н/м;  $a = 1,6$  м;  $\sigma_{\text{ТР}} = \sigma_{\text{СЖ}} = 48 \cdot 10^7$  Па;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па; запас прочности  $n_T = 1,5$ .

4.2.1 Определим степень статической неопределимости. Система трижды внутренне (имеет замкнутый контур) и трижды внешне

статически неопределима (всего статически неопределима 6 раз, так как имеет связей 9, а уравнений равновесия для плоской задачи – 3).

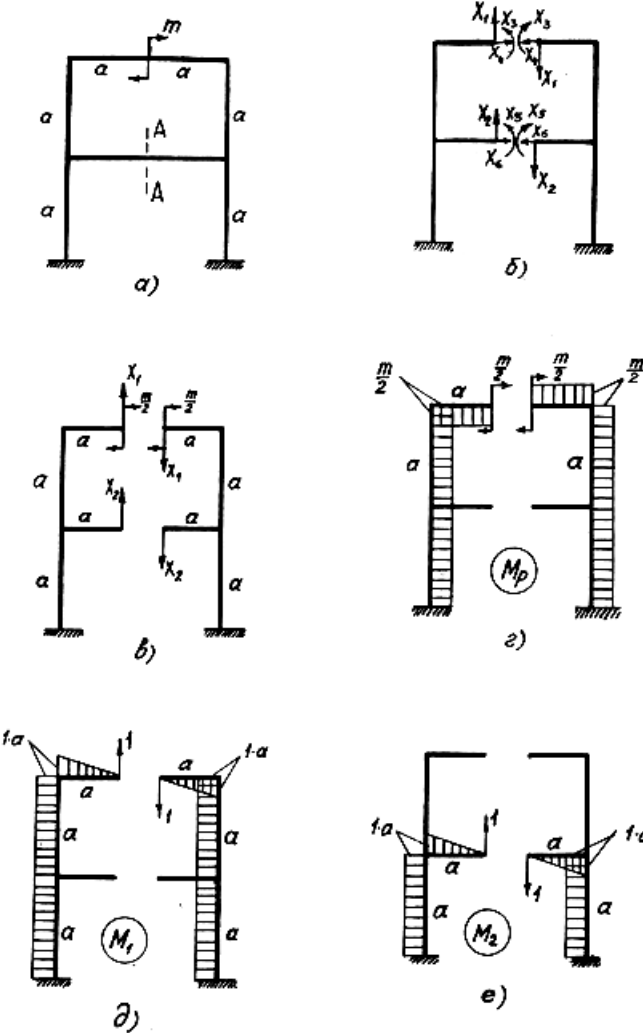


Рисунок 4.3 Начало

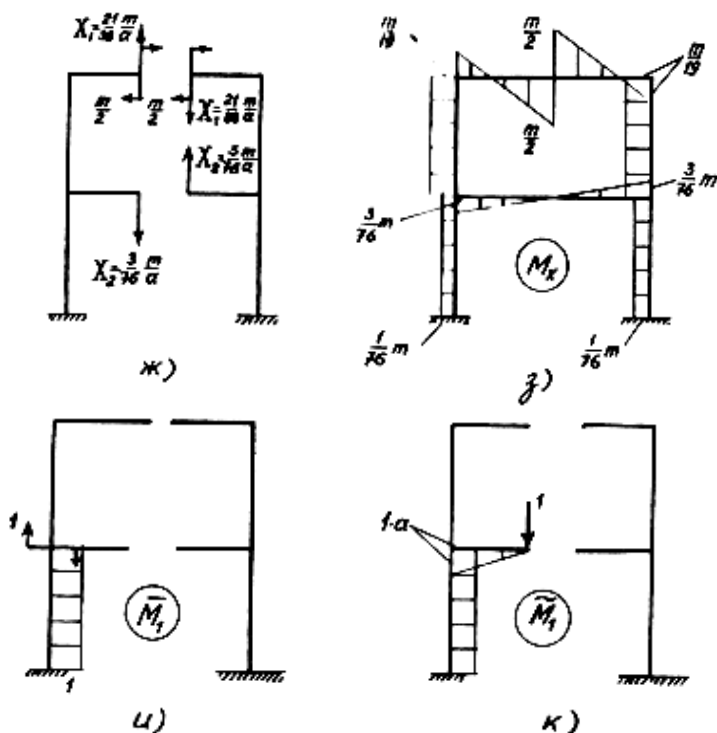


Рисунок 4.3 Окончание

4.2.2 Выберем основную систему. При выборе необходимо учитывать, что у симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные силовые факторы (перерезывающая сила), а при кососимметричной внешней нагрузке – симметричные силовые факторы (изгибающий момент и продольная сила). Учет этого позволяет уменьшить количество канонических уравнений. Наша рама является симметричной, а нагрузка – кососимметричной. Поэтому в плоскости симметрии симметричные силовые факторы будут равны нулю, и в данном

сечении возникают только поперечные силы. Таким образом, если выбрать основную систему в виде, показанном на рисунке 4.3,б, то задача сводится к решению дважды статически неопределимой системы (см. рисунок 4.3,в).

4.2.3 Система канонических уравнений метода сил (4.1) для дважды статически неопределимой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2p} &= 0\end{aligned}\quad (4.6)$$

4.2.4 Определим свободные члены  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{2p}$  и коэффициенты при неизвестных, а также сами неизвестные.

Для этого:

а) строим в основной системе эпюру от заданных внешних сил  $M_p$  (см. рисунок 4.3,з) и эпюры от единичных сил  $M_1$  и  $M_2$  по направлению усилий  $X_1$  и  $X_2$  (см. рисунок 4.3,д,е)

б) перемножаем эпюры по правилу Верещагина, определяем значения:

$$\delta_{1p} = \sum \int \frac{M_p M_1}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( -\frac{m}{2} a \frac{1}{2} a - \frac{m}{2} 2a \cdot a \right) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{ma^2}{EI_x},$$

$$\delta_{2p} = \sum \int \frac{M_p M_2}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( -\frac{m}{2} a \cdot a \right) = -\frac{ma^2}{EI_x},$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( \frac{1}{2} a \cdot a \frac{2}{3} a + 2a \cdot a \cdot a \right) = \frac{14}{3} \cdot \frac{a^3}{EI_x},$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 M_2}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( \frac{1}{2} a \cdot a \frac{2}{3} a + a \cdot a \cdot a \right) = \frac{8a^3}{3EI_x},$$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} (a \cdot a \cdot a) = \frac{2a^3}{EI_x}.$$

в) подставляем результаты в систему канонических уравнений (4.6):

$$\begin{cases} \frac{14}{3}X_1 + 2X_2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{a} = 0, \\ 2X_1 + \frac{8}{3}X_2 - \frac{m}{a} = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Решая систему уравнений (4.7), получим

$$X_1 = \frac{21}{38} \cdot \frac{m}{a}; \quad X_2 = -\frac{3}{76} \cdot \frac{m}{a}.$$

Значение  $X_2$  получаем со знаком минус. Это означает, что направление  $X_2$  выбрано неправильно. Изменяем направление вектора на противоположное. (см. рисунок 4.3,ж).

4.2.5 Используя принцип суперпозиций (4.4), построим эпюру  $M_x$  (см. рисунок 4.3,в) и определим сечение, в котором возникает наибольший изгибающий момент. Подставляя его значение в условие прочности, определим диаметр сечения  $d$  :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma],$$

где 
$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{48 \cdot 10^7}{1,5} = 32 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Момент сопротивления поперечного сечения  $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$ , а

$$M_x = \frac{m}{2} = \frac{1}{2}qa^2 \text{ (см. рисунок 4.3,з).}$$

Отсюда получим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{qa^2}{2 \cdot 0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 32 \cdot 10^7}} = 9,28 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 92,8 \text{ мм.}$$

Окончательно принимаем  $d = 94$  мм (округляем до четного числа мм). Момент инерции для полученного сечения:

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(9,4 \cdot 10^{-2})^4}{64} = 3,83 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

4.2.6 Определим угол поворота сечения  $B$ . В основной системе построим эпюру  $\overline{M}_1$  от единичного изгибающего момента (см. рисунок 4.3,у), приложенного в сечении  $B$ . Перемножим по правилу Верещагина эпюры  $M_x$  и  $\overline{M}_1$ :

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EI_x} \left( -\frac{m}{76} a \cdot 1 \right) = -\frac{qa^3}{76EI_x} = \\ &= -\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^3}{76 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,83 \cdot 10^{-6}} = -1,41 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned}$$

4.2.7 Определим перемещение по направлению А-А: в основной системе построим эпюру  $\overline{M}_1$  от единичной силы (см. рисунок 4.3,к), приложенной по направлению А-А; перемножим  $M_x$  и  $\overline{M}_1$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{76} ma \frac{2}{3} a - \frac{1}{76} m \cdot a \cdot a \right) = 0.$$

## 5 Расчет на сложное сопротивление

### 5.1 Задача 7

Стальной ломанный брус постоянного круглого поперечного сечения (показанный на рисунке 5.1) нагружен внешними силами  $P_i$ . Требуется выполнить проектировочный расчет, если дано: длина участков бруса  $a_i$ ;  $\sigma_{\text{Тр}} = \sigma_{\text{ТС}} = 42 \cdot 10^7 \text{ Па}$ ; запас прочности  $n_{\text{Т}} = 1,5$ . Остальные данные, необходимые для расчета, выбрать из таблицы 5.1. Принять  $P = 10^3 \text{ Н}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ .

Порядок выполнения контрольного задания аналогичен примеру 7.

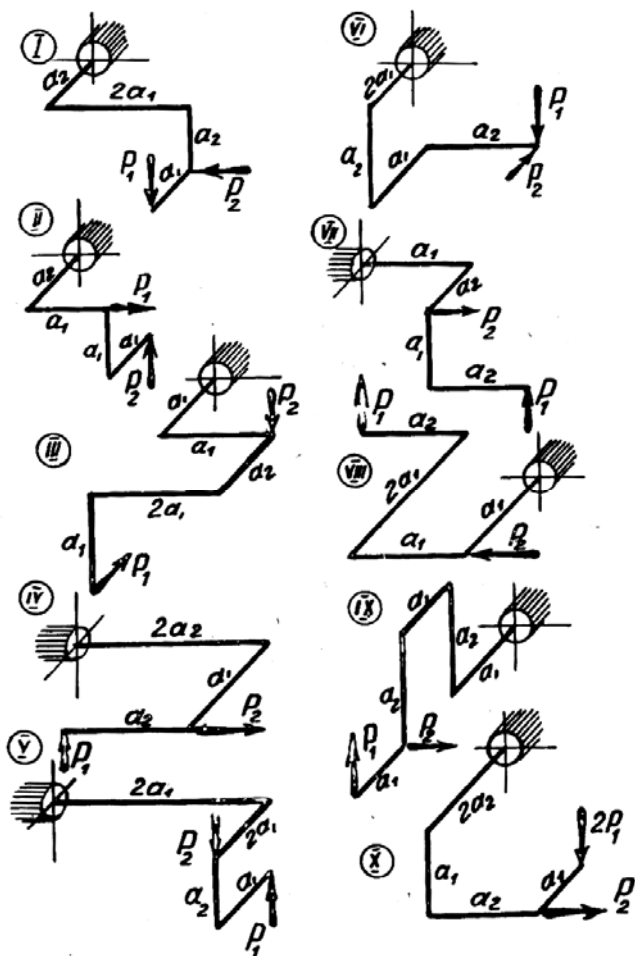


Рисунок 5.1



Таблица 5.1

Номер строки	Схема по рисунку 5.1	$P_i$		$a_i$	
		$P_1$	$P_2$	$a_1$	$a_2$
1	I	$P$	$2 P$	$a$	$a$
2	II	$2 P$	$P$	$a$	$2 a$
3	III	$2 P$	$P$	$a$	$a$
4	IV	$3 P$	$2 P$	$a$	$a$
5	V	$1,5 P$	$2 P$	$a$	$a$
6	VI	$P$	$P$	$a$	$2 a$
7	VII	$P$	$2 P$	$a$	$a$
8	VIII	$1,5 P$	$P$	$a$	$2 a$
9	IX	$P$	$P$	$a$	$a$
10	X	$2 P$	$P$	$a$	$a$
Буква шифра	а	в	г	д	е

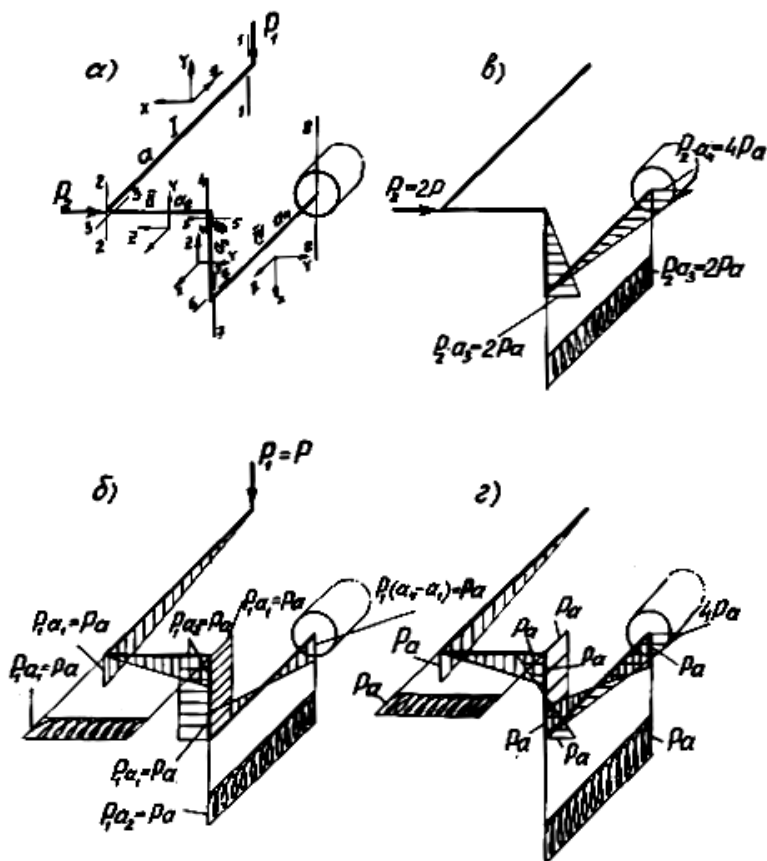
Пример 7.

Произвести проектировочный расчет ломаного бруса круглого поперечного сечения (рисунок 5.2,а), если дано  $P_1 = P$ ;  $P_2 = 2P$ ;  $P = 10^3$  Н;  $a_1 = a_2 = a_3 = 0,5a_4 = a = 1,4$  м;  $\sigma_{TP} = \sigma_{TC} = 42 \cdot 10^7$  Па, запас прочности  $n_T = 1,5$ .

Решение.

Строим эпюры внутренних силовых факторов. Ломаные брусья состоят из отдельных прямых брусев, жестко соединенных между собой под прямым углом. Для ломаного бруса строим эпюры крутящего момента  $M_{кр}$  и изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$ . При построении этих эпюр для пространственных брусев, представленных на рисунке 5.1, текущую систему координат выбирают на участке, который граничит со свободным концом рамы. При этом

ось  $z$  всегда направляют в сторону свободного конца, а оси  $x$ ,  $y$  размещают в плоскости поперечного сечения. При переходе к последующему участку производят поворот системы координат, принятой на предыдущем участке, относительно оси, которая перпендикулярна к плоскости, образуемой этими смежными участками рамы. Поворот осуществляется так, чтобы ось совпадала с осью бруса и была направлена в сторону, противоположную движению. Движение осуществляется от свободного конца бруса в сторону защемления.



Эпюры строим отдельно вначале от силы  $P_1$  (см. рисунок 5.2,б), а затем от силы  $P_2$  (см. рисунок 5.2,в). Затем построим суммарные эпюры (см. рисунок 5.2,г).

#### 5.1.1 Построение эпюр при действии на брус силы $P_1$ .

Первый участок. Ось  $y$  параллельна силе  $P_1$ , а ось  $z$  пересекает линию действия этой силы, поэтому в пределах участка изгибающий момент  $M_y$  и крутящий момент  $M_{кр}$  отсутствуют (см. рисунок 5.1,а,б). При размещении начала системы координат в первом характерном сечении 1-1 участка плечо силы  $P_1$  относительно оси  $x$  равно 0 и  $M_x = 0$ . При размещении системы координат во втором характерном сечении 2-2 можно видеть, что  $M_x = P_1 \cdot a_1 = Pa$ .

Плоскостью действия изгибающего момента  $M_x$  будет плоскость, образуемая осями  $z$  и  $y$  (сжатое волокно снизу). Учитывая это, эпюра  $M_x$  строится в плоскости  $zy$  ниже базисной линии (см. рисунок 5.2,б), т. е. со стороны сжатого волокна.

Второй участок. Если начало системы координат в первом характерном сечении 3-3, то ось  $x$  пересекает линию действия силы  $P_1$  и  $M_x = 0$ ; момент силы относительно оси  $y$  равен нулю в пределах всего участка (ось параллельна силе), а  $M_{кр} = P_1 \cdot a_1 = Pa$  во всех сечениях участка. Если начало системы координат разместить в характерном сечении 4-4, то, очевидно,  $M_x = P_1 \cdot a_1 = Pa$ , изгибающий момент действует в плоскости двух других осей ( $z, y$ ). Сжатое волокно бруса – внизу. Откладывая ординату  $M_x = Pa$  перпендикулярно оси  $z$  по линии оси  $y$ , построим эпюру изгибающего момента на втором участке бруса со стороны сжатого волокна.

Третий участок. Ось  $z$  параллельна силе  $P_1$ , поэтому в пределах участка  $M_z = 0$ . Изгибающий момент  $M_x = P_1 \cdot a_2 = Pa$  (сжатое волокно слева), момент  $M_y = P_1 \cdot a_1 = Pa$  (сжатое волокно за плоскостью чертежа). Значения  $M_x$  и  $M_y$  в пределах участка – постоянны.

Четвертый участок. Ось  $x$  параллельна силе  $P_1$ , поэтому  $M_x = 0$ . Изгибающий момент  $M_y = P_1 \cdot a_1 = Pa$  (сжатое волокно сверху). При размещении начала текущей системы координат во втором характерном сечении 8–8 участка (в защемлении) сжатое волокно будет внизу  $M_y = P_1(a_4 - a_1) = Pa$ . Крутящий момент  $M_{кр} = P_1 a_2 = Pa$  направлен против часовой стрелки (положительный), если смотреть со стороны оси  $z$ , причем по всей длине участка бруса – постоянный.

#### 5.1.2 Построение эпюр при действии силы $P_2 = 2P$ .

Изгибающих или крутящих моментов в пределах первого и второго участков (см. рисунок 5.2,в) не будет. В этом легко убедиться, пользуясь методом сечений и каждый раз рассматривая равновесие части бруса со стороны свободного конца.

Третий участок. Размещая начало текущей системы координат в характерном сечении 5–5, видим, что линия действия силы  $P_2$  совпадает с осью  $y$  и пересекает оси  $x$  и  $z$ . Поэтому  $M_x = M_y = M_{кр} = 0$ . Если начало системы координат разместить в сечении 6–6, то  $M_{кр} = M_y = 0$ , а  $M_x = P_2 a_3 = 2Pa$ . Эпюру необходимо откладывать в плоскости двух других осей (в плоскости  $zy$ ), справа от базисной линии – на сжатом волокне.

Четвертый участок. Начало системы координат разместим в сечении 7–7. В этом случае ось  $y$  параллельна силе  $P_2$  и  $M_y = 0$ . Ось  $x$  пересекает линию действия силы  $P_2$  и  $M_x = 0$ . Наконец,  $M_{кр} = P_2 a_3 = -2Pa$ . Знак минус указывает, что крутящий момент направлен по часовой стрелке, если смотреть со стороны оси  $z$  (см. рисунок 5.2,а).

Начало текущей системы координат разместим в характерном сечении 8–8. Из рассмотрения положения осей и направления силы находим:

$$M_Y = 0, \quad M_x = P_2 a_4 = 2Pa = 4Pa, \quad M_{кр} = -P_2 a_3 = -2Pa.$$

Построение эпюр  $M_{кр}$  и  $M_x$  на третьем и четвертом участках от силы  $P_2$  представлено на рисунке 5.2,в.

5.1.3 Построение эпюр при одновременном действии на брус сил  $P_1$  и  $P_2$ .

Эпюры изгибающих и крутящих моментов при одновременном действии сил  $P_1$  и  $P_2$  можно построить используя принцип суперпозиций:

а) путем алгебраического сложения эпюр изгибающих моментов, лежащих в одной и той же плоскости. Например, на третьем участке в одной и той же плоскости  $xy$  лежат изгибающие моменты  $M_x(P_1)$  и  $M_x(P_2)$ . Алгебраически суммируя ординаты этих эпюр, получим:

$$- \text{ в сечении 5–5: } M_x = M_x(P_1) + M_x(P_2) = Pa + 0 = Pa.$$

– (сжатые волокна находятся слева);

$$- \text{ в сечении 6–6: } M_x = Pa - 2Pa = -Pa$$

(сжатые волокна находятся справа от базовой линии).

Суммарная эпюра приведена на рисунке 5.2,з;

б) применяя алгебраическое сложение значений крутящих моментов в пределах участка. Например, на четвертом участке крутящий момент от силы  $P_1$  равен  $M_{кр} = Pa$ , а от силы  $P_2$  –  $M_{кр} = -2Pa$ . Следовательно, результирующий момент будет найден как алгебраическая сумма  $M_{кр} = -Pa$ .

Результирующие эпюры  $M_x, M_Y, M_{кр}$  при одновременном действии сил  $P_1$  и  $P_2$  представлены на рисунке 5.2,з.

5.1.4 Определим опасный участок и в нем опасное сечение. Из рассмотрения суммарной эпюры (см. рисунок 5.2,з) видим, что опасным будет участок IV, опасное сечение которого 8–8

(см. рисунок 5.2,а). Здесь  $M_{кр} = Pa$ ,  $M_x = 4Pa$ ,  $M_y = Pa$ . Воспользовавшись методом сечений, покажем часть бруса, величины и направления  $M_x, M_y, M_{кр}$  в опасном сечении 8–8 (см. рисунок 5.3). Направления моментов соответствуют результирующей эпюре (см. рисунок 5.2,з).

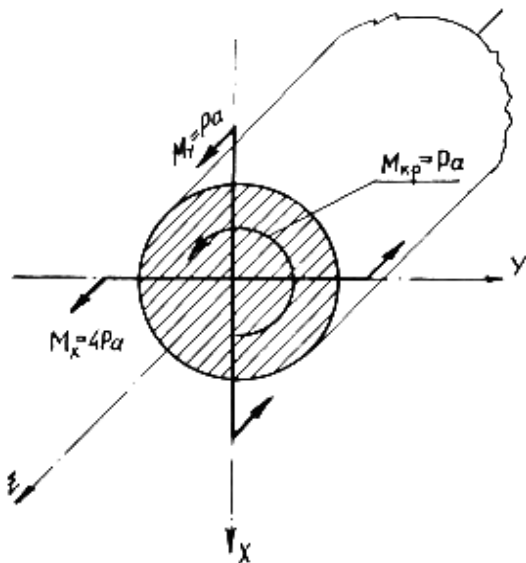


Рисунок 5.3

5.1.5 Определим необходимый диаметр поперечного сечения бруса. Воспользуемся теорией наибольших касательных напряжений (третья теория) и определим величину эквивалентного момента в опасном сечении:

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{(4Pa)^2 + (Pa)^2 + (Pa)^2} = 3\sqrt{2}Pa. \quad (5.1)$$

Условие прочности имеет вид

$$\max \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma], \quad (5.2)$$

где момент сопротивления поперечного сечения на изгиб равен

$$W_{\text{и}} = \pi d^3 / 32 \approx 0,1d^3,$$

а допускаемое напряжение

$$[\sigma] - \frac{\sigma_{\text{T}}}{n_{\text{T}}} = \frac{42 \cdot 10^7}{1,5} = 28 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Решая условие прочности (5.2) с учетом (5.1) относительно диаметра  $d$ , получим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}Pa}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot 1,4}{0,1 \cdot 28 \cdot 10^7}} = 5,96 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 59,6 \text{ мм.}$$

Округляя величину диаметра в большую сторону до четного числа миллиметров, окончательно принимаем  $d = 60 \text{ мм}$ .

**П р и м е ч а н и я : 1.** Если при расчете используется IV теория прочности (энергетическая), то эквивалентный момент определяется по формуле

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}.$$

2. Если из суммарных эпюр (см. рисунок 5.2,з) не удастся сразу установить опасное сечение, то вначале намечают возможные опасные сечения на каждом участке, а затем вычисляют в них величину  $M_{\text{ЭКВ}}$  в соответствии с принятой теорией прочности. Сечение, в котором  $M_{\text{ЭКВ}}$  принимает максимальное значение, считается опасным и в нем производится расчет на прочность.

## 6 Расчет упругих систем на устойчивость и динамическое действие нагрузок

### 6.1 Задача 8

Определить допускаемое значение силы  $[P_y]$  из расчета на устойчивость стержня. Коэффициент запаса устойчивости для стали  $n_y = 2,5$  и для чугуна  $n_y = 4$ . Опорные закрепления в обеих главных плоскостях одинаковы. Расчетные схемы и поперечные сечения стержней приведены на рисунке 6.1, основные параметры даны в таблице 6.1.



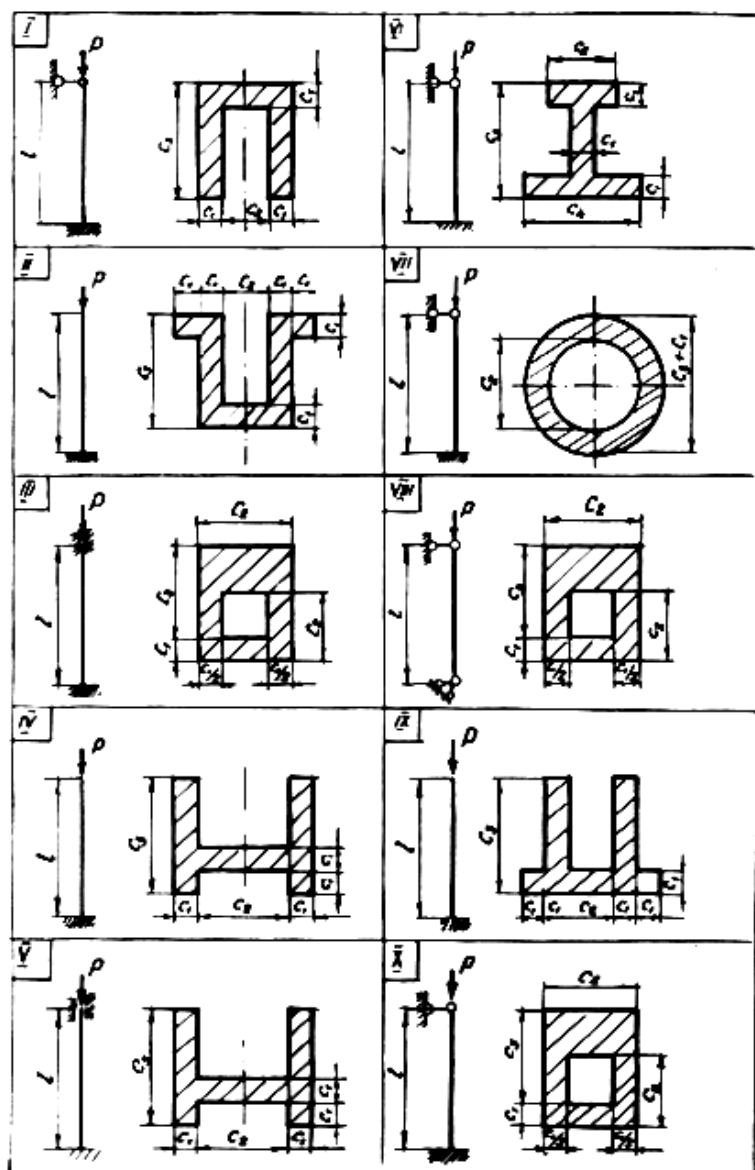


Рисунок 6.1

Таблица 6.1

Номер строки	Схема по рис. 6.1	$l$ , м	$c_1$ , мм	$c_2$ , мм	$c_3$ , мм	Материал	$E \cdot 10^{-11}$ , Па	$\sigma_{\text{нц}} \cdot 10^{-7}$ , Па	Константы Ясинского		
									$a \cdot 10^{-7}$ , Па	$b \cdot 10^{-5}$ , Па	$c \cdot 10^{-5}$ , Па
1	I	1,8	15	35	70	Сталь	2,2	20	31	11,3	0
2	II	1,9	20	45	60		2,1	21	32	12,0	0
3	III	2,2	20	50	70		1,9	23	34	13,0	0
4	IV	2,5	30	60	85		2,1	19	30	10,5	0
5	V	2,7	30	50	80		2,0	25	35	13,0	0
6	VI	3,0	25	55	90	Чугун	1,0	20	78	120	0,5
7	VII	1,7	15	50	85		1,1	20	77	125	0,51
8	VIII	2,8	25	65	75		1,0	19	70	120	0,5
9	IX	2,4	20	45	75		0,9	18	70	115	0,5
0	X	2,1	15	40	60		1,0	18	70	116	0,51
Буква шифра	а	г	д			е					

Указание. Формула Ясинского  $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$  применима, если гибкость стержня  $\lambda$  удовлетворяет условиям:

- для стали  $40 \leq \lambda < \lambda_{пред}$ ;
- для чугуна  $20 \leq \lambda < \lambda_{пред}$ ;

где  $\lambda_{пред}$  – предельная гибкость.

При  $\lambda \geq \lambda_{пред}$  применяется формула Эйлера

### Пример 8.

В соответствии с условиями задачи 8 определить допускаемое значение силы  $[P_y]$  из расчета на устойчивость стального стержня, показанного на рисунке 6.2, если известно:  $l = 1,2$  м;  $C_1 = 20$  мм;  $C_2 = 40$  мм;  $C_3 = 65$  мм;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\sigma_{пл} = 2 \cdot 10^8$  Па;  $b = 11,4 \cdot 10^5$  Па,  $c = 0$ ,  $a = 31 \cdot 10^7$  Па.

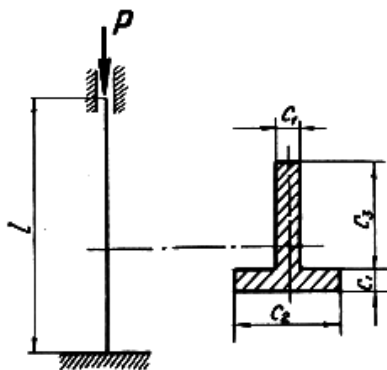


Рисунок 6.2

6.1.1 Определяем положение центра тяжести поперечного сечения. Для этого выбираем вспомогательную систему координат  $ux'$  (рисунок 6.3) где ось  $y$ , будучи осью симметрии, является главной центральной осью.

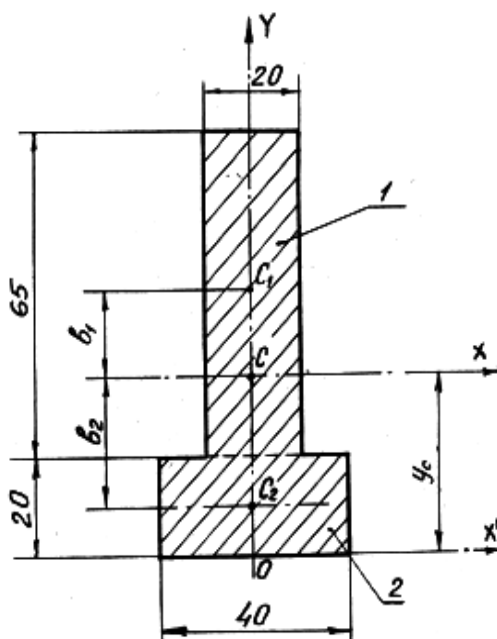


Рисунок 6.3

Для определения вертикальной координаты центра тяжести разбиваем сечение на два прямоугольника и определяем  $y_c$  по формуле

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{40 \cdot 20 \cdot 10 + 20 \cdot 65 \cdot 52,5}{40 \cdot 20 + 20 \cdot 65} = 36,3 \text{ мм};$$

где  $F_y, y_{ci}$  – площадь и координата тяжести  $i$ -й части сечения в принятой системе координат;  $n$  – число элементарных частей, на которые разбивается сечение (в данном случае  $n = 2$ ).

Вторая главная центральная ось  $x$  проходит через центр тяжести “С” всего сечения (см. рисунок 6.3).

6.1.2 Определяем моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{xi} + b_i^2 F_i), \quad (6.1)$$

где  $I_{xi}$  – момент инерции  $i$ -й части относительно своей центральной оси;  $b_i$  – расстояние между центральной осью  $i$ -й части и главной центральной осью всего сечения.

Применительно к рассматриваемому сечению (см. рисунок 6.3) получим:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x1} + b_1^2 F_1 + I_{x2} + b_2^2 F_2 = \\ &= \frac{40 \cdot 20^3}{12} + 800 \cdot 26,3^2 + \frac{20 \cdot 65^3}{12} + 16,2^2 \cdot 1300 = 13,8 \cdot 10^5 \text{ мм}^4. \end{aligned}$$

Так как ось  $y$  является главной центральной для всего сечения и для каждой его части, то второй осевой момент инерции вычисляется как

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{yi} = I_{y1} + I_{y2} = \frac{65 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Так как  $I_x > I_y$ , а условия закрепления концов одинаковы во всех плоскостях, то потеря устойчивости происходит в плоскости минимальной жесткости, т. е. в плоскости чертежа (см. рисунок 6.2) относительно оси  $y$ , а  $I_{\min} = I_y = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$ .

6.1.3 Определяем гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (6.2)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведенной длины, величина которого зависит от характера закрепления концов стержня [1,2] и в рассматри-

ваемом случае  $\mu = 0,5$ ;  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения, вычисляемый по формуле

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^4}{2100}} = 8,45 \text{ мм}^2.$$

Следовательно, гибкость равна

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1200}{8,45} = 71,0.$$

#### 6.1.4 Предельная гибкость стержня

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^8}} = 100.$$

6.1.5 Определяем величину критической силы. Так как  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , то формула Эйлера неприменима. Расчет производим по формуле Ясинского.

Величина критических напряжений

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 31 \cdot 10^7 - 11,4 \cdot 10^5 \cdot 71 = 22,9 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Критическая сила

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 22,9 \cdot 10^7 \cdot 21 \cdot 10^{-4} = 48,1 \cdot 10^4 \text{ Н} = 481 \text{ кН}.$$

(здесь  $F = 2100 \text{ мм}^2 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ).

