Sistemas Digitales

Algebra Booleana y Simplificación Lógica:

Leyes y Reglas del Álgebra de Boole

Leyes y Reglas del Álgebra de Boole

- Al igual que en otras áreas de las matemáticas, existen en el álgebra de Boole una serie de reglas y leyes bien determinadas que se tienen que seguir para aplicarlas correctamente.

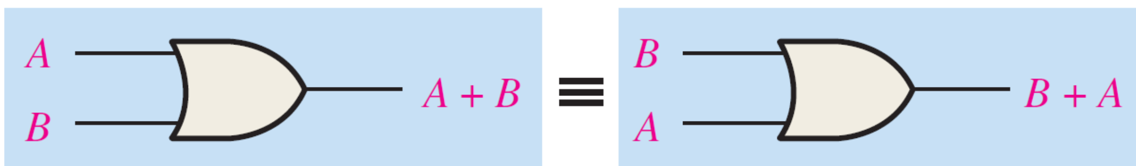
- Las leyes básicas del álgebra de Boole (las leyes conmutativas de la suma y la multiplicación, y las leyes asociativas de la suma y la multiplicación y la ley distributiva) son las mismas que las del álgebra ordinaria.

Leyes conmutativas

De la suma y el producto

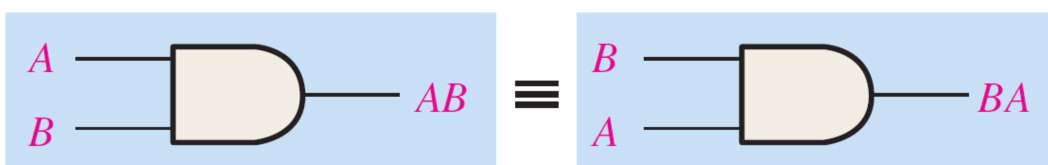
- La ley conmutativa de la suma para dos variables se escribe como sigue:

$$A + B = B + A$$



- La ley conmutativa de la multiplicación para dos variables es:

$$AB = BA$$

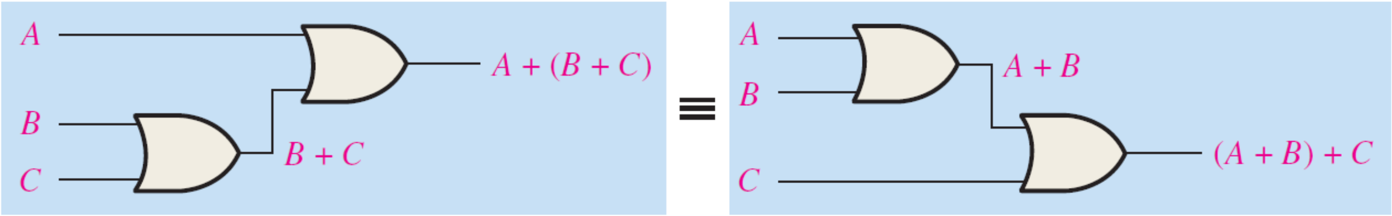


Leyes asociativas

De la suma y el producto

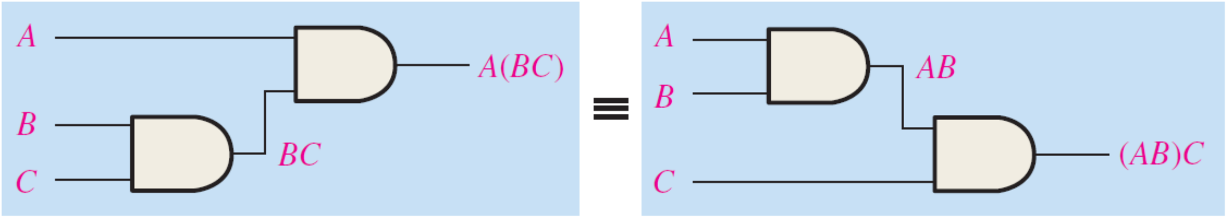
- La ley asociativa de la suma para tres variables se escribe como sigue:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$



