UNIVERSIDAD
DE ATACAMA
FACULTAD DE INGENIERÍA
Departamento de Ingeniería informática
y Ciencias de la Computación

II. ALGEBRA DE BOOLE

2.1. Tablas de Verdad y Representación de Sentencias

En general, se estudiará el problema de implementación física del proceso de toma de decisiones lógica. Para representar sentencias se utilizaran los literales; A, B, C, etc. Para representar la negación se utilizara el literal complementado: A’, B’, C’, ...

Ejemplo:

El profesor esta haciendo clases : A
El profesor no esta haciendo clases: $\bar{A}$

Las relaciones binarias AND, OR, etc. se definen mediante una tabla de verdad.

AND $\equiv \wedge$

OR $\equiv \vee$

	AND	**OR INCLUSIVO**	**NAND**	**NOR**
A B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A \vee B}$
V V	V	V	F	F
V F	F	V	V	F
F V	F	V	V	F
F F	F	F	V	V

Me comprare un auto o me compraré una casa o ambos.

Equivalencia

A B	$A \equiv B$
V V	V
V F	F
F V	F
F F	V

Comprareé un auto. adquiriré un auto.

Complemento

A	$\bar{A}$
V	F
F	V

Or-Exclusivo

A B	$A \oplus B$
V V	F
V F	V
F V	V
F F	F

Mañana iré al campo o iré a la playa.

A través de sentencias y relaciones binarias se pueden formar expresiones. Por lo general las relaciones binarias mas usuales son OR, AND y NOT.

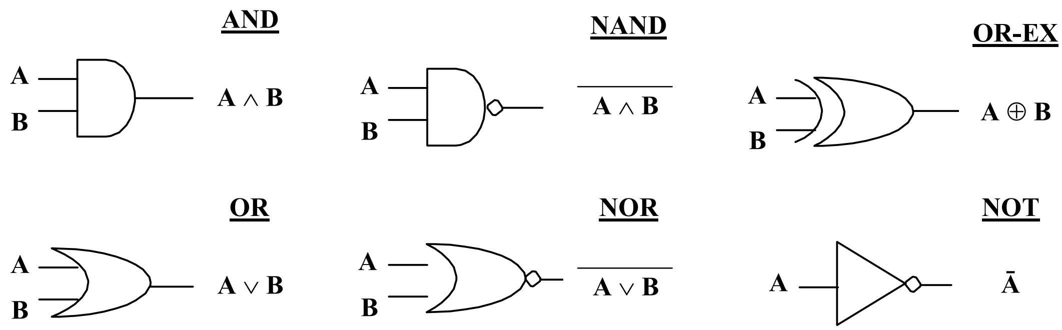
Ejemplo de una función

$$Z = A \vee (\overline{B \wedge \bar{E}})$$

A B E	$\bar{E}$	$B \wedge \bar{E}$	$\overline{B \wedge \bar{E}}$	Z
V V V	F	F	V	V
V V F	V	V	F	V
V F V	F	F	V	V
V F F	V	F	V	V
F V V	F	F	V	V
F V F	V	V	F	F
F F V	F	F	V	V
F F F	V	F	V	V

2.2. Realización Física de las Funciones

Las relaciones binarias que se implementan físicamente son: AND, OR, NAND, NOR, OR-EX y NOT. A la realización física de las primeras se las conoce como compuertas y a la última como inversor.



2.3. Postulados del Álgebra de Boole

Directamente asociado a la realización física de un circuito lógico esta el costo y éste depende de la cantidad de compuertas de que este compuesto el circuito.

La implementación de cualquier función es deseable que se realice al mínimo costo. Para tal efecto fue desarrollada el álgebra de Boole. Sus postulados son los siguientes:

i) Existe un conjunto K de objetos o elementos sujetos a una relación de equivalencia (≡) que satisface el principio de sustitución. Esto es, si a=b, a puede sustituirse por b en cualquier expresión sin alterar sus valores.

ii)
  a) Se define la operación binaria “ + ” tal que:
     si a y b ∈ K entonces $a + b \in K$

  b) Se define la operación binaria “ · ” tal que:
     si a y b ∈ K entonces $a \cdot b \in K$

iii)
  a) Existe un elemento (neutro) 0 en k tal que para cada a en K:
     $a + 0 = a.$
  b) Existe un elemento (neutro) 1 en k tal que para cada a en K:
     $a \cdot 1 = a.$

iv) $a + b = b + a$ } Ley de Conmutatividad

$a \cdot b = b \cdot a$

v) $\left.\begin{array}{l} a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \\ a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \end{array}\right\}$ Ley de Distributividad

vi) Para cada a Є K, existe un elemento ā tal que:

$a \cdot \bar{a} = 0$ y $a + \bar{a} = 1.$

vii) Existen al menos 2 elementos X e Y pertenecientes a K tal que $X \neq Y$.

2.4. Álgebra de Switching (2 valores).

Se define un conjunto K de 2 elementos K= { 0,1 } con las reglas y operaciones binarias “+” y “·” que se indican en las siguientes tablas:

OR

A B	**A + B**
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

NOT

A	**Ā**
0	1
1	0

AND

A B	**A . B**
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

TAREA:

Verificar que éstos cumplen los postulados descritos antes.

Ejemplo.