6.1.6 Допускаемое значение сжимающей силы из расчета на устойчивость

$$[P_y] = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{481}{2,5} = 192,4 \text{ кН}.$$

## 6.2

### задача 9

На упругую систему (рисунок 6.4) с высоты  $H$  падает груз  $Q$ . Подобрать размеры поперечного сечения конструкции, изготовленной из малоуглеродистой стали, если  $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 32 \cdot 10^7$  Па,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па и запас прочности  $n = 2$ . Массу упругой системы не учитывать. Данные, необходимые для решения задачи, выбрать из таблицы 6.2. Принять  $\frac{h}{b} = 2$

Таблица 6.2

Номер строки	Схема по рис. 6.4	$Q$ , Н	$H$ , м	$a$ , м	Номер строки	Схема по рис. 6.4	$Q$ , Н	$H$ , м	$a$ , м
1	I	200	0,5	1,0	6	VI	500	0,3	1,2
2	II	400	0,4	1,2	7	VII	750	0,3	0,8
3	III	600	0,2	1,5	8	VIII	800	0,2	1,5
4	IV	800	0,4	1,0	9	IX	900	0,2	1,0
5	V	1000	0,1	0,8	10	X	100	0,5	1,0
Буква шифра	г	в	б	д	Буква шифра	г	в	б	д

### Пример 9.

В соответствии с условиями задачи 9 подобрать размеры круглого поперечного сечения балки, показанного на рисунке 6.5,а при  $Q = 2 \cdot 10^2$  Н,  $a = 2$  м,  $H = 0,2$  м.

6.2.1 Приложим к системе статическую силу, равную весу падающего груза  $Q$  (рисунок 6.5,б) и построим эпюру изгибающего момента  $M_x$  (рисунок 6.5, в).

6.2.2 По направлению движения падающего груза прикладываем к системе единичную силу (рисунок 6.5,г) и строим эпюру изгибающего момента  $M_1$  от действия единичной силы (рисунок 6.5,д).

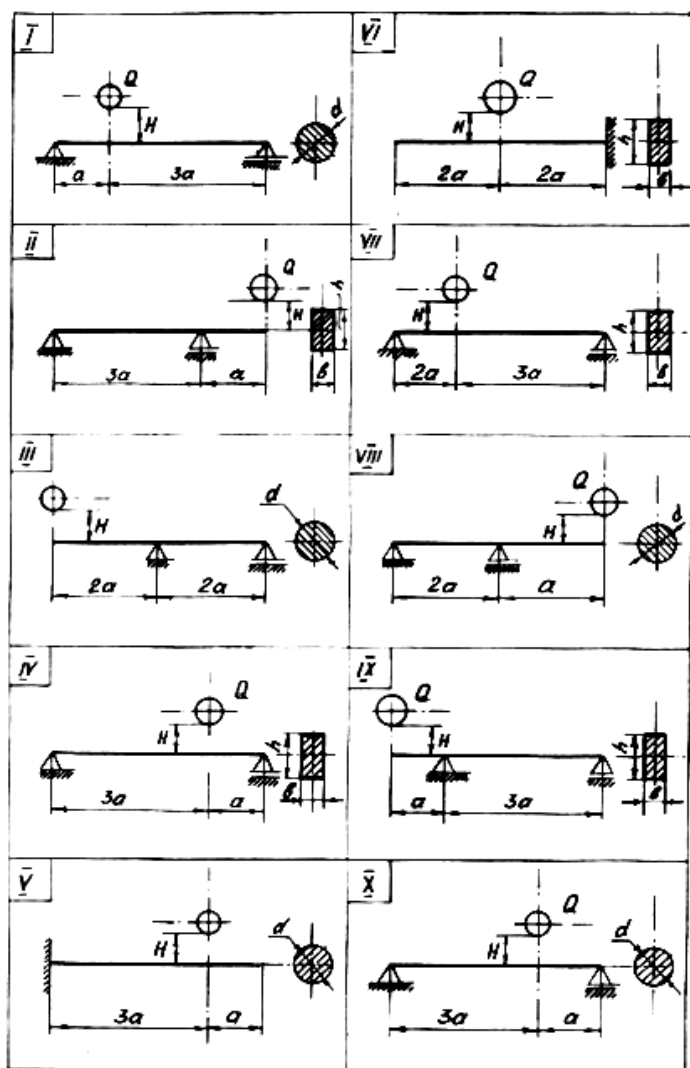


Рисунок 6.4



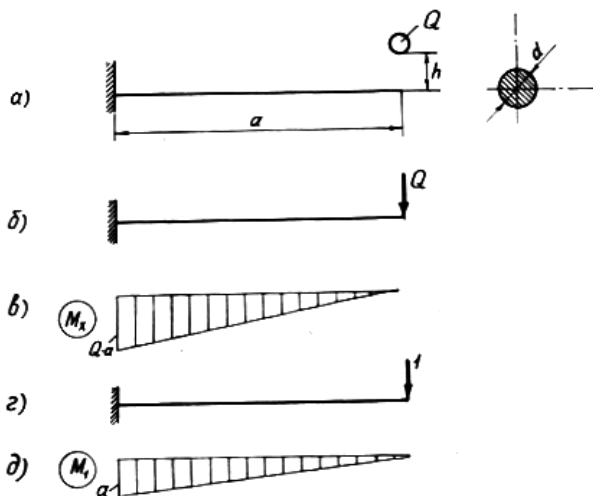


Рисунок 6.5

6.2.3 По правилу Верещагина определяем перемещение  $\Delta_{ст}$  по направлению движения падающего груза при его статическом приложении

$$\Delta_{ст} = \int \frac{M_x M_1}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} Q \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) = \frac{Qa^3}{3EI_x}. \quad (6.3)$$

Подставляя в (6.3) момент инерции поперечного сечения  $I_x = \frac{\pi d^4}{64}$ , получим

$$\Delta_{ст} = \frac{64Qa^3}{3\pi E d^4}.$$

6.2.4 Определим коэффициент динамичности по приближенной формуле

$$k_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{ст}}}. \quad (6.4)$$

Подставив найденное выражение для  $\Delta_{ст}$  в (6.4), получим

$$k_d = \frac{d}{4a} \sqrt{\frac{3\pi EH}{2Qa}}.$$

6.2.5 Обращаясь к эпюре  $M_x$  (см. рисунок 6.2, в), находим опасное сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшего значения  $\max M_x = Qa$  и определяем максимальную величину статических напряжений

$$\max \sigma_{ст} = \frac{\max M_x}{W_x} = \frac{Qa}{0,1d^3}.$$

6.2.6 Определим величину динамических напряжений в опасном сечении:

$$\max \sigma_{дин} = k_d (\max \sigma_{ст}) = \frac{d^2}{4a} \sqrt{\frac{3\pi EH}{2Qa}} \cdot \frac{Qa}{0,1d^3} = \frac{1}{0,4d} \sqrt{\frac{3\pi QE H}{2a}}.$$

(6.5)

6.2.7 Запишем условие прочности, которое с учетом (6.5) принимает вид:

$$\max \sigma_{дин} = \frac{1}{0,4d} \sqrt{\frac{3\pi QE H}{2a}} \leq [\sigma]$$

и определим из него требуемый диаметр  $d$  :

$$d \geq \frac{1}{0,4[\sigma]} \sqrt{\frac{3\pi QE H}{2a}} = \frac{1}{0,4 \cdot 16 \cdot 10^7} \sqrt{\frac{3\pi \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,2}{2 \cdot 2}} = 6,78$$

где допускаемые напряжения

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{32 \cdot 10^7}{2} = 16 \cdot 10^7 \text{ (Па)}.$$

Округляя полученное значение  $d$  в большую сторону до четного числа мм, окончательно принимаем  $d = 68\text{мм}$ .

## Список рекомендуемой литературы

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М.: Наука, 1979.  
- 540с.
2. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1976. - 608с.
3. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1974. - 704с.
4. Минин Л.С. Расчетные и тестовые задачи по сопротивлению материалов. Учебное пособие для ВТУЗов. - М.: Высшая школа, 2003. - 224с.
5. Оформление учебно-конструкторской документации. Методические указания для выполнения работ по курсовому и дипломному проектированию И.Н. Гонтарь, Н.Е. Денисова, В.А. Шорин, Н.И. Волчихина. - Пенза: Издательство Пенз.-гос. ун-та, 2003. – 88с.

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию

---

Пензенский государственный университет

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
И КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ  
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КУРСОВЫХ РАБОТ**  
(для студентов заочного факультета)



Издательство  
Пензенского государственного  
университета  
Пенза 2005



УДК 539.4

С 64

Даны методические указания и задания по сопротивлению материалов для выполнения курсовых работ студентами заочного факультета.

Методические указания подготовлены на кафедре “Надежность машин и приборов” и предназначены для студентов специальностей 151001, 151002, 150201, 150202, 150408, 190201, 190205 при выполнении курсовых работ.

Ил. 26, табл. 9, библиогр. 5 назв.

**С о с т а в и т е л и : И. Н. Гонтарь, А. Н. Литвинов, В. В. Данилов**

**П о д р е д а к ц и е й А. Н. Литвинова**

**Р е ц е н з е н т К. К. Нежданов**, доктор технических наук,  
профессор кафедры «Строительные конструкции»  
Пензенского государственного университета  
архитектуры и строительства

## Введение

Методические указания составлены с целью оказания методической помощи студентам, обучающимся на заочном факультете, при выполнении курсовых работ по сопротивлению материалов.

Темы курсовых работ и объем выполняемых заданий определяются преподавателем в зависимости от специальности, на которой обучается студент, и срока его обучения.

Перед выполнением курсовой работы необходимо изучить соответствующие разделы курса сопротивления материалов по одному из рекомендованных учебников [1–3] и учебному пособию [4].

Данные для выполнения каждой задачи выбираются из таблицы согласно шифру, который определяется по номеру зачетной книжки и буквам русского алфавита, расположенным в определенном порядке (а, б, в, г, д, е). Буква “а” соответствует последней цифре номера зачетной книжки, которая помещается в начале шифра:

– номер зачетной книжки	03	ЗТН	6124
– расположение букв	аб	вгде	
– полученный шифр	43	6124	
	аб	вгде	

Записав шифр и под каждой его цифрой соответствующую букву, из таблицы выбирают число, которое находится на пересечении соответствующих строки (буквы) и столбца (цифры). Причем вначале берется буква, а затем находится соответствующая ей цифра. Номер зачетной книжки и соответствующий ему шифр задания указываются на титульном листе курсовой работы.

Перед решением задачи необходимо записать полностью ее название, условие, вычертить расчетную схему и указать все исходные данные. На расчетной схеме должны быть указаны условными обо-

значениями все внешние нагрузки, соответствующие варианту задания.

Решение должно сопровождаться краткими, последовательными, без сокращения слов, объяснениями и чертежами, на которых все входящие в расчет величины должны быть показаны только в условных обозначениях. При использовании формул и данных, отсутствующих в рекомендуемых учебниках, необходимо кратко и точно указать источник применяемой литературы. Подстановка цифр должна выполняться полностью, без сокращений. Вычисления должны вестись с точностью до трехзначных цифр с обязательным указанием размерности полученного результата.

Порядок и последовательность решения задач приведены в примерах, помещенных после условия задачи.

Курсовая работа оформляется в соответствии с методическими указаниями [5].



# 1 Методические указания по темам курса

При самостоятельном изучении курса основным учебником считается [1]. При его отсутствии допускается пользоваться учебниками [2, 3]. По каждой теме указаны соответствующие разделы учебной литературы.

## 1.1 Основные понятия

(§ 1–7 [1]; § 1–5 [2]; § 1.1–6.1 [3])

Задачи и методы сопротивления материалов. Реальный объект и расчетная схема. Внешние и внутренние силы. Классификация внешних сил. Внутренние силы, внутренние силовые факторы. Метод сечений.

Основные гипотезы о деформируемом теле. Перемещения и деформации. Напряжение (полное, нормальное, касательное). Связь напряжений с внутренними силовыми факторами. Принцип независимости действия сил. Общие принципы расчета элементов конструкции.

## 1.2 Растяжение и сжатие

(§ 8, 9, 11–19 [1]; § 6–17 [2]; § 1.2–10.2 [3])

Внутренние силы и напряжения, возникающие в поперечных сечениях прямого стержня при растяжении и сжатии. Эпюры продольных сил. Абсолютные продольное и поперечное удлинения. Относительные продольная и поперечная деформации. Закон Гука при растяжении и сжатии. Модуль упругости. Коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона). Определение осевых перемещений поперечных сечений, Жесткость при растяжении и сжатии.

Экспериментальное изучение свойств материалов при растяжении и сжатии. Диаграмма растяжения и её характерные параметры: пределы пропорциональности, упругости, текучести, прочности. Истинная диаграмма растяжения. Закон разгрузки и повторного нагружения. Механические свойства при сжатии. Диаграмма сжатия. Пластическое и хрупкое состояние материалов, типы разрушений.

Допускаемое напряжение. Выбор коэффициента запаса прочности при статическом нагружении для хрупких и пластичных материалов. Условие прочности. Проектировочный и проверочный расчеты на прочность. Определение допускаемой нагрузки.

Статически неопределимые системы. Степень статической неопределимости. Уравнения совместности деформаций. Порядок расчета статически неопределимых систем. Особенности их расчета (подбор сечений, влияние температуры, монтажные напряжения).

Понятие о концентрации напряжений. Влияние концентрации напряжений на прочность хрупких и пластичных материалов. Принцип Сен-Венана.

### 1.3 Кручение

(§ 20, 21, 22 [1]; § 36, 45–50 [2]; § 1.4–4.4, 1.6–4.6 [3]).

Чистый сдвиг и его особенности. Касательные напряжения при сдвиге. Закон парности касательных напряжений. Угол сдвига. Закон Гука при сдвиге. Зависимость между тремя упругими постоянными для изотропного тела ( $E$ ,  $G$ ,  $\mu$ ).

Кручение прямого стержня круглого поперечного сечения. Построение эпюры крутящих моментов. Основные гипотезы теории кручения. Напряжения в поперечном сечении. Формула для максимальных касательных напряжений. Эпюра напряжений. Полярный момент инерции и момент сопротивления поперечного сечения. Угол закручивания. Эпюра углов закручивания. Жесткость стержня при кручении. Условие прочности. Условие жесткости. Расчеты на прочность и жесткость.

Расчет статически неопределимых валов. Условие совместности деформаций.

Особенности расчета на прочность стержней некруглого сечения.

## 1.4 Геометрические характеристики плоских сечений

(§ 25, 26, 27 [1]; § 65–70 [2]; § 1.5–7.5 [3])

Статические моменты площади. Осевые, полярные и центробежные моменты инерции площади. Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе и повороте осей. Определение координат центра тяжести сечения. Главные центральные оси. Главные моменты инерции. Главные центральные моменты инерции простейших поперечных сечений (прямоугольное, круглое, кольцевое). Геометрические характеристики стандартных профилей.

## 1.5 Изгиб прямых стержней

(§ 28–31, 37–39 [1]; § 55–61, 63, 64, 73–76, 82, 86, 90, 105–108 [2]; § 1.7–8.7, 11.7, 16.7, 4.11, 5.11 [3])

Опоры и опорные реакции. Понятия о поперечном, чистом и косом изгибе. Внутренние силовые факторы при поперечном изгибе ( $M_x$ ,  $Q_y$ ). Построение эпюр. Правила знаков для  $M_x$  и  $Q_y$ . Дифференциальные зависимости между  $M_x$  и  $Q_y$  и интенсивностью внешней нагрузки  $q$ . Нормальные напряжения при изгибе. Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении. Определение максимальных нормальных напряжений. Условие прочности по нормальным напряжениям. Момент сопротивления при изгибе. Расчет на прочность балок из пластичных и хрупких материалов. Касательные напряжения при поперечном изгибе (формула Д. И. Журавского). Эпюра касательных напряжений. Условие прочности по касательным напряжениям. Рациональные формы поперечных сечений балок при изгибе.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки и его интегрирование. Метод начальных параметров. Физический смысл начальных параметров и их определение при различных способах закрепления концов балки. Определение перемещений с помощью интеграла Максвелла–Мора. Способ Верещагина.

## 1.6 Статически неопределимые системы, работающие на изгиб

(§ 42–45, 47 [1]; § 109, 111, 112 [2]; § 1.12–6.12 [3])

Определение степени статической неопределимости. Основная система. Метод сил. Система канонических уравнений метода сил. Вычисление коэффициентов системы канонических уравнений. Использование условий симметрии и кососимметрии при выборе основной системы. Построение результирующих эпюр изгибающих моментов. Деформационная проверка и ее физический смысл. Определение перемещений в статически неопределимых системах (балки, плоские рамы).

## 1.7 Основы теории напряженного и деформированного состояния. Теории прочности

(§ 48–50, 52–58 [1]; § 28–30, 33–35, 37–41 [2]; § 1.3–3.3, 6.3–9.3, 1.8, 2.8 [3])

Напряженное состояние в точке. Тензор напряжений. Главные площадки и главные напряжения. Классификация напряженного состояния (линейное, плоское, объемное). Относительные деформации. Обобщенный закон Гука. Полная удельная потенциальная энергия деформации в общем случае напряженного состояния.

Понятие о теориях прочности. Теории прочности для хрупких материалов и область их применимости: первая теория (критерий наибольших напряжений), вторая теория (критерий наибольших относительных деформаций), экспериментальный критерий Мора. Теории прочности для пластичных материалов и область их применимости: третья теория (критерий наибольших касательных напряжений), четвертая теория (энергетический критерий).

## 1.8 Сложное сопротивление

(§ 33, 34 [1]; § 119–126 [2]; § 1.9–4.9, 6.9 [3])

Примеры сложного сопротивления. Общий метод расчета.

Косой изгиб. Внутренние силовые факторы. Определение нормальных напряжений. Нейтральная линия. Условие прочности. Определение перемещений при косом изгибе.

Внецентренное растяжение и сжатие. Внутренние силовые факторы. Определение нормальных напряжений. Нейтральная линия. Условие прочности. Понятие о ядре сечения.

Изгиб с кручением стержней круглого поперечного сечения. Внутренние силовые факторы. Напряженное состояние. Расчетные формулы для эквивалентных напряжений и моментов по третьей и четвертой теориям прочности. Условие прочности. Расчет на прочность.

## 1.9 Устойчивость равновесия деформируемых систем

(§ 90–92, 94, 95 [1]; § 154–160 [2]; § 1.13–4.13 [3])

Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия. Устойчивость сжатых стержней. Критическая нагрузка. Формула Эйлера при различных опорных закреплениях и пределы ее применимости. Гибкость стержня. Предельная гибкость. Понятие о потере устойчивости при напряжениях, превышающих предел пропорциональности. Формула Ф. С. Ясинского и условия ее применимости. Полная диаграмма для критических напряжений. Расчет на устойчивость по коэффициентам уменьшения допускаемых напряжений ( $\varphi$ ).

## 1.10 Динамическое действие нагрузок

(§ 113 [1]; § 164, 165, 173–175, 179, 180 [2]; § 1.14–4.14 [3])

Динамические нагрузки. Примеры их возникновения. Вычисление напряжений при равноускоренном движении. Формула для коэффициента динамичности.

Действие ударной нагрузки на упругую систему (продольный, поперечный удар). Коэффициент динамичности, его физический смысл.

Упрощенная формула для коэффициента динамичности. Расчет динамических напряжений и перемещений при ударе. Испытания на удар.

### 1.11 Расчеты за пределами упругости

(§ 77–81 [1]; § 147–150, 153 [2]; § 1.17–5.17 [3])

Упругопластический изгиб и кручение стержней. Разгрузка и остаточные напряжения. Понятие о расчете по допускаемым напряжениям. Схематизация диаграмм растяжения.

### 1.12 Заключение

Современные проблемы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость. Использование новых материалов в машиностроении и особенности их расчета. Применение ЭВМ в расчетах на прочность. Новые экспериментальные методы исследования напряжений и деформаций.

## 2 Расчет статически неопределимых систем при растяжении, сжатии и кручении

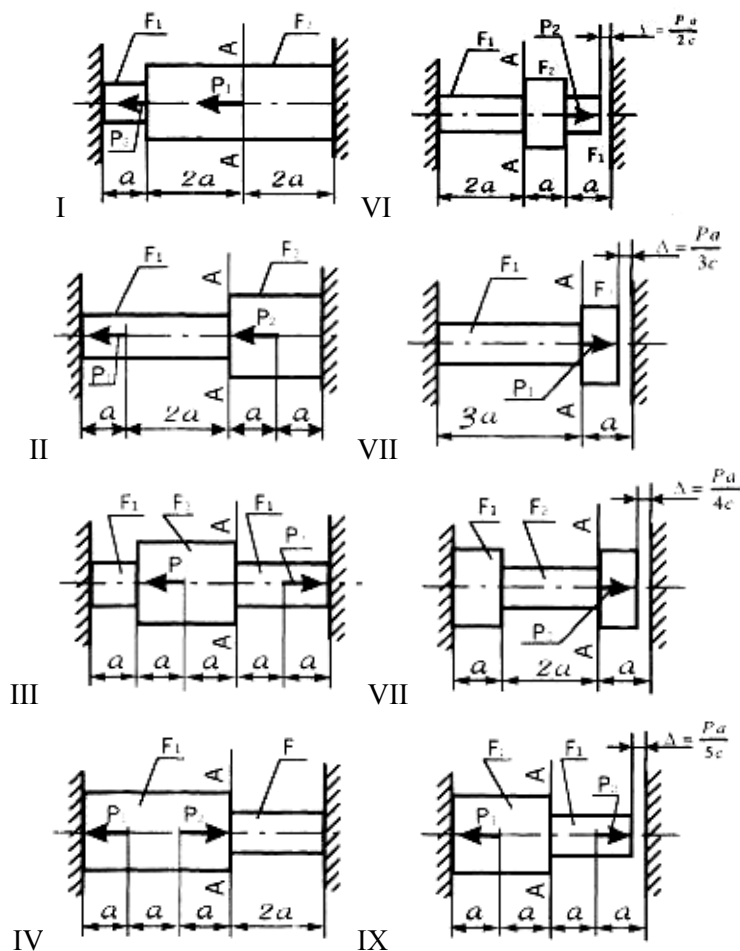
### 2.1 Задача 1

Ступенчатый брус (рисунок 2.1), участки которого имеют площади поперечных сечений  $F_i$ , нагружен продольными силами  $P_i$ . Внешние нагрузки  $P_i$ , площади поперечных сечений  $F_i$ , материал и длины отдельных участков известны.

Определить коэффициент запаса прочности бруса и вертикальное перемещение сечения А-А бруса.

При решении задачи в конечный ответ подставить значение силы  $P = 100 \cdot 10^3$  Н, площади  $F = 10 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, длины участков  $a = 0,5$  м.

Данные, необходимые для расчета, принять по таблице 2.1, полагая (см. рисунок 2.1)  $C = EF$ .



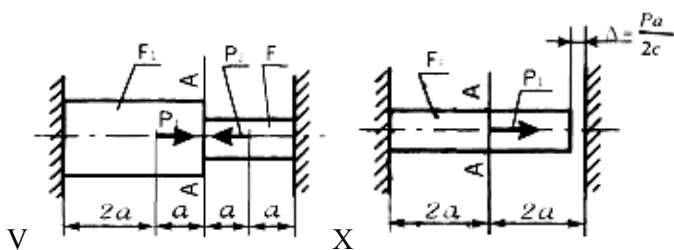


Рисунок 2.1

Таблица 2.1

Номер строки	Схемы по рисунку	$P_i$		$F_i$		Материал бруса	Предел текучести $\sigma_T$ , Па	Модуль Упругости $E$ , Па
		$P_1$	$P_2$	$F_1$	$F_2$			
1	I	$P$	$P$	$F$	$2F$	Сталь 20	$25 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
2	II	$P$	$P$	$F$	$2F$	Сталь 30	$30 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
3	III	$P$	$P$	$2F$	$F$	Сталь 40	$34 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
4	IV	$P$	$2P$	$F$	$2F$	Сталь 50	$38 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
5	V	$P$	$3P$	$F$	$2F$	Сталь 40X	$80 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
6	VI	$P$	$2P$	$2F$	$2F$	Сталь 40XH	$90 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
7	VII	$P$	$3P$	$2F$	$F$	Сталь 45	$37 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
8	VIII	$P$	$2P$	$F$	$2F$	Бронза	$11 \cdot 10^7$	$1,2 \cdot 10^{11}$
9	IX	$P$	$2P$	$2F$	$2F$	Д16	$34 \cdot 10^7$	$0,75 \cdot 10^{11}$
0	X	$2P$	$3P$	$F$	$2F$	Сталь У8	$70 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^{11}$
Буква шифра	е	в	а	д	б	г		

### Пример 1.

В соответствии с условиями задачи 1 выполним расчет бруса (рисунок 2.2,а) при  $P = 100 \cdot 10^3$  Н,  $F = 10 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $a = 0,5$  м.

Материал бруса – Сталь 30, предел текучести  $\sigma_T = 30 \cdot 10^7$  Па, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па,  $C = EF$ .

### Решение.

2.1.1 Отбросим верхнюю заделку, заменив ее действие опорной реакцией  $R_1$ . Под действием внешней силы зазор  $\Delta$  перекрывается, и



со стороны нижней опоры на брус действует реакция  $R_2$ . Схема сил показана на рисунке 2.2,б.

2.1.2 Для полученной системы составим уравнение равновесия (сумма проекций всех сил на ось  $Z$ )

$$\sum Z = R_1 - P_1 + R_2 = 0. \quad (2.1)$$

Имеем одно уравнение равновесия и два неизвестных ( $R_1$  и  $R_2$ ), т. е. система статически неопределима.

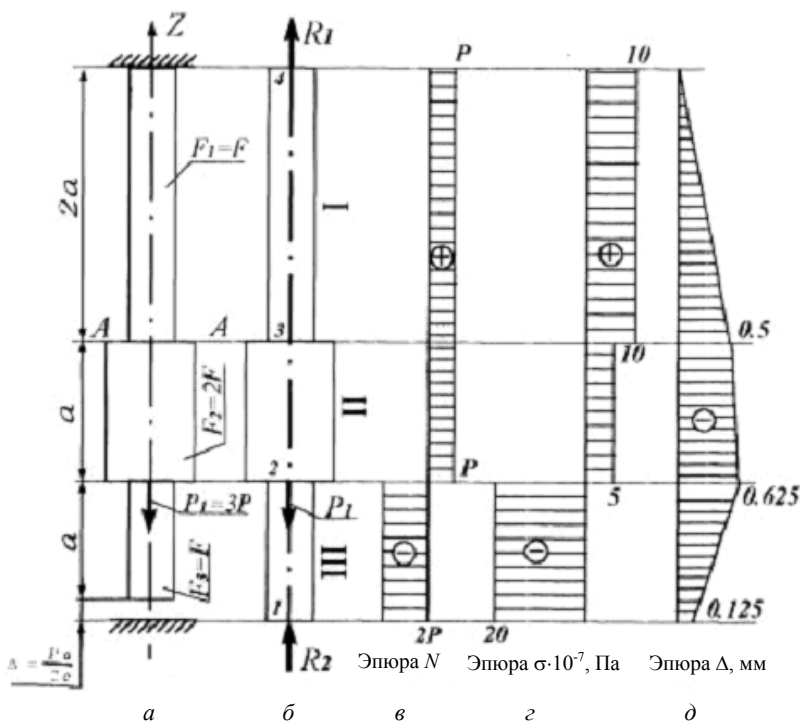


Рисунок 2.2

2.1.3 Условие совместности деформаций имеет вид

$$\Delta l = \Delta, \quad (2.2)$$

где  $\Delta l$  – перемещение нижнего сечения бруса, которое по принципу независимости действия сил можно представить в виде

$$\Delta l = \Delta l(P_1) + \Delta l(R_2) = \Delta. \quad (2.3)$$

Согласно закону Гука, абсолютное удлинение бруса, вызванное силой  $P_1$ , равно

$$\Delta l(P_1) = \frac{P_1 a}{EF_2} + \frac{P_1 2a}{EF_1}. \quad (2.4)$$

Абсолютное укорочение стержня, вызванное силой  $R_2$ , равно

$$\Delta l(R_2) = -\left(\frac{R_2 a}{EF_3} + \frac{R_2 a}{EF_2} + \frac{R_2 2a}{EF_1}\right). \quad (2.5)$$

Подставляя (2.4) и (2.5) в уравнение (2) и учитывая, что

$$P_1 = 3P, \quad \Delta = \frac{Pa}{2c} = \frac{Pa}{2EF},$$

получим уравнение

$$\frac{3Pa}{E2F} + \frac{3P \cdot 2a}{EF} - \left(\frac{R_2 a}{EF} + \frac{R_2 a}{E2F} + \frac{R_2 \cdot 2a}{EF}\right) = \frac{Pa}{2EF},$$

из решения которого следует, что  $R_2 = 2P$ .

Из (2.1) следует:  $R_1 = P_1 - R_2 = 3P - 2P = P$ .

Так как усилия  $R_1$  и  $R_2$  положительны, то их направления совпадают с направлениями, принятыми на рисунке 2.2,б.

2.1.4. Построим эпюры продольных сил  $N$ .

Разбиваем брус на участки: I, II, III (см. рисунок 2.2,б).

На I участке  $N_1 = R_1 = P$ .

На II участке  $N_2 = R_1 = P$ .

На III участке  $N_3 = -R_2 = -2P$ .

По полученным результатам строим эпюру продольных сил  $N$ , показанную на рисунке 2.2,в.

2.1.5 Определим нормальные напряжения:

$$\text{на I участке } \sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} = \frac{100 \cdot 10}{10 \cdot 10} = 10 \cdot 10 \text{ Па};$$

$$\text{на II участке } \sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{2F} = \frac{100 \cdot 10}{20 \cdot 10} = 5 \cdot 10 \text{ Па};$$

$$\text{на III участке } \sigma = \frac{N}{F} = -\frac{2P}{F} = -\frac{200 \cdot 10}{10 \cdot 10} = -20 \cdot 10 \text{ Па}.$$

По найденным значениям строим эпюру нормальных напряжений  $\sigma$ , показанную на рисунке 2.2,з.

Из эпюры  $\sigma$  следует, что наиболее нагруженным является III участок, т. е.

$$\max \sigma = \sigma_3 = -20 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

2.1.6 Так как сталь является пластичным материалом, то коэффициент запаса прочности определяем по формуле

$$n = \frac{\sigma}{|\max \sigma|} = \frac{30 \cdot 10}{20 \cdot 10} = 1,5.$$

2.1.7 Построим эпюру перемещений сечений стержня.

Для этого вычислим абсолютные перемещения сечений, обозначенных цифрами 1, 2, 3, 4 на рисунке 2.2,б:

$$\Delta = -\Delta = -\frac{Pa}{2EF} = -\frac{100 \cdot 10 \cdot 0,5}{2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 10} = -0,125 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,125 \text{ мм}$$

(знак минус указывает на то, что сечение I перемещается вниз на величину зазора  $\Delta$ );

$$\begin{aligned} \Delta_2 = \Delta_1 - \frac{N_3 a}{EF_3} &= -0,125 \cdot 10^{-3} - \frac{200 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = \\ &= -0,625 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,625 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 = \Delta_2 + \frac{N_2 a}{EF_2} &= -0,625 \cdot 10^{-3} + \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = \\ &= -0,5 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,5 \text{ мм}; \end{aligned}$$

$$\Delta_4 = \Delta_3 + \frac{N_1 2a}{EF_1} = -0,5 \cdot 10^{-3} + \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0.$$

По полученным значениям строим эпюру продольных перемещений  $\Delta$ , показанную на рисунке 2.2,д.

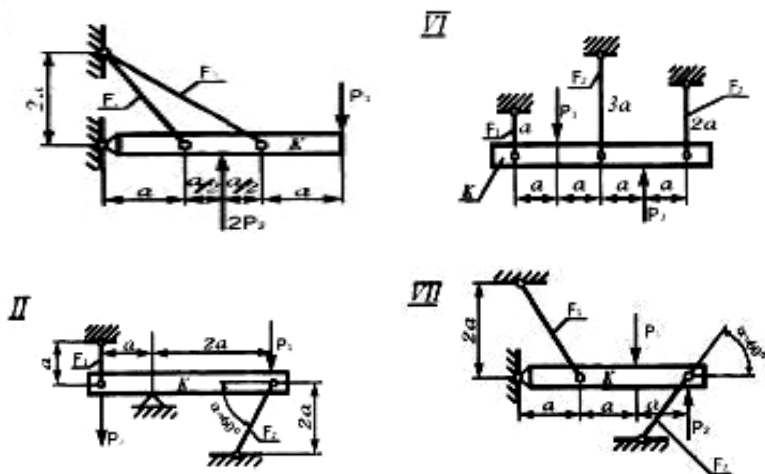
2.1.8 Из эпюры перемещений следует, что сечение А-А перемещается вниз на величину

$$\Delta_{A-A} = -0,5 \text{ мм.}$$

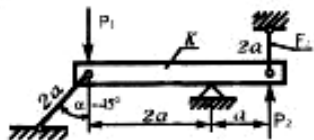
## 2.2 Задача 2

Абсолютно жесткая балка К, показанная на рисунке 2.3, шарнирно прикреплена к опоре стальными стержнями, имеющими площади поперечных сечений  $F_i$ , длина которых  $a_i$ , или с помощью опорных устройств. Балка нагружена силами  $P_i$ . Выполнить проектировочный расчет, т. е. найти площади поперечных сечений стержней, принимая

$$\sigma_{T(P)} = \sigma_{T(C)} = \sigma_T.$$



III



VIII

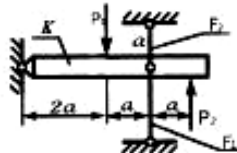
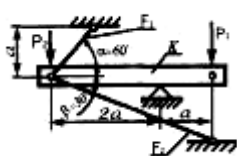
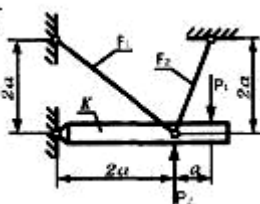


Рисунок 2.3. Начало

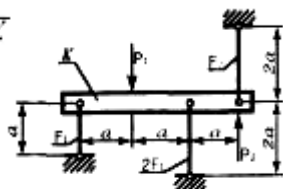
IV



IX



V



VI

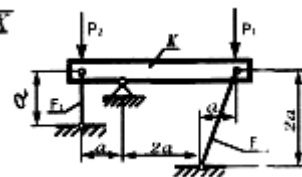


Рисунок 2.3. Окончание

Коэффициент запаса прочности конструкции принять равным  $n = 2$ .

Данные, необходимые для решения, принять по таблице 2.2 при  $P = 10 \cdot 10^3$  Н.

Таблица 2.2

Номер строки	Схема рис. 2.3	$P_i$		$F_i$		Материал стержня марка стали	Предел текучести $\sigma_T$ , Па
		$P_1$	$P_2$	$F_1$	$F_2$		
1	I	$P$	—	$F$	$2F$	20	$25 \cdot 10^7$
2	II	$2P$	$P$	$2F$	$F$	У8	$70 \cdot 10^7$
3	III	—	$P$	$F$	$2F$	40	$34 \cdot 10^7$
4	IV	$P$	—	$3F$	$F$	50	$38 \cdot 10^7$

5	V	$P$	$2P$	$2F$	$3F$	40XH	$90 \cdot 10^7$
6	VI	–	$P$	$3F$	$F$	40X	$80 \cdot 10^7$
7	VII	$3P$	$P$	$2F$	$3F$	30	$30 \cdot 10^7$
8	VIII	$2P$	–	$3F$	$F$	20	$25 \cdot 10^7$
9	IX	–	$2P$	$2F$	$2F$	40XH	$90 \cdot 10^7$
0	X	$P$	$3P$	$F$	$3F$	У8	$70 \cdot 10^7$
Буква шифра	е	г	д	в	б	а	

### Пример 2.

В соответствии с условием задачи 2 выполнить проектировочный расчет системы, показанной на рисунке 2.4,а при  $P = 10 \cdot 10^3$  Н;  $F_1 = 2F$ ;  $F_2 = F$ ;  $P_1 = P$ ;  $P_2 = 0$ .