- La ley asociativa de la multiplicación para tres variables se escribe como sigue:

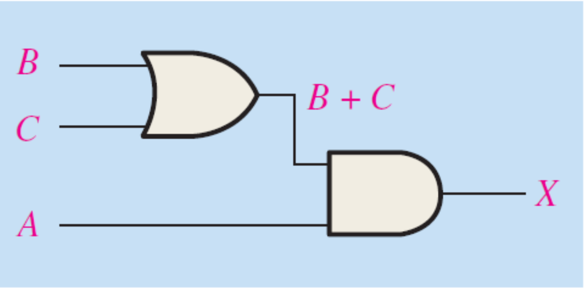
$$A(BC) = (AB)C$$



Ley distributiva

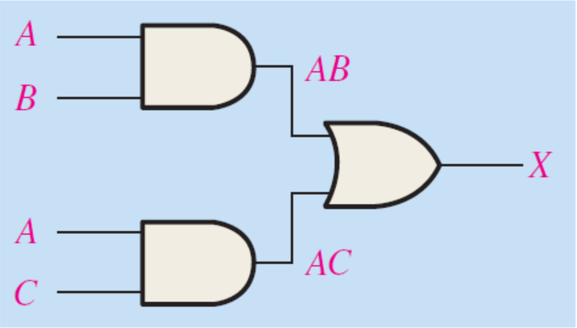
- La ley distributiva para tres variables se escribe como sigue:

$$A(B + C) = AB + AC$$



$X = A(B + C)$

$\equiv$



$X = AB + AC$

Reglas del álgebra booleana
Existen 12 reglas básicas

- Muy útiles, para la manipulación y simplificación de expresiones booleanas.

Reglas básicas del algebra de Boole.

1. $A + 0 = A$	**7.** $A \cdot A = A$
2. $A + 1 = 1$	**8.** $A \cdot \overline{A} = 0$
3. $A \cdot 0 = 0$	**9.** $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \cdot 1 = A$	**10.** $A + AB = A$
5. $A + A = A$	**11.** $A + \overline{A}B = A + B$
6. $A + \overline{A} = 1$	**12.** $(A + B)(A + C) = A + BC$

Reglas del álgebra booleana

Regla 1: $A + 0 = A$

Si aplicamos la operación OR a una variable cualquiera y a 0, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 1, la salida es igual a 1 y, por tanto, igual a A. Si A es 0, la salida es 0 e igualmente idéntica a A.

$X = A + 0 = A$

Reglas del álgebra booleana

Regla 2: $A + 1 = 1$

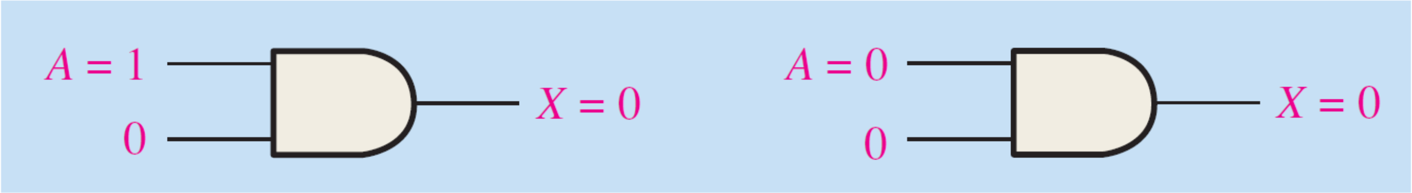
Si se aplica la operación OR a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a 1. Un 1 en una entrada de una puerta OR produce siempre un 1 en la salida, independientemente del valor de la otra entrada.

$X = A + 1 = 1$

Reglas del álgebra booleana

Regla 3: $A \cdot 0 = 0$

Si se aplica la operación AND a una variable y a 0, el resultado es siempre igual a 0. Siempre que una de las entradas de una puerta AND sea 0, la salida siempre es 0, independientemente del valor de la otra entrada.