$\left.\begin{array}{l} 1 + 0 = 1 \\ 0 + 0 = 0 \end{array}\right\}$ $a + 0 = a$

$\left.\begin{array}{l} 1 \cdot 1 = 1 \\ 0 \cdot 1 = 0 \end{array}\right\}$ $a \cdot 1 = a$

la ley distributiva puede demostrarse a través de una tabla de verdad para a, b, c.

A B C	B · C	A + (B · C)	A + B	A + C	(A + B) . (A + C)
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	0	1	0
0 1 0	0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

2.5. Dualidad.

Cada postulado puede obtenerse de su dual reemplazando los “0” por “1” y los “+” por “·” y viceversa.

1) $a + b \cdot c \Rightarrow$ DUAL $\quad a \cdot (b + c)$
2) $a + 0 = a \Rightarrow$ DUAL $\quad a \cdot 1 = a$
1) $a + \bar{a} = 1 \Rightarrow$ DUAL $\quad a \cdot \bar{a} = 0$

2.6. Teoremas Fundamentales del Álgebra de Boole.

<u>**Teorema 1**</u>: Los elementos 0 y 1 son únicos.

Por absurdo considerarse que existen dos elementos nulos 0_1 y 0_2 Є K.

Luego: $\quad a_1 + 0_1 = a_1 \qquad a_2 + 0_2 = a_2$

Si $\quad$ a1= 02 $\quad$ y $\quad$ a2= 01

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{ll} & 02 + 01 = 02 \\ o & 01 + 02 = 02 \\ & 01 + 02 = 01 \\ & 02 + 01 = 01 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 01 = 02$$

por dualidad: $\Rightarrow \quad 1_1 = 1_2$

<u>Teorema 2</u>: Para cada a Є K, **a + a = a** y **a · a = a**.

$a + a = (a + a) * 1$	Postulado 3.	(Ver II.3)
$a + a = (a + a) * (a + \bar{a})$	Postulado 4.	
$a + a = a + a \cdot \bar{a}$	Postulado 5 y 6.	
$a + a = a + 0$		

Por dualidad: $a \cdot a = a$.

<u>Teorema 3</u>: Para cada a Є K, **a + 1 = 1** y **a · 0 = 0**.

$a + 1 = 1 * (a + 1)$
$a + 1 = (a + \bar{a}) \cdot (a + 1)$
$a + 1 = a + \bar{a} \cdot 1$

Por lo tanto: $a + 1 = 1$
Por Dualidad $a \cdot 0 = 0$.

<u>Teorema 4</u>: los elementos **0** y **1** son distintos y **1' = 0**.

Si por absurdo 1 = 0.

$a * 1 = a$ $a * 0 = a$

Las expresiones anteriores se cumplen solo si a=0, pero por el postulado 7 deben existir al menos 2 elementos, por lo tanto por contradicción $0 \neq 1$.

$a * 1 = a$ sea $a = \overline{1} \Rightarrow \overline{1} * 1 = \overline{1}$ y $\overline{1} * 1 = 0$.

Como $1 \neq 0 \Rightarrow \overline{1} = 0$.

<u>Teorema 5</u>: Para cada par de a y b Є K.

a + ab = a
a * (a + b) = a

$a + ab = a * 1 + ab$
$a + ab = a * (1 + b)$
$a + ab = a * 1 = a$

Por dualidad: $a * (a + b) = a$

Teorema 6: $\bar{a}$ es único para cada a Є K. Por absurdo considerar que existen 2 $\bar{a}_1$ y $\bar{a}_2$ que satisfacen el postulado 4.

O sea: $a + \bar{a}_1 = 1$ $\quad$ $a + \bar{a}_2 = 1$
$a * \bar{a}_1 = 0$ $\quad$ $a * \bar{a}_2 = 0$

$\bar{a}_2 = 1 * \bar{a}_2$
$\bar{a}_2 = (a + \bar{a}_1) * \bar{a}_2$
$\bar{a}_2 = a * \bar{a}_2 + \bar{a}_1 * \bar{a}_2$
$\bar{a}_2 = 0 + \bar{a}_1 * \bar{a}_2$
$\bar{a}_2 = a * \bar{a}_1 + \bar{a}_1 * \bar{a}_2$
$\bar{a}_2 = \bar{a}_1 (a + \bar{a}_2)$
$\bar{a}_2 = \bar{a}_1$

Teorema 7: Para cada a Є K, $a = \bar{\bar{a}}$.

Sea $\bar{a} = X$ $\quad \Rightarrow \quad X * \bar{X} = 0 \quad \bar{X} + X = 1$

Pero $\bar{a} * a = 0$

$a + \bar{a} = 1$

$\bar{\bar{a}} + \bar{a} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \bar{\bar{a}}$

Teorema 8: a [(a + b) + c] = [(a + b) + c] a = a

a [(a + b) + c] = a (a + b) + ac
a [(a + b) + c] = a + ac
a [(a + b) + c] = a

Teorema 9: (a + b) + c = a + (b + c) y (a * b) * c = a * (b * c)

(a + b) + c = a + { b [(a + b) + c] + c [(a + b) + c] }
(a + b) + c = a + [(a + b) + c] (b + c)
(a + b) + c = a [(a + b) + c] + [(a + b) + c] (b + c)
(a + b) + c = [(a + b) + c] [a + (b + c)]
(a + b) + c = [(a + b) (a + (b + c)] + c [a + (b + c)]
(a + b) + c = a * [a + (b + c)] + b[a + (b + c)] + c
(a + b) + c = (a + b) + c