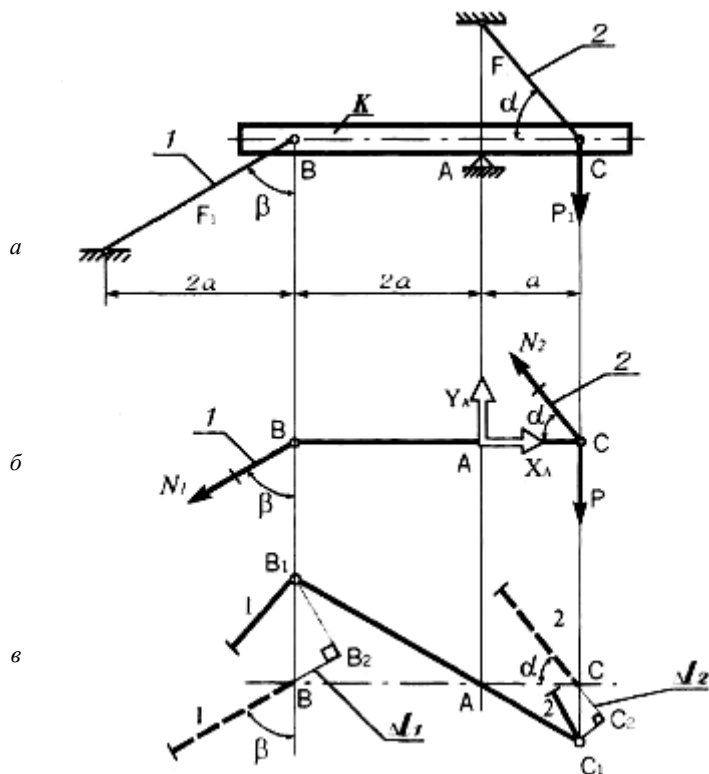


Рисунок 2.4

Материал стержней – Сталь 20, предел текучести  $\sigma_T = 25 \cdot 10^7$  Па, модуль упругости  $E_1 = E_2 = E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Коэффициент запаса прочности  $n = 2$ .

### Решение.

2.2.1 Применяя метод сечений к заданной конструкции (см. рисунок 2.4,а), мысленно рассечем оба стержня, укажем неизвестные усилия  $N_1$  и  $N_2$ , действующие в них, и, отбросив опору А, заменим ее действие на балку К опорными реакциями  $X_A$ ,  $Y_A$ . Полученная схема усилий показана на рисунке 2.4,б.

Для полученной схемы сил составим уравнения равновесия.

$$\Sigma X = 0; X_A - N_1 \sin \beta - N_2 \cos \alpha = 0. \quad (2.6)$$

$$\Sigma Y = 0; Y_A - N_1 \cos \beta - N_2 \sin \alpha - P = 0. \quad (2.7)$$

$$\Sigma m_A = 0; N_1 \cdot 2a \cdot \cos \beta + N_2 \cdot a \cdot \cos \alpha - Pa = 0. \quad (2.8)$$

Система содержит 4 неизвестных ( $N_1$ ,  $N_2$ ,  $X_A$ ,  $Y_A$ ) и для нее можно составить только три линейно независимых уравнения равновесия (2.6), (2.7), (2.8). Таким образом, рассматриваемая система является один раз статически неопределимой, т.е. необходимо составить одно уравнение совместности деформаций.

Так как в проектном расчете необходимо определить усилия  $N_1$  и  $N_2$ , то в дальнейшем будем рассматривать только уравнение (2.8), а уравнения равновесия (2.6) и (2.7), содержащие неизвестные  $X_A$  и  $Y_A$ , можно не рассматривать, так как это не повлияет на степень статической неопределимости системы.

2.2.2 Раскроем статическую неопределимость системы, для чего изобразим начальное и конечное состояние системы после ее деформации.

На рисунке 2.4,в показана схема перемещений, которая строится по следующему принципу: на исходной конструкции показываются предполагаемые перемещения узлов В и С, в которых стержни прикреплены к жесткой балке К. Так как величина деформаций мала, то считаем, что перемещения узлов В и С при повороте балки относительно опоры А происходят не по дугам с радиусами АВ и АС, а по касательным к этим дугам ВВ<sub>1</sub> и СС<sub>1</sub>, которые перпендикулярны ра-

диусам АВ и АС соответственно ( $BB_1 \perp AB$ ,  $CC_1 \perp AC$ ). Предполагаемое положение балки показано прямой  $B_1AC_1$  (см. рисунок 2.4,в). Удлинения стержней определяются отрезками

$$\Delta l_1 = BB_2; \quad \Delta l_2 = CC_2. \quad (2.9)$$

При составлении схемы перемещений (см. рисунок 2.4,г) необходимо следить за тем, чтобы направления абсолютных деформаций стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  соответствовали выбранному направлению внутренних усилий  $N_1$  и  $N_2$  на схеме усилий (см. рисунок 2.4,б). В частности, так как на схеме усилий показаны растягивающие силы  $N_1$  и  $N_2$ , то на схеме перемещений им соответствуют удлинения стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  соответственно (укорачиваться при выбранном направлении усилий стержни не могут, так как это противоречит физическому смыслу).

Условие совместности деформаций составим из подобия треугольников  $\Delta ABB_1$  и  $\Delta ACC_1$ , в соответствии с которым

$$\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}. \quad (2.10)$$

Из  $\Delta BB_2B_1$  и  $\Delta CC_2C_1$  с учетом (2.9) следует, что

$$BB_1 = \Delta l_1 / \cos \beta; \quad CC_1 = \Delta l_2 / \cos \alpha. \quad (2.11)$$

С учетом (2.11) уравнение совместности деформации принимает вид

$$\frac{\Delta l_1}{2a \cdot \cos \beta} = \frac{\Delta l_2}{a \cdot \cos \alpha}. \quad (2.12)$$

Выражая абсолютные деформации стержней  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  через усилия  $N_1$  и  $N_2$ , действующие в них,

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} \quad (2.13)$$

и учитывая, что по условию задачи

$$E_1 = E_2 = E; \quad F_1 = 2F; \quad F_2 = F; \quad l_1 = \frac{2a}{\sin \beta}; \quad l_2 = \frac{a}{\cos \alpha}$$

(см. рисунок 2.4,а), уравнение совместности деформаций (2.12) запишем в виде



$$\frac{N_1 2a}{2a \cos \beta \cdot \sin \beta \cdot E \cdot 2F} = \frac{N_2 a}{a \cos \alpha \cdot \cos \alpha \cdot EF}$$

или окончательно

$$N_1 - N_2 \frac{\sin 2\beta}{\cos^2 \alpha} = 0. \quad (2.14)$$

Уравнение (2.14) является дополнительным уравнением и совместно с уравнением (2.8) образует систему уравнений для определения искомых усилий  $N_1$  и  $N_2$ .

2.2.3 Решая совместно систему уравнений (2.8) и (2.14), получим:

$$N_1 = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\beta \cos \beta + \cos^3 \alpha} \cdot P; \quad (2.15)$$

$$N_2 = \frac{\cos \alpha}{\sin 2\beta \cos \beta + \cos^3 \alpha} \cdot P.$$

С учетом заданных значений (см. рисунок 2.4,а)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2a}{a} = 2, \text{ т. е. } \beta = 64^\circ, \text{ а } \alpha = 45^\circ \text{ и } P = 10 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

получим

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{\sin 128^\circ}{\sin 128^\circ \cos 64^\circ + \cos^3 45^\circ} \cdot 10 \cdot 10^3 = \\ &= \frac{0,788 \cdot 10 \cdot 10^3}{0,788 \cdot 0,438 + 0,353} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ Н.} \end{aligned}$$

$$N_2 = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 128^\circ \cos 64^\circ + \cos^3 45^\circ} \cdot 10 \cdot 10^3 = \frac{0,5 \cdot 10 \cdot 10^3}{0,788 \cdot 0,438 + 0,353} = 7,16 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

2.2.4. Определим нормальные напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{F_1} = \frac{11,3}{2F} = \frac{5,65 \cdot 10^3}{F}; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{F_2} = \frac{7,16 \cdot 10^3}{F}.$$

Так как напряжения во втором стержне больше, чем в первом

$$|\max \sigma| = \max[\sigma_1; \sigma_2] = \frac{7,16 \cdot 10^3}{F},$$

то условие прочности следует записать для второго стержня.

2.2.5 Условие прочности имеет вид

$$\max \sigma = \frac{7,16 \cdot 10^3}{F} \leq [\sigma], \quad (2.16)$$

где допускаемые напряжения  $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{2} = \frac{25 \cdot 10^7}{2} = 12,5 \cdot 10^7 \text{ Па}$ .

Из уравнения (2.16) получим

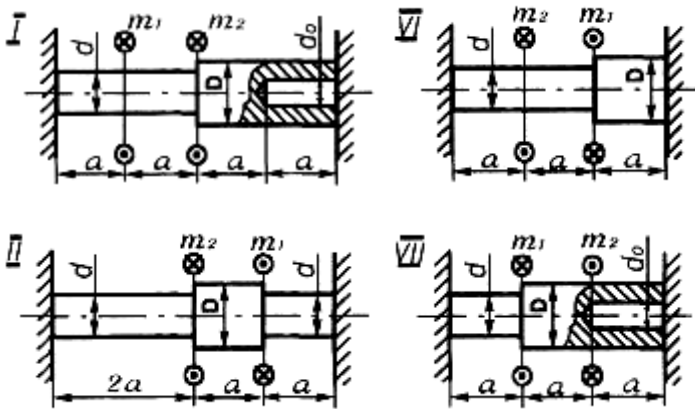
$$F \geq \frac{7,16 \cdot 10^3}{[\sigma]} = \frac{7,16 \cdot 10^3}{12,5 \cdot 10^7} = 0,573 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 57,3 \text{ мм}^2.$$

2.2.6 Окончательно примем следующие значения площадей поперечных сечений стержней:

$$F_1 = 2F = 114,6 \text{ мм}^2; \quad F_2 = F = 57,3 \text{ мм}^2.$$

### 2.3 Задача 3

Стальной брус зашпелен обоими концами (рисунок 2.5), нагружен крутящими моментами  $m_i$  и имеет круглое или кольцевое поперечные сечения.



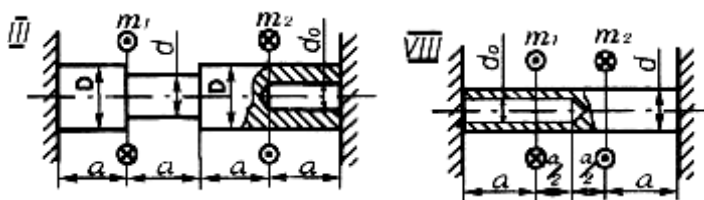


Рисунок 2.5. Начало

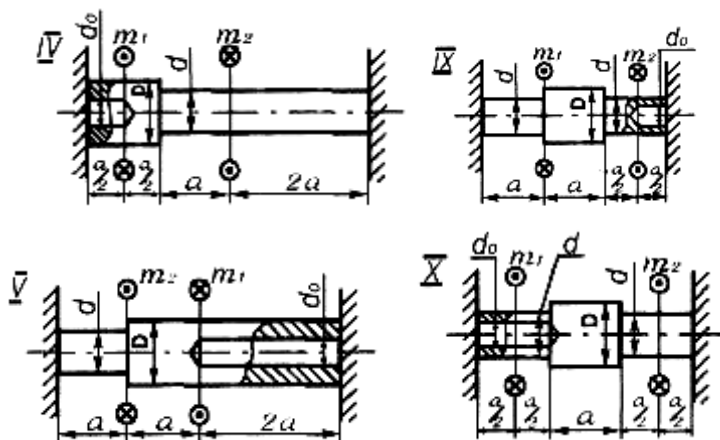


Рисунок 2.5. Окончание

Подобрать размеры поперечного сечения бруса, принимая значение момента  $m = 0,5 \cdot 10^3$  Н·м, и построить эпюру углов закручивания  $\varphi$ .

Данные для решения задач принять из таблицы 2.3.

Таблица 2.3

Номер строки	Схема по рис. 2.5	$m_i$		Размеры поперечных сечений		Допускаемое напряжение $[\tau]$ , Па
		$m_1$	$m_2$	$D$	$c = d_0/D$	

1	I	$m$	$2m$	$1,2d$	0,7	$6 \cdot 10^7$
2	II	$2m$	$m$	$1,5d$	0,8	$8 \cdot 10^7$
3	III	$m$	$3m$	$1,4d$	0,7	$10 \cdot 10^7$
4	IV	$2m$	$m$	$2d$	0,8	$12 \cdot 10^7$
5	V	$3m$	$m$	$1,5d$	0,8	$7 \cdot 10^7$
6	VI	$2m$	$3m$	$2d$	0,7	$9 \cdot 10^7$
7	VII	$m$	$3m$	$1,8d$	0,6	$10 \cdot 10^7$
8	VIII	$2m$	$m$	$d$	0,8	$6 \cdot 10^7$
9	IX	$m$	$2m$	$2d$	0,7	$5 \cdot 10^7$
0	X	$3m$	$m$	$1,5d$	0,8	$6 \cdot 10^7$
Буква шифра	а	б	е	г	д	в

### Пример 3.

В соответствии с условиями задачи 3 выполнить расчет стального бруса, показанного на рисунке 2.6,а при  $m_1 = m$ ,  $m_2 = 4m$ ,  $m = 0,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}$ ,  $D = 2d$ ,  $c = \frac{d_0}{d} = 0,8$  допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 6 \cdot 10^7 \text{ Па}$ .

### Решение.

2.3.1 Для расчета на прочность необходимо построить эпюру крутящих моментов. Эту эпюру можно построить только после определения величины реактивных моментов  $M_A$  и  $M_B$ , возникающих в опорах А и В (рисунок 2.6,б). В рассматриваемом случае можно составить только одно уравнение равновесия

$$\Sigma_{mom_z} = 0; -M_A + m + 4m - M_B = 0,$$

или

$$M_A + M_B = 5m. \quad (2.17)$$

Так как для определения двух неизвестных ( $M_A$  и  $M_B$ ) имеется только одно уравнение равновесия (2.17), то рассматриваемая система является один раз статически неопределимой.

2.3.2 Для раскрытия статической неопределимости составим одно уравнение совместности деформаций. Для этого отбросим левую опору и заменим ее действие на брус моментом  $M_A$  (см. рисунок 2.6,б).

Условием совместности деформаций в данном случае является равенство нулю угла поворота поперечного сечения  $A$ :  $\varphi_A = 0$ .

В соответствии с принципом независимости действия сил уравнение совместности деформаций для расчетной схемы имеет вид:

$$\varphi_A = \varphi_A(M_A) + \varphi_A(m) + \varphi_A(4m) = 0. \quad (2.18)$$

В соответствии с законом Гука при кручении угол поворота сечения  $A$  от каждого крутящего момента ( $M_A$ ,  $m$  и  $4m$ ) определяется из выражений (нумерация участков показана на рисунке 2.6,б):

$$\varphi_A(M_A) = -\frac{M_A \cdot 2a}{GJ_p^I} - \frac{M_A \cdot a}{GJ_p^{II}} - \frac{M_A \cdot a}{GJ_p^{III}} - \frac{M_A \cdot 2a}{GJ_p^{IV}};$$

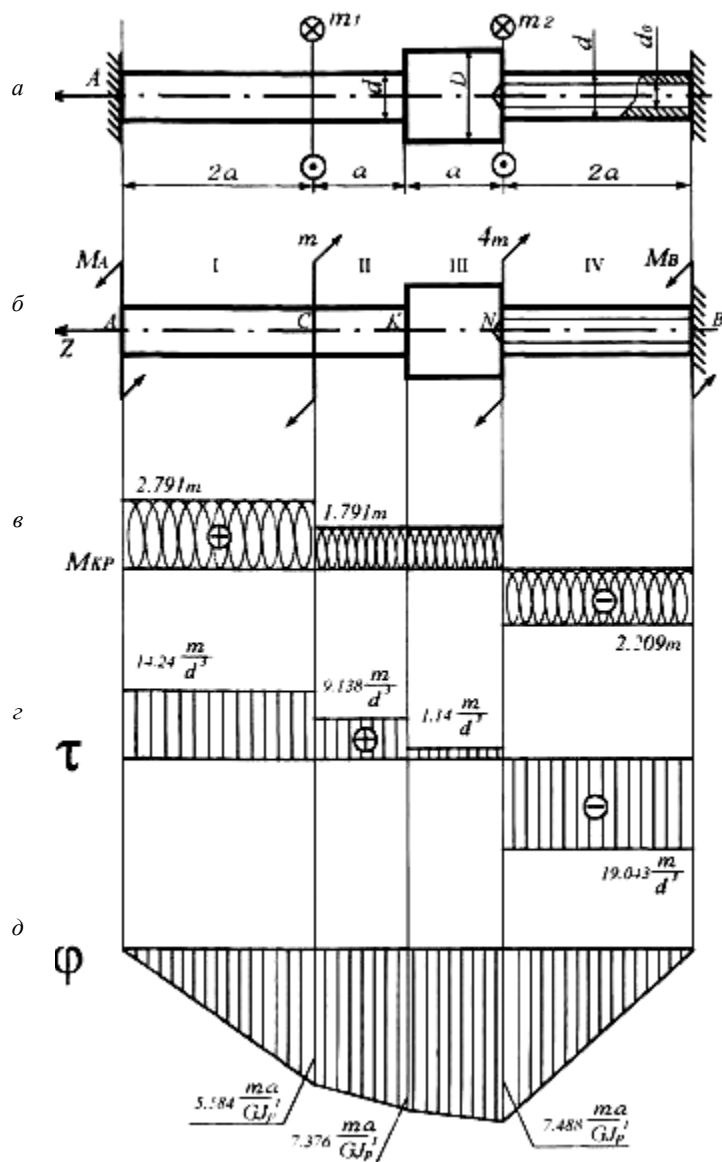


Рисунок 2.6

$$\varphi_A(m) = \frac{m \cdot a}{GJ_p^{\text{II}}} + \frac{m \cdot a}{GJ_p^{\text{III}}} + \frac{m \cdot 2a}{GJ_p^{\text{IV}}} ; \quad (2.19)$$

$$\varphi_A(4m) = \frac{4m \cdot 2a}{GJ_p^{\text{IV}}} .$$

Вычислим полярные моменты инерции поперечных сечений для всех участков бруса:

$$J_p^{\text{I}} = J_p^{\text{II}} = \frac{\pi d^4}{32} ;$$

$$J_p^{\text{III}} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi (2d)^4}{32} = \frac{\pi}{2} d^4 ;$$

$$J_p^{\text{IV}} = \frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4) = \frac{\pi d^4}{32} (1 - 0,8^4) = 0,59 \frac{\pi d^4}{32}$$

Из полученных результатов следует, что

$$J_p^{\text{II}} = J_p^{\text{I}} ; J_p^{\text{III}} = 16J_p^{\text{I}} ; J_p^{\text{VI}} = 0,59J_p^{\text{I}} . \quad (2.20)$$

Подставляя выражения 2.19 с учетом соотношений 2.20 в уравнение совместности деформаций (2.18), получим

$$-\frac{M_A a}{GJ_p^{\text{I}}} \left(2 + 1 + \frac{1}{16} + \frac{2}{0,59}\right) + \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{2}{0,59} + \frac{8}{0,59}\right) = 0 . \quad (2.21)$$

Решая уравнение (2.21), определим значение момента  $M_A$ :

$$M_A = \frac{18,013m}{6,453} = 2,791m .$$

Из уравнения (2.17) получим

$$M_B = 5m - M_A = 5m - 2,791m = 2,209m .$$

Так как значения моментов  $M_A$  и  $M_B$  оказались положительными, то их направления на рисунке 2.6,б показаны верно.

2.3.3 Вычислим значения крутящих моментов на каждом участке. При этом используем следующее правило знаков: внешний крутящий момент считается положительным, если для наблюдателя, смотряще-

го на рассматриваемое сечение со стороны внешней нормали, он направлен против часовой стрелки.

Применяя метод сечений для каждого участка, получим:

$$\text{I участок: } M_{\text{кр}}^{\text{I}} = M_A = 2,791m;$$

$$\text{II и III участки: } M_{\text{кр}}^{\text{II}} = M_{\text{кр}}^{\text{III}} = 2,791m - m = 1,791m;$$

$$\text{IV участок: } M_{\text{кр}}^{\text{IV}} = M_A - m - 4m = 2,791m - m - 4m = -2,209m.$$

Эпюра крутящих моментов показана на рисунке 2.6,в.

2.3.4 Наибольшие касательные напряжения на каждом участке определяются по формуле

$$\max \tau_j = \frac{M_{\text{кр}}^j}{W_p^j}, \quad (2.22)$$

где  $j = \text{I, II, III, IV}$  – номер участка.

Полярные моменты сопротивления

$$W_p^{\text{I}} = W_p^{\text{II}} = \frac{\pi d^3}{16} = 0,196d^3;$$

$$W_p^{\text{III}} = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{\pi(2d)^3}{16} = \frac{\pi d^3}{2} = 1,571d^3;$$

$$W_p^{\text{IV}} = \frac{\pi d^3}{16}(1 - c^4) = \frac{\pi d^3}{16}(1 - 0,8^4) = 0,116d^3.$$

По формуле (2.22) получим

$$\max \tau_{\text{I}} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{I}}}{W_p^{\text{I}}} = \frac{2,791m}{0,196d^3} = 14,240 \frac{m}{d^3};$$

$$\max \tau_{\text{II}} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{II}}}{W_p^{\text{II}}} = \frac{1,791m}{0,196d^3} = 9,138 \frac{m}{d^3};$$



$$\max \tau_{\text{III}} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{III}}}{W_{\text{p}}^{\text{III}}} = \frac{1,791m}{1,571d^3} = 1,140 \frac{m}{d^3};$$

$$\max \tau_{\text{IV}} = \frac{M_{\text{кр}}^{\text{IV}}}{W_{\text{p}}^{\text{IV}}} = -\frac{2,209m}{0,116d^3} = -19,043 \frac{m}{d^3}.$$

Очевидно, наиболее нагруженным является IV участок, а максимальные касательные напряжения в бруске  $\max \tau = |\max \tau_{\text{IV}}|$ . Эпюра касательных напряжений показана на рисунке 2.6,з.

2.3.5 Определим диаметр вала. Условие прочности имеет вид:

$$\max \tau = 19,043 \frac{m}{d^3} \leq [\tau]. \quad (2.23)$$

Из (2.23) следует, что

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{19,043m}{[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{19,043 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^7}} = 5,417 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 54,7 \text{ мм}.$$

Округляя диаметр до четного числа миллиметров в большую сторону, окончательно принимаем:

$$d = 56 \text{ мм}; D = 2d = 112 \text{ мм}; d_0 = d \cdot c = 56 \cdot 0,8 = 44,8 \text{ мм}.$$

2.3.6 Построим эпюру углов поворота  $\varphi$  поперечных сечений, используя формулу

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{M_{\text{кр}} \cdot z}{GJ_p}, \quad (2.24)$$

где  $z$  – длина скручиваемого участка;  $\varphi_0$  – угол поворота поперечного сечения, расположенного в начале координат.

Эпюру углов поворота строим справа налево (см. рисунок 2.6,б), размещая начало координат в сечении В, т. е.  $\varphi_0 = \varphi_{\text{В}} = 0$ .

Используя формулу (2.24), вычислим последовательно углы поворота поперечных сечений N, K, С и А:

$$\begin{aligned}
\varphi_N &= \varphi_B + \frac{M_{\text{кр}}^{\text{IV}} 2a}{GJ_p^{\text{IV}}} = 0 + \frac{-2,209m \cdot 2a}{G \cdot 0,59 \cdot J_p^{\text{I}}} = -7,488 \cdot \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \text{ рад}; \\
\varphi_K &= \varphi_N + \frac{M_{\text{кр}}^{\text{III}} a}{GJ_p^{\text{III}}} = -7,488 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} + \frac{1,791ma}{16GJ_p^{\text{I}}} = -7,376 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \text{ рад}; \\
\varphi_C &= \varphi_K + \frac{M_{\text{кр}}^{\text{II}} a}{GJ_p^{\text{II}}} = -7,376 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} + \frac{1,791ma}{GJ_p^{\text{I}}} = -5,584 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \text{ рад}; \\
\varphi_A &= \varphi_C + \frac{M_{\text{кр}}^{\text{I}} \cdot 2a}{GJ_p^{\text{I}}} = -5,584 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} + \frac{2,791m \cdot 2a}{GJ_p^{\text{I}}} = \\
&= (-5,584 + 5,582) \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} = -0,002 \frac{ma}{GJ_p^{\text{I}}} \approx 0 \text{ рад}.
\end{aligned}$$

При расчете использованы соотношения между полярными моментами инерции (2.20).

В результате округлений при выполнении вычислений угол поворота в сечении А оказался не равным нулю. Однако, так как погрешность вычислений

$$\delta = \frac{0,002}{5,584} \cdot 100 \% = 0,036\%,$$

т. е. не превышает 5%, то можно считать, что  $\varphi_A = 0$ .

Эпюра углов поворота, построенная по полученным данным, показана на рисунке 2.6, д.

### 3 Расчет балок на изгиб

#### Задача 4

Стальная балка нагружена, как показано на рисунке 3.1.

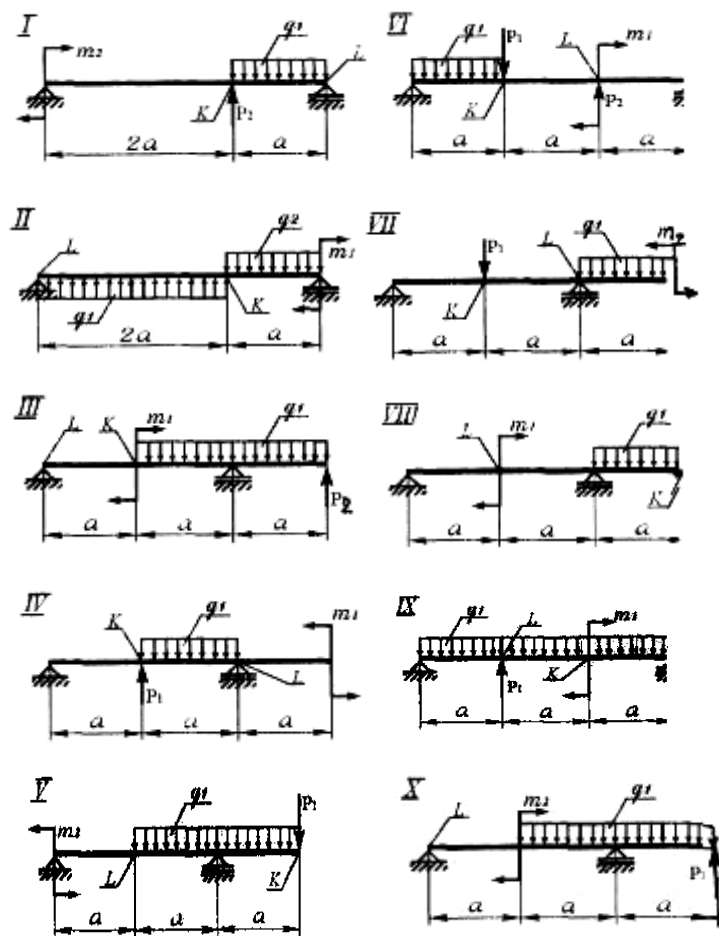


Рисунок 3.1

Требуется выполнить следующие расчеты.

3.1.1 Подобрать размеры поперечного сечения для следующих вариантов: двутаврового и состоящего из двух швеллеров; прямоугольного с соотношением сторон  $h/b = 2$  ( $h$  – высота,  $b$  – ширина сечения); круглого поперечного сечения; кольцевого поперечного сечения с соотношением  $c = d/D = 0,8$  ( $D$  – наружный диаметр,  $d$  – диаметр отверстия).

3.1.2 Определить соотношение расхода материала на единицу длины балки путем установления соотношения между площадями поперечных сечений различных балок (площадь поперечного сечения двутавра принять за единицу).

Выбрать наиболее рациональный (с точки зрения расхода материала) вид поперечного сечения. Все дальнейшие расчеты производить с балкой, имеющей рациональный вид поперечного сечения.

3.1.3 Построить эпюру нормальных и касательных напряжений для принятого поперечного сечения балки.

3.1.4 Определить прогиб сечения  $K$  и угол поворота сечения  $L$ , используя метод начальных параметров.

3.1.5 Показать примерное положение упругой линии балки с учетом полученных значений прогиба сечения  $K$  и угла поворота сечения  $L$ .

3.1.6 Исходные данные, необходимые для расчета, принять по таблице 3.1, полагая  $m = Pa = qa^2$ , причем  $q = 1 \cdot 10^4$  Н / м.

Коэффициент запаса прочности принять равным  $n = 1,5$ .

Принять  $a = 1$  м.

При выполнении работы следует:

а) все расчеты при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов, определении перемещений и углов поворота выполнять в общем виде и лишь в окончательные выражения подставить необходимые данные, определяя числовые значения искомых величин;

б) считать, что силовая линия совпадает с осью наименьшей жесткости поперечного сечения балки.

Таблица 3.1

Номер строки	Схема по рисунку 3.1	Внешние нагрузки						Материал балки			
		m <sub>a</sub>	m <sub>b</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	Сталь		марка	Чугун
								марка	Предел текучести, σ <sub>т</sub> , Па		Предел прочности, σ <sub>в</sub> , Па
1	I	m	2m	P	2P	q	q	20	25·10 <sup>7</sup>	СЧ 38-60	38·10 <sup>7</sup>
2	II	2m	m	P	P	q	-	40X	80·10 <sup>7</sup>	СЧ 28-48	28·10 <sup>7</sup>
3	III	-	2m	-	2P	q	2q	30	30·10 <sup>7</sup>	СЧ 12-28	12·10 <sup>7</sup>
4	IV	2m	-	P	2P	q	-	40XH	90·10 <sup>7</sup>	СЧ 28-48	28·10 <sup>7</sup>
5	V	-	m	2P	-	-	q	40	34·10 <sup>7</sup>	СЧ 38-60	38·10 <sup>7</sup>
6	VI	-	m	2P	-	-	q	20	25·10 <sup>7</sup>	СЧ 28-48	28·10 <sup>7</sup>
7	VII	2m	m	P	2P	2q	q	50	38·10 <sup>7</sup>	СЧ 12-28	12·10 <sup>7</sup>
8	VIII	-	m	P	-	-	2q	40XH	90·10 <sup>7</sup>	СЧ 28-48	28·10 <sup>7</sup>
9	IX	m	m	2P	-	q	q	30	30·10 <sup>7</sup>	СЧ 38-60	38·10 <sup>7</sup>
0	X	2m	m	P	P	2q	q	40XH	90·10 <sup>7</sup>	СЧ 12-28	12·10 <sup>7</sup>
Буква шифра	a	б	в	г	д	е	ж	з	и	к	л

#### Пример 4.

В соответствии с условиями задачи 4 выполнить расчет стальной балки, показанной на рисунке 3.2,а, при  $q = 1 \cdot 10^4$  Н/м,  $q_1 = q$ ,  $q_2 = 2q$ ,  $a = 1$  м,  $m_1 = m = qa^2$ ,  $P_i = P = qa$ .

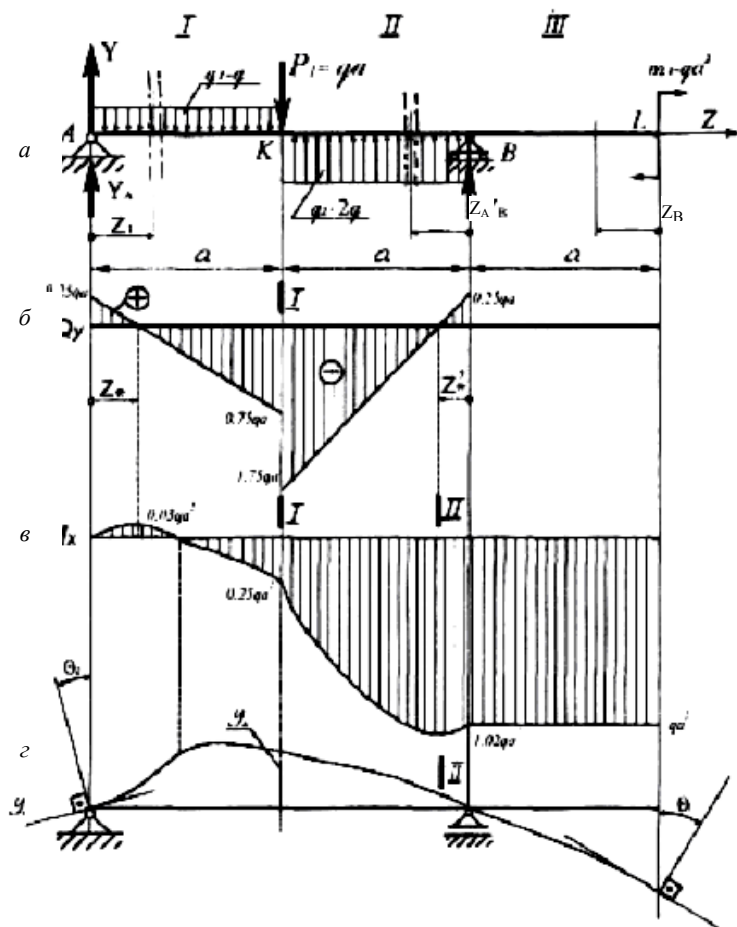


Рисунок 3.2

Материал балки – Сталь 20:  $\sigma_T = 25 \cdot 10^7$  Па,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па.

Коэффициент запаса прочности принимается равным  $n = 1,5$ .

### Решение.

3.1.7 Построим эпюры перерезывающих сил  $Q_y$  и  $M_x$ , для чего необходимо определить опорные реакции  $Y_A$  и  $Y_B$ , показанные на рисунке 3.2,а.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\Sigma_{\text{momA}} = 0; \quad Y_B \cdot 2a - m_1 + q_2a(a + 0,5a) - P_1a - q_1a \cdot 0,5a = 0;$$

$$\begin{aligned} Y_B &= \frac{1}{2a}(m_1 - 1,5q_2a^2 + P_1a + 0,5q_1a^2) = \\ &= \frac{1}{2a}(qa^2 - 1,5 \cdot 2qa^2 + qa^2 + 0,5qa^2) = -0,25qa. \end{aligned}$$

$$\Sigma_{\text{momB}} = 0; \quad -Y_A \cdot 2a + q_1a(a + 0,5a) + P_1a - q_2a \cdot 0,5a - m_1 = 0;$$

$$\begin{aligned} Y_A &= \frac{1}{2a}(1,5qa + Pa - m - 0,5qa) = \\ &= \frac{1}{2a}(1,5qa + qa - qa - 0,5 \cdot 2qa) = 0,25qa. \end{aligned}$$

Правильность определения реакций опор проверяем при помощи уравнения равновесия  $\Sigma Y = 0$

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= Y_A - q_1a - P_1 + q_2a + Y_B = \\ &= 0,25qa - qa - qa + 2qa - 0,25qa = 0 \end{aligned}$$

Полученное тождество показывает, что опорные реакции определены верно.

