

Sistemas Digitales

Algebra Booleana y Simplificación Lógica:

Formas Estándar de las Expresiones Booleanas

Suma de productos

SOP, Sum Of Products

- Cuando dos o más productos se suman mediante la adición booleana, la expresión resultante se denomina *suma de productos*.
- Una suma de productos puede implementarse con una puerta OR y dos o más puertas AND.

Ejemplos:

$$AB + ABC$$

$$ABC + CDE + \bar{B}C\bar{D}$$

$$\bar{A}B + \bar{A}B\bar{C} + AC$$

$$A + \bar{A}\bar{B}C + BCD$$

- Una suma de productos puede contener el término $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ pero no el término \overline{ABC} .

Dominio de una expresión booleana

Es el conjunto de variables contenido en la expresión bien en su forma complementada o no complementada.

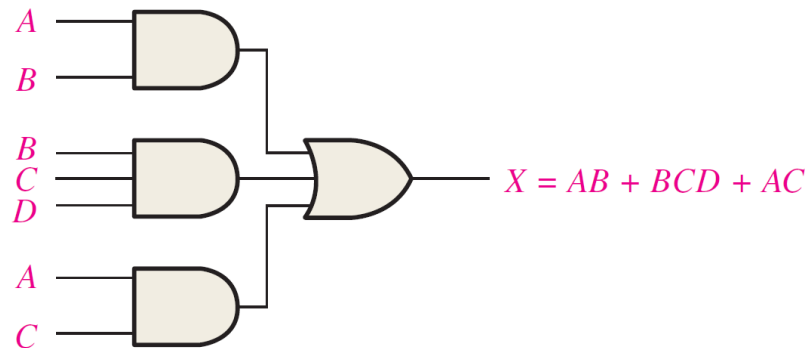
Ejemplos:

- El dominio de la expresión $\bar{A}B + A\bar{B}C$ es el conjunto de variables A, B, C .
- El dominio de la expresión $ABC\bar{C} + C\bar{D}E + \bar{B}C\bar{D}$ es el conjunto de variables A, B, C, D, E .

Implementación AND/OR de una suma de productos

Una expresión suma de productos puede implementarse mediante un circuito lógico AND-OR en el que las salidas de las puertas AND, cuyo número es igual al de productos que contenga la expresión, son las entradas de una puerta OR.

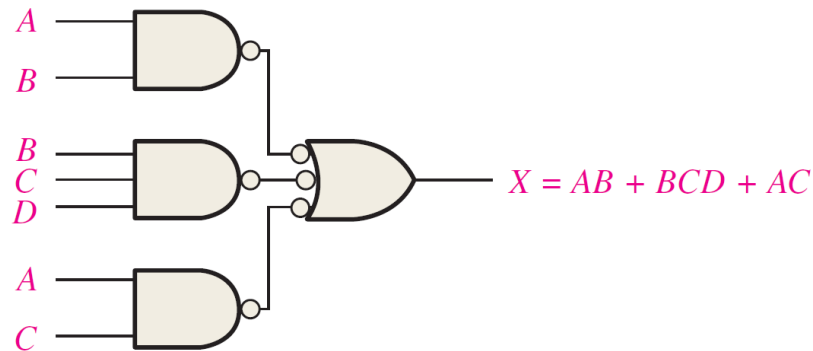
Ejemplo: Para la expresión $AB + BCD + AC$. La salida X de la puerta OR es igual a la suma de productos.



Implementación NAND/NAND de una suma de productos

El primer nivel de puertas NAND alimenta las entradas de una puerta NAND que actúa como una puerta negativa-OR. Las inversiones de la puerta NAND y las puertas negativa-OR se cancelan y dan como resultado un circuito AND/OR.

Ejemplo:



Notar que esta implementación NAND/NAND es equivalente a la implementación AND/OR de la diapositiva anterior.