Teorema 10: Para cualquier par de elementos a y b Є K:

$$a + \bar{a}b = a + b \qquad\qquad a(\bar{a} + b) = ab$$

$$a + \bar{a}b = (a + \bar{a})(a + b)$$
$$a + \bar{a}b = a + b.$$

Teorema 11: (De Morgan)

Para cada a y b Є K:

$$\overline{a + b} = \overline{a*}\ \overline{b} \quad y \quad \overline{a * b} = \overline{a} + \overline{b}$$

$$(a + b) + \overline{a} * \overline{b} = [(a + b) + \bar{a}]\,[(a + b) + \overline{b}]$$

$$(a + b) + \overline{a} * \overline{b} = [\,\overline{a} + a + b\,]\,[\,a + b + \overline{b}\,]$$

$$(a + b) + \overline{a} * \overline{b} = [\,1 + b]\,[\,1 + a\,]$$

$$(a + b) + \overline{a} * \overline{b} = 1$$

$$\overline{a} * \overline{b} * (a + b) = a\,(\overline{a} * \overline{b}) + b\,(\overline{a} * \overline{b})$$

$$\overline{a} * \overline{b} * (a + b) = (0 * \overline{b}) + b\,(0 * \overline{a})$$

$$\overline{a} * \overline{b} * (a + b) = 0.$$

Lo otro por Dualidad.

Teorema 12:Para tres elementos cualquiera a, b y c Є K:

$$ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c \quad y \quad (a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c)$$

$$ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c + bc(a + \bar{a})$$
$$ab + \bar{a}c + bc = ab + abc + \bar{a}c + \bar{a}bc$$
$$ab + \bar{a}c + bc = ab(1 + c) + \bar{a}c(1 + b)$$
$$ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c$$

2.7. Teoría de Conjuntos como Álgebra de Boole

La teoría de conjuntos es un segundo ejemplo del álgebra de Boole.

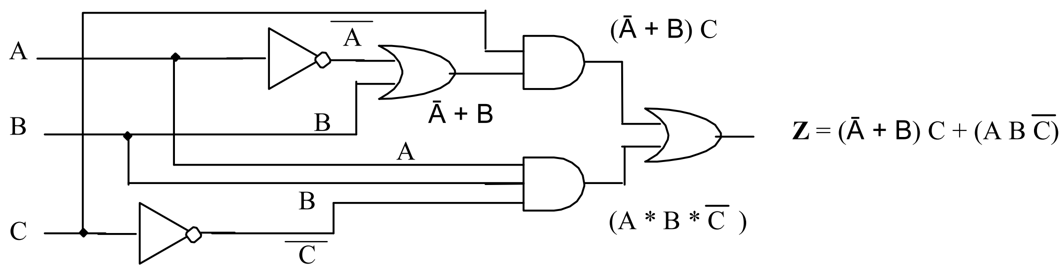
- **Conjunto**: Colección de Objetos.
- **Conjunto Universo (Su):** Conjunto que incluye todos los objetos seleccionados con algún criterio.
- **Subconjunto**: R es un subconjunto de S si cada objeto de R esta también en S ($R \subset S$)
- **Conjunto Nulo (Sz)**: Conjunto que no tiene elementos.
- **Unión de dos conjuntos R y S**: Conjunto que contiene todos los elementos contenidos en R y S.
- **Intersección de dos conjuntos R y S**: Conjunto que contiene los elementos que están en R y S simultáneamente.
- **Complemento de S_($C_{(S)}$):** Conjunto que contiene a los elementos que están en el universo pero que no están en S.

Para representar los conjuntos se utilizan los diagramas de Venn. Se puede establecer una relación biunívoca entre los conjuntos definidos anteriormente y el álgebra de Boole.

Relaciones Binarias	Teoría de Conjuntos	Álgebra de Boole
$\wedge$	$\cap$	$\cdot$
$\vee$	$\cup$	+
F	S_z Nulo	0
V	S_u Universo	1
$\bar{A}$	$C_{(S)}$ complemento de S	$\bar{a}$

Ejercicios

1. Escriba de la forma más simple posible la función booleana realizada por el siguiente circuito lógico.



Solución

$\mathbf{Z} = (\bar{A} + B)\, C + (A\ B\ \overline{C})$

$\mathbf{Z} = \bar{A}\ C + B\, C + A\, B\, \overline{C}$

$\mathbf{Z} = \bar{A}\ C + B\ (C + A\ \overline{C})$

$\mathbf{Z} = \bar{A}\ C + B\ ((C + A)\, (C + \overline{C}))$

$\mathbf{Z} = \bar{A}\ C + B\, (C + A)$

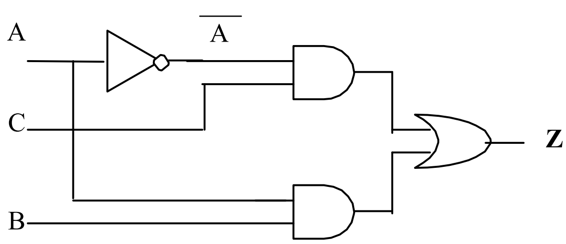
$\mathbf{Z} = \bar{A}\, C + B\, C + A\, B$