Знак минус реакции  $Y_B$  указывает на то, что в действительности эта сила направлена вниз (см. рисунок 3.2,а)

3.1.8 Построим эпюры  $Q_y$  и  $M_x$ , разбивая балку на три участка (см. рисунок 3.2,а). На каждом участке применяем метод сечений. Положение координат  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  показано на каждом участке. Начало координат выбирается в начале каждого участка.

В соответствии с методом сечений, перерезывающая сила в произвольном сечении равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на левую (или правую) отсеченную часть балки.

Изгибающий момент  $M_x$  равен алгебраической сумме моментов от всех внешних сил, действующих на левую (или правую) отсеченную часть балки.

При построении эпюр используются следующие правила знаков:

- перерезывающая сила считается положительной, если она поворачивает отсеченную часть балки по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения;
- изгибающий момент считается положительным, если он сжимает верхние волокна балки.

На рисунке 3.3 правила знаков проиллюстрированы графически.

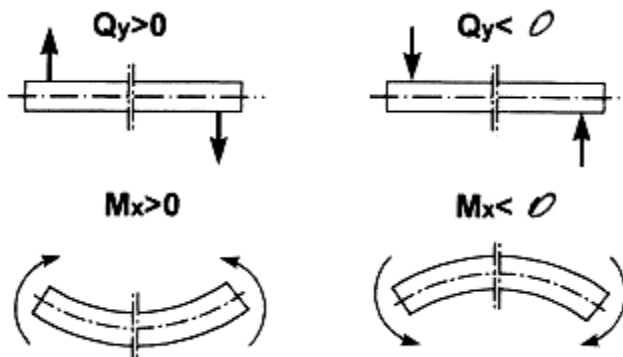


Рисунок 3.3

Рассмотрим поочередно все три участка:

I участок:  $0 \leq z_1 \leq a$ .

Выражение для перерезывающей силы в произвольном сечении с координатой  $Z_1$  имеет вид.

$$Q_Y = Y_A - q_1 z_1 = 0,25qa - qz_1 = q(0,25a - z_1).$$

Выражение для  $Q_Y$  является линейной функцией координаты  $z_1$ , поэтому для построения эпюры необходимо вычислить значения  $Q_Y$  в начале ( $Z_1 = 0$ ) и в конце ( $Z_1 = a$ ) участка балки:

$$\text{при } Z_1 = 0 \quad Q_Y = 0,25qa;$$

$$\text{при } Z_1 = a \quad Q_Y = 0,75qa.$$



Эпюра  $Q_Y$  показана на рисунке 3.2,б.

Выражение для изгибающего момента имеет вид

$$M_x = Y_A z_1 - q_1 z_1 \frac{z}{2} = 0,25qaz_1 - 0,5qz_1^2 = 0,25 q(az_1 - 2z_1^2).$$

$M_x$  является квадратичной параболой, которая в соответствии со свойствами эпюр [1] должна быть направлена выпуклостью навстречу нагрузке  $q_1$ . Кроме того, так как между  $M_x$  и  $Q_Y$  существует дифференциальная зависимость [1]  $\frac{dM}{dz} = Q_Y$ , то в точках  $Z_*$ , где  $Q_Y = 0$  (см. рисунок 3.2,б), на эпюре изгибающего момента имеет место максимум или минимум.

Для определения координаты  $Z_*$  приравняем к нулю выражение для перегрывающей силы:

$$Q_Y = q(0,25a - z_*) = 0, \text{ т. е. } z_* = 0,25a.$$

Вычислим значения  $M_x$  в начале участка ( $Z_1 = 0$ ), при  $Z_*$  и в конце участка ( $Z_1 = a$ ):

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_1 = z_* = 0,25a \quad M_x = 0,25q[a \cdot 0,25a - 2(0,25a)^2] = 0,03qa^2;$$

$$\text{при } z_1 = a \quad M_x = 0,25q(a^2 - 2a^2) = -0,25qa^2.$$

Эпюра  $M_x$ , построенная по полученным результатам, показана на (см. рисунок 3.2,в).

II участок:  $0 \leq z_2 \leq a$ .

Рассматривая правую отсечённую часть балки, получим:

$$Q_Y = -Y_B - q_2 z_2 = -(-0,25qa) - 2qz_2 = 0,25q(a - 8z_2),$$

$$\text{при } z_2 = 0 \quad Q_Y = 0,25qa;$$

$$\text{при } z_2 = a \quad Q_Y = -1,75qa.$$

Эпюра  $Q_Y$  показана на рисунке 3.2,б.

Изгибающий момент

$$\begin{aligned} M_x &= -m_1 + Y_B z_2 + (q_2 z_2) - \frac{1}{2} z_2 = -qa^2 - 0,25qa z_2 + qz_2^2 = \\ &= q(z_2^2 - 0,25az_2 - a^2). \end{aligned}$$

Анализ зависимости  $M_x(Z_2)$  проводится аналогично анализу участка I. Координата  $Z_*$  на II участке, где  $Q_Y = 0$  (см. рисунок 3.2,б) определяется из уравнения

$$Q_Y = 0,25q(a - 8Z_*') = 0, \text{ т. е. } Z_*' = \frac{1}{8}a = 0,125a.$$

Вычисляя значения изгибающего момента, получим

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_x = qa^2,$$

$$\text{при } z_2 = Z_*' = 0,125a \quad M_x = q[(0,125a)^2 - 0,25a \cdot 0,125a - a^2] = 1,02qa^2;$$

$$\text{при } z_2 = a \quad M_x = q(a^2 - 0,25a^2 - a^2) = -0,25qa^2.$$

Эпюра  $M_x$  показана на рисунке 3.2,в.

III участок  $0 \leq z_3 \leq a$ .

Рассматривая правую часть балки, получим:

$$Q_Y = 0; \quad M_x = -m_1 = -qa^2.$$

Таким образом,  $Q_Y$  и  $M_x$  на третьем участке не зависят от координаты  $Z_3$  и являются постоянными (см. эпюры на рисунках 3.2,б,в).

3.1.9 Из анализа эпюры изгибающего момента  $M_x$  (см. рисунок 3.2,в) следует, что наиболее нагруженным является сечение II – II на втором участке, т. е.

$$\max M_x = |-1,02qa^2| = 1,02 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^2 = 1020 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Весь дальнейший расчет на прочность проводится для сечения II–II.

3.1.10 Условие прочности для пластичного материала имеет вид

$$\max \sigma = \frac{\max M}{W} \leq [\sigma], \quad (3.1)$$

$$\text{где } [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{25 \cdot 10^7}{1,5} = 16,7 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Из условия прочности (3.1) определяем требуемый момент сопротивления поперечного сечения

$$W_x \geq \frac{\max M_x}{[\sigma]} = \frac{10200}{16,7 \cdot 10^7} = 61,08 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 61,08 \text{ см}^3.$$

По найденному  $W_x$  подберем размеры требуемых поперечных сечений.

### Двутавровое поперечное сечение.

По ГОСТ 8239–72 выбираем двутавр № 14 с моментом сопротивления  $W_x = 81,7 \text{ см}^3$  и площадью поперечного сечения  $F = 17,4 \text{ см}^2$

### Поперечное сечение в виде двух швеллеров.

По ГОСТ 8240–72 выбираем швеллеры № 10, у каждого из которых  $W_x = 34,8 \text{ см}^3$ . Все поперечное сечение, состоящее из двух швеллеров, будет иметь момент сопротивления  $W_x = 2 \cdot 34,8 \text{ см}^3 = 69,6 \text{ см}^3$ .

Площадь поперечного сечения одного швеллера  $F = 10,9 \text{ см}^2$ , а площадь всего сечения  $F = 2 \cdot 10,9 = 21,8 \text{ см}^2$ .

### Прямоугольное поперечное сечение ( $h = 2b$ ).

Момент сопротивления вычисляется по формуле

$$W = \frac{bh}{6} = \frac{b(2b)}{6} = 0,667b.$$

Получим

$$b = \sqrt{\frac{W}{0,667}} = \sqrt{\frac{61,08}{0,667}} = 4,5 \text{ см}; \quad h = 2b = 2 \cdot 4,5 = 9 \text{ см}.$$

Площадь поперечного сечения

$$F = b h = 4,5 \cdot 9 = 40,5 \text{ см}^2.$$

### Сплошное круглое поперечное сечение

Момент сопротивления вычисляется по формуле

$$W = \frac{\pi D^3}{32} = 0,1D.$$

Получим результат, по которому поперечное сечение должно иметь диаметр

$$D = \sqrt[3]{\frac{W}{0,1}} = \sqrt[3]{\frac{61,08}{0,1}} = 8,5 \text{ см}.$$

Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 8,5^2}{4} = 56,8 \text{ см}^2.$$

Кольцевое круглое поперечное сечение ( $c = 0,8$ ).

Момент сопротивления вычисляется по формуле

$$W = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c) = \frac{\pi D^3}{32} (1 - 0,8) = 0,058 D^3.$$

Здесь  $c = d/D$ ,

где  $d$  – диаметр отверстия стержня;  $D$  – наружный диаметр сечения.

Требуемый внешний диаметр

$$D = \sqrt[3]{\frac{W}{0,058}} = \sqrt[3]{\frac{61,08}{0,058}} = 10,2 \text{ см},$$

диаметр отверстия  $d = cD = 0,8 \cdot 10,2 = 8,16 \text{ см}$ .

Площадь поперечного сечения

$$F = \frac{\pi D^2}{4} (1 - c^4) = \frac{\pi \cdot 10,2^2}{4} (1 - 0,8^4) = 29,42 \text{ см}^2.$$

3.1.11 Определим соотношение расхода материала на единицу длины стальных балок заданных типов поперечных сечений, приняв площадь двутавра за единицу, и составим таблицу отношений площадей сечений к площади двутавра (таблица 3.2)

Таблица 3.2

Тип сечения	Площадь сечения $F_j$ , см <sup>2</sup>	Отношение площадей $F_j/F_1$
Двутавр № 14	17,4	1
Два швеллера № 10	21,8	1,25
Прямоугольник	40,5	2,33
Круг	56,8	3,26
Кольцо	29,42	1,7

Из таблицы 3.2 следует, что наиболее рациональным с точки зрения расхода материала является двутавровое поперечное сечение. Наиболее нерациональным является круглое поперечное сечение, при котором вес балки увеличится в 3,26 раза по сравнению с балкой двутаврового поперечного сечения.

Окончательно выбираем двутавровое поперечное сечение (рисунок 3.4,а) и все дальнейшие расчеты производим для двутавровой балки № 14, которая имеет следующие геометрические характеристики (ГОСТ 8239–72): момент сопротивления  $W_x = 81,7 \text{ см}^3$ , осевой момент инерции  $J_x = 572 \text{ см}^4$ , статический момент половины площади  $S_x^* = 46,8 \text{ см}^3$ ; ширина стенки двутавра  $d = 0,49 \text{ см}$ ;  $h = 14 \text{ см}$ ,  $b = 7,3 \text{ см}$ ,  $t = 0,75 \text{ см}$ .

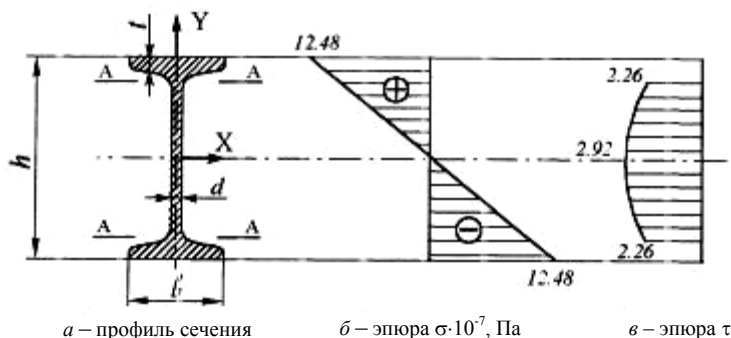


Рисунок 3.4

3.1.12 Максимальные нормальные напряжения, возникающие в сечении II–II (см. рисунок 3.2,в), определяются в [1]:

$$\max \sigma = \frac{|\max M_x|}{W_x} = \frac{10200}{81,7 \cdot 10^{-6}} = 12,48 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

В соответствии с эпюрой  $M_x$  (см. рисунок 3.2,в) верхние волокна поперечного сечения являются растянутыми, а нижние – сжатыми. Эпюра нормальных напряжений  $\sigma$  приведена на рисунке 3.4,б.

Максимальные касательные напряжения определим для сечения I–I (см. рисунок 3.2,б), где перерезывающая сила является максимальной:

$$\max Q_Y = |1,75qa| = 1,75 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1 = 17,5 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

В соответствии с формулой Журавского [1]

$$\max \tau = \frac{\max Q_Y S_X^*}{J_X d} = \frac{17,5 \cdot 10^3 \cdot 46,8 \cdot 10^{-6}}{572 \cdot 10^{-8} \cdot 0,49 \cdot 10^{-2}} = 2,92 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

В месте сопряжения полок со стенкой (сечения А–А на рисунке 3.4,а) касательные напряжения определяются

$$\tau = \frac{\max Q S}{J d} \quad (3.2)$$

где  $S_x^{\Pi}$  – статический момент полки двутавра относительно оси  $x$ , который равен [1]:

$$S_x^{\Pi} = bt\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 7,3 \cdot 0,75 \frac{1}{2} (14 - 0,75) = 36,27 \text{ см}^3.$$

По формуле (3.2) получим

$$\tau_A = \frac{17,5 \cdot 10^3 \cdot 36,27 \cdot 10^{-6}}{572 \cdot 10^{-8} \cdot 0,49 \cdot 10^{-2}} = 2,26 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Эпюра касательных напряжений, построенная в пределах стенки двутавра, показана на рисунке 3.4,в.

3.1.13 Определим прогиб сечения  $K$  и угол поворота сечения  $L$  двутавровой балки (см. рисунок 3.2,а).

Для рассматриваемой балки уравнение метода начальных параметров для определения прогибов принимает вид [1]

$$EJy(z) = EJy + EJ\theta z + \frac{Yz}{6} - \frac{qz}{24} + \frac{q(z-a)}{24} \Big| - \frac{P(z-a)}{6} \Big| + \frac{q(z-a)}{24} \Big| - \frac{q(z-2a)}{24} \Big| + \frac{Y(z-2a)}{6} \Big|, \quad (3.3)$$

где разделительная черта  $|z > a_i|$  указывает на то, что в уравнение войдут только те нагрузки, для которых выполняется указанное неравенство  $z > a_i$ ,  $y_0$  и  $\theta_0$  – прогиб и угол поворота поперечного сечения в начале координат.

При составлении уравнения (3.3) учтено, что распределенные нагрузки  $q_1$  и  $q_2$  обрываются. Поэтому эти нагрузки была продлены до правого конца балки и добавлены соответствующие «компенсирующие» нагрузки обратного знака. Влияние этих "компенсирующих" нагрузок учитывается в уравнении (3.3) членами

$$\frac{q(z-a)}{24} \text{ и } \frac{q(z-2a)}{24}.$$

Так как в начале координат (точка А на рисунке 3.2,а) установлена опора, то прогиб  $y_0 = 0$ . Угол поворота  $\theta_0$  определяется из граничного условия: при  $z = 2a$  прогиб  $y(2a) = 0$ , так как в точке В установлена опора (см. рисунок 3.2,а).

Из уравнения (3.3) получим

$$EJ_x y(2a) = EJ_x \cdot 0 + EJ_x \theta_0 \cdot 2a + \frac{0,25qa(2a)^3}{6} - \frac{q(2a)^4}{24} + \\ + \frac{q(2a-a)^4}{24} - \frac{qa(2a-a)^3}{6} + \frac{2q(2a-a)^4}{24} = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно  $\theta_0$ , получим:

$$\theta_0 = \frac{3qa^3}{16EJ_x} = \frac{3 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^3}{16 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} = 1,64 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

Подставляя значения начальных параметров  $y_0 = 0$  и  $\theta_0 = 1,64 \cdot 10^{-3}$  в уравнение (3.3), можно вычислить прогиб в любом сечении балки с координатой  $z$ .

В сечении К при  $z = a$  прогиб равен:

$$Y_K = y(a) = \theta_0 a + \frac{1}{EJ_x} \left( \frac{0,25qa \cdot a^3}{6} - \frac{qa^4}{24} \right) = \\ = 1,64 \cdot 10^{-3} \cdot 1 + \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^{-8}} \left( \frac{0,25 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^4}{6} - \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 1^4}{24} \right) = \\ = 1,64 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Знак плюс указывает на то, что сечение К перемещается вверх.

Для определения угла поворота  $\theta(z)$  поперечного сечения используем соотношение [1]

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz}. \quad (3.4)$$

На основании (3.4) после дифференцирования уравнения (3.3) получим уравнение для определения угла поворота:

$$\begin{aligned}
 EJ_x \theta(z) = EJ_x \theta_0 + \frac{Y_A z^2}{2} - \frac{q_1 z^3}{6} + \frac{q_1 (z-a)^3}{6} \Big|_{z>a} - \frac{P_1 (z-a)^2}{2} \Big|_{z>a} + \\
 + \frac{q_2 (z-a)^3}{6} \Big|_{z>a} - \frac{q_2 (z-2a)^3}{6} \Big|_{z>2a} + \frac{Y_B (z-2a)^2}{2} \Big|_{z>2a}.
 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Угол поворота сечения  $L$  (см. рисунок 3.2,а) определяем по формуле (5) при  $z = 3a$ :

$$\begin{aligned}
 \theta_L = \theta(3a) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{0,25qa(3a)^2}{2} - \frac{q(3a)^3}{6} + \frac{q(3a-a)^3}{6} - \right. \\
 \left. - \frac{qa(3a-a)^2}{2} + \frac{2q(3a-a)^3}{6} - \frac{2q(3a-2a)^3}{6} - \frac{0,25qa(3a-2a)^2}{2} \right] = \\
 = \theta_0 - 1,58 \frac{qa^3}{EJ_x} = 1,64 \cdot 10^{-3} - 1,58 \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 1^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 572 \cdot 10^8} = -1,217 \cdot 10^{-2} \text{ рад.}
 \end{aligned}$$

Знак минус показывает, что сечение  $L$  поворачивается по часовой стрелке на угол  $\theta_L = -1,217 \cdot 10^{-2}$  рад.

По найденным значениям  $y_k$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_L$ , и с учетом знаков эпюры изгибающих моментов  $M_x$  (см. рисунок 3.2,в) строим приближённое положение упругой линии балки (см. рисунок 3.2,г). При этом учтено, что на участках, где  $M_x > 0$ , сжатыми должны быть верхние волокна, а на участках, где  $M_x < 0$ , сжатыми должны быть нижние волокна поперечного сечения балки.

## 3.2 Задача 5

Чугунная балка нагружена, как показано на рисунке 3.5 и имеет поперечное сечение, которое выбирается в соответствии с вариантом по рисунку 3.6.

Требуется выполнить следующие расчеты.

3.2.1 Определить положение центра тяжести поперечного сечения, положение главных центральных осей инерции, главные центральные моменты инерции  $J_x$ ,  $J_y$ . (Все поперечные сечения имеют вертикальную ось симметрии).



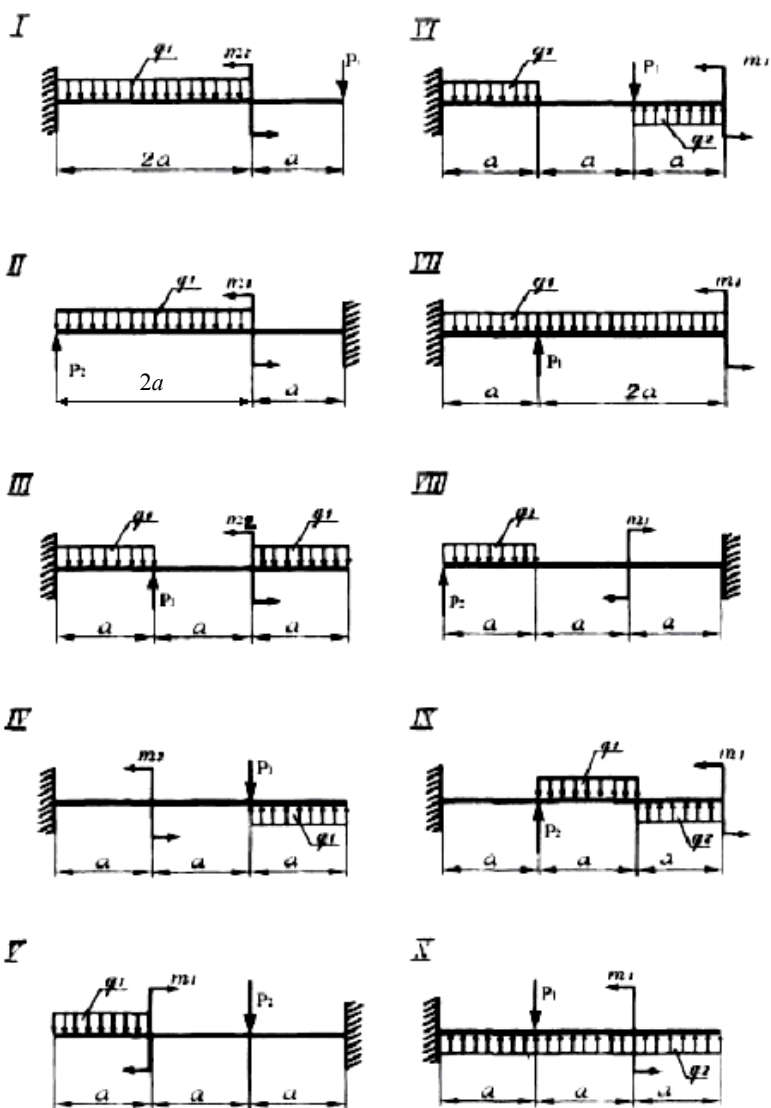


Рисунок 3.5

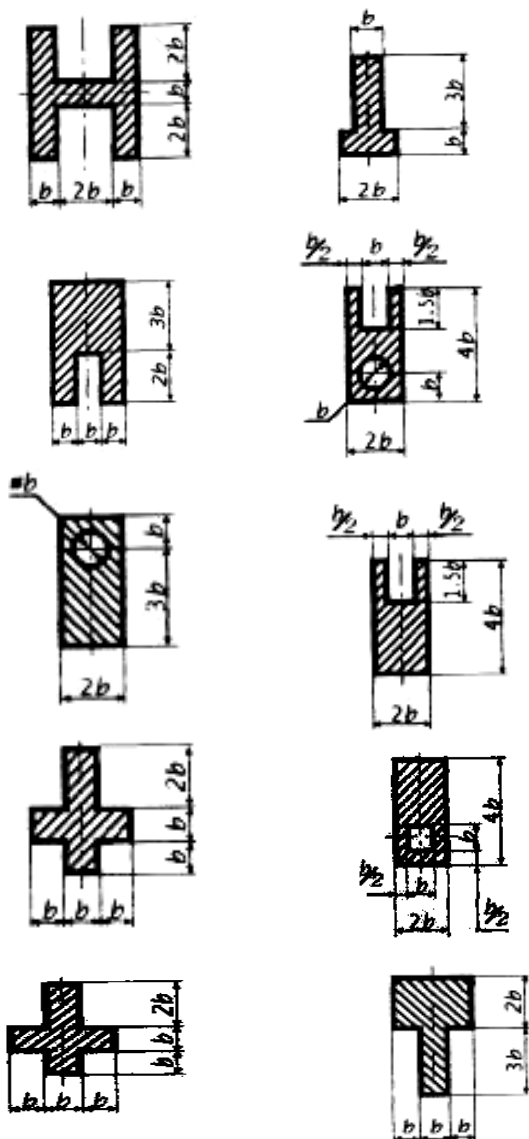


Рисунок 3.6

3.2.2 Подобрать размеры поперечного сечения из условий прочности.

3.2.3 Начертить в масштабе поперечное сечение и построить эпюры нормальных и касательных напряжений, определив их максимальные значения.

3.2.4 Проанализировать эпюру нормальных напряжений и выбрать рациональное (с точки зрения прочности) расположение поперечного сечения.

3.2.5 Исходные данные, необходимые для расчета, принять по таблице 3.1, полагая  $m = Pa = qa^2$  при  $q = 1 \cdot 10^4$  Н/м,  $a = 1$  м.

Коэффициент запаса прочности принять равным  $n = 2$ .

#### Пример 5.

В соответствии с условиями задачи № 5 произвести расчет на прочность чугунной балки, показанной на рисунке 3.7,а при  $q = 1 \cdot 10^4$  Н/м,  $P = 2qa$ ;  $m = qa^2$ ;  $a = 1$  м.

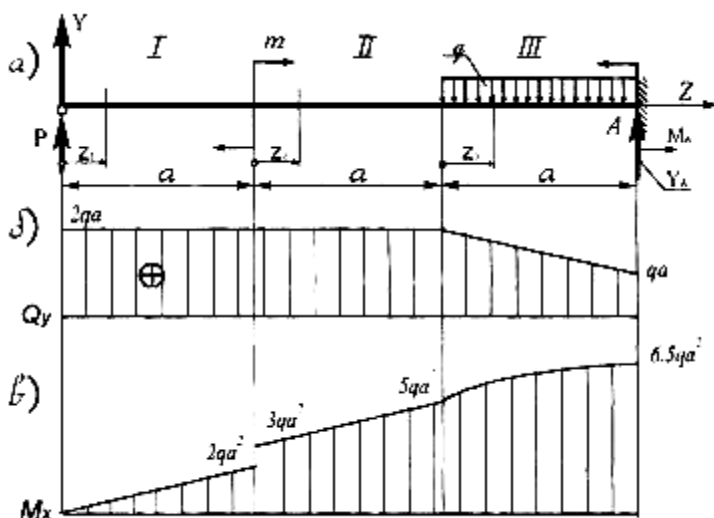


Рисунок 3.7

Материал балки – чугун СЧ 12-28;

предел прочности на растяжение  $\sigma_{B(P)} = 12 \cdot 10^7$  Па;

предел прочности на сжатие  $\sigma_{B(сж)} = 50 \cdot 10^7$  Па.

Балка имеет Т-образное поперечное сечение (рисунок 3.8).

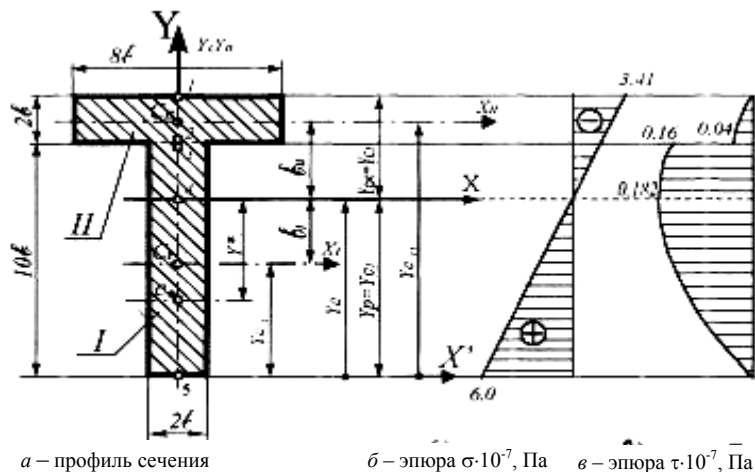


Рисунок 3.8

### Решение.

3.2.6 В жесткой заделке А возникают реакция  $Y_A$  и момент  $M_A$ . Так как балка имеет свободный конец (консольная балка), то эпюры  $Q_Y$  и  $M_x$  можно построить без определения опорных реакций  $M_A$  и  $Y_A$ , если при применении метода сечений на каждом участке рассматривать левую отсеченную часть балки, на которую действуют известные заданные внешние нагрузки.

I участок: при  $0 \leq z_1 \leq a$ .

$$Q_Y = P = 2qa;$$

$$M_x = P z_1 = 2qaz_1;$$

$$\text{при } z_1 = 0 \quad M_x = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a \quad M_x = 2qa^2;$$

II участок : при  $0 \leq z_2 \leq a$ .

$$Q_Y = P = 2qa;$$

$$M_x = P(a + z_2) + m = 2qa(a + z_2) + qa^2 = qa(3a + 2z_2);$$

$$\text{при } z_2 = 0 \quad M_x = 3qa^2;$$

$$\text{при } z_2 = a \quad M_x = 5qa^2.$$

III участок : при  $0 \leq z_3 \leq a$ .

$$Q_Y = P - qz_3 = 2qa - qz_3 = q(2a - z_3);$$

$$\text{при } z_3 = 0 \quad Q_Y = 2qa;$$

$$\text{при } z_3 = a \quad Q_Y = qa.$$

$$M_x = P(2a + z_3) + m - qz_3 \frac{z}{2} = 2qa(2a + z_3) + qa^2 - \frac{1}{2} qz_3^2 =$$

$$= q(5a^2 + 2az_3 - 0,5z_3^2);$$

$$\text{при } z_3 = 0 \quad M_x = 5qa^2;$$

$$\text{при } z_3 = a \quad M_x = 6,5qa^2.$$

По найденным значениям строим эпюры  $Q_Y$  (см. рисунок 3.7,б) и  $M_x$  (см. рисунок 3.7,в).

Из анализа эпюры  $M_x$  следует, что наиболее нагруженным является сечение А–А в заделке, где изгибающий момент достигает своего максимального значения:

$$\max M_x = 6,5qa^2 = 6,5 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1^2 = 6500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

3.2.7 Для выполнения проектировочного расчета необходимо вычислить геометрические характеристики заданного поперечного сечения балки (см. рисунок 3.8,в).

Так как сечение является симметричным, то вертикальная ось симметрии  $Y$  является главной центральной. Разобьем сечение на два прямоугольника I и II, введем вспомогательную ось  $X^1$  по нижней грани сечения (см. рисунок 3.8,а) и определим положение центра тяжести всего сечения по формуле

$$Y_C = \frac{S_X}{F} = \frac{F_I Y_{CI} + F_{II} Y_{CII}}{F_I + F_{II}} \quad (3.6)$$

где  $F_I$ ,  $F_{II}$  – площади прямоугольников I и II, а  $Y_{CI}$ ,  $Y_{CII}$  – координаты их центров тяжести  $C_I$  и  $C_{II}$  относительно оси  $X^1$ .

В соответствии с (I) получим координату центра тяжести всего сечения

$$Y_c = \frac{(2b \cdot 10b)5b + (2b \cdot 8b)11b}{2b \cdot 10b + 2b \cdot 8b} = 7,67b.$$

Ось  $X$  является второй главной центральной осью всего сечения. На рисунке 3.8,*a* показаны также главные центральные оси  $X_I Y_{CI}$  и  $X_{II} Y_{CII}$  отдельно для I и II прямоугольников, составляющих поперечное сечение.

Осевой момент инерции относительно оси  $x$

$$J_x = J_x^I + J_x^{II}, \quad (3.7)$$

где  $J_x^I = J_{xI}^I + b_I^2 F_I$ ,  $J_x^{II} = J_{xII}^{II} + b_{II}^2 F_{II}$  – моменты инерции I и II прямоугольников относительно оси  $x$ ;  $J_{xI}^I$ ,  $J_{xII}^{II}$  – моменты инерции каждого прямоугольника относительно его главной центральной оси  $X_I$  и  $X_{II}$  соответственно:

$$b_I = Y_c - Y_{CI} = 7,67b - 5b = 2,67b;$$

$$b_{II} = Y_{CII} - Y_c = 11b - 7,67b = 3,33b.$$

Используя формулу для вычисления осевого момента инерции для прямоугольника [1], по формуле (3.7) получим

$$J_x = \frac{2b(10b)^3}{12} + (2,67b)^2(2b \cdot 10b) + \frac{8b(2b)^3}{12} + (3,33b)^2(8b \cdot 2b) = 492b^4.$$

Статический момент площади полки относительно оси  $X$

$$S_x^I = F_{II} b_{II} = (8b \cdot 2b) 3,33b = 53,3b^3.$$

Статический момент части площади сечения, расположенной ниже оси  $x$

$$S_x^* = F \cdot Y_c = (Y_c \cdot 2b) \frac{1}{2} Y_c = (7,67b \cdot 2b) \frac{1}{2} \cdot 7,67b = 58,8b^3,$$

где  $S_x^*$  – площадь рассматриваемой части сечения,

$$Y_c = \frac{1}{2} Y_c - \text{координата ее центра тяжести } C^* \text{ (см. рисунок 3.8,a)}.$$

3.2.8 Выполним проектировочный расчет. Из рассмотрения эпюры  $M_x$  в наиболее нагруженном сечении А–А следует, что  $\max M_x = 65000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ ; верхние волокна сжаты, а нижние – растянуты.

Таким образом, в верхних волокнах, расположенных на расстоянии  $Y_{сж} = b_{II} + b = 3,33b + b = 4,33b$  от оси  $x$ , достигаются максимальные сжимающие напряжения, а в нижних волокнах, расположенных на расстоянии  $Y_p = Y_c = 7,67b$  достигаются максимальные растягивающие напряжения (см. рисунок 3.8,а).

Для хрупкого материала записывается два условия прочности:

$$\text{на растяжение } \max \sigma_{(p)} = \frac{|\max M_x|}{J_x} \cdot Y_p \leq [\sigma_p]; \quad (3.8)$$

$$\text{на сжатие } \max \sigma_{сж} = \frac{|\max M_x|}{J_x} \cdot Y_{сж} \leq [\sigma_{сж}], \quad (3.9)$$

где допускаемые напряжения

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{B(p)}}{n} = \frac{12 \cdot 10^7}{2} = 6 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$[\sigma_{сж}] = \frac{\sigma_{B(сж)}}{n} = \frac{50 \cdot 10^7}{2} = 25 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Рассмотрим условие прочности на растяжение (3.8):

$$\frac{\max M_x}{492b^4} 7,67b \leq [\sigma_p],$$

откуда следует, что

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{7,67 \max M_x}{492[\sigma_p]}} = \sqrt[3]{\frac{7,67 \cdot 65000}{492 \cdot 6 \cdot 10^7}} = 2,56 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,56 \text{ см}.$$

Из условия прочности на сжатие получим

$$\frac{\max M_x}{492b^4} \cdot 4,33b \leq [\sigma_{сж}];$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{4,33 \max M_x}{492[\sigma_{сж}]}} = \sqrt[3]{\frac{4,33 \cdot 65000}{492 \cdot 25 \cdot 10^7}} = 1,32 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,32 \text{ см}.$$

Из двух полученных характерных размеров поперечного сечения  $b$  выбираем наибольший, т. е. окончательно принимаем  $b = 2,56 \text{ см}$ . Геометрические характеристики сечения:

$$\begin{aligned}
 J_x &= 492 \cdot 2,56^4 = 21131 \text{ см}^4; \\
 S_x^n &= 53,3b^3 = 53,3 \cdot 2,56^3 = 894,2 \text{ см}^3; \\
 S_{lx}^* &= 58,8 \cdot b^3 = 58,8 \cdot 2,56^3 = 986,5 \text{ см}^3; \\
 Y_p^* &= 7,67 \cdot 2,56 = 19,64 \text{ см}; \\
 Y_{сж}^* &= 4,33 \cdot 2,56 = 11,08 \text{ см}.
 \end{aligned}$$

3.2.9 Для построения эпюр нормальных напряжений вычислим:

– максимальные растягивающие напряжения

$$\max \sigma_p = \frac{\max M_x}{J_x} Y_p = \frac{65000}{21131 \cdot 10^{-8}} \cdot 19,64 \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

– максимальные сжимающие напряжения

$$\max \sigma_{сж} = \frac{\max M_x}{J_x} Y_{сж} = \frac{65000}{21131 \cdot 10^{-8}} \cdot 11,08 \cdot 10^{-2} = 3,41 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рисунке 3.8,б.

