



MARS-Basispraktikum

SS 2021

Versuch 5

Krümmungsvisualisierung

Inhaltsverzeichnis

1	Krümmungsvisualisierung – Was ist das?	1
2	Mathematische Grundlagen	2
2.1	Die Krümmung einer Kurve	2
2.2	Die Orientierung einer Fläche	2
2.3	Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffs auf Flächen	3
2.4	Klassifizierung von Punkten einer Fläche	4
2.5	Formeln zur Berechnung von H , K , κ_1 und κ_2	4
3	Berechnung der Krümmungen einer TP-Fläche	5
4	Zuordnung von RGB-Werten zu Krümmungswerten	6
5	Praktischer Teil	8
5.1	Programmierung	8

1 Krümmungsvisualisierung – Was ist das?

Jedem Punkt \mathbf{p} einer regulären Fläche B können zwei Zahlen $H, K \in \mathbb{R}$ (bestimmte Krümmungen) zugeordnet werden, die etwas über die Änderung der Normalen im Punkt \mathbf{p} und somit über die zweite Ableitung in \mathbf{p} aussagen. Bei einer graphischen Ausgabe der Fläche B können die verschiedenen Werte von H bzw. K durch unterschiedliche Farbwerte visualisiert werden – man spricht dann von einer *Krümmungsvisualisierung*. Die Krümmungsvisualisierung erlaubt eine erste grobe Beurteilung der Stetigkeit der zweiten Ableitung von B .

2 Mathematische Grundlagen

2.1 Die Krümmung einer Kurve

Die *Krümmung* $\kappa(t)$ einer zweimal stetig differenzierbaren Kurve \mathbf{s} in einem Punkt $\mathbf{p} = \mathbf{s}(t)$ misst die Änderungsrate des Winkels zwischen der Tangente bei \mathbf{p} und benachbarten Tangenten. $\kappa(t)$ gibt somit an, wie schnell sich die Kurve \mathbf{s} in einer Umgebung von \mathbf{p} von der Tangente bei \mathbf{p} wegdreht.

Die Krümmung einer Kurve ist parametrisierungsunabhängig und euklidisch invariant, d. h. sie ändert sich nicht, wenn die Kurve verschoben oder gedreht wird.

Die genaue Berechnungsvorschrift für κ findet der Leser in der Literatur (z. B. [CAR]).

2.2 Die Orientierung einer Fläche

Zu einer gegebenen Parametrisierung $\mathbf{b} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B$ einer regulären Fläche B können wir in einem Punkt $\mathbf{p} = \mathbf{b}(u, v)$ einen *Einheitsnormalenvektor* durch die Vorschrift

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = \frac{\mathbf{b}_u \times \mathbf{b}_v}{\|\mathbf{b}_u \times \mathbf{b}_v\|}(u, v) \quad \text{mit } \mathbf{p} = \mathbf{b}(u, v)$$

auswählen (\times ist das Kreuzprodukt, $\mathbf{b}_u = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{b}$). Also haben wir eine (differenzierbare) Abbildung $\mathbf{N} : \mathbf{b}(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt $\mathbf{p} \in \mathbf{b}(U)$ einen Einheitsnormalenvektor $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ zuordnet. Die Definition des Einheitsnormalenvektors ist bis auf das Vorzeichen parametrisierungsunabhängig.

Ist allgemeiner $V \subset B$ eine offene Menge in B und $\mathbf{N} : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Abbildung (d. h. $\mathbf{N}(\mathbf{b}(u, v))$ differenzierbar in (u, v)), die jedem $\mathbf{p} \in V$ einen Einheitsnormalenvektor in \mathbf{p} zuordnet, so sagen wir, \mathbf{N} ist ein *differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld auf V* .

Es ist eine erstaunliche Tatsache, dass nicht alle Flächen ein differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld zulassen, das *auf der ganzen Fläche definiert* ist. Zum Beispiel kann man auf dem sog. Möbiusband (Abb. 1) kein solches Vektorfeld definieren. Das kann man intuitiv einsehen, wenn man längs des „Mittelkreises“ um die Fläche herumgeht: Nach einer Umdrehung würde das Vektorfeld \mathbf{N} als $-\mathbf{N}$ zurückkommen, ein Widerspruch zur Stetigkeit von \mathbf{N} . Intuitiv kann man auf dem Möbiusband keine konsistente Wahl einer bestimmten „Seite“ treffen; bewegen wir uns um die Fläche, so können wir stetig auf die „andere Seite“ gelangen, ohne die Fläche zu verlassen.