$\mathbf{Z} = \bar{A}\, C + B\, C(A + \bar{A}) + A\, B$

$\mathbf{Z} = \bar{A}\, C + A\, B\, C + \bar{A}\, B\, C + A\, B$

$\mathbf{Z} = \bar{A}\, C\, (1 + B) + A\, B\, (1 + C)$

$\mathbf{Z} = \bar{A}\, C + A\, B$



2. Simplifique la expresión booleana.

$\mathbf{w} = (X + \overline{Y}\,\overline{X})(XZ + X\overline{Z}Y + X\overline{Z}\,\overline{Y})$

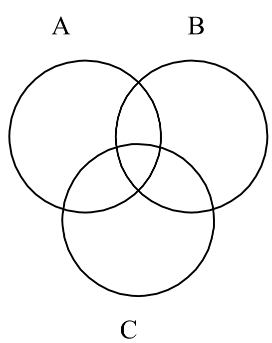
Solución

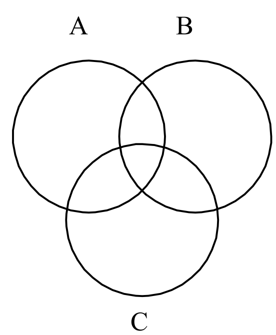
$\mathbf{w} = (X + \overline{Y}\,\overline{X})(X\,(Z + \overline{Z}))$
$\mathbf{w} = (X + \overline{Y}\,\overline{X})\,X$
$\mathbf{w} = (X + 0)$
$\mathbf{w} = X$

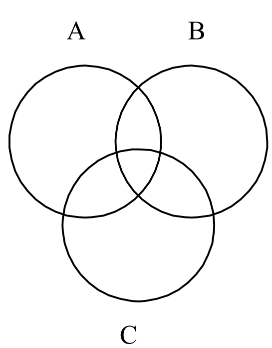
3. Compruebe el postulado V (Ley distributiva), utilizando los Diagramas de Venn.

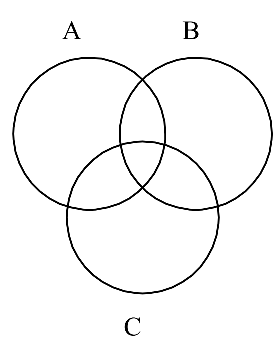
$a + (b * c) = (a + b)(a + c)$
$a * (b + c) = a * b + a * c)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$









2.8. Minimización de Funciones Booleanas.

2.8.1. Formas Canónicas de una expresión.

Sea $\mathbf{F} = AB\bar{C} + \bar{B}(A+C)$ una función booleana cualquiera.

$\mathbf{F} = AB\bar{C} + A\bar{B} + \bar{B}C$

$\mathbf{F} = AB\bar{C} + A\bar{B}(\bar{C} + C) + (\bar{A} + A)(\bar{B}C)$

$\mathbf{F} = AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C$

$\underline{\mathbf{F} = AB\bar{C} + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C}$ $\Rightarrow$ **Suma De Productos.**

Se observa que cada término contiene a todas las variables en alguno de sus estados. Cada termino se denomina MINTERMINO y a la expresión se la conoce como **1ra forma canónica**.

Si la misma función **F** adquiere la siguiente forma equivalente:

$\mathbf{F} = (A+\bar{B}+C)\,(A+\bar{B}+\bar{C})\,(A+B+C)\,(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$ $\Rightarrow$ **Producto de Sumas**.

Cada término se denomina MAXTERMINO y a la expresión se la conoce como **2da forma canónica**.

Teorema 1: Cualquier función de switching de n variables $f(x_1, x_2,..., x_n)$ puede ser expresada como una suma de mintérminos.

Teorema 2: Cualquier función de switching de n variables $f(x_1, x_2,..., x_n)$ puede ser expresada como un producto de maxtérminos.

Considere la misma función:

$\mathbf{F} = AB\bar{C} + \bar{B}(A+C)$, se puede expresar en una tabla de verdad (Estado)

A B C	$A\ B\ \bar{C}$	A + C	$\bar{B}\ (A + C)$	F	N_{10}
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	1	1	1	1
0 1 0	0	0	0	0	2
0 1 1	0	1	0	0	3
1 0 0	0	1	1	1	4
1 0 1	0	1	1	1	5
1 1 0	1	1	0	1	6
1 1 1	0	1	0	0	7

Si para la función expresada en mintérminos se asigna a la variable un “1” y al complemento un “0”.

$$\Rightarrow \mathbf{F} = \underbrace{A\,B\,\overline{C}}_{\substack{1\,1\,0 \\ \mathbf{m_6}}} + \underbrace{A\,\overline{B}\,\overline{C}}_{\substack{1\,0\,0 \\ \mathbf{m_4}}} + \underbrace{A\,\overline{B}\,C}_{\substack{1\,0\,1 \\ \mathbf{m_5}}} + \underbrace{\overline{A}\,\overline{B}\,C}_{\substack{0\,0\,1 \\ \mathbf{m_1}}}$$

Corresponde a combinaciones de las variables de las cuales la función tiene valor “1”.

