# Sistemas Digitales

## Algebra Booleana y Simplificación Lógica:

### Mapa de Karnaugh

# ¿Qué es un mapa de Karnaugh?

## Para obtener la expresión mínima

- El propósito de un mapa de Karnaugh es simplificar una expresión booleana.
- si se aplica adecuadamente, genera las expresiones suma de productos y producto de sumas más simples posibles, conocidas como expresiones mínimas.
- El mapa de Karnaugh es una matriz de celdas en la que cada celda representa un valor binario de las variables de entrada.
- Los mapas de Karnaugh se pueden utilizar para expresiones de dos, tres, cuatro y cinco variables.

# Mapa de Karnaugh de tres variables

## Matriz de ocho celdas

| $AB \backslash C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | | |
| 01 | | |
| 11 | | |
| 10 | | |

| $AB \backslash C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ | $\bar{A}\bar{B}C$ |
| 01 | $\bar{A}B\bar{C}$ | $\bar{A}BC$ |
| 11 | $AB\bar{C}$ | $ABC$ |
| 10 | $A\bar{B}\bar{C}$ | $A\bar{B}C$ |

# Mapa de Karnaugh de cuatro variables

## Matriz de dieciséis celdas

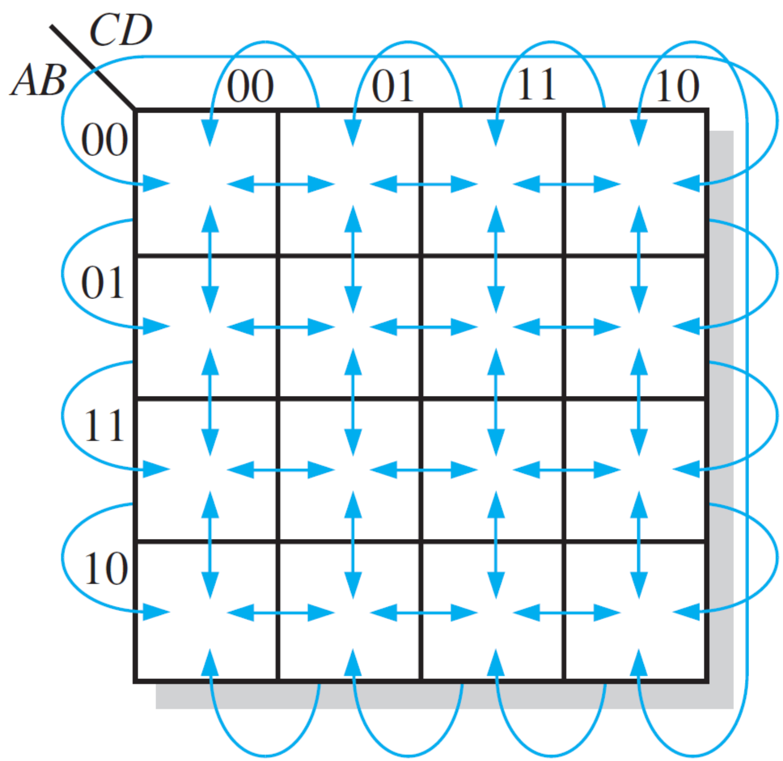
| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | | | |
| 11 | | | | |
| 10 | | | | |

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ | $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ | $\bar{A}\bar{B}CD$ | $\bar{A}\bar{B}C\bar{D}$ |
| 01 | $\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$ | $\bar{A}B\bar{C}D$ | $\bar{A}BCD$ | $\bar{A}BC\bar{D}$ |
| 11 | $AB\bar{C}\bar{D}$ | $AB\bar{C}D$ | $ABCD$ | $ABC\bar{D}$ |
| 10 | $A\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ | $A\bar{B}\bar{C}D$ | $A\bar{B}CD$ | $A\bar{B}C\bar{D}$ |

# Adyacencia de Celdas

Cambio de una única variable

Las celdas que sólo difieren en una variable son adyacentes.