Conversión de una expresión general a formato suma de productos

Cualquier expresión lógica puede ser transformada a una expresión suma de productos aplicando el álgebra de Boole. Por ejemplo, la expresión $A(B + CD)$ puede convertirse en una suma de productos aplicando la ley distributiva:

$$A(B + CD) = AB + ACD$$

Ejemplo: Convertir cada una de las siguientes expresiones booleanas a su forma suma de productos:

$$(a) AB + B(CD + EF) \quad (b) (A + B)(B + C + D) \quad (c) \overline{\overline{A+B}} + C$$

Solución

$$\begin{aligned} (a) \quad AB + B(CD + EF) &= AB + BCD + BEF \\ (b) \quad (A + B)(B + C + D) &= AB + AC + AD + BB + BC + BD \\ (c) \quad \overline{\overline{A+B}} + C &= \overline{\overline{A+B}}\bar{C} = (A + B)\bar{C} = A\bar{C} + B\bar{C} \end{aligned}$$

Forma estándar de la suma de productos

Una suma de productos estándar es aquella en la que todas las variables del dominio aparecen en cada uno de los términos de la expresión.

Ejemplo: La expresión $A\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + ABC\bar{D}$ es una expresión suma de productos estándar.

La expresión suma de productos estándar es importante en la construcción de tablas de verdad y en el método de simplificación de los mapas de Karnaugh.

Cualquier expresión suma de productos no estándar (que denominaremos simplemente suma de productos) puede convertirse al formato estándar utilizando el álgebra de Boole.

Conversión de una suma de productos a su forma estándar

Una suma de productos no estándar se convierte a su forma estándar utilizando la regla ($A + \bar{A} = 1$).

Ejemplo: Convertir la siguiente expresión booleana al formato suma de productos estándar: $A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B} + AB\bar{C}D$.

El dominio de esta suma de productos es A, B, C, D .

Entonces, usando la regla ($A + \bar{A} = 1$), podemos escribir:

$$A\bar{B}C(D + \bar{D}) + \bar{A}\bar{B}(C + \bar{C})(D + \bar{D}) + AB\bar{C}D$$

Trabajando la expresión:

$$A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + (\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C})(D + \bar{D}) + AB\bar{C}D$$

$$A\bar{B}CD + A\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}CD + \bar{A}\bar{B}C\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D$$

Representación binaria de un término producto estándar

- Una expresión suma de productos es igual a 1 si y sólo si uno o más de los términos productos que forman la expresión es igual a 1.
- Recuerde que un término producto se implementa mediante una puerta AND cuya salida es 1 si y sólo si cada una de sus entradas está a 1. Para generar el complemento de las variables cuando es necesario se utilizan inversores.

Ejemplo: Determinar los valores binarios para los que la siguiente suma de productos estándar sea igual a 1:

$$ABCD + A\bar{B}\bar{C}D + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$$

El término $ABCD$ es igual a 1 cuando $A = 1, B = 1, C = 1$ y $D = 1$.

$$ABCD = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

El término $A\bar{B}\bar{C}D$ es igual a 1 cuando $A = 1, B = 0, C = 0$ y $D = 1$.

$$A\bar{B}\bar{C}D = 1 \cdot \bar{0} \cdot \bar{0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

El término $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ es igual a 1 cuando $A = 0, B = 0, C = 0$ y $D = 0$.

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} = \bar{0} \cdot \bar{0} \cdot \bar{0} \cdot \bar{0} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

La suma de productos es igual a 1 sólo cuando cualquiera de los tres términos o todos son igual a 1.

Producto de sumas

POS, Product Of Sums

- Cuando dos o más términos suma se multiplican, la expresión resultante es un *producto de sumas*.