Por lo tanto: $\mathbf{F} = \sum m(1, 4, 5, 6)$

Si para la función expresada en maxtérminos se asigna a la variable un “0” y al complemento un “1”.

$$\mathbf{F} = \underbrace{(A+\overline{B}+C)}_{\substack{0\,1\,0 \\ \mathbf{M_2}}}\ \underbrace{(A+\overline{B}+\overline{C})}_{\substack{0\,1\,1 \\ \mathbf{M_3}}}\ \underbrace{(A+B+C)}_{\substack{0\,0\,0 \\ \mathbf{M_0}}}\ \underbrace{(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})}_{\substack{1\,1\,1 \\ \mathbf{M_7}}}$$

Por lo tanto: $\mathbf{F} = \prod M\,(0, 2, 3, 7)$

Corresponde a combinaciones de las variables para las cuales la función toma el valor “0”.

2.8.2 Representación de funciones booleanas mediante Mapas de Karnaugh.

Los mapas K pueden considerarse como una representación gráfica de las tablas de verdad o como una extensión de los diagramas de Venn.

Considerese:

a)

AND

A B	A * B
0 0	0
0 1	0
1 0	0
1 1	1

OR

A B	A + B
0 0	0
0 1	1
1 0	1
1 1	1

Su representación en mapas K consiste en dibujar un diagrama con 4 cuadrados uno para cada combinación de las variables.

1) **A * B**

F \ **AB**	00	01	11	10
	0	0	1	0

B \ **A**	0	1
0	0	0
1	0	1

> <u>Mintérmino:</u>
> Corresponde en un mapa K, a la mínima área distinta de "0".

2) **A + B**

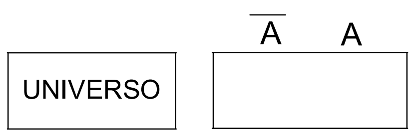
F \ **AB**	00	01	11	10
	0	1	1	1

B \ **A**	0	1
0	0	1
1	1	1

> <u>Maxtérmino:</u>
> Corresponde en un mapa K, a la máxima área distinta de "1".

Normalmente los ceros se omiten por simplicidad.

b) Visión desde el punto de vista de los diagramas de Venn.

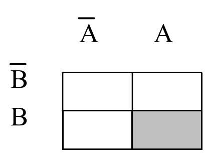


	$\overline{A}$	A
$\overline{B}$	$\overline{A}\,\overline{B}$	$A\overline{B}$
B	$\overline{A}B$	AB

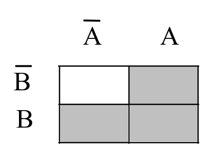
F=1

$$F = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}\,B + A\,\overline{B} + A\,B = 1$$

AND (A ∩ B)



OR (A ∪ B)



Lo anterior puede repetirse para más variables. Existe un cuadrado para cada combinación de entrada.

Para n variables deben existir 2^n casilleros.

Mapas de Karnaugh para tres variables

Considere las siguientes funciones: F_1= ABC; F_2= A+B+C

A B C	F_1	F_2
0 0 0	0	0
0 0 1	0	1
0 1 0	0	1
0 1 1	0	1
1 0 0	0	1
1 0 1	0	1
1 1 0	0	1
1 1 1	1	1

C \ AB	00	01	11	10
0				
1			1	

ABC
M_7

C \ AB	00	01	11	10
0		1	1	1
1	1	1	1	1

A + B + C
M_0

Si es un mintérmino se coloca un "1" en el casillero correspondiente.
Si es un maxtérmino se coloca un "0" en el casillero correspondiente.

<u>Nota</u>: se usa el código Gray para la asignación de las variables por sus características de ser cíclico.

C \ AB	00	01	11	10
0	0	2	6	4
1	1	3	7	5

C \ AB	00	01	11	10
0	$\overline{ABC}$	$\bar{A}BC$	$AB\bar{C}$	$A\bar{B}\bar{C}$
1	$\overline{AB}C$	$\bar{A}BC$	ABC	$A\bar{B}C$

Ejemplo: Considerese los terminos m_2 y m_6 que sólo difieren en la variable A.

$m_2 = \bar{A}B\underline{\bar{C}} = 010$
$m_6 = ABC = 110$

$m_2 + m_6 = \bar{A}B\bar{C} + AB\bar{C} = B\bar{C}\,(A + \bar{A}) = B\bar{C}$

De lo anterior se puede deducir que para el caso de tres variables la agrupación de:

a) Una celda representa un término de 3 variables.
b) Dos celdas representan un término de 2 variables.
c) Cuatro celdas representan un término de 1 variable.
d) Ocho celdas representan a F = "1".

Ejemplo: Reducir la siguiente función:

$$F = A\,B\,\bar{C} + A\,\bar{B}\,C + A\,\bar{B}\,\bar{C} + \bar{A}\,\bar{B}\,C$$

$$1\,1\,0 \quad 1\,0\,1 \quad 1\,0\,0 \quad 0\,0\,1$$

C \ AB	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	0	0	1

$$F = A\,\bar{C} + \bar{B}\,C = (A + C)\,(\bar{B} + \bar{C})$$

Representación de cuatros variables

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1		
01	1			1
11			1	
10				1

$$F = \bar{A}\,\bar{C}\,\bar{D} + \bar{B}\,\bar{C}\,D + A\,B\,C\,D + A\,\bar{B}\,C\,\bar{D}$$

$$F = \Sigma\, m\,(0, 1, 4, 9, 10, 15)$$

Mapas K de 5 y 6 variables

Los mapas de mas de 4 variables no son simples de usar.