# Mapa de Karnaugh de una suma de productos estándar

Pasos para llevar una expresión suma de productos a un mapa de Karnaugh:

Paso 1: Determinar el valor binario de cada término producto de la suma de productos estándar. Tras un poco de práctica, podrá realizar la evaluación de términos mentalmente.

Paso 2: A medida que evaluamos cada término, colocamos un 1 en el mapa de Karnaugh en la celda que tiene el mismo valor que dicho término producto.

Ejemplo: Transformar a mapa de Karnaugh una suma de productos estándar

| $AB \backslash C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 |
| 01 | | |
| 11 | 1 | |
| 10 | 1 | |

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + AB\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$$

000 001 110 100

Ejemplo: Transformar a mapa de Karnaugh una suma de productos estándar

$$\underbrace{\bar{A}\bar{B}C}_{001} + \underbrace{\bar{A}B\bar{C}}_{010} + \underbrace{AB\bar{C}}_{110} + \underbrace{ABC}_{111}$$

| $AB$ \ $C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | | 1 |
| 01 | 1 | |
| 11 | 1 | 1 |
| 10 | | |

Ejemplo: Transformar a mapa de Karnaugh una suma de productos estándar

$$\bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}B\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABCD + AB\bar{C}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}C\bar{D}$$

0011 0100 1101 1111 1100 0001 1010

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | 1 | |
| 01 | 1 | | | |
| 11 | 1 | 1 | 1 | |
| 10 | | | | 1 |

# Mapa de Karnaugh de una suma de productos no estándar

- Antes de poder utilizar un mapa de Karnaugh, las expresiones booleanas deben estar en su forma estándar.

- Si una expresión no lo está, se pasará al formato estándar mediante el procedimiento visto en clases anteriores o mediante desarrollo numérico.

- El desarrollo numérico es quizá el método más eficaz.

# Desarrollo numérico de un producto no estándar

A un término en forma no estándar le faltan una o más variables en su expresión

Ejemplo: supongamos que uno de los términos producto de una expresión de 3 variables es $B$ (recuerde que una variable única se considera como un término producto en una expresión suma de productos). Este término puede expandirse numéricamente a su forma estándar de la siguiente manera: se escribe el valor binario de la variable; a continuación, se añaden todos los posibles valores de las variables que faltan $A$ y $C$ del siguiente modo:

$$\begin{array}{c} B \\ 010 \\ 011 \\ 110 \\ 111 \end{array}$$

Los cuatro números binarios resultantes son los valores correspondientes a los términos de la suma de productos estándar $\bar{A}B\bar{C}$, $\bar{A}BC$, $AB\bar{C}$ y $ABC$.

Ejemplo: Transformar la siguiente expresión suma de productos en un mapa de Karnaugh:

$$\bar{A} + A\bar{B} + AB\bar{C}$$

| $\bar{A}$ | + | $A\bar{B}$ | + | $AB\bar{C}$ |
|---|---|---|---|---|
| 000 | | 100 | | 110 |
| 001 | | 101 | | |
| 010 | | | | |
| 011 | | | | |

| $AB \backslash C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | |
| 10 | 1 | 1 |

Cada uno de los valores binarios resultantes se traslada al mapa, colocando un 1 en la celda apropiada del mapa de Karnaugh de 3 variables

Ejemplo: Transformar la siguiente expresión suma de productos en un mapa de Karnaugh:

$$\bar{B}\bar{C} + A\bar{B} + AB\bar{C} + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + A\bar{B}CD$$

| $\bar{B}\bar{C}$ | $A\bar{B}$ | $AB\bar{C}$ | $A\bar{B}C\bar{D}$ | $\bar{A}\bar{B}\bar{C}D$ | $A\bar{B}CD$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0000 | 1000 | 1100 | 1010 | 0001 | 1011 |
| 0001 | 1001 | 1101 | | | |
| 1000 | 1010 | | | | |
| 1001 | 1011 | | | | |

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | |
| 01 | | | | |
| 11 | 1 | 1 | | |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Simplificación de una suma de productos mediante el mapa de Karnaugh

- El proceso que genera una expresión que contiene el menor número posible de términos con el mínimo número de variables posibles se denomina *minimización*.