Ejemplos:

$$(\bar{A} + B)(A + \bar{B} + C)$$

$$(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(C + \bar{D} + E)(\bar{B} + C + D)$$

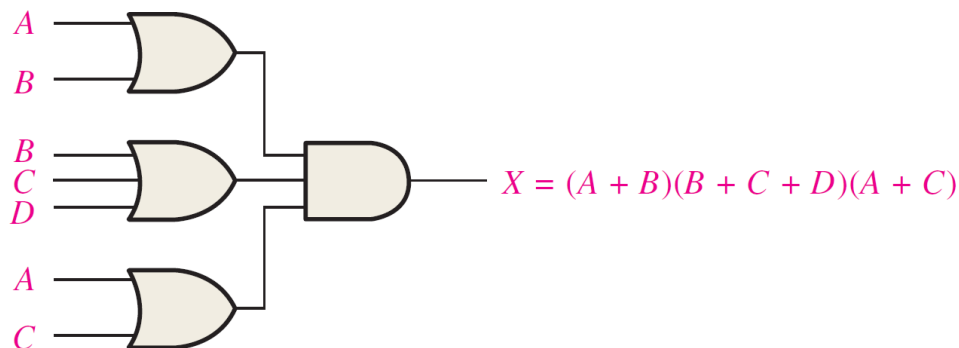
$$(A + B)(A + \bar{B} + C)(\bar{A} + C)$$

- En una expresión producto de sumas, una barra no puede extenderse nunca sobre más de una variable, aunque más de una variable puede tener una barra encima. *Ejemplo*: un producto de sumas puede contener el término $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$ pero no el $\overline{A + B + C}$.

Implementación de un producto de sumas

Un sumando se origina mediante la operación OR y el producto de varios términos suma se realiza por medio de la operación AND. Por tanto, un producto de sumas puede implementarse a partir de puertas lógicas OR (cuyo número será igual al de sumandos de la expresión) cuyas salidas se conectan a las entradas de una puerta AND

Ejemplo: Para la expresión $(A + B)(B + C + D)(A + C)$. La salida X de la puerta AND es igual al producto de sumas.



Forma estándar del producto de sumas

Un producto de sumas estándar es aquel en el que todas las variables del dominio o sus complementos aparecen en cada uno de los términos de la expresión.

Ejemplo: $(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})(A + \bar{B} + C + D)(A + B + C + \bar{D})$

Cualquier producto de sumas no estándar (que denominaremos simplemente producto de sumas) puede convertirse a su forma estándar mediante el álgebra de Boole.

Conversión de un producto de sumas a su forma estándar

Un producto de sumas no estándar se convierte a su formato estándar utilizando la regla booleana ($A \cdot \bar{A} = 0$).

Ejemplo: Convertir la siguiente expresión booleana al formato producto de sumas estándar: $(A + \bar{B} + C)(\bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D)$.

El dominio de este producto de sumas es A, B, C, D .

En el término $(A + \bar{B} + C)$ falta la variable D o \bar{D} por lo que añadimos $D\bar{D} = 0$. En el término $(\bar{B} + C + \bar{D})$ falta la variable A o \bar{A} por lo que añadimos $A\bar{A} = 0$. Y luego aplicamos la regla $(A + B)(A + C) = A + BC$ del siguiente modo:

$$(A + \bar{B} + C + D\bar{D})(A\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D)$$

$$(A + \bar{B} + C + D)(A + \bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + C + \bar{D})(\bar{A} + \bar{B} + C + \bar{D})(A + \bar{B} + \bar{C} + D)$$

Representación binaria de un término suma estándar

- Una expresión producto de sumas es igual a 0 si y sólo si uno o más de los términos suma que forman la expresión es igual a 0.

Ejemplo: Determinar los valores binarios de las variables para los que la expresión producto de sumas estándar siguiente es igual a 0:

$$(A + B + C + D)(A + \bar{B} + \bar{C} + D)(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D})$$

El término $A + B + C + D$ es igual a 0 cuando $A = 0, B = 0, C = 0$ y $D = 0$.

$$A + B + C + D = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

El término $A + \bar{B} + \bar{C} + D$ es igual a 0 cuando $A = 0, B = 1, C = 1$ y $D = 0$.

$$A + \bar{B} + \bar{C} + D = 0 + \bar{1} + \bar{1} + 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

El término $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}$ es igual a 0 cuando $A = 1, B = 1, C = 1$ y $D = 1$.

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D} = \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} + \bar{1} = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

La expresión producto de sumas es igual a 0 cuando cualquiera de los tres términos suma es igual a 0.