El número de celdas llega a ser excesivo y la geometría para efectos de adyacencias es más complicada. Para un mapa de 5 variables se necesitan 2^5 casilleros y para uno de 6 $2^6 = 64$. Para un número mayor, el método se hace totalmente impráctico.

Ejemplo:

Representar en un mapa de K la siguiente expresión:

$$F = \Sigma m(0,2,4,6,9,11,13,15,17,21,25,27,29,31)$$

DE \ ABC	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0 **1**	4 **1**	12	8	24	28	20	16
01	1	5	13 **1**	9 **1**	25 **1**	29 **1**	21 **1**	17 **1**
11	3	7	15 **1**	11 **1**	27 **1**	31 **1**	23	19
10	2 **1**	6 **1**	14	10	26	30	22	18

$$F = B\,E + A\,\overline{D}\,E + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E}$$

A objeto de simplificar el trabajo con mapas K de 5 y 6 variables se puede trabajar con mapas de 4 variables en forma separada.

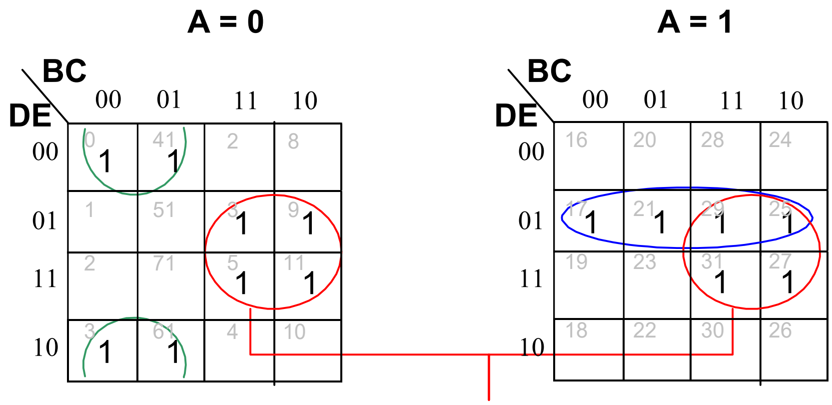
A = 0

DE \ BC	00	01	11	10
00	0	4	12	8
01	1	5	13	9
11	3	7	15	11
10	2	6	14	10

A = 1

DE \ BC	00	01	11	10
00	16	20	28	24
01	17	21	29	25
11	19	23	31	27
10	18	22	30	26

F= $\Sigma m(0,2,4,6,7,11,13,15,17,21,25,27,29,31)$

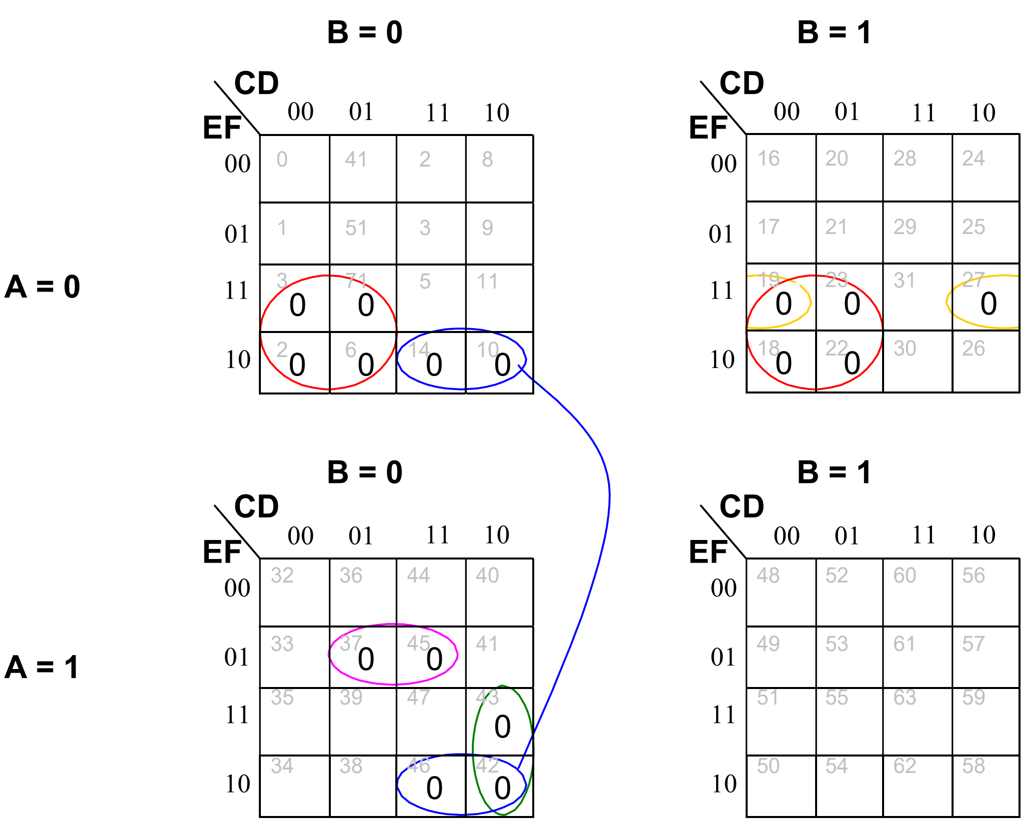


$F = BE + A\overline{D}E + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{E}$