- Después de haber obtenido el mapa de Karnaugh de una suma de productos, la expresión suma de productos mínima se obtiene agrupando los 1s y determinando la expresión suma de productos mínima a partir del mapa.

## Agrupación de unos

Finalidad: maximizar el tamaño de los grupos y minimizar el número de estos grupos.

1. Un grupo tiene que contener 1, 2, 4, 8 ó 16 celdas, valores que se corresponden con las potencias de 2. En el caso de un mapa de Karnaugh de 3 variables, el grupo máximo puede contener $2^3 = 8$ celdas.

2. Cada celda de un grupo tiene que ser adyacente a una o más celdas del mismo grupo, pero no todas las celdas del grupo tienen que ser adyacentes entre sí.

3. Incluir siempre en cada grupo el mayor número posible de 1s de acuerdo a la regla número 1.

4. Cada 1 del mapa tiene que estar incluido en al menos un grupo. Los 1s que ya pertenezcan a un grupo pueden estar incluidos en otro, siempre que los grupos que se solapen contengan 1s no comunes.

## Ejemplo: Agrupar los 1s en cada uno de los mapas de Karnaugh.

| $AB \backslash C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | |
| 01 | | 1 |
| 11 | 1 | 1 |
| 10 | | |

| $AB \backslash C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | |
| 11 | | 1 |
| 10 | 1 | 1 |

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | | | | |
| 10 | | 1 | 1 | |

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | | | 1 |
| 01 | 1 | 1 | | 1 |
| 11 | 1 | 1 | | 1 |
| 10 | 1 | | 1 | 1 |

| $AB \backslash C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | |
| 01 | | 1 |
| 11 | 1 | 1 |
| 10 | | |

Adyacencia cíclica

| $AB \backslash C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | |
| 11 | | 1 |
| 10 | 1 | 1 |

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | | |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | | | | |
| 10 | | 1 | 1 | |

Adyacencia cíclica

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | | | 1 |
| 01 | 1 | 1 | | 1 |
| 11 | 1 | 1 | | 1 |
| 10 | 1 | | 1 | 1 |

# Reglas para determinar la expresión suma de productos mínima a partir del mapa

Cuando todos los 1s que representan los términos productos estándar de una expresión se han trasladado al mapa y se han agrupado adecuadamente, comienza el proceso de obtención de la suma de productos mínima. Para encontrar los términos mínimos y la expresión suma de productos mínima se aplican las siguientes reglas:

# Reglas para determinar la expresión suma de productos mínima a partir del mapa

Regla 1: Agrupar las celdas que contienen 1s. Cada grupo de celdas que contiene 1s da lugar a un término producto compuesto por todas las variables que aparecen en el grupo en sólo una forma (no complementada o complementada). Las variables que aparecen complementadas y sin complementar dentro del mismo grupo se eliminan. A éstas se les denomina *variables contradictorias*.

Regla 2: Determinar la operación producto mínima para cada grupo.

Para un mapa de 3 variables:

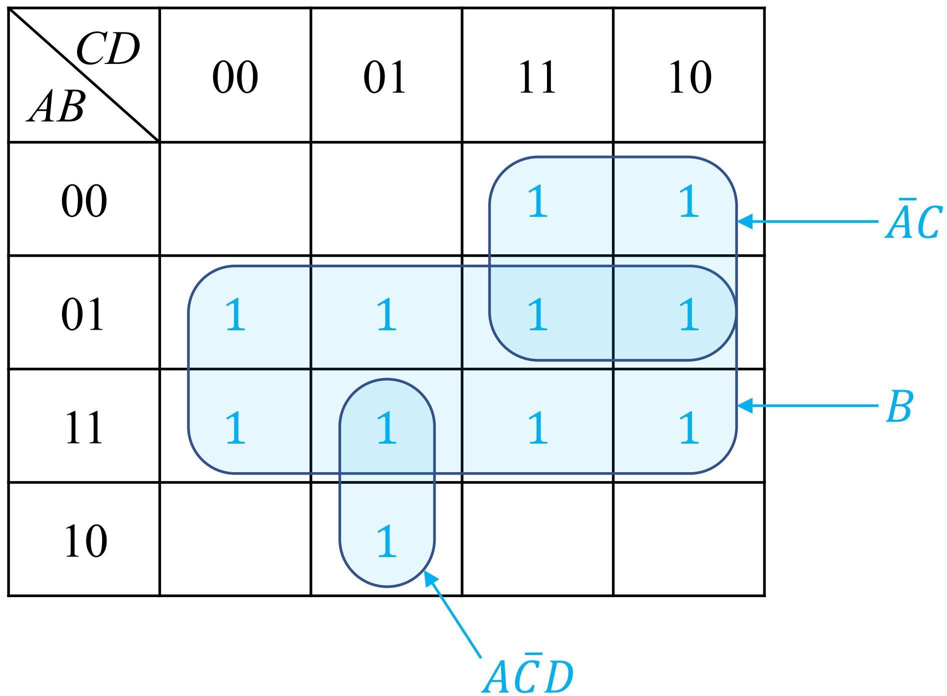
1. Un grupo formado por 1 celda da lugar a un término producto de 3 variables.
2. Un grupo formado por 2 celdas da lugar a un término producto de 2 variables.
3. Un grupo formado por 4 celdas da lugar a un término de 1 variable.
4. Un grupo formado por 8 celdas indica que la expresión vale 1.

Para un mapa de 4 variables:

1. Un grupo formado por 1 celda da lugar a un término producto de 4 variables.
2. Un grupo formado por 2 celdas da lugar a un término producto de 3 variables.
3. Un grupo formado por 4 celdas da lugar a un término producto de 2 variables.
4. Un grupo formado por 8 celdas da lugar a un término de 1 variable.
5. Un grupo formado por 16 celdas indica que la expresión vale 1.