3.2.10 Для построения эпюры касательных напряжений вычислим:

– касательные напряжения в верхних и нижних волокнах (уровни 1 и 5 сечения)  $\tau_1 = \tau_5 = 0$ ;

– касательные напряжения в месте соединения полки со стенкой (уровни 2 и 3) вычисляются по формуле Журавского [1]:

$$\tau = \frac{\max Q_Y S_x(Y)}{J_x b(Y)}, \quad (3.10)$$

где  $S_x(Y)$  – статический момент площади, лежащей выше (или ниже) рассматриваемого уровня;  $b(Y)$  – ширина сечения на рассматриваемом уровне поперечного сечения,

$$\max Q_Y = 2qa = 2 \cdot 1 \cdot 10^4 \cdot 1 = 20 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

$$\tau_2 = \frac{\max Q_Y \cdot S_x^n}{J_x \cdot 8b} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 894,2 \cdot 10^{-6}}{21131 \cdot 10^{-8} \cdot 8 \cdot 2,56 \cdot 10^{-2}} = 0,04 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$\tau_3 = \frac{\max Q_Y \cdot S_x^n}{J_x \cdot 2b} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 894,2 \cdot 10^{-6}}{21131 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 2,56 \cdot 10^{-2}} = 0,16 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$



Максимальные касательные напряжения на уровне 4, совпадающем с главной центральной осью  $x$ :

$$\max \tau = \frac{\max Q_y \cdot S_x^*}{J_x \cdot 2b} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 986,5 \cdot 10^{-6}}{21131 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 2,56 \cdot 10^{-2}} = 0,182 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Эпюра касательных напряжений показана на рисунке 3.8,в.

3.2.11 Проанализируем эпюру нормальных напряжений  $\sigma$  (см. рисунок 3.8,б) при заданном расположении поперечного сечения. Из эпюры следует, что верхние сжатые волокна сечения являются существенно недогруженными. Это объясняется тем, что хрупкий материал лучше работает на сжатие, чем на растяжение ( $[\sigma_{сж}] > [\sigma_p]$ ), а при заданном расположении сечения оказалось, что  $\max \sigma_{сж} < \max \sigma_p$ , так как  $Y_{сж} < Y_p$ . Таким образом, заданный вариант расположения сечения, очевидно, следует считать нерациональным.

Для рационального расположения поперечного сечения необходимо обеспечить выполнение условия  $Y_{сж} > Y_p$ , при котором в наиболее удаленных от оси  $X$  волокнах будут возникать максимальные сжимающие напряжения. Для этого поперечное сечение, показанное на рисунке 3.8,а, необходимо повернуть на  $180^\circ$ . При этом  $Y_{сж} = 7,67b$ ;  $Y_p = 4,33b$ .

Запишем условие прочности (3.8) и (3.9) для такого перевернутого положения сечения:

$$\max \sigma_{(p)} = \frac{|\max M_x|}{492b^4} \cdot 4,33b \leq [\sigma_p],$$

откуда следует, что

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{4,33 \cdot 65000}{492 \cdot 6 \cdot 10^7}} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 2,1 \text{ см};$$

$$\max \sigma_{(сж)} = \frac{|\max M_x|}{492b^4} \cdot 7,67b \leq [\sigma_{сж}],$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{7,67 \cdot 65000}{492 \cdot 25 \cdot 10^7}} = 1,6 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 1,6 \text{ см}.$$

Для перевернутого положения сечения окончательно следует принять  $b = 2,1$  см. Геометрические характеристики в этом случае будут равны:  $J_x = 9569 \text{ см}^4$ ;  $Y_p = 9,1 \text{ см}$ ;  $Y_{сж} = 16,1 \text{ см}$ .

Максимальные сжимающие и растягивающие нормальные напряжения будут равны:

$$\max \sigma_p = \frac{65000}{9569 \cdot 10^{-8}} \cdot 9,1 \cdot 10^{-2} = 6 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

$$\max \sigma_{сж} = \frac{65000}{9569 \cdot 10^{-8}} \cdot 16,1 \cdot 10^{-2} = 10,9 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Эпюра нормальных напряжений для перевернутого положения поперечного сечения показана на рисунке 3.9.

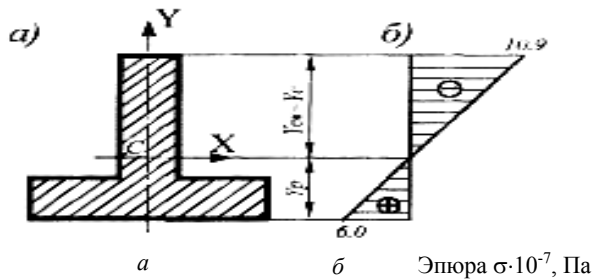


Рисунок 3.9

Из эпюры следует, что в этом случае происходит догрузка сжатой части сечения.

Кроме того, при таком расположении сечения уменьшается погонный вес балки, который определяется площадью поперечного сечения.

Если поперечное сечение расположено, как показано на рисунке 3.8, то  $F = 2b \cdot 10b + 2b \cdot 8b = 36b^2 = 36 \cdot 2,56^2 = 232,3 \text{ см}^2$ . При рациональном расположении поперечного сечения (см. рисунок 3.9)

$$F_{\text{рац}} = 36b^2 = 36 \cdot 2,1^2 = 158,8 \text{ см}^2.$$

Таким образом, погонный вес балки уменьшается в  $F/F_{\text{рац}} = 232,3/158,8 = 1,46$  раза, т. е. на 46%.

## 4 Расчет статически неопределимых плоских упругих систем

### 4.1 Задача 6

Для изображенных на рисунке 4.1 неразрезной балки и плоской рамы выполнить проектировочный расчет, принимая: а) балку (вариант *a* в заданной схеме) стальной двутавровой; б) раму (вариант *б* в заданной схеме) стальной круглого поперечного сечения; в) плоскость действия сил совпадающей с осью наименьшей жесткости сечения.

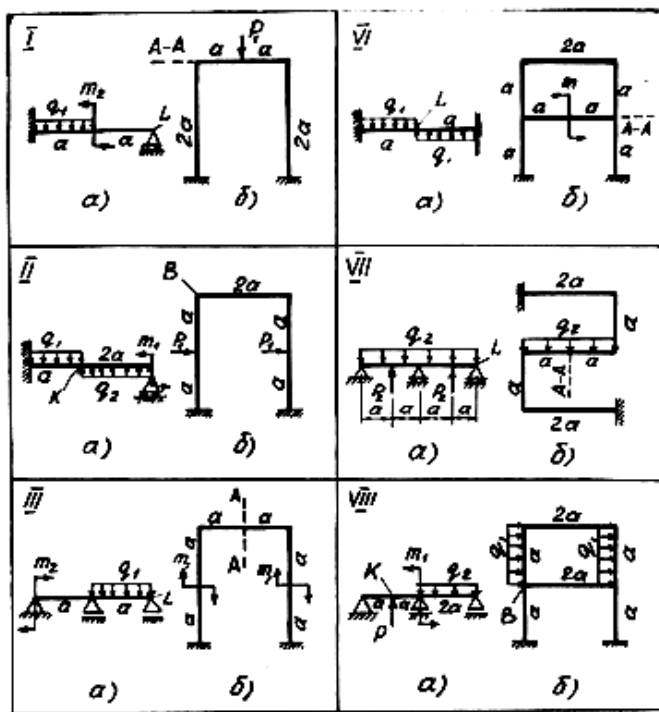


Рисунок 4.1. Начало

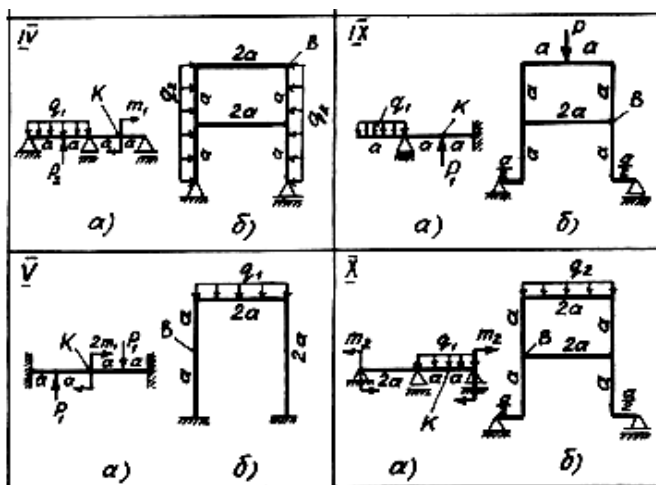


Рисунок 4.1. Окончание

Определить также прогиб сечения  $K$  или угловое перемещение сечения  $L$  балки (вариант  $a$ ) и линейное перемещение по направлению А–А или угловое перемещение сечения  $B$  рамы (вариант  $b$ ).

Расчеты при вычислении поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  для балки и изгибающего момента  $M_x$  для плоской рамы, а также определение перемещений выполнить в аналитических выражениях и лишь в расчетные формулы или окончательные выражения подставить необходимые числовые данные, находя числовые значения искомых величин.

Для балок и рам, как и в предыдущих задачах, принять:  $m = Pa = qa^2$ ; причем  $q = 10^4$  Н/м;  $a = 1$  м; запас прочности  $n = 1,5$ ; модуль упругости первого рода  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Остальные данные, необходимые для решения задачи, выбрать по таблице 4.1.

Таблица 4.1

Номер строки	Схема по рисунку 4.1	$m_1$	$m_2$	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	Марка материала
1	I	$m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$	Сталь 20
2	II	$2m$	$m$	$P$	$P$	$q$	$2q$	Сталь 40X
3	III	$m$	$2m$	$2P$	$2P$	$q$	$2q$	Сталь 30
4	IV	$2m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$	Сталь 40X
5	V	$m$	$m$	$2P$	$P$	$2q$	$q$	Сталь 40
6	VI	$m$	$m$	$P$	$P$	$2q$	$q$	Сталь 20
7	VII	$2m$	$m$	$P$	$2P$	$2q$	$q$	Сталь 50
8	VIII	$m$	$2m$	$P$	$P$	$q$	$q$	Сталь 40
9	IX	$m$	$m$	$2P$	$P$	$q$	$q$	Сталь 30
10	X	$2m$	$m$	$P$	$P$	$2q$	$q$	Сталь 40X
Буква шифра	а	б	е			г		в

Порядок выполнения работы аналогичен решению примеров 6 и 7.

### Пример 6

Для неразрезной двутавровой балки (рисунок 4.2) выполнить проектировочный расчет, если дано  $m = Pa = qa^2$ ;  $q = 2 \cdot 10^4$  Н/м;  $a = 1,6$  м; запас прочности  $n_T = 1,5$ ; модуль упругости первого рода  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па; предел текучести при растяжении и сжатии  $\sigma_{TP} = \sigma_{TC} = 48 \cdot 10^7$  Па.

4.1.1 Определим степень статической неопределимости балки ( $n$ ). На балку наложены  $x = 4$  связи; система плоская, следовательно, можно составить только  $N = 3$  уравнения равновесия; система один раз статически неопределима ( $n = x - N = 4 - 3 = 1$ ).

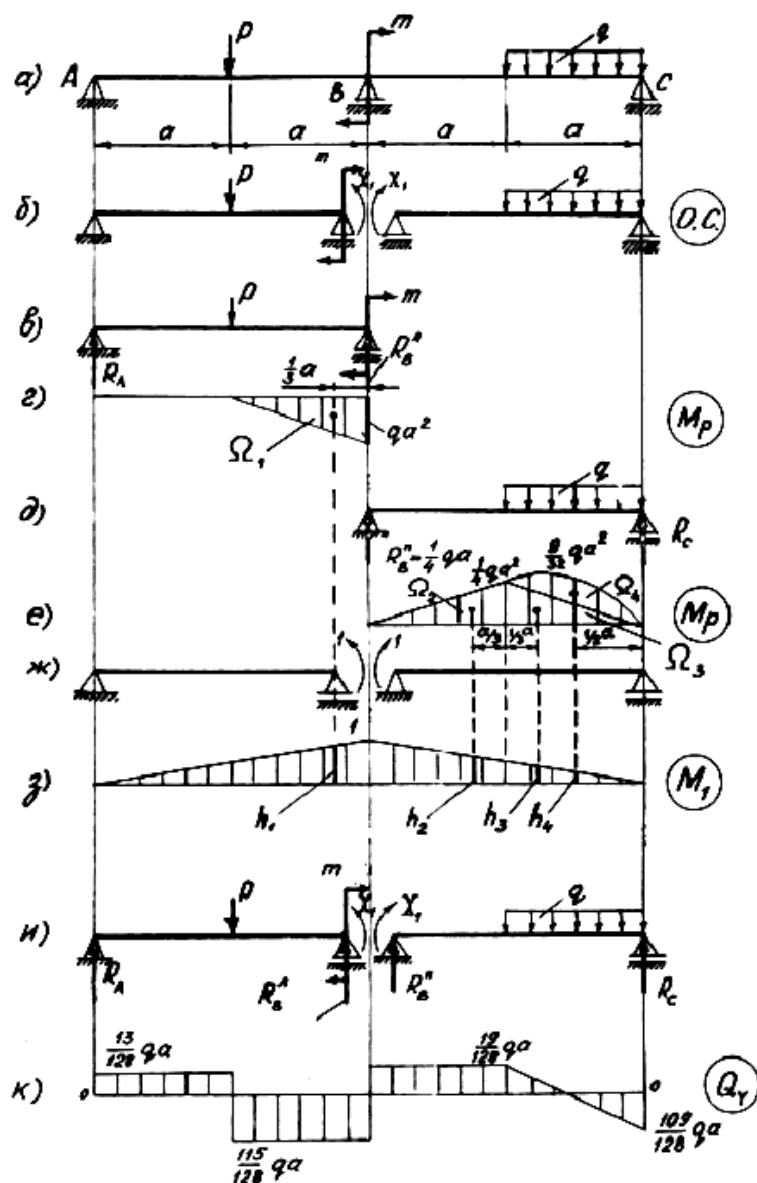


Рисунок 4.2. Начало

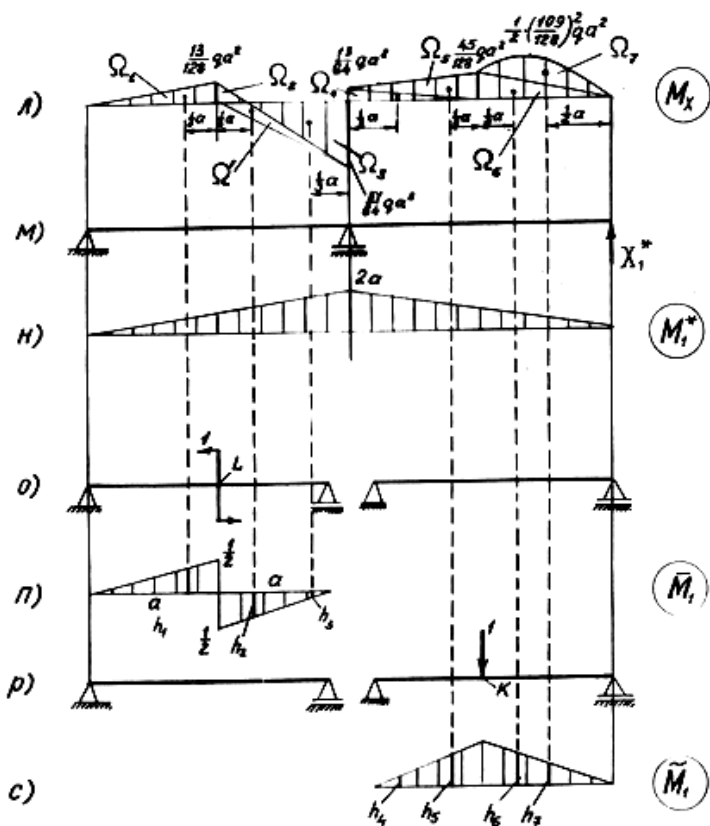


Рисунок 4.2.Окончание

4.1.2 Образует основную систему, которая получается из исходной путем отбрасывания лишних связей с точки зрения равновесия. Причем основная система должна обеспечить кинематическую неизменяемость системы, с одной стороны, и статическую определимость во всех узлах, с другой. Основная система всегда должна быть статически определимой. В данном примере принимаем основную систему, которая получается путем врезания на опоре "В" шарнира и приложенным моментом  $X_1$ , заменяющим отброшенную связь между соседними пролетами (см. рисунок 4.2,б).

4.1.3 Строим для основной системы эпюру изгибающего момента ( $M_p$ ) от действия внешних сил, для чего вначале определяем реакции в опорах для левой и правой частей балки (см. рисунок 4.2,в,д), а затем по известной методике строим эпюру  $M_p$  (см. рисунок 4.2,з,е).

4.1.4 Строим в основной системе эпюры изгибающего момента от единичных моментов по направлению лишнего неизвестного  $X_i$  (см. рисунок 4.2,з).

4.1.5 Напишем систему канонических уравнений метода сил. Она имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_k + \delta_{ip} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.1)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение по направлению  $i$ -го силового фактора под действием единичного фактора  $X_k = 1$ ;

$\delta_{ip}$  – перемещение по направлению  $i$ -го силового фактора под действием внешних сил;

$n$  – степень статической неопределимости.

Если система один раз статически неопределима, как это имеет место в нашей задаче, то каноническое уравнение (4.1) имеет вид

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{1p} = 0. \quad (4.2)$$

4.1.6 Определим  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{11}$ , используя способ Верещагина

$$\delta_{nk} = \sum_{j=1}^m \frac{\Omega_j h_j}{(EI_x)_j}, \quad (4.3)$$

где  $\Omega_j$  – площадь  $j$ -го участка криволинейной эпюры;

$h_j$  – ордината прямолинейной эпюры  $j$ -го участка, лежащая под центром тяжести криволинейной эпюры;

$(EI_x)_j$  – жесткость на изгиб  $j$ -го участка;

$m$  – число участков.

Если криволинейная и прямолинейная эпюры лежат по одну сторону от оси эпюры на  $j$ -м участке, то перед  $j$ -м слагаемым в



данной формуле ставится знак “+” и, наоборот, если по разные, то ставится знак “-”.

Если на данном участке ни одна из перемножаемых эпюр не является прямолинейной, но одна из них или обе ограничены ломаными прямыми линиями, то в этих случаях предварительно разбивают эпюры на такие участки, в пределах каждого из которых, по крайней мере, одна эпюра прямолинейна.

Если на данном участке эпюра имеет сложный вид, то она разбивается на элементарные фигуры: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и т. д., для которых величина площади  $\Omega_j$  и положение центра тяжести известны, и производится “перемножение” элементарных фигур (таблица 4.2).

Определяем  $\delta_{1p}$  как произведение площадей эпюр  $z$  и  $e$  на ординаты, взятые с эпюр  $z$  каждый раз под центром тяжести эпюр  $z$  и  $e$

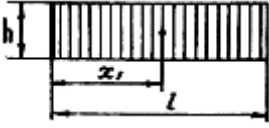
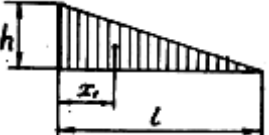

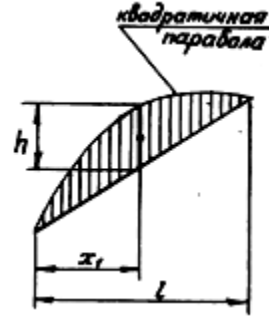
$$\begin{aligned}\delta_{1p} &= \frac{1}{EI_x} (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_3 h_3 + \Omega_4 h_4) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[ \left( -\frac{1}{2} qa^2 \right) \frac{5}{6} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 \right) \frac{2}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 \right) \frac{1}{3} a + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \right) \frac{1}{4} a \right] = \\ &= -\frac{13}{48} \cdot \frac{qa^3}{EI_x}.\end{aligned}$$

Найдем  $\delta_{11}$ , перемножая эпюру  $M_1$  саму на себя, т. е. берем составляющие площади эпюры  $z$  и умножаем на ординаты, проходящие через центр тяжести площадей той же эпюры  $z$ :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \right) \frac{2}{3} \right] \cdot 2 = \frac{4a}{3EI_x}.$$

Здесь учтено, что единичная эпюра  $M_1$  (см. рисунок 4.2,з) является симметричной, поэтому перемножение выполнено на одном участке, а результат удваивается.

Таблица 4.2

Геометрическая фигура (эпюра изгибающего момента)	Площадь $\Omega$	Координата центра тяжести, $X_1$	Примечание
	$hl$	$\frac{1}{2}l$	
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$	
	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{1}{4}l$	$h = \frac{1}{2}ql^2$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$	$h = \frac{1}{8}ql^2$

Здесь  $q$  – интенсивность распределенной внешней нагрузки на участке длиной  $l$

4.1.7 Решая каноническое уравнение (4.2), находим

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = \frac{13}{64}qa^2.$$

Знак “+” указывает на то, что направление  $X_1$  первоначально выбрано правильно.

4.1.8 Строим эпюры  $Q_Y$  и  $M_x$  известными приемами отдельно для левого и правого пролетов и сочленяем соответствующие эпюры обоих пролетов (см. рисунок 4.2,к,л), предварительно определив реакции в опорах (см. рисунок 4.2,и). При построении эпюры  $M_x$  целесообразно использовать принцип суперпозиций

$$M_x = M_p + M_1 X_1 + \dots + M_n X_n, \quad (4.4)$$

где  $M_p$  – эпюра изгибающего момента от действия внешних сил, показанная на рисунке 4.2,е);

$M_i$  – эпюра изгибающего момента от действия единичной силы в направлении неизвестной  $X_i$  (в нашем случае эпюра, показанная на рисунке 4.2,в);

$X_i$  – значение  $i$ -го лишнего неизвестного.

4.1.9 Делаем деформационную проверку, которая заключается в определении перемещений в заданной системе, значения которых известны и равны нулю. Для этого выбираем новую основную систему с новыми лишними неизвестными  $X_k^*$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) и вычисляем перемещения  $\Delta_k^*$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) в направлении каждой  $X_k^*$ -й неизвестной, например по формуле Верещагина

$$\Delta_k^* = \sum_{j=1}^m \frac{\Omega_j h_{kj}^*}{(EI_x)_j}, \quad (4.5)$$

где  $\Delta_k^*$  – перемещение в новой основной системе в направлении лишней неизвестной  $X_k^*$ ;

$\Omega_j$  – площадь  $j$ -го участка эпюры результирующего изгибающего момента, полученного в результате раскрытия статической неопределимости системы;

$h_{kj}^*$  – ордината эпюры изгибающего момента от единичной силы;

$X_k^* = 1$  в новой основной системе, лежащая под центром тяжести эпюры результирующего изгибающего момента.

В направлении новых лишних неизвестных перемещения должны быть равны нулю, следовательно, если

$$\Delta_k^* = 0,$$

то деформационная проверка выполняется и результирующая эпюра построена верно.

В нашем примере за новую основную систему принимаем систему, получающуюся из исходной путем отбрасывания правой опоры  $C$ . В качестве новой лишней неизвестной принимается реакция опоры  $C$  (см. рисунок 4.2,м).

На рисунке 4.2,м показана эпюра изгибающего момента от единичной силы по направлению лишнего неизвестного  $X_1^*$ .

Как было уже сказано, эпюра результирующего изгибающего момента  $M_x$  может быть определена по принципу суперпозиций (4.4). Поэтому при проведении деформационной проверки целесообразно производить вначале перемножение эпюры  $M_p$  на эпюру изгибающего момента от единичной силы по направлению лишнего неизвестного  $X_k^*$ , затем перемножение эпюр от единичных сил по направлению лишних неизвестных  $X_i$  на эпюру от единичной силы по направлению лишней неизвестной  $X_k^*$  и на величину лишней неизвестной  $X_i$  и результаты перемножения сложить.

В нашем примере будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_1^* = \frac{1}{EI_x} & \left[ \left( -\frac{1}{2} qa^2 a \right) \frac{5}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 a \right) \frac{4}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 a \right) \frac{2}{3} a + \right. \\ & \left. + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \right) \frac{1}{2} a + 2 \left( 1 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a \right) \frac{13}{64} qa^2 \right] = \frac{qa^4}{EI_x} \left[ -\frac{5}{6} + \frac{5}{6} \right] = 0. \end{aligned}$$

4.1.10 Напишем условие прочности для проектировочного расчета

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \text{ где } [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}.$$

$$[\sigma] = \frac{48 \cdot 10^7}{1,5} = 32 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{51}{64} \cdot \frac{qa^2}{[\sigma]} = \frac{51 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^2}{64 \cdot 32 \cdot 10^7} = 0,127 \cdot 10^{-3} (\text{м}^3) = 127 \text{ см}^3.$$

По сортаменту подбираем номер двутавра (№ 18), для которого [1–4]:

$$W_x = 143 \text{ см}^3.$$

4.1.11 Определим угол поворота сечения  $L$ . Для этого приложим в основной системе единичный внешний изгибающий момент в сечении  $L$  (см. рисунок 4.2,о) и построим эпюру изгибающего момента  $\overline{M}_1$  (см. рисунок 4.2,н) от действия этого момента. Поскольку эпюра  $\overline{M}_1$  имеется только на левом пролете балки, разобьем эпюру результирующего момента  $M_x$  (см. рисунок 4.2,л) на левом пролете на элементарные фигуры и перемножим эпюры  $\overline{M}_1$  и  $M_x$  по правилу Верещагина. При разбиении эпюры  $M_x$  на втором участке площадь незаштрихованного треугольника  $\Omega'$  прибавляется к площади  $\Omega_2$  и к площади  $\Omega_3$ , причем считается, что треугольник с площадью  $\Omega_2 + \Omega'$  целиком лежит выше оси эпюры. В результате получим:

$$\begin{aligned} \theta_L = \frac{1}{EI_x} (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_3 h_3) &= \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{128} qa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{128} qa^2 a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{51}{64} qa^2 a \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{256} \cdot \frac{qa^3}{EI_x}. \end{aligned}$$

Подставив в выражение  $\theta_L$  значения  $q, a, E$  и  $I_x = 1290 \text{ см}^4$  (для двутавра № 18), получим:

$$\theta_L = \frac{17 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^3}{256 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

4.1.12 Определим прогиб сечения  $K$  балки. Для этого в основной системе в сечении  $K$  приложим единичную силу в направлении искомого прогиба (см. рисунок 4.2,*p*) и построим эпюру  $\overline{M}_1$  (см. рисунок 4.2,*c*). А далее аналогично тому, как это делали при определении угла поворота сечения, разбиваем для правого пролета балки эпюру результирующего момента  $M_x$  (см. рисунок 4.2,*л*) на элементарные фигуры и перемножим эпюры  $M_x$  и  $\overline{M}_1$  по правилу Верещагина. В результате получим:

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \frac{1}{EI_x} (\Omega_4 h_4 + \Omega_5 h_5 + \Omega_6 h_6 + \Omega_7 h_7) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{64} q a^2 a \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{128} q a^2 a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{128} q a^2 a \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \frac{2}{3} \cdot \frac{q a^2}{8} a \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \right) = \frac{119 q a^4}{128 \cdot 6 EI_x}.\end{aligned}$$

Подставив в выражение  $\Delta_k$  необходимые значения, получим:

$$\Delta_k = \frac{119 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^4}{128 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 7,87 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,787 \text{ см}.$$

### Пример 6.2

Для плоской рамы (см. рисунок 4.3,*a*) выполнить проектировочный расчет. Определить линейное перемещение  $\Delta_A$  по направлению А – А и угловое перемещение  $\theta_B$  сечения  $B$ , если дано:  $q = 2 \cdot 10^4$  Н/м;  $a = 1,6$  м;  $\sigma_{\text{ТР}} = \sigma_{\text{СЖ}} = 48 \cdot 10^7$  Па;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па; запас прочности  $n_T = 1,5$ .

4.2.1 Определим степень статической неопределимости. Система трижды внутренне (имеет замкнутый контур) и трижды внешне

статически неопределима (всего статически неопределима 6 раз, так как имеет связей 9, а уравнений равновесия для плоской задачи – 3).

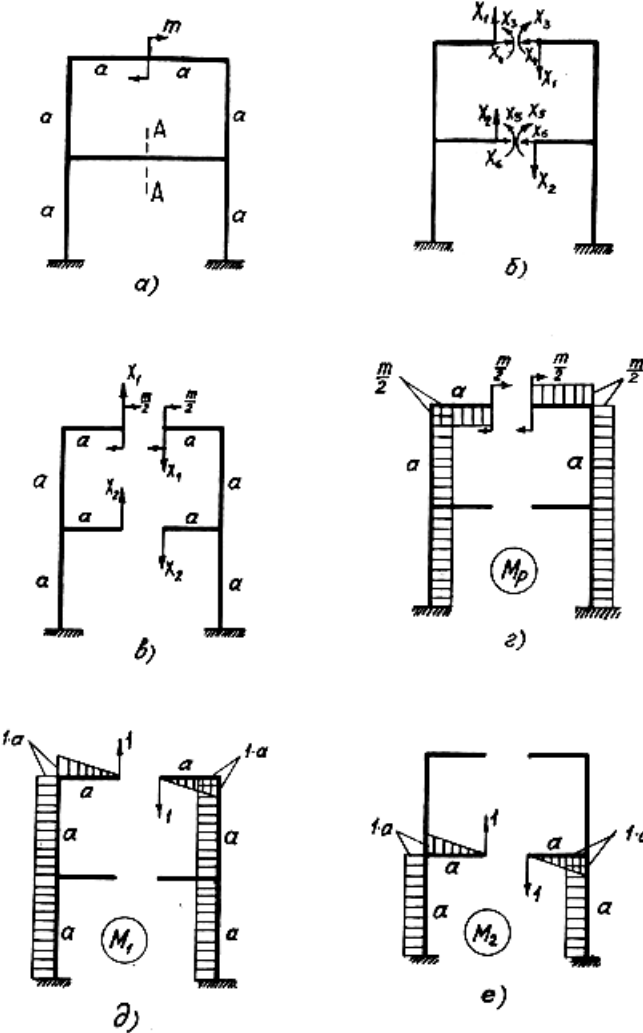


Рисунок 4.3 Начало

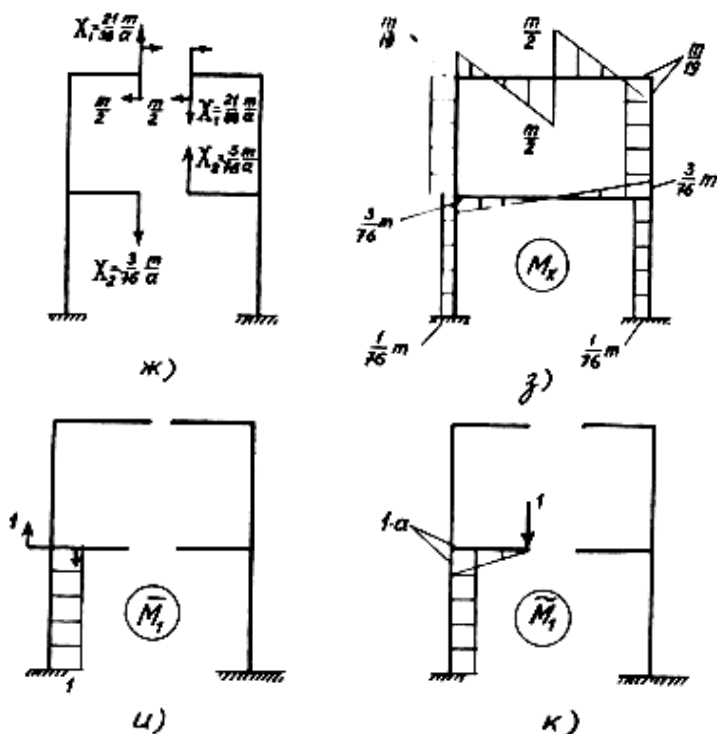


Рисунок 4.3 Окончание

4.2.2 Выберем основную систему. При выборе необходимо учитывать, что у симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные силовые факторы (перерезывающая сила), а при кососимметричной внешней нагрузке – симметричные силовые факторы (изгибающий момент и продольная сила). Учет этого позволяет уменьшить количество канонических уравнений. Наша рама является симметричной, а нагрузка – кососимметричной. Поэтому в плоскости симметрии симметричные силовые факторы будут равны нулю, и в данном



сечении возникают только поперечные силы. Таким образом, если выбрать основную систему в виде, показанном на рисунке 4.3,б, то задача сводится к решению дважды статически неопределимой системы (см. рисунок 4.3,в).

4.2.3 Система канонических уравнений метода сил (4.1) для дважды статически неопределимой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1p} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2p} &= 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

4.2.4 Определим свободные члены  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{2p}$  и коэффициенты при неизвестных, а также сами неизвестные.

Для этого:

а) строим в основной системе эпюру от заданных внешних сил  $M_p$  (см. рисунок 4.3,з) и эпюры от единичных сил  $M_1$  и  $M_2$  по направлению усилий  $X_1$  и  $X_2$  (см. рисунок 4.3,д,е).

б) перемножаем эпюры по правилу Верещагина, определяем значения

$$\delta_{1p} = \sum \int \frac{M_p M_1}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( -\frac{m}{2} a \frac{1}{2} a - \frac{m}{2} 2a \cdot a \right) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{ma^2}{EI_x},$$

$$\delta_{2p} = \sum \int \frac{M_p M_2}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( -\frac{m}{2} a \cdot a \right) = -\frac{ma^2}{EI_x},$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( \frac{1}{2} a \cdot a \frac{2}{3} a + 2a \cdot a \cdot a \right) = \frac{14}{3} \cdot \frac{a^3}{EI_x},$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 M_2}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( \frac{1}{2} a \cdot a \frac{2}{3} a + a \cdot a \cdot a \right) = \frac{8a^3}{3EI_x},$$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} (a \cdot a \cdot a) = \frac{2a^3}{EI_x}.$$

в) подставляем результаты в систему канонических уравнений (4.6)

$$\begin{cases} \frac{14}{3}X_1 + 2X_2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{a} = 0, \\ 2X_1 + \frac{8}{3}X_2 - \frac{m}{a} = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Решая систему уравнений (4.7), получим

$$X_1 = \frac{21}{38} \cdot \frac{m}{a}; \quad X_2 = -\frac{3}{76} \cdot \frac{m}{a}.$$

Значение  $X_2$  получаем со знаком минус. Это означает, что направление  $X_2$  выбрано неправильно. Изменяем направление вектора на противоположное (см. рисунок 4.3,ж).