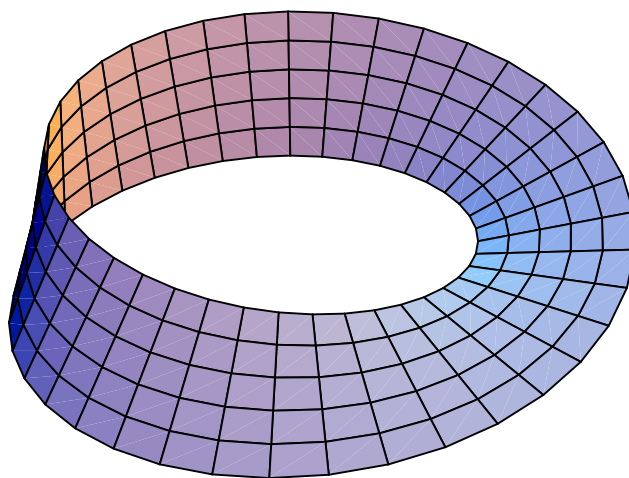


Abbildung 1: Das Möbiusband

Wir sagen, eine reguläre Fläche B ist *orientierbar*, wenn es ein auf der ganzen Fläche definiertes differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld gibt; die Wahl eines solchen Vektorfeldes heißt *Orientierung* von B .

Zum Beispiel ist das erwähnte Möbiusband keine orientierbare Fläche. Jede Fläche ist *lokal* orientierbar, doch die hier definierte Orientierbarkeit ist eine ausgesprochen globale Eigenschaft der Fläche, in dem Sinne, dass die gesamte Fläche eine Rolle spielt.

Wegen $\mathbf{b}_v \times \mathbf{b}_u = -(\mathbf{b}_u \times \mathbf{b}_v)$ ändert sich die Orientierung einer Fläche B , falls die Parameter u, v vertauscht werden, d. h. falls die Parametrisierung $\mathbf{c}(v, u) := \mathbf{b}(u, v)$ gewählt wird. Die Orientierung einer Bézier-Fläche ändert sich zum Beispiel, wenn man statt des Bézier-Netzes $(\mathbf{b}_{ij})_{i=0,j=0}^{m,n}$ das Bézier-Netz $(\mathbf{c}_{ji})_{j=0,i=0}^{n,m}$ mit $\mathbf{c}_{ji} := \mathbf{b}_{ij}$ betrachtet.

2.3 Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffs auf Flächen

B bezeichne eine reguläre, orientierbare Fläche, für die eine Orientierung gewählt worden ist (d. h. ein differenzierbares Einheitsnormalenvektorfeld \mathbf{N}); wir sprechen dann von einer Fläche B mit der Orientierung \mathbf{N} .

Man kann bei einer Fläche B nicht von „der“ Krümmung sprechen. Vielmehr lassen sich mehrere Krümmungsmaße definieren.

Betrachten wir eine beliebige reguläre Kurve $K \subset B$, die durch einen Punkt $\mathbf{p} \in B$ geht. Sei κ die Krümmung der Kurve K in \mathbf{p} und \mathbf{n} der Normalenvektor an die Kurve K in \mathbf{p} (auch *Hauptnormalenvektor* genannt, genaue Definition siehe [CAR]), $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{p})$ der Normalenvektor auf die Fläche B in \mathbf{p} . Der Winkel θ zwischen den Vektoren \mathbf{n} und \mathbf{N} lässt sich aus der bekannten Formel

$$\cos \theta = \langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$$

berechnen (Skalarprodukt von \mathbf{n} und \mathbf{N}). Die Zahl

$$\kappa_{\mathbf{n}} = \kappa \cos \theta$$

heißt dann die *Normalkrümmung* der Flächenkurve K in \mathbf{p} . Anders ausgedrückt ist $\kappa_{\mathbf{n}}$ die Länge der Projektion des Vektors $\kappa \cdot \mathbf{n}$ auf die Flächennormale \mathbf{N} , mit einem Vorzeichen versehen, das durch die Orientierung \mathbf{N} von B bei \mathbf{p} bestimmt ist. Dieser Sachverhalt wird in Abb. 2 veranschaulicht.