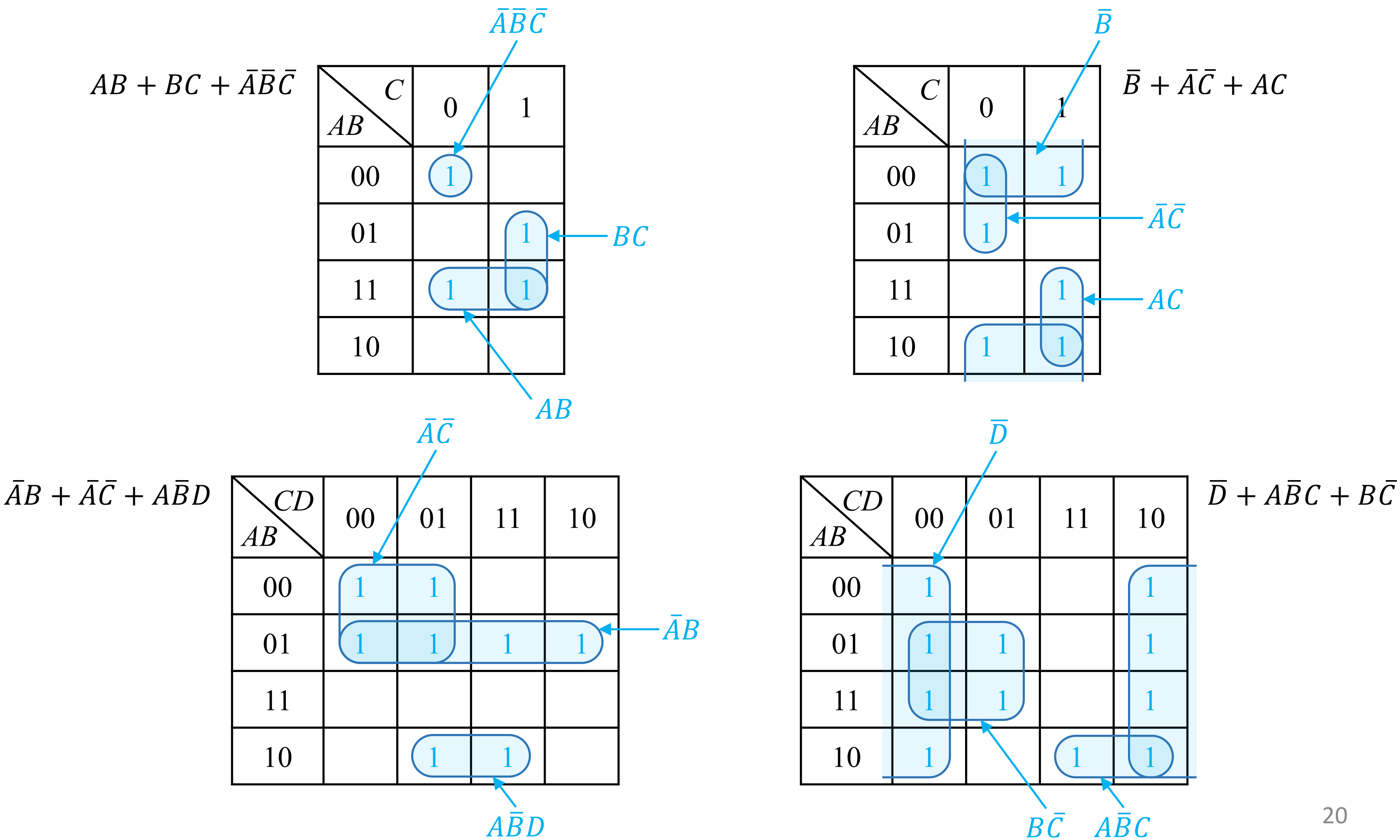
Regla 3: Cuando se han obtenido todos los términos producto mínimos a partir del mapa de Karnaugh, se suman para obtener la expresión suma de productos mínima.

Ejemplo: Determinar los productos para el mapa de Karnaugh y escribir la expresión suma de productos mínima resultante.




Expresión suma de productos: $B + \bar{A}C + A\bar{C}D$

Ejemplo: Determinar los productos para cada uno de los mapas de Karnaugh y escribir las correspondientes expresiones suma de productos mínima resultante.



# Obtención directa del mapa de Karnaugh a partir de la tabla de verdad

- Una tabla de verdad proporciona la salida de una expresión booleana para todas las posibles combinaciones de las variables de entrada.
- Los 1s de la columna de salida de la tabla de verdad se trasladan directamente al mapa de Karnaugh, a las celdas correspondientes a los valores asociados de las combinaciones de variables de entrada.
- Tanto la expresión booleana, la tabla de verdad como el mapa de Karnaugh son sólo distintas maneras de representar una función lógica.

$$X = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + AB\bar{C} + ABC$$

| Entradas | | | Salida |
|---|---|---|---|
| ***A*** | ***B*** | ***C*** | ***X*** |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| $AB$ \ $C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | |
| 01 | | |
| 11 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | |

# Condiciones indiferentes

- Algunas veces se producen situaciones en las que algunas combinaciones de las variables de entrada no están permitidas.
- Dado que estas combinaciones no permitidas no ocurren nunca, pueden considerarse como términos indiferentes con respecto a su efecto en la salida.
- Esto significa que a estos términos se les puede asignar tanto un 1 como un 0 en la salida; realmente no son importantes dado que nunca van a generarse.

Código BCD

| Entradas | | | | Salida |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $Y$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | X |
| 1 | 0 | 1 | 1 | X |
| 1 | 1 | 0 | 0 | X |
| 1 | 1 | 0 | 1 | X |
| 1 | 1 | 1 | 0 | X |
| 1 | 1 | 1 | 1 | X |

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | | |
| 01 | | | 1 | |
| 11 | X | X | X | X |
| 10 | 1 | 1 | X | X |

$\bar{A}BCD$

$BCD$

$A\bar{B}\bar{C}$

$A$

Sin condiciones indiferente $Y = A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BCD$

Con condiciones indiferente $Y = A + BCD$

# Minimización de un Producto de Sumas Mediante el Mapa De Karnaugh

El método es similar al método de suma de productos, excepto que ahora se trata de productos de sumas, en los que los 0s representan los términos suma estándar y se colocan en el mapa de Karnaugh en lugar de los 1s.