Ejemplo

Representar en un mapa de K la siguiente expresión:

F= $\prod M(2,3,6,7,10,14,18,19,22,23,27,37,42,43,45,46)$



$$F=(A + C + E)(B + C + E + F)(A + B + D + E + F)(A + B + D + E + F)(A + B + C + D + E)$$

2.8.3.Simplificación de mapas de Karnaugh

Hasta ahora sólo se han representado las funciones boolenas en mapas K, aun cuando hemos realizado algunas simplificaciones intuitivas.

En la presente sección se realizará un estudio para simplificar una función de Boole. ¿ Cual es el criterio?

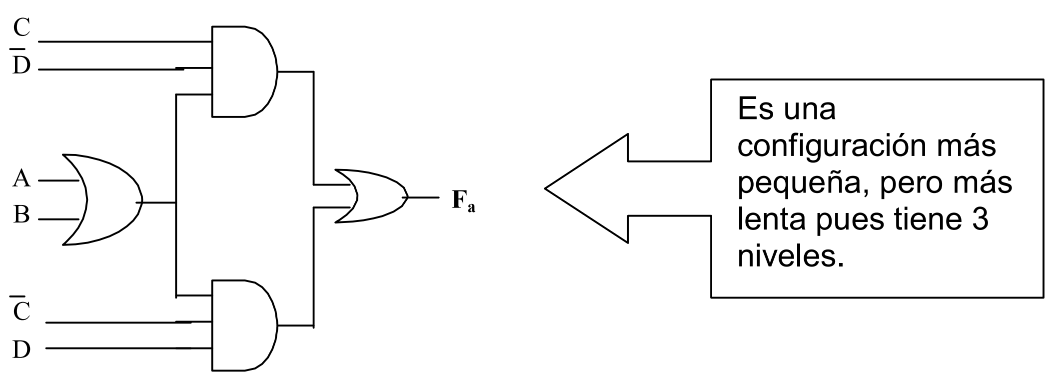
Suponga la siguiente función:

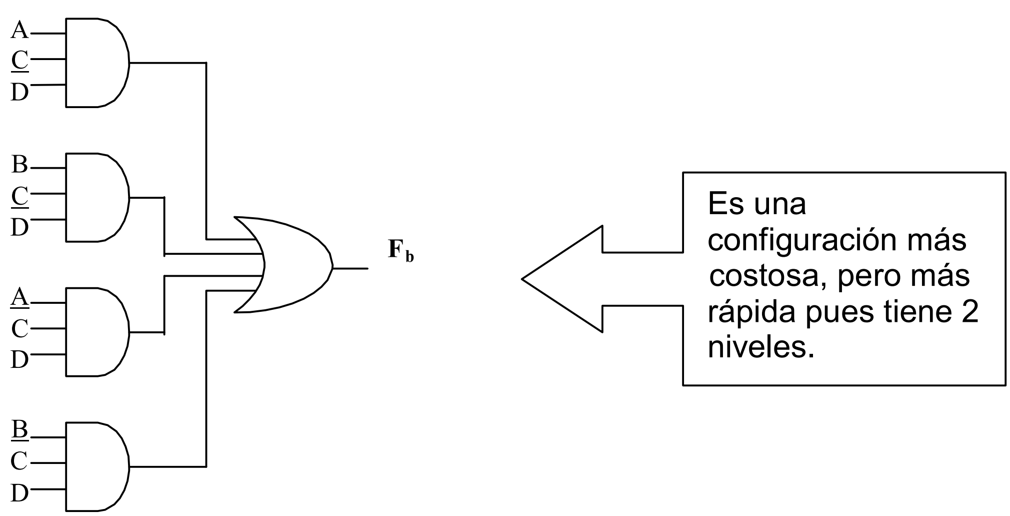
$$F_a = (A + B)(C\bar{D} + \bar{C}D) = (A + B)C\bar{D} + (A + B)(\bar{C}D)$$

$$F_b = AC\bar{D}+BC\bar{D}+A\bar{C}D+B\bar{C}D=ABC\bar{D}+A\bar{B}C\bar{D}+\cancel{ABC\bar{D}}+\bar{A}BC\bar{D}+\cancel{AB\bar{C}D}+A\bar{B}\bar{C}D+AB\bar{C}D+\bar{A}B\bar{C}D$$

$$F_c = \Sigma m(5,6,9,10,13,14)$$

$$F_a = F_b = F_c$$





En los sistemas digitales de alta velocidad, es deseable que el retardo sea lo más pequeño posible.

Por ahora será más importante para nosotros la rapidez y no el costo.

2.8.4. Funciones incompletamente especificadas

Los “1” y “0” en un mapa significan la combinación de variables para las cuales la función es “1” o “0”.

Las combinaciones son determinadas comúnmente de una tabla de verdad que entrega las condiciones bajo las cuales la función es “1”. La función es considerada “0” para las otras condiciones. Esta consideración no siempre es cierta cuando existen aplicaciones donde ciertas combinaciones de entradas nunca ocurren.