4.2.5 Используя принцип суперпозиций (4.4), построим эпюру  $M_x$  (см. рисунок 4.3,в) и определим сечение, в котором возникает наибольший изгибающий момент. Подставляя его значение в условие прочности, определим диаметр сечения  $d$  :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma],$$

где 
$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{48 \cdot 10^7}{1,5} = 32 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Момент сопротивления поперечного сечения  $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$ , а

$$M_x = \frac{m}{2} = \frac{1}{2}qa^2 \text{ (см. рисунок 4.3,з).}$$

Отсюда получим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{qa^2}{2 \cdot 0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 32 \cdot 10^7}} = 9,28 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 92,8 \text{ мм.}$$

Окончательно принимаем  $d = 94 \text{ мм}$  (округляем до четного числа мм). Момент инерции для полученного сечения

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(9,4 \cdot 10^{-2})^4}{64} = 3,83 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

4.2.6 Определим угол поворота сечения  $B$ . В основной системе построим эпюру  $\overline{M}_1$  от единичного изгибающего момента (см. рисунок 4.3,  $u$ ), приложенного в сечении  $B$ . Перемножим по правилу Верещагина эпюры  $M_x$  и  $\overline{M}_1$

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EI_x} \left( -\frac{m}{76} a \cdot 1 \right) = -\frac{qa^3}{76EI_x} = \\ &= -\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^3}{76 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,83 \cdot 10^{-6}} = -1,41 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned}$$

4.2.7 Определим перемещение по направлению А-А: в основной системе построим эпюру  $\overline{M}_1$  от единичной силы (см. рисунок 4.3,  $к$ ), приложенной по направлению А-А; перемножим  $M_x$  и  $\overline{M}_1$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{76} ma \frac{2}{3} a - \frac{1}{76} m \cdot a \cdot a \right) = 0.$$

## 5 Расчет на сложное сопротивление

### 5.1 Задача 7

Стальной ломаный брус постоянного круглого поперечного сечения (показанный на рисунке 5.1) нагружен внешними силами  $P_i$ . Требуется выполнить проектировочный расчет, если дано: длина участков бруса  $a_i$ ;  $\sigma_{ТР} = \sigma_{ТС} = 42 \cdot 10^7 \text{ Па}$ ; запас прочности  $n_T = 1,5$ . Остальные данные, необходимые для расчета, выбрать из таблицы. Принять  $P = 10^3 \text{ Н}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ .

Порядок выполнения контрольного задания аналогичен примеру 7.

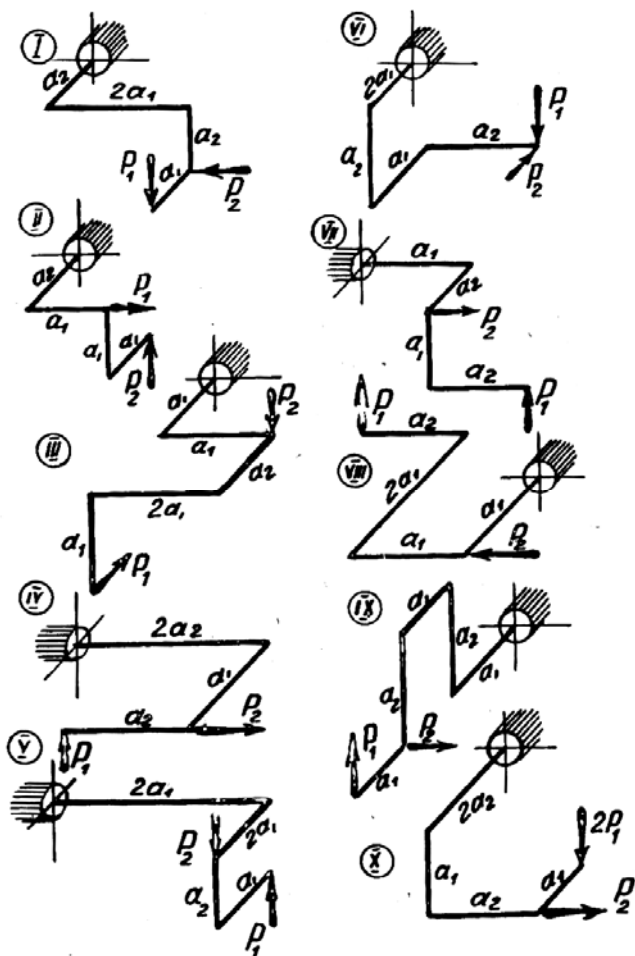


Рисунок 5.1

Номер строки	Схема по рисунку 5.1	$P_i$		$a_i$	
		$P_1$	$P_2$	$a_1$	$a_2$
1	I	$P$	$2P$	$a$	$a$
2	II	$2P$	$P$	$a$	$2a$
3	III	$2P$	$P$	$a$	$a$
4	IV	$3P$	$2P$	$a$	$a$
5	V	$1,5P$	$2P$	$a$	$a$
6	VI	$P$	$P$	$a$	$2a$
7	VII	$P$	$2P$	$a$	$a$
8	VIII	$1,5P$	$P$	$a$	$2a$
9	IX	$P$	$P$	$a$	$a$
10	X	$2P$	$P$	$a$	$a$
Буква шифра	а	в	г	д	е

### Пример 7.

Произвести проектировочный расчет ломаного бруса круглого поперечного сечения (рисунок 5.2,а), если дано  $P_1 = P$ ;  $P_2 = 2P$ ;  $P = 10^3$  Н;  $a_1 = a_2 = a_3 = 0,5a_4 = a = 1,4$  м;  $\sigma_{TP} = \sigma_{TC} = 42 \cdot 10^7$  Па, запас прочности  $n_T = 1,5$ .

### Решение.

Строим эпюры внутренних силовых факторов. Ломаные брусья состоят из отдельных прямых брусьев, жестко соединенных между собой под прямым углом. Для ломаного бруса строим эпюры крутящего момента  $M_{кр}$  и изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$ . При построении этих эпюр для пространственных брусьев, представленных на рисунке 5.1, текущую систему координат выбирают на участке, который граничит со свободным концом рамы. При этом ось  $z$  всегда направляют в сторону свободного конца, а оси  $x$ ,  $y$

размещают в плоскости поперечного сечения. При переходе к последующему участку производят поворот системы координат, принятой на предыдущем участке, относительно оси, которая перпендикулярна к плоскости, образуемой этими смежными участками рамы. Поворот осуществляется так, чтобы ось совпадала с осью бруса и была направлена в сторону, противоположную движению. Движение осуществляется от свободного конца бруса в сторону защемления.

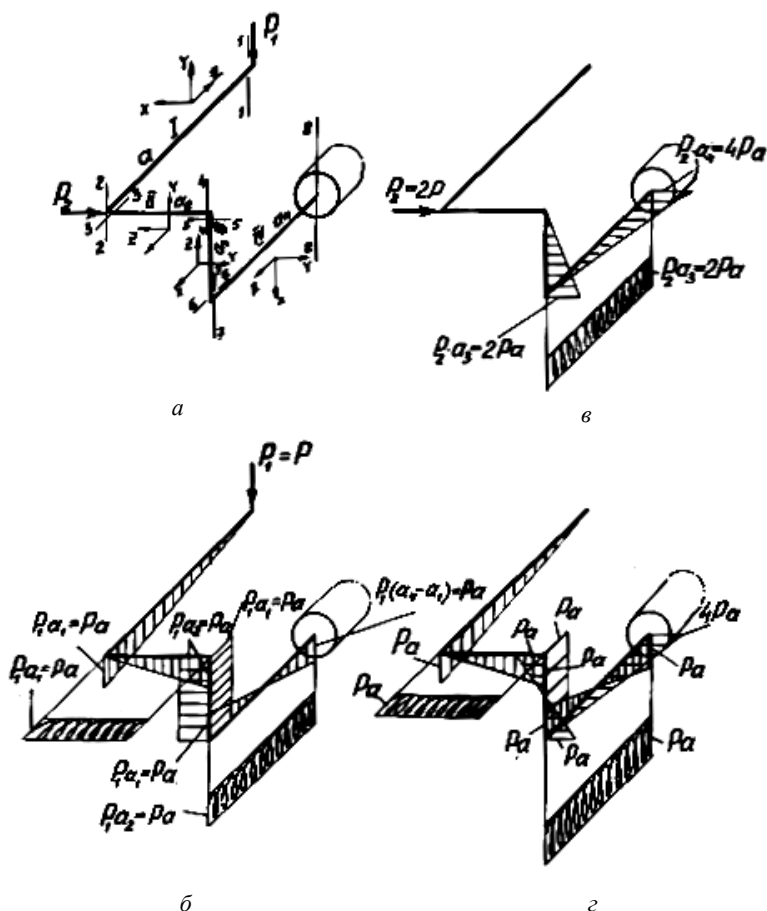


Рисунок 5.2

Эпюры строим отдельно вначале от силы  $P_1$  (см. рисунок 5.2,б), а затем от силы  $P_2$  (см. рисунок 5.2,в). Затем построим суммарные эпюры (см. рисунок 5.2,г).

#### 5.1.1 Построение эпюр при действии на брус силы $P_1$ .

Первый участок. Ось  $y$  параллельна силе  $P_1$ , а ось  $z$  пересекает линию действия этой силы, поэтому в пределах участка изгибающий момент  $M_y$  и крутящий момент  $M_{кр}$  отсутствуют (см. рисунок 5.1,а,б). При размещении начала системы координат в первом характерном сечении 1–1 участка плечо силы  $P_1$  относительно оси  $x$  равно 0 и  $M_x = 0$ . При размещении системы координат во втором характерном сечении 2–2 можно видеть, что  $M_x = P_1 a_1 = Pa$ .

Плоскостью действия изгибающего момента  $M_x$  будет плоскость, образуемая осями  $z$  и  $y$  (сжатое волокно снизу). Учитывая это, эпюра  $M_x$  строится в плоскости  $zy$  ниже базисной линии (рисунок 5.2,б), т. е. со стороны сжатого волокна.

Второй участок. Если начало системы координат в первом характерном сечении 3–3, то ось  $x$  пересекает линию действия силы  $P_1$  и  $M_x = 0$ ; момент силы относительно оси  $y$  равен нулю в пределах всего участка (ось параллельна силе), а  $M_{кр} = P_1 \cdot a_1 = Pa$  во всех сечениях участка. Если начало системы координат разместить в характерном сечении 4–4, то, очевидно,  $M_x = P_1 \cdot a_1 = Pa$ , изгибающий момент действует в плоскости двух других осей ( $z, y$ ). Сжатое волокно бруса – внизу. Откладывая ординату  $M_x = Pa$  перпендикулярно оси  $z$  по линии оси  $y$ , построим эпюру изгибающего момента на втором участке бруса со стороны сжатого волокна.

Третий участок. Ось  $z$  параллельна силе  $P_1$ , поэтому в пределах участка  $M_z = 0$ . Изгибающий момент  $M_x = P_1 \cdot a_2 = Pa$  (сжатое волокно слева), момент  $M_y = P_1 \cdot a_1 = Pa$  (сжатое волокно за плоскостью чертежа). Значения  $M_x$  и  $M_y$  в пределах участка – постоянны.

Четвертый участок. Ось  $x$  параллельна силе  $P_1$ , поэтому  $M_x = 0$ . Изгибающий момент  $M_y = P_1 \cdot a_1 = Pa$  (сжатое волокно сверху). При размещении начала текущей системы координат во втором характерном сечении 8–8 участка (в защемлении) сжатое волокно будет внизу  $M_y = P_1(a_4 - a_1) = Pa$ . Крутящий момент  $M_{кр} = P_1 a_2 = Pa$  направлен против часовой стрелки (положительный), если смотреть со стороны оси  $z$ , причем по всей длине участка бруса – постоянный.

#### 5.1.2 Построение эпюр при действии силы $P_2 = 2P$ .

Изгибающих или крутящих моментов в пределах первого и второго участков (рисунок 5.2,в) не будет. В этом легко убедиться, пользуясь методом сечений и каждый раз рассматривая равновесие части бруса со стороны свободного конца.

Третий участок. Размещая начало текущей системы координат в характерном сечении 5–5, видим, что линия действия силы  $P_2$  совпадает с осью  $y$  и пересекает оси  $x$  и  $z$ . Поэтому  $M_x = M_y = M_{кр} = 0$ . Если начало системы координат разместить в сечении 6–6, то  $M_{кр} = M_y = 0$ , а  $M_x = P_2 a_3 = 2Pa$ . Эпюру необходимо откладывать в плоскости двух других осей (в плоскости  $zy$ ), справа от базисной линии – на сжатом волокне.

Четвертый участок. Начало системы координат разместим в сечении 7–7. В этом случае ось  $y$  параллельна силе  $P_2$  и  $M_y = 0$ . Ось  $x$  пересекает линию действия силы  $P_2$  и  $M_x = 0$ . Наконец,  $M_{кр} = P_2 a_3 = -2Pa$ . Знак минус указывает, что крутящий момент направлен по часовой стрелке, если смотреть со стороны оси  $z$  (рисунок 5.2,а).



Начало текущей системы координат разместим в характерном сечении 8–8. Из рассмотрения положения осей и направления силы находим

$$M_Y = 0, \quad M_x = P_2 a_4 = 2Pa = 4Pa, \quad M_{кр} = -P_2 a_3 = -2Pa.$$

Построение эпюр  $M_{кр}$  и  $M_x$  на третьем и четвертом участках от силы  $P_2$  представлено на рисунке 5.2,в.

5.1.3 Построение эпюр при одновременном действии на брус сил  $P_1$  и  $P_2$ .

Эпюры изгибающих и крутящих моментов при одновременном действии сил  $P_1$  и  $P_2$  можно построить, используя принцип суперпозиций:

а) путем алгебраического сложения эпюр изгибающих моментов, лежащих в одной и той же плоскости. Например, на третьем участке в одной и той же плоскости  $xy$  лежат изгибающие моменты  $M_x(P_1)$  и  $M_x(P_2)$ . Алгебраически суммируя ординаты этих эпюр, получим:

– в сечении 5–5:  $M_x = M_x(P_1) + M_x(P_2) = Pa + 0 = Pa$ .

– (сжатые волокна находятся слева);

– в сечении 6–6:  $M_x = Pa - 2Pa = -Pa$

(сжатые волокна находятся справа от базовой линии).

Суммарная эпюра приведена на рисунке 5.2,з;

б) применяя алгебраическое сложение значений крутящих моментов в пределах участка. Например, на четвертом участке крутящий момент от силы  $P_1$  равен  $M_{кр} = Pa$ , а от силы  $P_2$  –  $M_{кр} = -2Pa$ . Следовательно, результирующий момент будет найден как алгебраическая сумма  $M_{кр} = -Pa$ .

Результирующие эпюры  $M_x, M_Y, M_{кр}$  при одновременном действии сил  $P_1$  и  $P_2$  представлены на рисунке 5.2,з.

5.1.4 Определим опасный участок и в нем опасное сечение. Из рассмотрения суммарной эпюры (см. рисунок 5.2,з) видим, что опасным будет участок IV, опасное сечение которого 8–8

(см. рисунок 5.2,а). Здесь  $M_{кр} = Pa$ ,  $M_x = 4Pa$ ,  $M_y = Pa$ . Воспользовавшись методом сечений, покажем часть бруса, величины и направления  $M_x, M_y, M_{кр}$  в опасном сечении 8–8 (рисунок 5.3). Направления моментов соответствуют результирующей эпюре (см. рисунок 5.2,з).

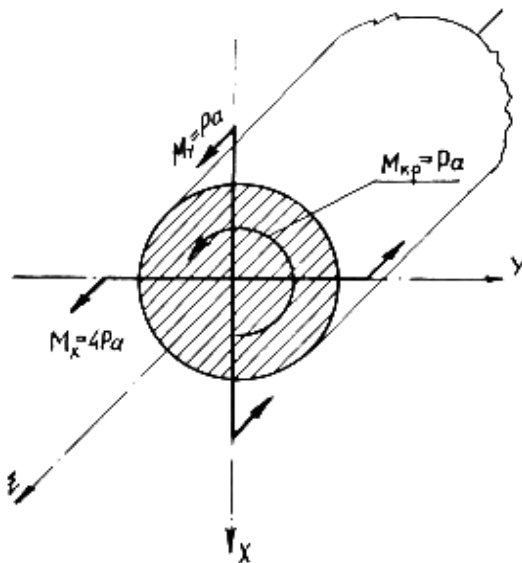


Рисунок 5.3

5.1.5 Определим необходимый диаметр поперечного сечения бруса. Воспользуемся теорией наибольших касательных напряжений (третья теория) и определим величину эквивалентного момента в опасном сечении

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{(4Pa)^2 + (Pa)^2 + (Pa)^2} = 3\sqrt{2}Pa. \quad (5.1)$$

Условие прочности имеет вид

$$\max \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma], \quad (5.2)$$

где момент сопротивления поперечного сечения на изгиб равен

$$W_{\text{и}} = \pi d^3 / 32 \approx 0,1d^3,$$

а допускаемое напряжение

$$[\sigma] - \frac{\sigma_{\text{T}}}{n_{\text{T}}} = \frac{42 \cdot 10^7}{1,5} = 28 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Решая условие прочности (5.2) с учетом (5.1) относительно диаметра  $d$ , получим:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}Pa}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot 1,4}{0,1 \cdot 28 \cdot 10^7}} = 5,96 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 59,6 \text{ мм.}$$

Округляя величину диаметра в большую сторону до четного числа миллиметров, окончательно принимаем  $d = 60 \text{ мм}$ .

**Примечания:** 1. Если при расчете используется IV теория прочности (энергетическая), то эквивалентный момент определяется по формуле

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}.$$

2. Если из суммарных эпюр (см. рисунок 5.2,з) не удастся сразу установить опасное сечение, то вначале намечают возможные опасные сечения на каждом участке, а затем вычисляют в них величину  $M_{\text{ЭКВ}}$  в соответствии с принятой теорией прочности. Сечение, в котором  $M_{\text{ЭКВ}}$  принимает максимальное значение, считается опасным и в нем производится расчет на прочность.

## 6 Расчет упругих систем на устойчивость и динамическое действие нагрузок

### 6.1 Задача 8

Определить допускаемое значение силы  $[P_y]$  из расчета на устойчивость стержня. Коэффициент запаса устойчивости для стали  $n_y = 2,5$  и для чугуна  $n_y = 4$ . Опорные закрепления в обеих главных плоскостях одинаковы. Расчетные схемы и поперечные сечения стержней приведены на рисунке 6.1, основные параметры даны в таблице 6.1.

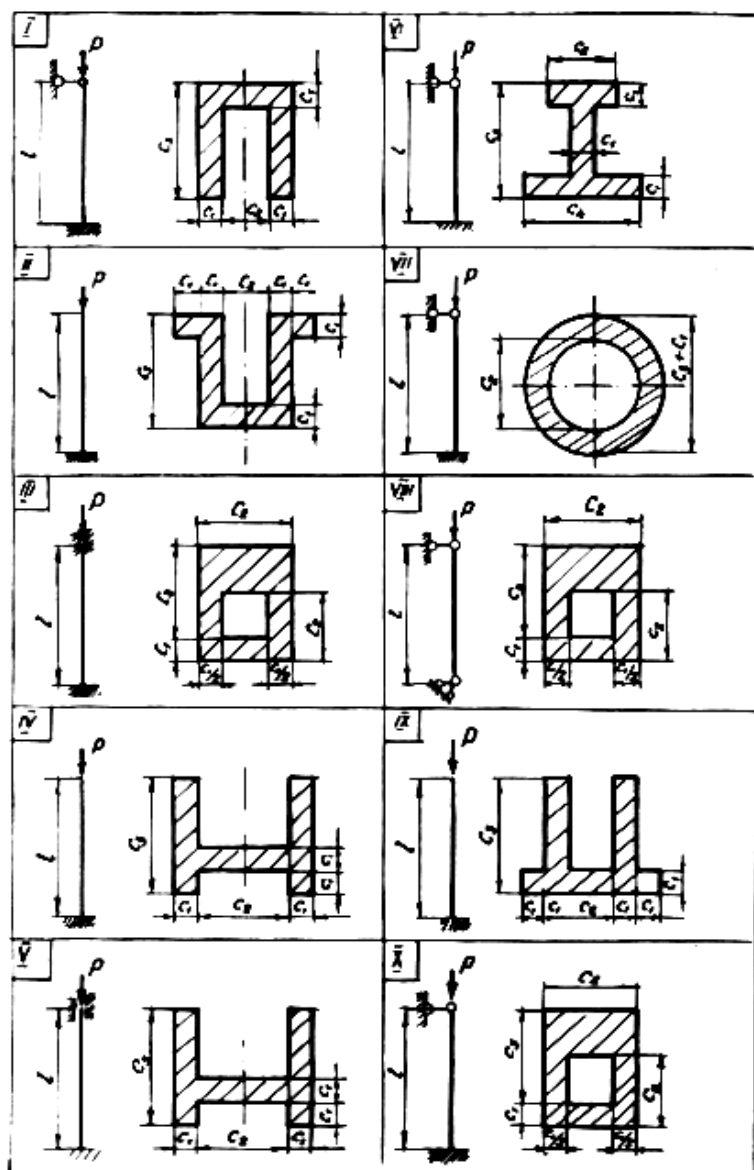


Рисунок 6.1

Таблица 6.1

Номер строки	Схема по рисунку 6.1	$l$ , м	$c_1$ , мм	$c_2$ , мм	$c_3$ , мм	Материал	$E \cdot 10^{-11}$ Па	$\sigma_{\text{тц}} \cdot 10^{-7}$ Па	Константы Ясинского		
									$a \cdot 10^{-7}$ Па	$b \cdot 10^{-5}$ Па	$c \cdot 10^{-5}$ Па
1	I	1,8	15	35	70	Сталь	2,2	20	31	11,3	0
2	II	1,9	20	45	60		2,1	21	32	12,0	0
3	III	2,2	20	50	70		1,9	23	34	13,0	0
4	IV	2,5	30	60	85		2,1	19	30	10,5	0
5	V	2,7	30	50	80		2,0	25	35	13,0	0
6	VI	3,0	25	55	90	Чугун	1,0	20	78	120	0,5
7	VII	1,7	15	50	85		1,1	20	77	125	0,51
8	VIII	2,8	25	65	75		1,0	19	70	120	0,5
9	IX	2,4	20	45	75		0,9	18	70	115	0,5
0	X	2,1	15	40	60		1,0	18	70	116	0,51
Буква шифра	а	г	д			е					

Указание. Формула Ясинского  $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$  применима, если гибкость стержня  $\lambda$  удовлетворяет условиям:

- для стали  $40 \leq \lambda < \lambda_{пред}$ ;
- для чугуна  $20 \leq \lambda < \lambda_{пред}$ ;

где  $\lambda_{пред}$  – предельная гибкость.

При  $\lambda \geq \lambda_{пред}$  применяется формула Эйлера

### Пример 8.

В соответствии с условиями задачи 8 определить допускаемое значение силы  $[P_y]$  из расчета на устойчивость стального стержня, показанного на рисунке 6.2, если известно:  $l = 1,2$  м;  $C_1 = 20$  мм;  $C_2 = 40$  мм;  $C_3 = 65$  мм;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\sigma_{пл} = 2 \cdot 10^8$  Па;  $b = 11,4 \cdot 10^5$  Па,  $c = 0$ ,  $a = 31 \cdot 10^7$  Па.

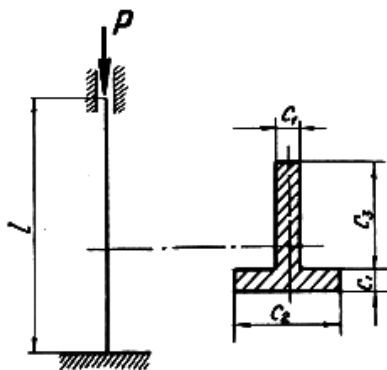


Рисунок 6.2

6.1.1 Определяем положение центра тяжести поперечного сечения. Для этого выбираем вспомогательную систему координат  $ux'$  (рисунок 6.3) где ось  $y$ , будучи осью симметрии, является главной центральной осью.

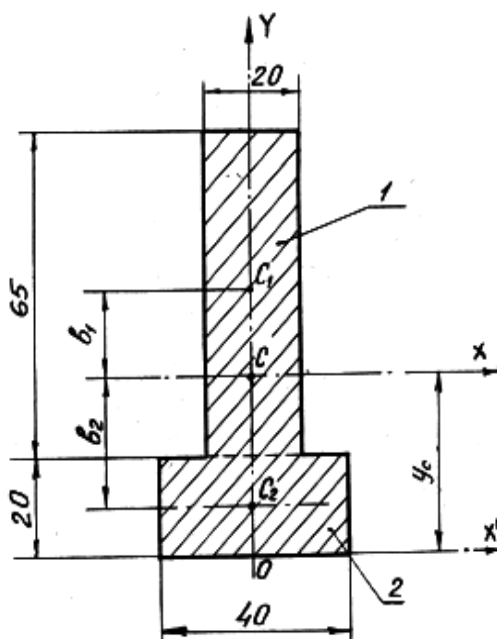


Рисунок 6.3

Для определения вертикальной координаты центра тяжести разбиваем сечение на два прямоугольника и определяем  $y_c$  по формуле

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{40 \cdot 20 \cdot 10 + 20 \cdot 65 \cdot 52,5}{40 \cdot 20 + 20 \cdot 65} = 36,3 \text{ мм};$$

где  $F_y, y_{ci}$  – площадь и координата тяжести  $i$ -й части сечения в принятой системе координат;  $n$  – число элементарных частей, на которые разбивается сечение (в данном случае  $n = 2$ ).



Вторая главная центральная ось  $x$  проходит через центр тяжести “С” всего сечения (см. рисунок 6.3).

6.1.2 Определяем моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{xi} + b_i^2 F_i), \quad (6.1)$$

где  $I_{xi}$  – момент инерции  $i$ -й части относительно своей центральной оси;  $b_i$  – расстояние между центральной осью  $i$ -й части и главной центральной осью всего сечения.

Применительно к рассматриваемому сечению (см. рисунок 6.3) получим:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x1} + b_1^2 F_1 + I_{x2} + b_2^2 F_2 = \\ &= \frac{40 \cdot 20^3}{12} + 800 \cdot 26,3^2 + \frac{20 \cdot 65^3}{12} + 16,2^2 \cdot 1300 = 13,8 \cdot 10^5 \text{ мм}^4. \end{aligned}$$

Так как ось  $y$  является главной центральной для всего сечения и для каждой его части, то второй осевой момент инерции вычисляется как

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{yi} = I_{y1} + I_{y2} = \frac{65 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Так как  $I_x > I_y$ , а условия закрепления концов одинаковы во всех плоскостях, то потеря устойчивости происходит в плоскости минимальной жесткости, т. е. в плоскости чертежа (см. рисунок 6.2) относительно оси  $y$ , а  $I_{\min} = I_y = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$ .

6.1.3 Определяем гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (6.2)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведенной длины, величина которого зависит от характера закрепления концов стержня [1,2] и в рассматри-

ваемом случае  $\mu = 0,5$ ;  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения, вычисляемый по формуле

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^4}{2100}} = 8,45 \text{ мм}^2.$$

Следовательно, гибкость равна

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1200}{8,45} = 71,0.$$

#### 6.1.4 Предельная гибкость стержня

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^8}} = 100.$$

6.1.5 Определяем величину критической силы. Так как  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , то формула Эйлера неприменима. Расчет производим по формуле Ясинского.

Величина критических напряжений

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 31 \cdot 10^7 - 11,4 \cdot 10^5 \cdot 71 = 22,9 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Критическая сила

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 22,9 \cdot 10^7 \cdot 21 \cdot 10^{-4} = 48,1 \cdot 10^4 \text{ Н} = 481 \text{ кН}.$$

(здесь  $F = 2100 \text{ мм}^2 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ).

6.1.6 Допускаемое значение сжимающей силы из расчета на устойчивость

$$[P_y] = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{481}{2,5} = 192,4 \text{ кН}.$$

## 6.2

### задача 9

На упругую систему (рисунок 6.4) с высоты  $H$  падает груз  $Q$ . Подобрать размеры поперечного сечения конструкции, изготовленной из малоуглеродистой стали, если  $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 32 \cdot 10^7$  Па,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па и запас прочности  $n = 2$ . Массу упругой системы не учитывать. Данные, необходимые для решения задачи, выбрать из таблицы 6.2. Принять  $\frac{h}{b} = 2$ .

Таблица 6.2

Номер строки	Схема по рисунку 6.4	$Q$ , Н	$H$ , м	$a$ , м	Номер строки	Схема по рисунку 6.4	$Q$ , Н	$H$ , м	$a$ , м
1	I	200	0,5	1,0	6	VI	500	0,3	1,2
2	II	400	0,4	1,2	7	VII	750	0,3	0,8
3	III	600	0,2	1,5	8	VIII	800	0,2	1,5
4	IV	800	0,4	1,0	9	IX	900	0,2	1,0
5	V	1000	0,1	0,8	10	X	100	0,5	1,0
Буква шифра	г	в	б	д	Буква шифра	г	в	б	д

### Пример 9.

В соответствии с условиями задачи 9 подобрать размеры круглого поперечного сечения балки, показанного на рисунке 6.5,а при  $Q = 2 \cdot 10^2$  Н,  $a = 2$  м,  $H = 0,2$  м.

6.2.1 Приложим к системе статическую силу, равную весу падающего груза  $Q$  (рисунок 6.5,б) и построим эпюру изгибающего момента  $M_x$  (рисунок 6.5, в).

6.2.2 По направлению движения падающего груза прикладываем к системе единичную силу (рисунок 6.5,г) и строим эпюру изгибающего момента  $M_1$  от действия единичной силы (рисунок 6.5,д).

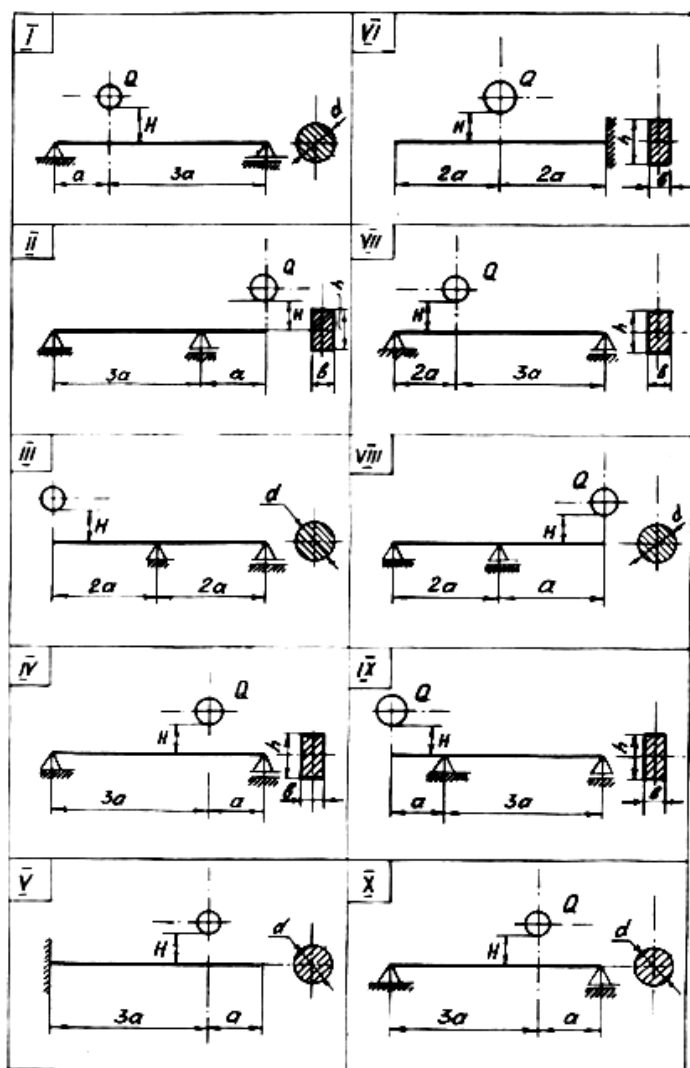


Рисунок 6.4

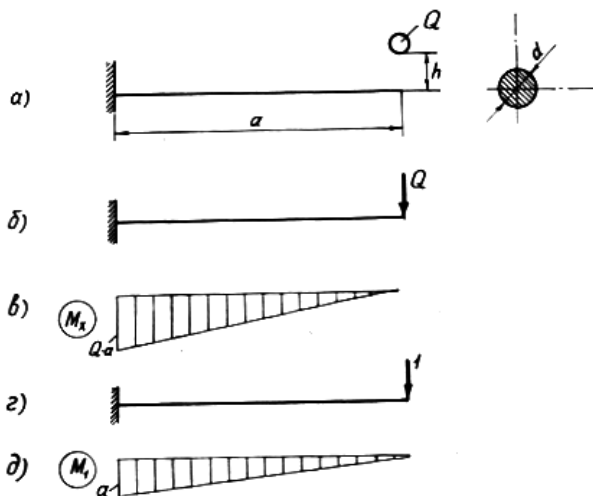


Рисунок 6.5

6.2.3 По правилу Верещагина определяем перемещение  $\Delta_{ст}$  по направлению движения падающего груза при его статическом приложении

$$\Delta_{ст} = \int \frac{M_x M_1}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} Q \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) = \frac{Qa^3}{3EI_x}. \quad (6.3)$$

Подставляя в (6.3) момент инерции поперечного сечения  $I_x = \frac{\pi d^4}{64}$ , получим

$$\Delta_{ст} = \frac{64Qa^3}{3\pi E d^4}.$$

6.2.4 Определим коэффициент динамичности по приближенной формуле

$$k_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{ст}}}. \quad (6.4)$$

Подставив найденное выражение для  $\Delta_{\text{ст}}$  в (6.4), получим:

$$k_d = \frac{d}{4a} \sqrt{\frac{3\pi EH}{2Qa}}.$$

6.2.5 Обращаясь к эпюре  $M_x$  (см. рисунок 6.2,в), находим опасное сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшего значения  $\max M_x = Qa$ , и определяем максимальную величину статических напряжений

$$\max \sigma_{\text{ст}} = \frac{\max M_x}{W_x} = \frac{Qa}{0,1d^3}.$$

6.2.6 Определим величину динамических напряжений в опасном сечении

$$\max \sigma_{\text{дин}} = k_d (\max \sigma_{\text{ст}}) = \frac{d^2}{4a} \sqrt{\frac{3\pi EH}{2Qa}} \cdot \frac{Qa}{0,1d^3} = \frac{1}{0,4d} \sqrt{\frac{3\pi QE H}{2a}}. \quad (6.5)$$

6.2.7 Запишем условие прочности, которое с учетом (6.5) принимает вид

$$\max \sigma_{\text{дин}} = \frac{1}{0,4d} \sqrt{\frac{3\pi QE H}{2a}} \leq [\sigma] \quad (6.6)$$

и определим из него требуемый диаметр  $d$

$$\begin{aligned} d &\geq \frac{1}{0,4[\sigma]} \sqrt{\frac{3\pi QE H}{2a}} = \frac{1}{0,4 \cdot 16 \cdot 10^7} \sqrt{\frac{3\pi \cdot 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,2}{2 \cdot 2}} = \\ &= 6,78 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 67,8 \text{ мм}, \end{aligned}$$

где допускаемые напряжения

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{32 \cdot 10^7}{2} = 16 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Округляя полученное значение  $d$  в большую сторону до четного числа мм, окончательно принимаем  $d = 68 \text{ мм}$ .