Paso 1: Determinar el valor binario de cada término suma del producto de sumas estándar. Éste es el valor binario que hace que dicho término sea igual a 0.

Paso 2: Cada vez que se evalúa un término suma, se introduce un 0 en la correspondiente celda del mapa de Karnaugh.

Ejemplo: Transformar a mapa de Karnaugh un producto de sumas estándar.

| $AB \backslash C$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 0 | |
| 01 | 0 | |
| 11 | 0 | |
| 10 | | 0 |

$$\underbrace{(A+B+C)}_{000}\underbrace{(A+\bar{B}+C)}_{010}\underbrace{(\bar{A}+\bar{B}+C)}_{110}\underbrace{(\bar{A}+B+\bar{C})}_{101}$$

Ejemplo: Transformar a mapa de Karnaugh un producto de sumas estándar.

$$(\bar{A}+\bar{B}+C+D)(\bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D})(A+B+\bar{C}+D)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D})(A+B+\bar{C}+\bar{D})$$

$1100 \qquad 1011 \qquad 0010 \qquad 1111 \qquad 0011$

$A+B+\bar{C}+\bar{D}$

| $AB \backslash CD$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | 0 | 0 |
| 01 | | | | |
| 11 | 0 | | 0 | |
| 10 | | | 0 | |

$A+B+\bar{C}+D$

$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$

$\bar{A}+\bar{B}+C+D \qquad \bar{A}+B+\bar{C}+\bar{D}$

# Simplificación mediante el mapa de Karnaugh de expresiones producto de sumas

- El proceso de minimización de un producto de sumas es básicamente el mismo que para una expresión suma de productos, excepto que ahora hay que agrupar los ceros para generar el mínimo número de términos suma, en lugar de los 1s para obtener el número mínimo de términos producto.

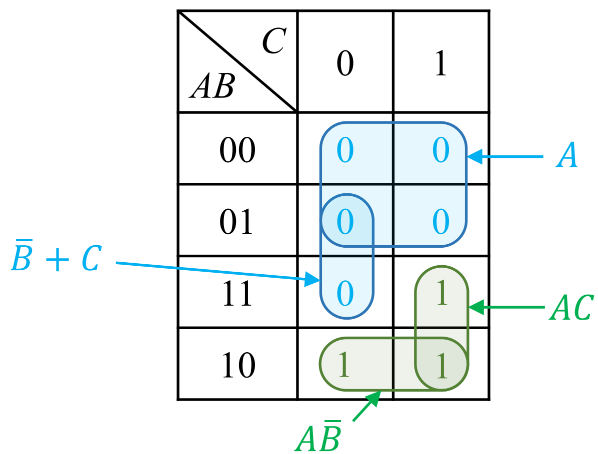
- Las reglas para agrupar los 0s son las mismas que para agrupar los 1s.

Ejemplo: Utilizar un mapa de Karnaugh para minimizar la siguiente expresión producto de sumas estándar.

$$(A + B + C)(A + B + \bar{C})(A + \bar{B} + C)(A + \bar{B} + \bar{C})(\bar{A} + \bar{B} + C)$$

Las combinaciones de valores binarios de la expresión son:

$$(0 + 0 + 0)\ (0 + 0 + 1)\ (0 + 1 + 0)\ (0 + 1 + 1)\ (1 + 1 + 0)$$




Deducir también la expresión suma de productos equivalente: Las celdas que no contienen un 0 son aquellas para las que la expresión vale 1.

Finalmente: $A(\bar{B} + C) \equiv AC + A\bar{B}$