Por ejemplo en un código BCD de 4 variables hay 6 combinaciones que no son usadas y nunca ocurrirán mientras el circuito digital trabaje correctamente. Por lo tanto no hay cuidado de la respuesta de la función para estas combinaciones. Esta combinación de no especificación de salida puede ser usada para minimizar la función.

Ejemplo: Considere el conjunto de los N[ros] primos comprendidos entre “0” y “9” representados en forma binaria por 4 bits. Diseñar un detector de números primos que entregue una salida Z si los cuatro bits de entrada representan un numero primo. (No considere el “0” como primo).

N	$X_3X_2X_1X_0$	Z
0	0 0 0 0	0
1	0 0 0 1	1
2	0 0 1 0	1
3	0 0 1 1	1
4	0 1 0 0	0
5	0 1 0 1	1
6	0 1 1 0	0
7	0 1 1 1	1
8	1 0 0 0	0
9	1 0 0 1	0
10	1 0 1 0	ϕ
11	1 0 1 1	ϕ
12	1 1 0 0	ϕ
13	1 1 0 1	ϕ
14	1 1 1 0	ϕ
15	1 1 1 1	ϕ

X_1X_0 \ X_3X_2	00	01	11	10
00	0	0	∅	0
01	1	1	∅	0
11	1	1	∅	∅
10	1	0	∅	∅

$$F = \bar{X}_3X_0 + \bar{X}_2X_1$$

F = Σm(1,2,3,5,7) + δ(10,11,12,13,14,15)

2.8.5.Método Tabular: Quine Mc Cluskey

Los mapas K son convenientes siempre que el número de variables no exceda a 4 o 6. El método tabular de Q-M puede resultar en estos casos más práctico.

La simplificación por este método consiste en dos partes:

1) Encontrar mediante una búsqueda sistemática todos los términos que deben incluirse en una función (Implicantes Primos).

2) Elegir dentro de los implicantes primos aquellos que den una expresión con el menor número de literales.

Procedimiento:

a) Expandir la función en la primera forma canónica (F = Σm ()).
b) Ordenar los mintérminos según el número de "1".(en forma creciente)
c) Agrupación según el número de "1".
d) Determinar los implicantes primos, aplicando en forma repetitiva el postulado $\boxed{TA + T\bar{A} = T.}$

Ejemplo

Sea f(w,x,y,z) = Σm(1,4,6,7,8,9,10,11,15)

N	W X Y Z
1	0 0 0 1
4	0 1 0 0
6	0 1 1 0
7	0 1 1 1
8	1 0 0 0
9	1 0 0 1
10	1 0 1 0
11	1 0 1 1
15	1 1 1 1

1	0 0 0 1	
4	0 1 0 0	1 uno
8	1 0 0 0	
6	0 1 1 0	
9	1 0 0 1	2 unos
10	1 0 1 0	
7	0 1 1 1	3 unos
11	1 0 1 1	
15	1 1 1 1	4 unos

(1,9)	- 0 0 1	***X***
(4,6)	0 1 - 0	***X***
(8,9)	1 0 0 -	√
(8,10)	1 0 - 0	√
(6,7)	0 1 1 -	***X***
(9,11)	1 0 - 1	√
(10,11)	1 0 1 -	√
(7,15)	- 1 1 1	***X***
(11,15)	1 - 1 1	***X***

(8,9,10,11)	1 0 - -	***X***
(8,10,9,11)	1 0 - -	

Luego la función puede expresarse a través de los implicantes primos como:

W	X	Y	Z
-	0	0	1
0	1	-	0
0	1	1	-
-	1	1	1
1	-	1	1
1	0	-	-

$\Rightarrow$

$\mathbf{\bar{X}\,\bar{Y}\,Z}$
$\mathbf{\bar{W}\,X\,\bar{Z}}$
$\mathbf{\bar{W}\,X\,Y}$
$\mathbf{X\,Y\,Z}$
$\mathbf{W\,Y\,Z}$
$\mathbf{W\,\bar{X}}$

$$F = \bar{X}\,\bar{Y}\,Z + \bar{W}\,X\,\bar{Z} + \bar{W}\,X\,Y + X\,Y\,Z + W\,Y\,Z + W\,\bar{X}$$

Sin embargo esta no es una función mínima y la podemos observar mediante un mapa K.

YZ \ WX	00	01	11	10
00		1		1
01	1			1
11		1	1	1
10		1		1

$$F = W\,\bar{X} + \bar{W}\,X\,\bar{Z} + \bar{Y}\,Z\,\bar{X} + Y\,Z\,X$$

Para minimizar completamente la función debemos construir la siguiente tabla.

W	**X**	**Y**	**Z**	1	4	6	7	8	9	10	11	15	
-	0	0	1	***X***					x				
0	1	-	0		***X***	*x*							
0	1	1	-			*x*	*x*						
-	1	1	1				*x*					*x*	∗
1	-	1	1								*x*	*x*	
1	0	-	-					***X***	*x*	***X***	*x*		
				√	√		√	√		√			El 7 y 15

∗ implicantes primos esenciales.

Luego :

$$F = \bar{X}\,\bar{Y}\,Z + \bar{W}\,X\,\bar{Z} + W\,\bar{X} + X\,Y\,Z$$