## Список рекомендуемой литературы

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 540 с.
2. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1976. – 608 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1974. – 704 с.
4. Минин Л. С. Расчетные и тестовые задачи по сопротивлению материалов. Учеб. пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 224 с.
5. Оформление учебно-конструкторской документации: Метод. указания для выполнения работ по курсовому и дипломному проектированию / Сост. И. Н. Гонтарь, Н. Е. Денисова, В. А. Шорин, Н. И. Волчихина. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 88 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1 Методические указания по темам курса.....	5
2 Расчет статически неопределимых систем при растяжении, сжатии и кручении .....	10
2.1 Задача 1 .....	10
2.2 Задача 2 .....	16
2.3 Задача 3 .....	22
3 Расчет балок на изгиб.....	30
3.1 Задача 4 .....	30
3.2 Задача 5 .....	43
4 Расчет статически неопределимых плоских упругих систем .....	54
4.1 Задача 6 .....	54
5 Расчет на сложное сопротивление .....	70
5.1 Задача 7 .....	70
6 Расчет упругих систем на устойчивость и динамическое действие нагрузок.....	78
6.1 Задача 8 .....	78
6.2 Задача 9 .....	85
Список рекомендуемой литературы .....	89



## 4 Расчет статически неопределимых плоских упругих систем

### 4.1 Задача 6

Для изображенных на рисунке 4.1 неразрезной балки и плоской рамы выполнить проектировочный расчет, принимая: а) балку (вариант а в заданной схеме) стальной двутавровой; б) раму (вариант б в заданной схеме) стальной круглого поперечного сечения; в) плоскость действия сил совпадающей с осью наименьшей жесткости сечения.

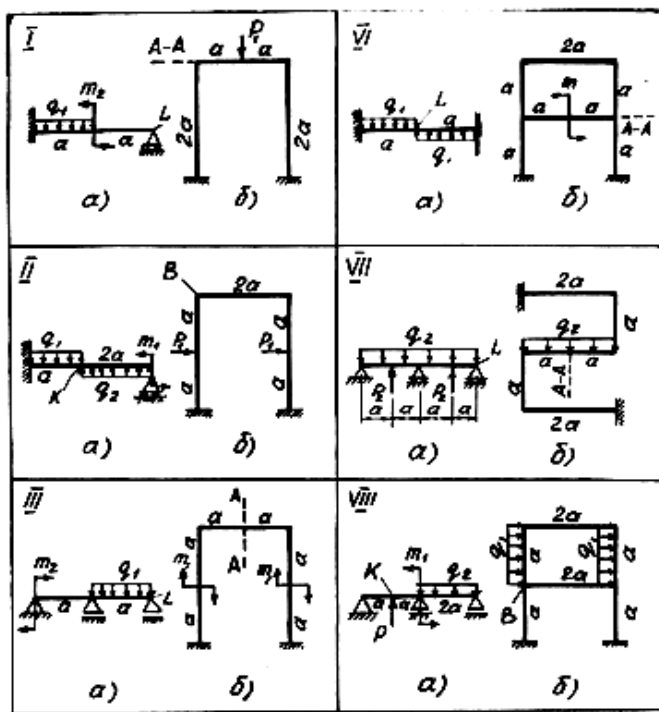


Рисунок 4.1. Начало

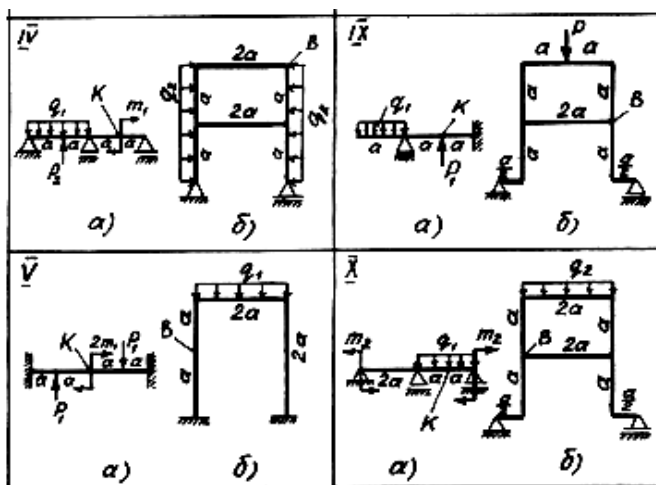


Рисунок 4.1. Окончание

Определить также прогиб сечения  $K$  или угловое перемещение сечения  $L$  балки (вариант  $a$ ) и линейное перемещение по направлению А–А или угловое перемещение сечения  $B$  рамы (вариант  $b$ ).

Расчеты при вычислении поперечной силы  $Q_y$  и изгибающего момента  $M_x$  для балки и изгибающего момента  $M_x$  для плоской рамы, а также определение перемещений выполнить в аналитических выражениях и лишь в расчетные формулы или окончательные выражения подставить необходимые числовые данные, находя числовые значения искомых величин.

Для балок и рам, как и в предыдущих задачах, принять:  $m = Pa = qa^2$ ; причем  $q = 10^4$  Н/м;  $a = 1$  м; запас прочности  $n = 1,5$ ; модуль упругости первого рода  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Остальные данные, необходимые для решения задачи, выбрать по таблице 4.1.

Таблица 4.1

Номер строки	Схема по рис. 4.1	$m_1$	$m_2$	$P_1$	$P_2$	$q_1$	$q_2$	Марка материала
1	I	$m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$	Сталь 20
2	II	$2m$	$m$	$P$	$P$	$q$	$2q$	Сталь 40X
3	III	$m$	$2m$	$2P$	$2P$	$q$	$2q$	Сталь 30
4	IV	$2m$	$2m$	$P$	$2P$	$q$	$q$	Сталь 40X
5	V	$m$	$m$	$2P$	$P$	$2q$	$q$	Сталь 40
6	VI	$m$	$m$	$P$	$P$	$2q$	$q$	Сталь 20
7	VII	$2m$	$m$	$P$	$2P$	$2q$	$q$	Сталь 50
8	VIII	$m$	$2m$	$P$	$P$	$q$	$q$	Сталь 40
9	IX	$m$	$m$	$2P$	$P$	$q$	$q$	Сталь 30
10	X	$2m$	$m$	$P$	$P$	$2q$	$q$	Сталь 40X
Буква шифра	а	б	е			г		в

Порядок выполнения работы аналогичен решению примеров 6 и 7.

### Пример 6

Для неразрезной двутавровой балки (рисунок 4.2) выполнить проектировочный расчет, если дано  $m = Pa = qa^2$ ;  $q = 2 \cdot 10^4$  Н/м;  $a = 1,6$  м; запас прочности  $n_T = 1,5$ ; модуль упругости первого рода  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па; предел текучести при растяжении и сжатии  $\sigma_{TP} = \sigma_{TC} = 48 \cdot 10^7$  Па.

4.1.1 Определим степень статической неопределимости балки ( $n$ ). На балку наложены  $x = 4$  связи; система плоская, следовательно, можно составить только  $N = 3$  уравнения равновесия; система один раз статически неопределима ( $n = x - N = 4 - 3 = 1$ ).

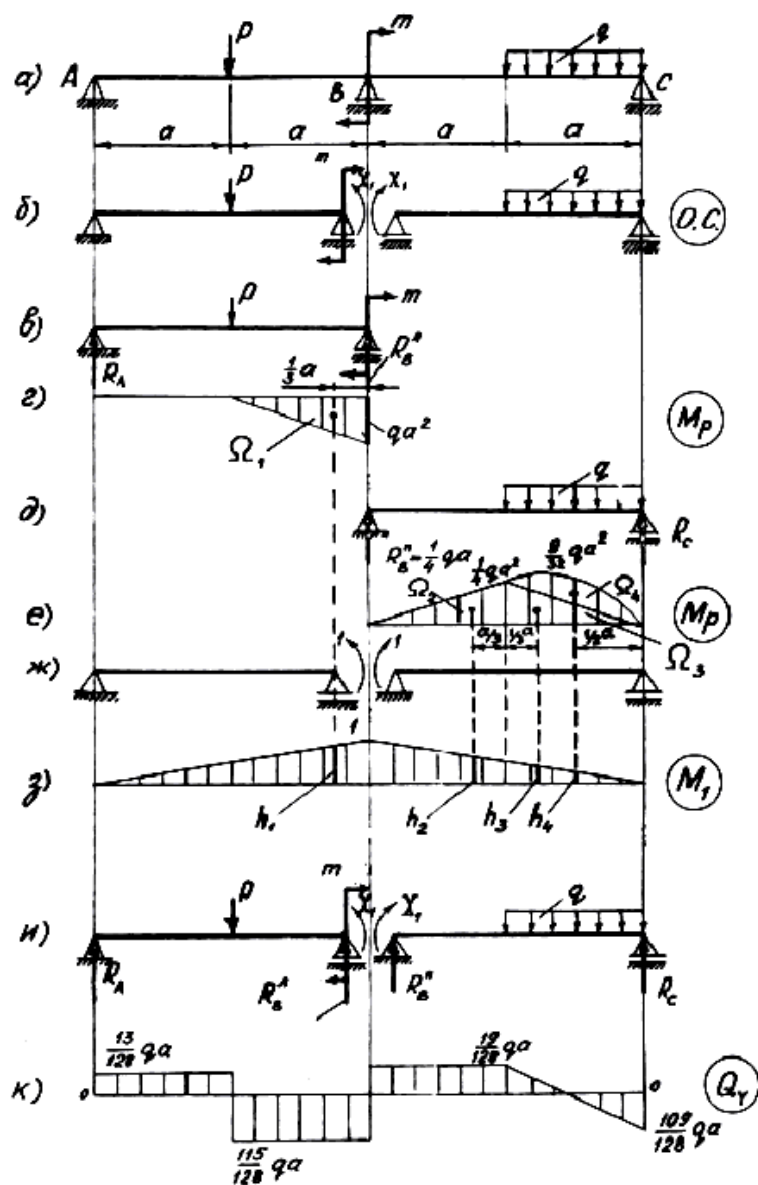


Рисунок 4.2. Начало

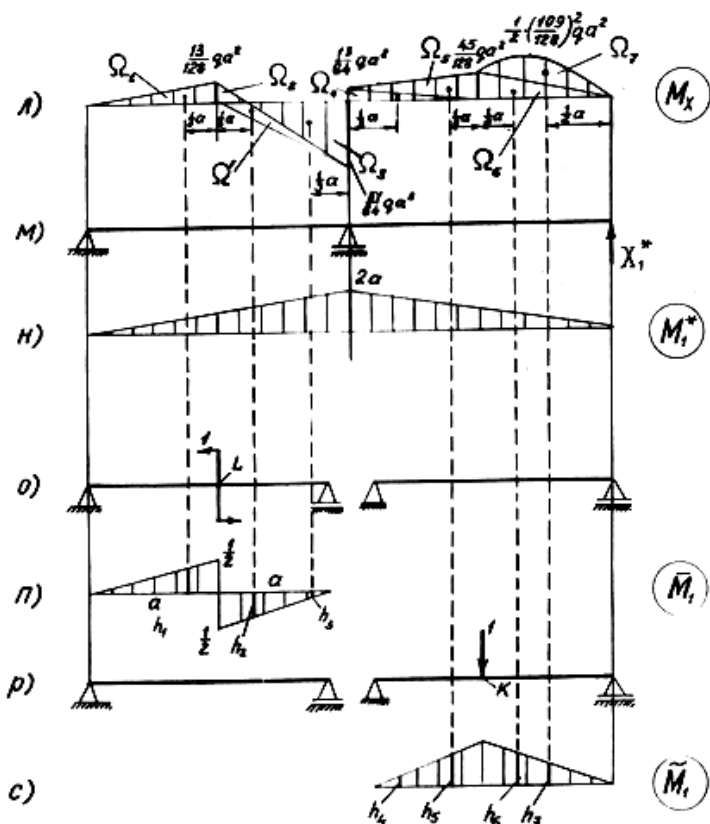


Рисунок 4.2.Окончание

4.1.2 Образует основную систему, которая получается из исходной путем отбрасывания лишних связей с точки зрения равновесия. Причем основная система должна обеспечить кинематическую неизменяемость системы, с одной стороны, и статическую определимость во всех узлах, с другой. Основная система всегда должна быть статически определимой. В данном примере принимаем основную систему, которая получается путем врезания на опоре “В” шарнира и приложенным моментом  $X_1$ , заменяющим отброшенную связь между соседними пролетами (см. рисунок 4.2,б).

4.1.3 Строим для основной системы эпюру изгибающего момента ( $M_p$ ) от действия внешних сил, для чего вначале определяем реакции в опорах для левой и правой частей балки (см. рисунок 4.2,в,д), а затем по известной методике строим эпюру  $M_p$  (см. рисунок 4.2,з,е).

4.1.4 Строим в основной системе эпюры изгибающего момента от единичных моментов по направлению лишнего неизвестного  $X_i$  (см. рисунок 4.2,з).

4.1.5 Напишем систему канонических уравнений метода сил. Она имеет вид

$$\sum_{k=1}^n \delta_{ik} x_k + \delta_{ip} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4.1)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение по направлению  $i$ -го силового фактора под действием единичного фактора  $X_k = 1$ ;

$\delta_{ip}$  – перемещение по направлению  $i$ -го силового фактора под действием внешних сил;

$n$  – степень статической неопределимости.

Если система один раз статически неопределима, как это имеет место в нашей задаче, то каноническое уравнение (4.1) имеет вид:

4.1.6 Определим  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{11}$ , используя способ Верещагина

$$\delta_{nk} = \sum_{j=1}^m \frac{\Omega_j h_j}{(EI_x)_j}, \quad (4.3)$$

где  $\Omega_j$  – площадь  $j$ -го участка криволинейной эпюры;

$h_j$  – ордината прямолинейной эпюры  $j$ -го участка, лежащая под центром тяжести криволинейной эпюры;

$(EI_x)_j$  – жесткость на изгиб  $j$ -го участка;

$m$  – число участков.

Если криволинейная и прямолинейная эпюры лежат по одну сторону от оси эпюры на  $j$ -м участке, то перед  $j$ -м слагаемым в

данной формуле ставится знак “+” и наоборот, если по разные, то ставится знак “-”.

Если на данном участке ни одна из перемножаемых эпюр не является прямолинейной, но одна из них или обе ограничены ломаными прямыми линиями, то в этих случаях предварительно разбивают эпюры на такие участки, в пределах каждого из которых, по крайней мере, одна эпюра прямолинейна.

Если на данном участке эпюра имеет сложный вид, то она разбивается на элементарные фигуры: прямоугольник, треугольник, параболический треугольник и т. д., для которых величина площади  $\Omega_j$  и положение центра тяжести известны, и производится “перемножение” элементарных фигур (таблица 4.2).

Определяем  $\delta_{1p}$  как произведение площадей эпюр  $z$  и  $e$  на ординаты, взятые с эпюр  $z$  каждый раз под центром тяжести эпюр  $z$  и  $e$ :

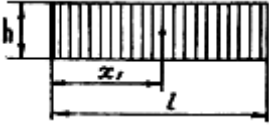
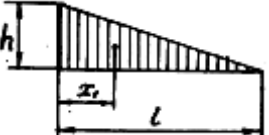

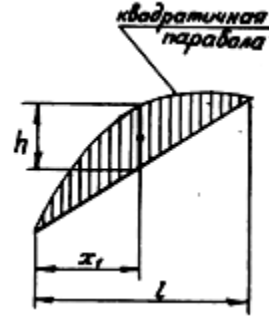
$$\begin{aligned}\delta_{1p} &= \frac{1}{EI_x} (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_3 h_3 + \Omega_4 h_4) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left[ \left( -\frac{1}{2} qa^2 \right) \frac{5}{6} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 \right) \frac{2}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 \right) \frac{1}{3} a + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \right) \frac{1}{4} a \right] = \\ &= -\frac{13}{48} \cdot \frac{qa^3}{EI_x}.\end{aligned}$$

Найдем  $\delta_{11}$ , перемножая эпюру  $M_1$  саму на себя, т. е. берем составляющие площади эпюры  $z$  и умножаем на ординаты, проходящие через центр тяжести площадей той же эпюры  $z$ :

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left[ \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2a \right) \frac{2}{3} \right] \cdot 2 = \frac{4a}{3EI_x}.$$

Здесь учтено, что единичная эпюра  $M_1$  (см. рисунок 4.2,з) является симметричной, поэтому перемножение выполнено на одном участке, а результат удваивается.

Таблица 4.2

Геометрическая фигура (эпюра изгибающего момента)	Площадь $\Omega$	Координата центра тяжести, $X_1$	Примечание
	$hl$	$\frac{1}{2}l$	
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$	
	$\frac{1}{3}hl$	$\frac{1}{4}l$	$h = \frac{1}{2}ql^2$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$	$h = \frac{1}{8}ql^2$

Здесь  $q$  – интенсивность распределенной внешней нагрузки на участке длины  $l$

4.1.7 Решая каноническое уравнение (4.2), находим

$$X_1 = -\frac{\delta_{1p}}{\delta_{11}} = -\frac{13}{64}qa^2.$$

Знак “+” указывает на то, что направление  $X_1$  первоначально выбрано правильно.



4.1.8 Строим эпюры  $Q_Y$  и  $M_x$  известными приемами отдельно для левого и правого пролетов и сочленяем соответствующие эпюры обоих пролетов (см. рисунок 4.2, *к, л*), предварительно определив реакции в опорах (см. рисунок 4.2, *и*). При построении эпюры  $M_x$  целесообразно использовать принцип суперпозиций

$$M_x = M_p + M_1 X_1 + \dots + M_n X_n, \quad (4.4)$$

где  $M_p$  – эпюра изгибающего момента от действия внешних сил, показанная на рисунке 4.2, *е*);

$M_i$  – эпюра изгибающего момента от действия единичной силы в направлении неизвестной  $X_i$  (в нашем случае эпюра, показанная на рисунке 4.2, *в*);

$X_i$  – значение  $i$ -го лишнего неизвестного.

4.1.9 Делаем деформационную проверку, которая заключается в определении перемещений в заданной системе, значения которых известны и равны нулю. Для этого выбираем новую основную систему с новыми лишними неизвестными  $X_k^*$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) и вычисляем перемещения  $\Delta_k^*$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) в направлении каждой  $X_k^*$ -й неизвестной, например по формуле Верещагина

$$\Delta_k^* = \sum_{j=1}^m \frac{\Omega_j h_{kj}^*}{(EI_x)_j}, \quad (4.5)$$

где  $\Delta_k^*$  – перемещение в новой основной системе в направлении лишней неизвестной  $X_k^*$ ;

$\Omega_j$  – площадь  $j$ -го участка эпюры результирующего изгибающего момента, полученного в результате раскрытия статической неопределимости системы;

$h_{kj}^*$  – ордината эпюры изгибающего момента от единичной силы;

$X_k^* = 1$  в новой основной системе, лежащая под центром тяжести эпюры результирующего изгибающего момента.

В направлении новых лишних неизвестных перемещения должны быть равны нулю, следовательно, если

$$\Delta_k^* = 0,$$

то деформационная проверка выполняется и результирующая эпюра построена верно.

В нашем примере за новую основную систему принимаем систему, получающуюся из исходной путем отбрасывания правой опоры  $C$ . В качестве новой лишней неизвестной принимается реакция опоры  $C$  (см. рисунок 4.2,м).

На рисунке 4.2,м показана эпюра изгибающего момента от единичной силы по направлению лишнего неизвестного  $X_1^*$ .

Как было уже сказано, эпюра результирующего изгибающего момента  $M_x$  может быть определена по принципу суперпозиций (4.4). Поэтому при проведении деформационной проверки целесообразно производить вначале перемножение эпюры  $M_p$  на эпюру изгибающего момента от единичной силы по направлению лишнего неизвестного  $X_k^*$ , затем перемножение эпюр от единичных сил по направлению лишних неизвестных  $X_i$  на эпюру от единичной силы по направлению лишней неизвестной  $X_k^*$  и на величину лишней неизвестной  $X_i$  и результаты перемножения сложить.

В нашем примере будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_1^* = \frac{1}{EI_x} & \left[ \left( -\frac{1}{2} qa^2 a \right) \frac{5}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 a \right) \frac{4}{3} a + \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} qa^2 a \right) \frac{2}{3} a + \right. \\ & \left. + \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot a \right) \frac{1}{2} a + 2 \left( 1 \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a \right) \frac{13}{64} qa^2 \right] = \frac{qa^4}{EI_x} \left[ -\frac{5}{6} + \frac{5}{6} \right] = 0. \end{aligned}$$

4.1.10 Напишем условие прочности для проектировочного расчета

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma], \text{ где } [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T}.$$

$$[\sigma] = \frac{48 \cdot 10^7}{1,5} = 32 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

$$W_x \geq \frac{M_x}{[\sigma]} = \frac{51}{64} \cdot \frac{qa^2}{[\sigma]} = \frac{51 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^2}{64 \cdot 32 \cdot 10^7} = 0,127 \cdot 10^{-3} (\text{м}^3) = 127 \text{ см}^3.$$

По сортаменту подбираем номер двутавра (№ 18), для которого [1–4]:

$$W_x = 143 \text{ см}^3.$$

4.1.11 Определим угол поворота сечения  $L$ . Для этого приложим в основной системе единичный внешний изгибающий момент в сечении  $L$  (см. рисунок 4.2,о) и построим эпюру изгибающего момента  $\overline{M}_1$  (см. рисунок 4.2,н) от действия этого момента. Поскольку эпюра  $\overline{M}_1$  имеется только на левом пролете балки, разобьем эпюру результирующего момента  $M_x$  (см. рисунок 4.2,л) на левом пролете на элементарные фигуры и перемножим эпюры  $\overline{M}_1$  и  $M_x$  по правилу Верещагина. При разбиении эпюры  $M_x$  на втором участке площадь незаштрихованного треугольника  $\Omega'$  прибавляется к площади  $\Omega_2$  и к площади  $\Omega_3$ , причем считается, что треугольник с площадью  $\Omega_2 + \Omega'$  целиком лежит выше оси эпюры. В результате получим:

$$\begin{aligned} \theta_L = \frac{1}{EI_x} (\Omega_1 h_1 + \Omega_2 h_2 + \Omega_3 h_3) &= \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{128} qa^2 \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{128} qa^2 a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{51}{64} qa^2 a \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{17}{256} \cdot \frac{qa^3}{EI_x}. \end{aligned}$$

Подставив в выражение  $\theta_L$  значения  $q, a, E$  и  $I_x = 1290 \text{ см}^4$  (для двутавра № 18), получим:

$$\theta_L = \frac{17 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^3}{256 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад.}$$

4.1.12 Определим прогиб сечения  $K$  балки. Для этого в основной системе в сечении  $K$  приложим единичную силу в направлении искомого прогиба (см. рисунок 4.2,*p*) и построим эпюру  $\overline{M}_1$  (см. рисунок 4.2,*c*). А далее аналогично тому, как это делали при определении угла поворота сечения, разбиваем для правого пролета балки эпюру результирующего момента  $M_x$  (см. рисунок 4.2,*л*) на элементарные фигуры и перемножим эпюры  $M_x$  и  $\overline{M}_1$  по правилу Верещагина. В результате получим:

$$\begin{aligned}\Delta_k &= \frac{1}{EI_x} (\Omega_4 h_4 + \Omega_5 h_5 + \Omega_6 h_6 + \Omega_7 h_7) = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{64} q a^2 a \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{128} q a^2 a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{45}{128} q a^2 a \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} a + \frac{2}{3} \cdot \frac{q a^2}{8} a \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} a \right) = \frac{119 q a^4}{128 \cdot 6 EI_x}.\end{aligned}$$

Подставив в выражение  $\Delta_k$  необходимые значения, получим:

$$\Delta_k = \frac{119 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^4}{128 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1290 \cdot 10^{-8}} = 7,87 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,787 \text{ см}.$$

### Пример 6.2

Для плоской рамы (см. рисунок 4.3,*a*) выполнить проектировочный расчет. Определить линейное перемещение  $\Delta_A$  по направлению А – А и угловое перемещение  $\theta_B$  сечения  $B$ , если дано:  $q = 2 \cdot 10^4$  Н/м;  $a = 1,6$  м;  $\sigma_{\text{ТР}} = \sigma_{\text{СЖ}} = 48 \cdot 10^7$  Па;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па; запас прочности  $n_T = 1,5$ .

4.2.1 Определим степень статической неопределимости. Система трижды внутренне (имеет замкнутый контур) и трижды внешне

статически неопределима (всего статически неопределима 6 раз, так как имеет связей 9, а уравнений равновесия для плоской задачи – 3).

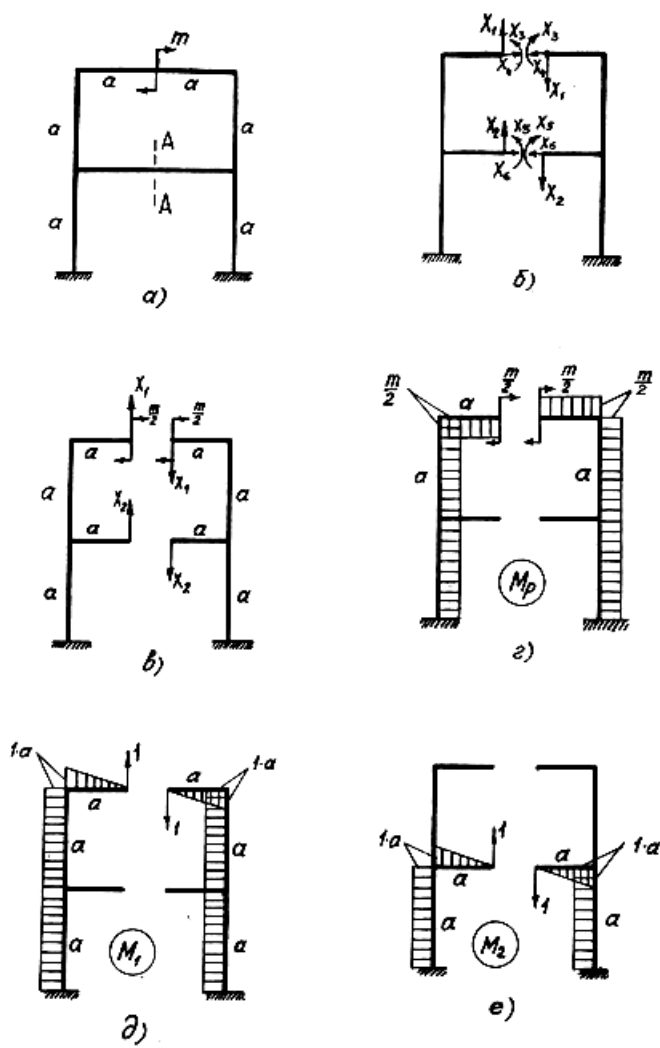


Рисунок 4.3 Начало

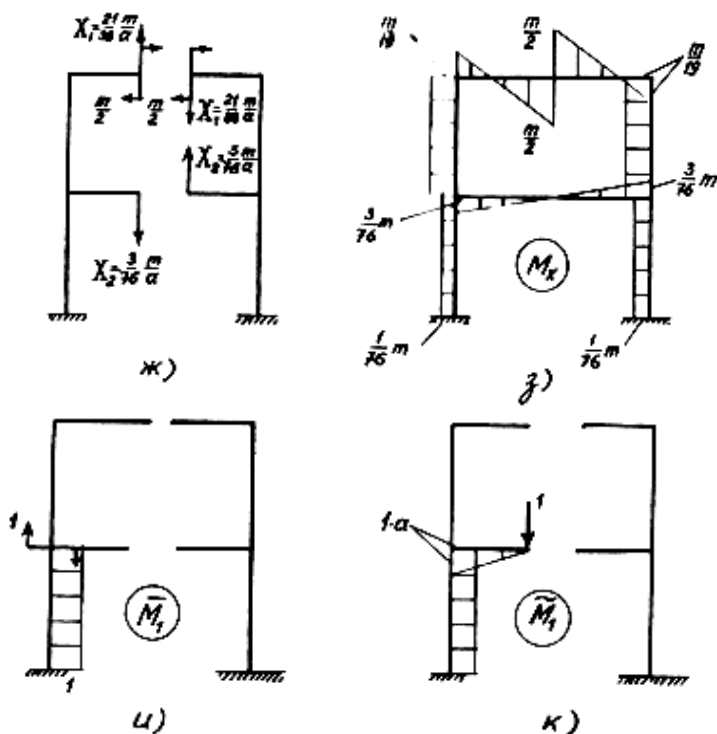


Рисунок 4.3 Окончание

4.2.2 Выберем основную систему. При выборе необходимо учитывать, что у симметричной рамы в плоскости симметрии при симметричной внешней нагрузке обращаются в нуль кососимметричные силовые факторы (перерезывающая сила), а при кососимметричной внешней нагрузке – симметричные силовые факторы (изгибающий момент и продольная сила). Учет этого позволяет уменьшить количество канонических уравнений. Наша рама является симметричной, а нагрузка – кососимметричной. Поэтому в плоскости симметрии симметричные силовые факторы будут равны нулю, и в данном

сечении возникают только поперечные силы. Таким образом, если выбрать основную систему в виде, показанном на рисунке 4.3,б, то задача сводится к решению дважды статически неопределимой системы (см. рисунок 4.3,в).

4.2.3 Система канонических уравнений метода сил (4.1) для дважды статически неопределимой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{2p} &= 0\end{aligned}\quad (4.6)$$

4.2.4 Определим свободные члены  $\delta_{1p}$  и  $\delta_{2p}$  и коэффициенты при неизвестных, а также сами неизвестные.

Для этого:

а) строим в основной системе эпюру от заданных внешних сил  $M_p$  (см. рисунок 4.3,з) и эпюры от единичных сил  $M_1$  и  $M_2$  по направлению усилий  $X_1$  и  $X_2$  (см. рисунок 4.3,д,е)

б) перемножаем эпюры по правилу Верещагина, определяем значения:

$$\delta_{1p} = \sum \int \frac{M_p M_1}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( -\frac{m}{2} a \frac{1}{2} a - \frac{m}{2} 2a \cdot a \right) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{ma^2}{EI_x},$$

$$\delta_{2p} = \sum \int \frac{M_p M_2}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( -\frac{m}{2} a \cdot a \right) = -\frac{ma^2}{EI_x},$$

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{M_1 M_1}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( \frac{1}{2} a \cdot a \frac{2}{3} a + 2a \cdot a \cdot a \right) = \frac{14}{3} \cdot \frac{a^3}{EI_x},$$

$$\delta_{22} = \sum \int \frac{M_2 M_2}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} \left( \frac{1}{2} a \cdot a \frac{2}{3} a + a \cdot a \cdot a \right) = \frac{8a^3}{3EI_x},$$

$$\delta_{12} = \sum \int \frac{M_1 M_2}{EI_x} dz = \frac{2}{EI_x} (a \cdot a \cdot a) = \frac{2a^3}{EI_x}.$$

в) подставляем результаты в систему канонических уравнений (4.6):

$$\begin{cases} \frac{14}{3}X_1 + 2X_2 - \frac{5}{2} \cdot \frac{m}{a} = 0, \\ 2X_1 + \frac{8}{3}X_2 - \frac{m}{a} = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Решая систему уравнений (4.7), получим

$$X_1 = \frac{21}{38} \cdot \frac{m}{a}; \quad X_2 = -\frac{3}{76} \cdot \frac{m}{a}.$$

Значение  $X_2$  получаем со знаком минус. Это означает, что направление  $X_2$  выбрано неправильно. Изменяем направление вектора на противоположное. (см. рисунок 4.3,ж).

4.2.5 Используя принцип суперпозиций (4.4), построим эпюру  $M_x$  (см. рисунок 4.3,в) и определим сечение, в котором возникает наибольший изгибающий момент. Подставляя его значение в условие прочности, определим диаметр сечения  $d$  :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma],$$

где 
$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T} = \frac{48 \cdot 10^7}{1,5} = 32 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Момент сопротивления поперечного сечения  $W_x = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3$ , а

$$M_x = \frac{m}{2} = \frac{1}{2}qa^2 \text{ (см. рисунок 4.3,з).}$$

Отсюда получим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{qa^2}{2 \cdot 0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1,6^2}{2 \cdot 0,1 \cdot 32 \cdot 10^7}} = 9,28 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 92,8 \text{ мм.}$$

Окончательно принимаем  $d = 94 \text{ мм}$  (округляем до четного числа мм). Момент инерции для полученного сечения:



$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(9,4 \cdot 10^{-2})^4}{64} = 3,83 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

4.2.6 Определим угол поворота сечения  $B$ . В основной системе построим эпюру  $\overline{M}_1$  от единичного изгибающего момента (см. рисунок 4.3,у), приложенного в сечении  $B$ . Перемножим по правилу Верещагина эпюры  $M_x$  и  $\overline{M}_1$ :

$$\begin{aligned} \theta_B &= \frac{1}{EI_x} \left( -\frac{m}{76} a \cdot 1 \right) = -\frac{qa^3}{76EI_x} = \\ &= -\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 1.6^3}{76 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 3,83 \cdot 10^{-6}} = -1,41 \cdot 10^{-3} \text{ рад.} \end{aligned}$$

4.2.7 Определим перемещение по направлению А-А: в основной системе построим эпюру  $\overline{M}_1$  от единичной силы (см. рисунок 4.3,к), приложенной по направлению А-А; перемножим  $M_x$  и  $\overline{M}_1$

$$\Delta_A = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{76} ma \frac{2}{3} a - \frac{1}{76} m \cdot a \cdot a \right) = 0.$$

## 5 Расчет на сложное сопротивление

### 5.1 Задача 7

Стальной ломанный брус постоянного круглого поперечного сечения (показанный на рисунке 5.1) нагружен внешними силами  $P_i$ . Требуется выполнить проектировочный расчет, если дано: длина участков бруса  $a_i$ ;  $\sigma_{\text{Тр}} = \sigma_{\text{ТС}} = 42 \cdot 10^7 \text{ Па}$ ; запас прочности  $n_{\text{Т}} = 1,5$ . Остальные данные, необходимые для расчета, выбрать из таблицы 5.1. Принять  $P = 10^3 \text{ Н}$ ,  $a = 1 \text{ м}$ .

Порядок выполнения контрольного задания аналогичен примеру 7.