$X = A \cdot 0 = 0$

Reglas del álgebra booleana

Regla 4: $A \cdot 1 = A$

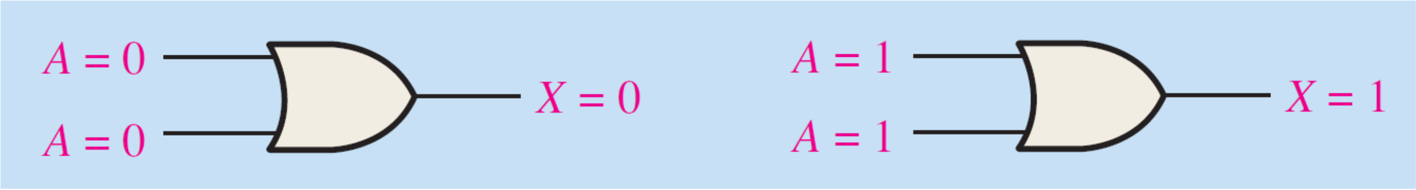
Si se aplica la operación AND a una variable y a 1, el resultado es siempre igual a la variable. Si la variable A es 0, la salida de la puerta AND será siempre 0, mientras que si A es 1, la salida será 1, dado que las dos entradas son 1.

$X = A \cdot 1 = A$

Reglas del álgebra booleana

Regla 5: $A + A = A$

Si se aplica la operación OR a una variable consigo misma, el resultado es siempre igual a la variable. Si A es 0, entonces 0 + 0 = 0, mientras que si A es 1, 1 + 1 =1.

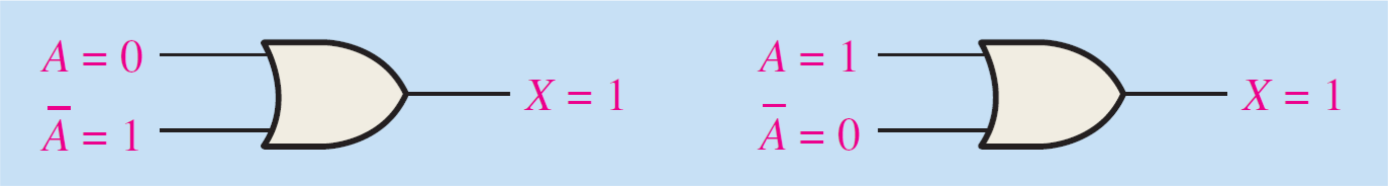


$X = A + A = A$

Reglas del álgebra booleana

Regla 6: $A + \bar{A} = 1$

Si se aplica la operación OR a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 1. Si A es 0, entonces $0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$. Si A es 1, entonces $1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$.

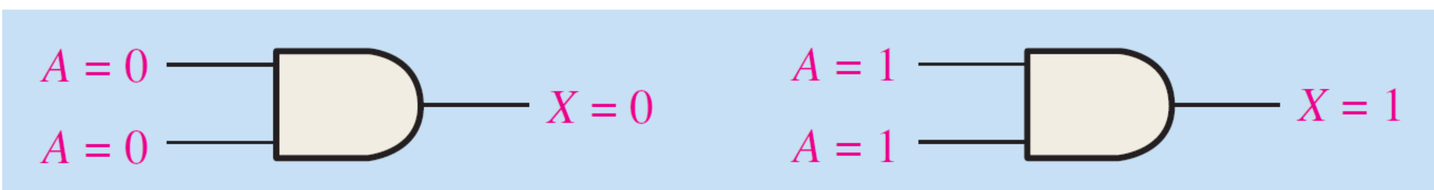


$X = A + \bar{A} = 1$

Reglas del álgebra booleana

Regla 7: $A \cdot A = A$

Si se aplica la operación AND a una variable consigo misma, el resultado siempre es igual a la variable. Si A = 0, entonces 0 · 0 = 0, y si A = 1, entonces 1 · 1 = 1.