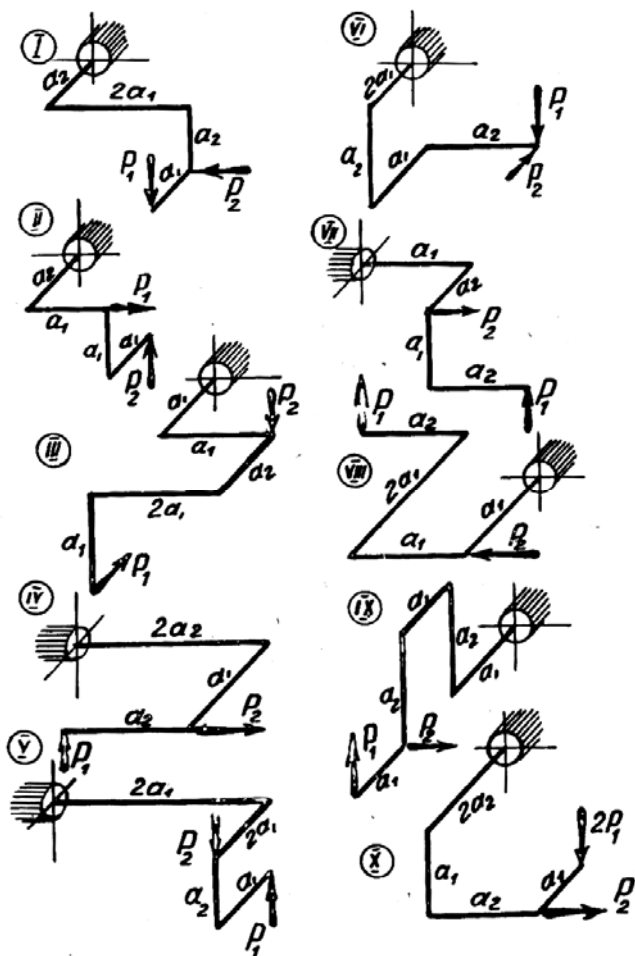


Рисунок 5.1

Таблица 5.1

Номер строки	Схема по рисунку 5.1	$P_i$		$a_i$	
		$P_1$	$P_2$	$a_1$	$a_2$
1	I	$P$	$2 P$	$a$	$a$
2	II	$2 P$	$P$	$a$	$2 a$
3	III	$2 P$	$P$	$a$	$a$
4	IV	$3 P$	$2 P$	$a$	$a$
5	V	$1,5 P$	$2 P$	$a$	$a$
6	VI	$P$	$P$	$a$	$2 a$
7	VII	$P$	$2 P$	$a$	$a$
8	VIII	$1,5 P$	$P$	$a$	$2 a$
9	IX	$P$	$P$	$a$	$a$
10	X	$2 P$	$P$	$a$	$a$
Буква шифра	а	в	г	д	е

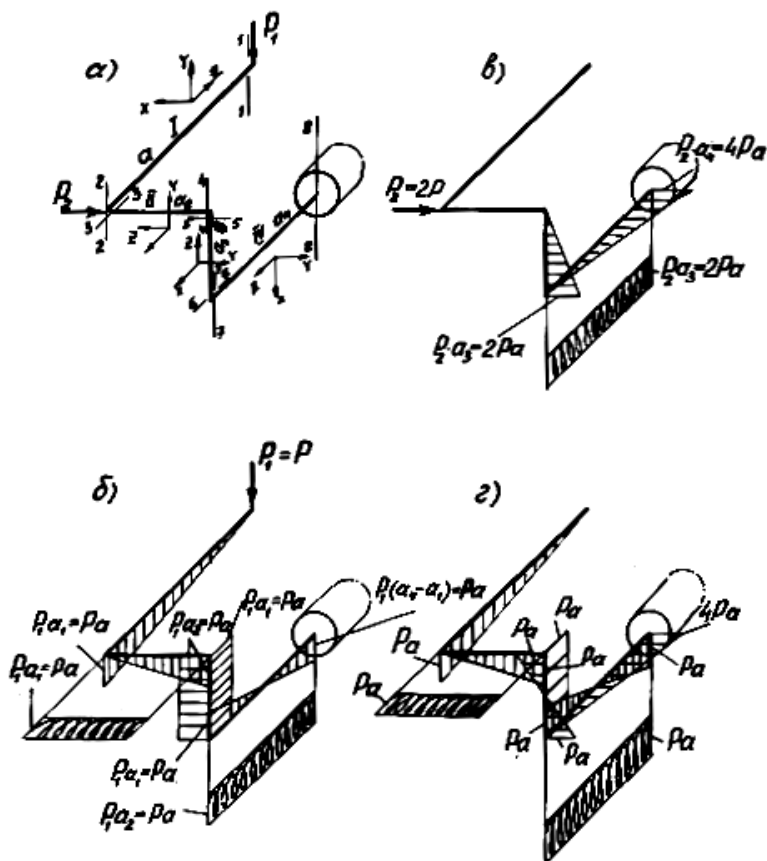
Пример 7.

Произвести проектировочный расчет ломаного бруса круглого поперечного сечения (рисунок 5.2,а), если дано  $P_1 = P$ ;  $P_2 = 2P$ ;  $P = 10^3$  Н;  $a_1 = a_2 = a_3 = 0,5a_4 = a = 1,4$  м;  $\sigma_{TP} = \sigma_{TC} = 42 \cdot 10^7$  Па, запас прочности  $n_T = 1,5$ .

Решение.

Строим эпюры внутренних силовых факторов. Ломаные брусья состоят из отдельных прямых брусев, жестко соединенных между собой под прямым углом. Для ломаного бруса строим эпюры крутящего момента  $M_{кр}$  и изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$ . При построении этих эпюр для пространственных брусев, представленных на рисунке 5.1, текущую систему координат выбирают на участке, который граничит со свободным концом рамы. При этом

ось  $z$  всегда направляют в сторону свободного конца, а оси  $x$ ,  $y$  размещают в плоскости поперечного сечения. При переходе к последующему участку производят поворот системы координат, принятой на предыдущем участке, относительно оси, которая перпендикулярна к плоскости, образуемой этими смежными участками рамы. Поворот осуществляется так, чтобы ось совпадала с осью бруса и была направлена в сторону, противоположную движению. Движение осуществляется от свободного конца бруса в сторону защемления.



Эпюры строим отдельно вначале от силы  $P_1$  (см. рисунок 5.2,б), а затем от силы  $P_2$  (см. рисунок 5.2,в). Затем построим суммарные эпюры (см. рисунок 5.2,г).

#### 5.1.1 Построение эпюр при действии на брус силы $P_1$ .

Первый участок. Ось  $y$  параллельна силе  $P_1$ , а ось  $z$  пересекает линию действия этой силы, поэтому в пределах участка изгибающий момент  $M_y$  и крутящий момент  $M_{кр}$  отсутствуют (см. рисунок 5.1,а,б). При размещении начала системы координат в первом характерном сечении 1-1 участка плечо силы  $P_1$  относительно оси  $x$  равно 0 и  $M_x = 0$ . При размещении системы координат во втором характерном сечении 2-2 можно видеть, что  $M_x = P_1 \cdot a_1 = Pa$ .

Плоскостью действия изгибающего момента  $M_x$  будет плоскость, образуемая осями  $z$  и  $y$  (сжатое волокно снизу). Учитывая это, эпюра  $M_x$  строится в плоскости  $zy$  ниже базисной линии (см. рисунок 5.2,б), т. е. со стороны сжатого волокна.

Второй участок. Если начало системы координат в первом характерном сечении 3-3, то ось  $x$  пересекает линию действия силы  $P_1$  и  $M_x = 0$ ; момент силы относительно оси  $y$  равен нулю в пределах всего участка (ось параллельна силе), а  $M_{кр} = P_1 \cdot a_1 = Pa$  во всех сечениях участка. Если начало системы координат разместить в характерном сечении 4-4, то, очевидно,  $M_x = P_1 \cdot a_1 = Pa$ , изгибающий момент действует в плоскости двух других осей ( $z, y$ ). Сжатое волокно бруса – внизу. Откладывая ординату  $M_x = Pa$  перпендикулярно оси  $z$  по линии оси  $y$ , построим эпюру изгибающего момента на втором участке бруса со стороны сжатого волокна.

Третий участок. Ось  $z$  параллельна силе  $P_1$ , поэтому в пределах участка  $M_z = 0$ . Изгибающий момент  $M_x = P_1 \cdot a_2 = Pa$  (сжатое волокно слева), момент  $M_y = P_1 \cdot a_1 = Pa$  (сжатое волокно за плоскостью чертежа). Значения  $M_x$  и  $M_y$  в пределах участка – постоянны.

Четвертый участок. Ось  $x$  параллельна силе  $P_1$ , поэтому  $M_x = 0$ . Изгибающий момент  $M_y = P_1 \cdot a_1 = Pa$  (сжатое волокно сверху). При размещении начала текущей системы координат во втором характерном сечении 8–8 участка (в защемлении) сжатое волокно будет внизу  $M_y = P_1(a_4 - a_1) = Pa$ . Крутящий момент  $M_{кр} = P_1 a_2 = Pa$  направлен против часовой стрелки (положительный), если смотреть со стороны оси  $z$ , причем по всей длине участка бруса – постоянный.

#### 5.1.2 Построение эпюр при действии силы $P_2 = 2P$ .

Изгибающих или крутящих моментов в пределах первого и второго участков (см. рисунок 5.2,в) не будет. В этом легко убедиться, пользуясь методом сечений и каждый раз рассматривая равновесие части бруса со стороны свободного конца.

Третий участок. Размещая начало текущей системы координат в характерном сечении 5–5, видим, что линия действия силы  $P_2$  совпадает с осью  $y$  и пересекает оси  $x$  и  $z$ . Поэтому  $M_x = M_y = M_{кр} = 0$ . Если начало системы координат разместить в сечении 6–6, то  $M_{кр} = M_y = 0$ , а  $M_x = P_2 a_3 = 2Pa$ . Эпюру необходимо откладывать в плоскости двух других осей (в плоскости  $zy$ ), справа от базисной линии – на сжатом волокне.

Четвертый участок. Начало системы координат разместим в сечении 7–7. В этом случае ось  $y$  параллельна силе  $P_2$  и  $M_y = 0$ . Ось  $x$  пересекает линию действия силы  $P_2$  и  $M_x = 0$ . Наконец,  $M_{кр} = P_2 a_3 = -2Pa$ . Знак минус указывает, что крутящий момент направлен по часовой стрелке, если смотреть со стороны оси  $z$  (см. рисунок 5.2,а).

Начало текущей системы координат разместим в характерном сечении 8–8. Из рассмотрения положения осей и направления силы находим:

$$M_Y = 0, \quad M_x = P_2 a_4 = 2Pa = 4Pa, \quad M_{кр} = -P_2 a_3 = -2Pa.$$

Построение эпюр  $M_{кр}$  и  $M_x$  на третьем и четвертом участках от силы  $P_2$  представлено на рисунке 5.2,в.

5.1.3 Построение эпюр при одновременном действии на брус сил  $P_1$  и  $P_2$ .

Эпюры изгибающих и крутящих моментов при одновременном действии сил  $P_1$  и  $P_2$  можно построить используя принцип суперпозиций:

а) путем алгебраического сложения эпюр изгибающих моментов, лежащих в одной и той же плоскости. Например, на третьем участке в одной и той же плоскости  $xy$  лежат изгибающие моменты  $M_x(P_1)$  и  $M_x(P_2)$ . Алгебраически суммируя ординаты этих эпюр, получим:

– в сечении 5–5:  $M_x = M_x(P_1) + M_x(P_2) = Pa + 0 = Pa.$

– (сжатые волокна находятся слева);

– в сечении 6–6:  $M_x = Pa - 2Pa = -Pa$

(сжатые волокна находятся справа от базовой линии).

Суммарная эпюра приведена на рисунке 5.2,з;

б) применяя алгебраическое сложение значений крутящих моментов в пределах участка. Например, на четвертом участке крутящий момент от силы  $P_1$  равен  $M_{кр} = Pa$ , а от силы  $P_2$  –  $M_{кр} = -2Pa$ . Следовательно, результирующий момент будет найден как алгебраическая сумма  $M_{кр} = -Pa$ .

Результирующие эпюры  $M_x, M_Y, M_{кр}$  при одновременном действии сил  $P_1$  и  $P_2$  представлены на рисунке 5.2,з.

5.1.4 Определим опасный участок и в нем опасное сечение. Из рассмотрения суммарной эпюры (см. рисунок 5.2,з) видим, что опасным будет участок IV, опасное сечение которого 8–8

(см. рисунок 5.2,а). Здесь  $M_{кр} = Pa$ ,  $M_x = 4Pa$ ,  $M_y = Pa$ . Воспользовавшись методом сечений, покажем часть бруса, величины и направления  $M_x, M_y, M_{кр}$  в опасном сечении 8–8 (см. рисунок 5.3). Направления моментов соответствуют результирующей эпюре (см. рисунок 5.2,з).

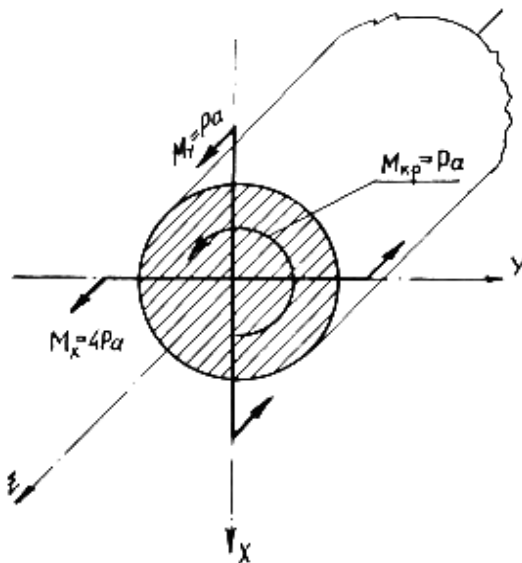


Рисунок 5.3

5.1.5 Определим необходимый диаметр поперечного сечения бруса. Воспользуемся теорией наибольших касательных напряжений (третья теория) и определим величину эквивалентного момента в опасном сечении:

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_{кр}^2} = \sqrt{(4Pa)^2 + (Pa)^2 + (Pa)^2} = 3\sqrt{2}Pa. \quad (5.1)$$

Условие прочности имеет вид

$$\max \sigma_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{W_{\text{и}}} \leq [\sigma], \quad (5.2)$$

где момент сопротивления поперечного сечения на изгиб равен



$$W_{\text{и}} = \pi d^3 / 32 \approx 0,1d^3,$$

а допускаемое напряжение

$$[\sigma] - \frac{\sigma_{\text{T}}}{n_{\text{T}}} = \frac{42 \cdot 10^7}{1,5} = 28 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Решая условие прочности (5.2) с учетом (5.1) относительно диаметра  $d$ , получим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2}Pa}{0,1[\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{3\sqrt{2} \cdot 10^3 \cdot 1,4}{0,1 \cdot 28 \cdot 10^7}} = 5,96 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 59,6 \text{ мм.}$$

Округляя величину диаметра в большую сторону до четного числа миллиметров, окончательно принимаем  $d = 60 \text{ мм}$ .

**П р и м е ч а н и я : 1.** Если при расчете используется IV теория прочности (энергетическая), то эквивалентный момент определяется по формуле

$$M_{\text{ЭКВ}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}.$$

2. Если из суммарных эпюр (см. рисунок 5.2,з) не удастся сразу установить опасное сечение, то вначале намечают возможные опасные сечения на каждом участке, а затем вычисляют в них величину  $M_{\text{ЭКВ}}$  в соответствии с принятой теорией прочности. Сечение, в котором  $M_{\text{ЭКВ}}$  принимает максимальное значение, считается опасным и в нем производится расчет на прочность.

## 6 Расчет упругих систем на устойчивость и динамическое действие нагрузок

### 6.1 Задача 8

Определить допускаемое значение силы  $[P_y]$  из расчета на устойчивость стержня. Коэффициент запаса устойчивости для стали  $n_y = 2,5$  и для чугуна  $n_y = 4$ . Опорные закрепления в обеих главных плоскостях одинаковы. Расчетные схемы и поперечные сечения стержней приведены на рисунке 6.1, основные параметры даны в таблице 6.1.

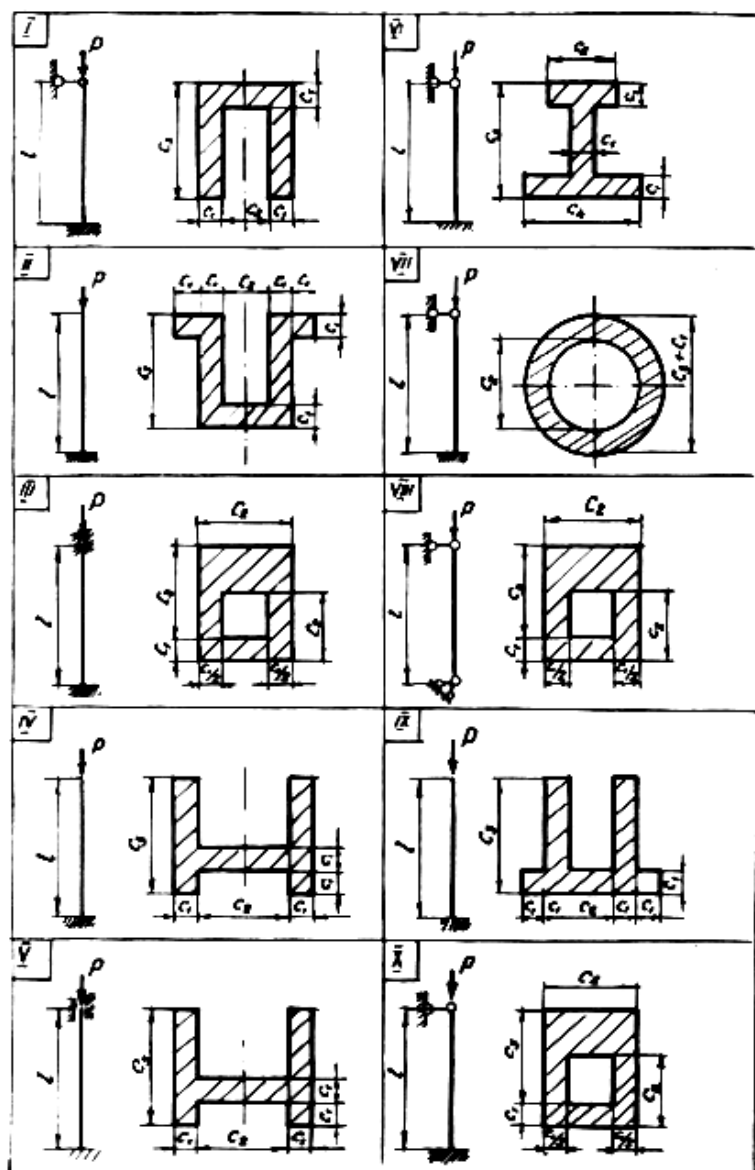


Рисунок 6.1

Таблица 6.1

Номер строки	Схема по рис. 6.1	$l$ , м	$c_1$ , мм	$c_2$ , мм	$c_3$ , мм	Материал	$E \cdot 10^{-11}$ , Па	$\sigma_{\text{тц}} \cdot 10^{-7}$ , Па	Константы Ясинского		
									$a \cdot 10^{-7}$ , Па	$b \cdot 10^{-5}$ , Па	$c \cdot 10^{-5}$ , Па
1	I	1,8	15	35	70	Сталь	2,2	20	31	11,3	0
2	II	1,9	20	45	60		2,1	21	32	12,0	0
3	III	2,2	20	50	70		1,9	23	34	13,0	0
4	IV	2,5	30	60	85		2,1	19	30	10,5	0
5	V	2,7	30	50	80		2,0	25	35	13,0	0
6	VI	3,0	25	55	90	Чугун	1,0	20	78	120	0,5
7	VII	1,7	15	50	85		1,1	20	77	125	0,51
8	VIII	2,8	25	65	75		1,0	19	70	120	0,5
9	IX	2,4	20	45	75		0,9	18	70	115	0,5
0	X	2,1	15	40	60		1,0	18	70	116	0,51
Буква шифра	а	г	д			е					

Указание. Формула Ясинского  $\sigma_{кр} = a - b\lambda + c\lambda^2$  применима, если гибкость стержня  $\lambda$  удовлетворяет условиям:

- для стали  $40 \leq \lambda < \lambda_{пред}$ ;
- для чугуна  $20 \leq \lambda < \lambda_{пред}$ ;

где  $\lambda_{пред}$  — предельная гибкость.

При  $\lambda \geq \lambda_{пред}$  применяется формула Эйлера

### Пример 8.

В соответствии с условиями задачи 8 определить допускаемое значение силы  $[P_y]$  из расчета на устойчивость стального стержня, показанного на рисунке 6.2, если известно:  $l = 1,2$  м;  $C_1 = 20$  мм;  $C_2 = 40$  мм;  $C_3 = 65$  мм;  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $\sigma_{пл} = 2 \cdot 10^8$  Па;  $b = 11,4 \cdot 10^5$  Па,  $c = 0$ ,  $a = 31 \cdot 10^7$  Па.

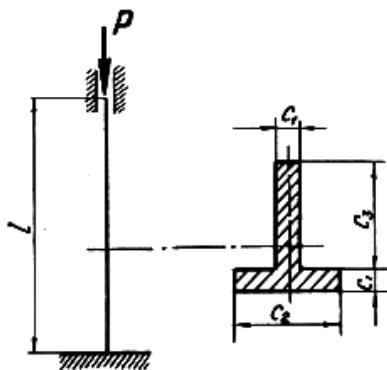


Рисунок 6.2

6.1.1 Определяем положение центра тяжести поперечного сечения. Для этого выбираем вспомогательную систему координат  $ux'$  (рисунок 6.3) где ось  $y$ , будучи осью симметрии, является главной центральной осью.

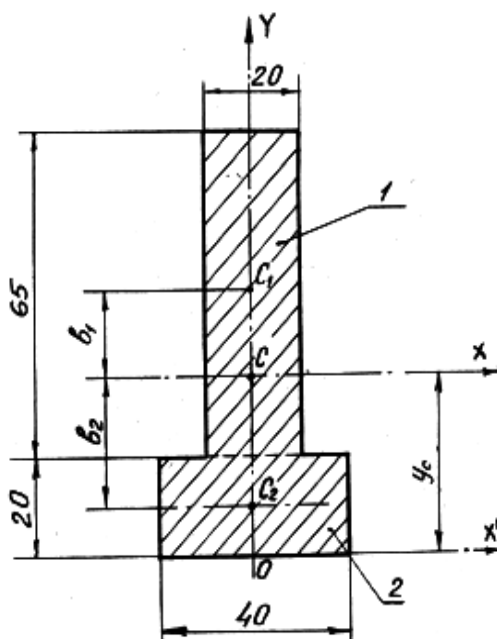


Рисунок 6.3

Для определения вертикальной координаты центра тяжести разбиваем сечение на два прямоугольника и определяем  $y_c$  по формуле

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{40 \cdot 20 \cdot 10 + 20 \cdot 65 \cdot 52,5}{40 \cdot 20 + 20 \cdot 65} = 36,3 \text{ мм};$$

где  $F_y, y_{ci}$  – площадь и координата тяжести  $i$ -й части сечения в принятой системе координат;  $n$  – число элементарных частей, на которые разбивается сечение (в данном случае  $n = 2$ ).

Вторая главная центральная ось  $x$  проходит через центр тяжести “С” всего сечения (см. рисунок 6.3).

6.1.2 Определяем моменты инерции относительно главных центральных осей:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{xi} + b_i^2 F_i), \quad (6.1)$$

где  $I_{xi}$  – момент инерции  $i$ -й части относительно своей центральной оси;  $b_i$  – расстояние между центральной осью  $i$ -й части и главной центральной осью всего сечения.

Применительно к рассматриваемому сечению (см. рисунок 6.3) получим:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x1} + b_1^2 F_1 + I_{x2} + b_2^2 F_2 = \\ &= \frac{40 \cdot 20^3}{12} + 800 \cdot 26,3^2 + \frac{20 \cdot 65^3}{12} + 16,2^2 \cdot 1300 = 13,8 \cdot 10^5 \text{ мм}^4. \end{aligned}$$

Так как ось  $y$  является главной центральной для всего сечения и для каждой его части, то второй осевой момент инерции вычисляется как

$$I_y = \sum_{i=1}^n I_{yi} = I_{y1} + I_{y2} = \frac{65 \cdot 20^3}{12} + \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4.$$

Так как  $I_x > I_y$ , а условия закрепления концов одинаковы во всех плоскостях, то потеря устойчивости происходит в плоскости минимальной жесткости, т. е. в плоскости чертежа (см. рисунок 6.2) относительно оси  $y$ , а  $I_{\min} = I_y = 15 \cdot 10^4 \text{ мм}^4$ .

6.1.3 Определяем гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (6.2)$$

где  $\mu$  – коэффициент приведенной длины, величина которого зависит от характера закрепления концов стержня [1,2] и в рассматри-

ваемом случае  $\mu = 0,5$ ;  $i_{\min}$  – минимальный радиус инерции поперечного сечения, вычисляемый по формуле

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{F}} = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^4}{2100}} = 8,45 \text{ мм}^2.$$

Следовательно, гибкость равна

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 1200}{8,45} = 71,0.$$

#### 6.1.4 Предельная гибкость стержня

$$\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{\text{пц}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 2 \cdot 10^{11}}{2 \cdot 10^8}} = 100.$$

6.1.5 Определяем величину критической силы. Так как  $\lambda < \lambda_{\text{пред}}$ , то формула Эйлера неприменима. Расчет производим по формуле Ясинского.

Величина критических напряжений

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda + c\lambda^2 = 31 \cdot 10^7 - 11,4 \cdot 10^5 \cdot 71 = 22,9 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Критическая сила

$$P_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} F = 22,9 \cdot 10^7 \cdot 21 \cdot 10^{-4} = 48,1 \cdot 10^4 \text{ Н} = 481 \text{ кН}.$$

(здесь  $F = 2100 \text{ мм}^2 = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ).

6.1.6 Допускаемое значение сжимающей силы из расчета на устойчивость

$$[P_y] = \frac{P_{\text{кр}}}{n_y} = \frac{481}{2,5} = 192,4 \text{ кН}.$$



## 6.2

### задача 9

На упругую систему (рисунок 6.4) с высоты  $H$  падает груз  $Q$ . Подобрать размеры поперечного сечения конструкции, изготовленной из малоуглеродистой стали, если  $\sigma_{тр} = \sigma_{тс} = 32 \cdot 10^7$  Па,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па и запас прочности  $n = 2$ . Массу упругой системы не учитывать. Данные, необходимые для решения задачи, выбрать из таблицы 6.2. Принять  $\frac{h}{b} = 2$

Таблица 6.2

Номер строки	Схема по рис. 6.4	$Q$ , Н	$H$ , м	$a$ , м	Номер строки	Схема по рис. 6.4	$Q$ , Н	$H$ , м	$a$ , м
1	I	200	0,5	1,0	6	VI	500	0,3	1,2
2	II	400	0,4	1,2	7	VII	750	0,3	0,8
3	III	600	0,2	1,5	8	VIII	800	0,2	1,5
4	IV	800	0,4	1,0	9	IX	900	0,2	1,0
5	V	1000	0,1	0,8	10	X	100	0,5	1,0
Буква шифра	г	в	б	д	Буква шифра	г	в	б	д

### Пример 9.

В соответствии с условиями задачи 9 подобрать размеры круглого поперечного сечения балки, показанного на рисунке 6.5,а при  $Q = 2 \cdot 10^2$  Н,  $a = 2$  м,  $H = 0,2$  м.

6.2.1 Приложим к системе статическую силу, равную весу падающего груза  $Q$  (рисунок 6.5,б) и построим эпюру изгибающего момента  $M_x$  (рисунок 6.5, в).

6.2.2 По направлению движения падающего груза прикладываем к системе единичную силу (рисунок 6.5,г) и строим эпюру изгибающего момента  $M_1$  от действия единичной силы (рисунок 6.5,д).

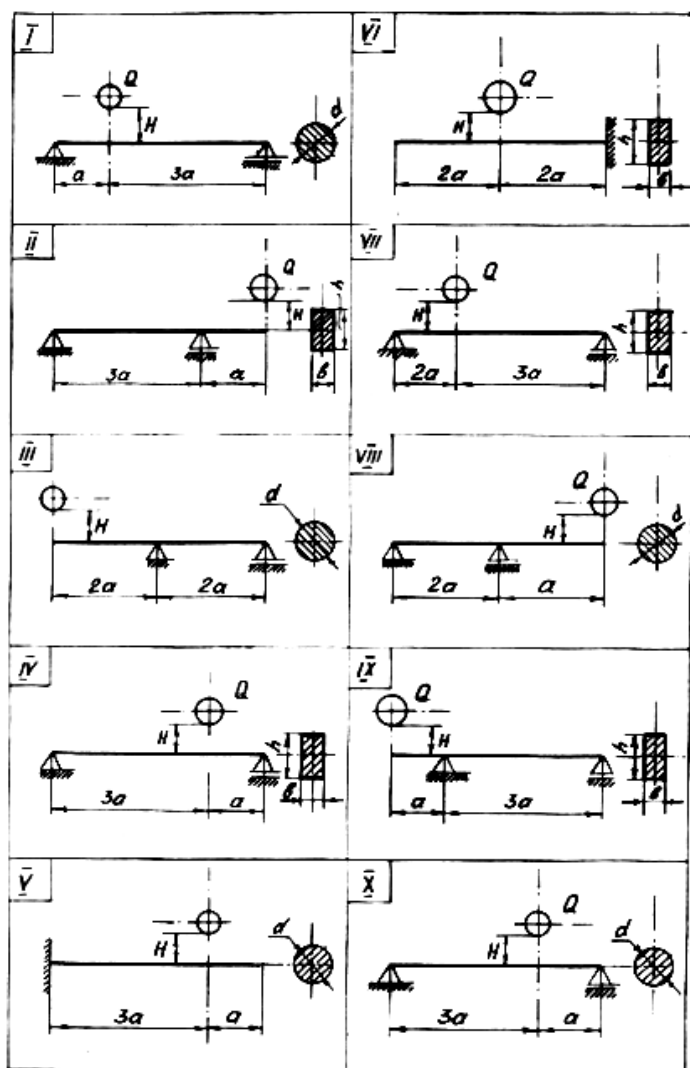


Рисунок 6.4

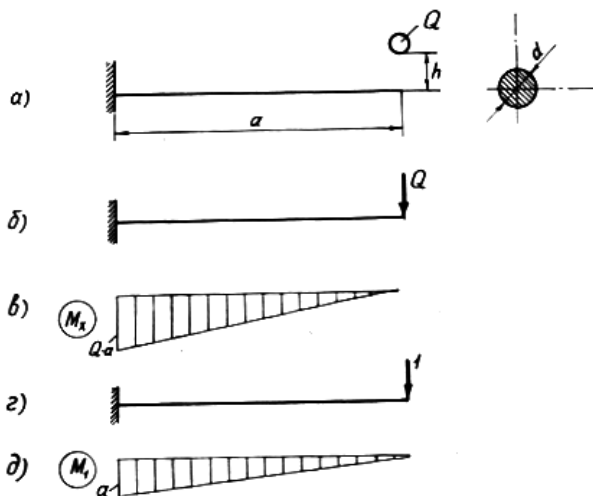


Рисунок 6.5

6.2.3 По правилу Верещагина определяем перемещение  $\Delta_{ст}$  по направлению движения падающего груза при его статическом приложении

$$\Delta_{ст} = \int \frac{M_x M_1}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{1}{2} Q \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} a \right) = \frac{Qa^3}{3EI_x}. \quad (6.3)$$

Подставляя в (6.3) момент инерции поперечного сечения  $I_x = \frac{\pi d^4}{64}$ , получим

$$\Delta_{ст} = \frac{64Qa^3}{3\pi E d^4}.$$

6.2.4 Определим коэффициент динамичности по приближенной формуле

$$k_d = \sqrt{\frac{2H}{\Delta_{ст}}}. \quad (6.4)$$

Подставив найденное выражение для  $\Delta_{\text{ст}}$  в (6.4), получим

$$k_d = \frac{d}{4a} \sqrt{\frac{3\pi EH}{2Qa}}.$$

6.2.5 Обращаясь к эпюре  $M_x$  (см. рисунок 6.2,в), находим опасное сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшего значения  $\max M_x = Qa$ , и определяем максимальную величину статических напряжений

$$\max \sigma_{\text{ст}} = \frac{\max M_x}{W_x} = \frac{Qa}{0,1d^3}.$$

6.2.6 Определим величину динамических напряжений в опасном сечении:

$$\max \sigma_{\text{дин}} = k_d (\max \sigma_{\text{ст}}) = \frac{d^2}{4a} \sqrt{\frac{3\pi EH}{2Qa}} \cdot \frac{Qa}{0,1d^3} = \frac{1}{0,4d} \sqrt{\frac{3\pi QE H}{2a}}. \quad (6.5)$$

6.2.7 Запишем условие прочности, которое с учетом (6.5) принимает вид:

$$\max \sigma_{\text{дин}} = \frac{1}{0,4d} \sqrt{\frac{3\pi QE H}{2a}} \leq [\sigma] \quad (6.6)$$

и определим из него требуемый диаметр  $d$ :

$$\begin{aligned} d &\geq \frac{1}{0,4[\sigma]} \sqrt{\frac{3\pi QE H}{2a}} = \frac{1}{0,4 \cdot 16 \cdot 10^7} \sqrt{\frac{3\pi 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,2}{2 \cdot 2}} = \\ &= 6,78 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 67,8 \text{ мм}, \end{aligned}$$

где допускаемые напряжения

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n} = \frac{32 \cdot 10^7}{2} = 16 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Округляя полученное значение  $d$  в большую сторону до четного числа мм, окончательно принимаем  $d = 68 \text{ мм}$ .

## Список рекомендуемой литературы

1. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 540 с.
2. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1976. – 608 с.
3. Дарков А. В. Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1974. – 704 с.
4. Минин Л. С. Расчетные и тестовые задачи по сопротивлению материалов. Учеб. пособие для Втузов. – М.: Высш. шк., 2003. – 224 с.
5. Оформление учебно-конструкторской документации. Метод. указания для выполнения работ по курсовому и дипломному проектированию / Сост. И. Н. Гонтарь, Н. Е. Денисова, В. А. Шорин, Н. И. Волчихина. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2003. – 88 с.

## Содержание

Введение.....	
1 Методические указания по темам курса.....	
2 Расчет статистически неопределимых систем при растяжении, сжатии и кручении .....	
2.1 Задача 1 .....	
2.2 Задача 2 .....	
2.3 Задача 3 .....	
3 Расчет балок на изгиб.....	
3.1 Задача 4 .....	
3.2 Задача 5 .....	
4 Расчет статически неопределимых плоских упругих систем .....	
4.1 Задача 6 .....	
5 Расчет на сложное сопротивление .....	
5.1 Задача 7 .....	
6 Расчет упругих систем на устойчиво и динамическое действие нагрузок.....	
6.1 Задача 8 .....	
6.2 Задача 9 .....	
Список рекомендуемой литературы .....	