$X = A \cdot A = A$

Reglas del álgebra booleana

Regla 8: $A \cdot \bar{A} = 0$

Si se aplica la operación AND a una variable y a su complemento, el resultado es siempre igual a 0. Esta regla se basa en que siempre A o $\bar{A}$ será 0, y además en que cuando se aplica un 0 a una de las entradas de una puerta AND, la salida siempre es 0.

$X = A \cdot \bar{A} = 0$

Reglas del álgebra booleana

Regla 9: $\bar{\bar{A}} = A$

El complemento del complemento de una variable es siempre la propia variable. El complemento de la variable A es $\bar{A}$ y el complemento de $\bar{A}$ será de nuevo A, que es la variable original.

$\bar{\bar{A}} = A$

Reglas del álgebra booleana

Regla 10: $A + AB = A$

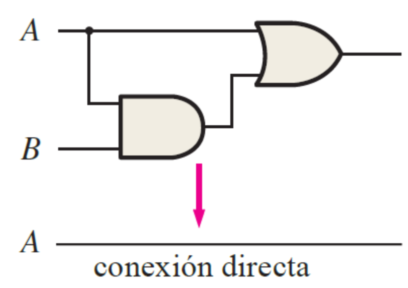
Esta regla se puede obtener aplicando la ley distributiva y las reglas 2 y 4, de la siguiente forma:

$A + AB$	$= A(1 + B)$	Sacar factor común (ley distributiva)
	$= A \cdot 1$	Regla 2: $1 + B = 1$
	$= A$	Regla 4: $A \cdot 1 = A$

La demostración se muestra en la siguiente tabla, la cual incluye la tabla de verdad y la simplificación del circuito lógico resultante.

A	B	AB	$A + AB$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

igual



Reglas del álgebra booleana

Regla 11: $A + \bar{A}B = A + B$

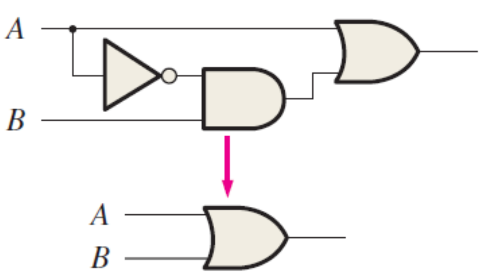
Esta regla puede demostrarse de la siguiente forma:

$A + \bar{A}B$	$= (A + AB) + \bar{A}B$	Regla 10: $A = A + AB$
	$= (AA + AB) + \bar{A}B$	Regla 7: $A = AA$
	$= AA + AB + A\bar{A} + \bar{A}B$	Regla 8: sumar $A\bar{A} = 0$
	$= (A + \bar{A})(A + B)$	Sacar factor común
	$= 1 \cdot (A + B)$	Regla 6: $A + \bar{A} = 1$
	$= A + B$	Regla 4: eliminar el 1

La demostración se muestra en la siguiente tabla, la cual incluye la tabla de verdad y la simplificación del circuito lógico resultante.

A	B	$\bar{A}B$	$A + \bar{A}B$	$A + B$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	1	0	1	1

igual



Reglas del álgebra booleana

Regla 12: $(A+B)(A+C) = A + BC$

Esta regla puede demostrarse de la siguiente forma:

$(A+B)(A+C)$	$= AA + AC + AB + BC$	Ley distributiva
	$= A + AC + AB + BC$	Regla 7: $A = AA$
	$= A(1+C) + AB + BC$	Sacar factor común (ley distributiva)
	$= A \cdot 1 + AB + BC$	Regla 2: $1 + C = 1$
	$= A(1+B) + BC$	Sacar factor común (ley distributiva)
	$= A \cdot 1 + BC$	Regla 2: $1 + B = 1$
	$= A + BC$	Regla 4: $A \cdot 1 = A$

La demostración se muestra en la siguiente tabla, la cual incluye la tabla de verdad y la simplificación del circuito lógico resultante.

A	B	C	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$	BC	$A+BC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

igual