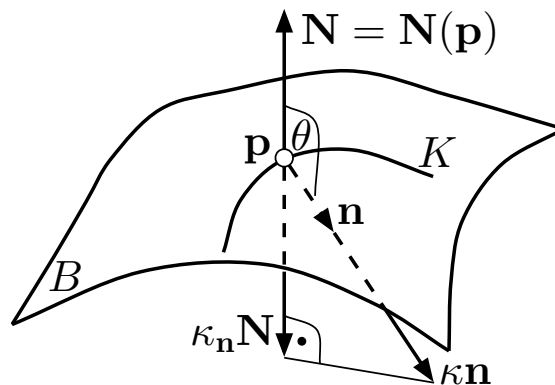


Abbildung 2: Definition der Normalkrümmung $\kappa_{\mathbf{n}}$

In der Differentialgeometrie wird gezeigt, dass jede andere Flächenkurve K_1 , die K in \mathbf{p} tangiert (deren Tangentenvektor in \mathbf{p} also mit dem Tangentenvektor von K in \mathbf{p} zusammenfällt), in \mathbf{p} die gleiche Normalkrümmung hat. Die Normalkrümmung hängt also nur von der Tangentenrichtung der Kurve K ab.

Der Absolutwert der Normalkrümmung hängt nicht von der Orientierung von B ab, die Normalkrümmung wechselt aber das Vorzeichen bei einer Orientierungsänderung der Fläche (wegen $\langle \mathbf{n}, -\mathbf{N} \rangle = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{N} \rangle$).

Die Normalkrümmungen der regulären Flächenkurven durch den Punkt $\mathbf{p} \in B$ werden i. Allg. für genau eine Tangentenrichtung maximal bzw. minimal (oder sind überall gleich). Diese beiden extremalen Normalkrümmungen $\kappa_1(u, v)$ und $\kappa_2(u, v)$ heißen *Hauptkrümmungen* in \mathbf{p} .

Aus den beiden Hauptkrümmungen lassen sich unmittelbar zwei andere Krümmungskennwerte berechnen, nämlich das Produkt und der Mittelwert von κ_1 und κ_2 . Der Wert

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \quad (1)$$

heißt die *Gaußsche Krümmung* von B in \mathbf{p} und der Wert

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) \quad (2)$$

heißt die *mittlere Krümmung* von B in \mathbf{p} .

Ändert man die Orientierung einer Fläche, dann wechseln κ_1 und κ_2 ihr Vorzeichen. Somit ändert sich auch das Vorzeichen der mittleren Krümmung H . Das Vorzeichen der Gaußschen Krümmung ändert sich allerdings wegen $(-\kappa_1)(-\kappa_2) = \kappa_1 \kappa_2$ nicht.

2.4 Klassifizierung von Punkten einer Fläche

$$\text{Ein Punkt } \mathbf{p} \text{ einer Fläche } B \text{ heißt } \begin{cases} \textit{elliptisch}, & \text{wenn } K > 0; \\ \textit{hyperbolisch}, & \text{wenn } K < 0; \\ \textit{parabolisch}, & \text{wenn } K = 0 \wedge (\kappa_1 \neq 0 \vee \kappa_2 \neq 0); \\ \textit{Flachpunkt}, & \text{wenn } K = 0 = \kappa_1 = \kappa_2. \end{cases}$$

Es ist offensichtlich, dass diese Klassifizierung nicht von der Wahl der Orientierung der Fläche abhängt.

In einem *elliptischen* Punkt ist die Gaußsche Krümmung positiv. Beide Hauptkrümmungen haben dasselbe Vorzeichen, und deshalb zeigen die Normalenvektoren aller Kurven durch diesen Punkt zur selben Seite der Tangentialebene; die Fläche liegt lokal ganz auf einer Seite der Tangentialebene. Zum Beispiel sind alle Punkte einer Kugelsphäre elliptisch.

In einem *hyperbolischen* Punkt \mathbf{p} ist die Gaußsche Krümmung negativ. Die Hauptkrümmungen haben entgegengesetzte Vorzeichen, und deshalb gibt es Kurven durch \mathbf{p} , deren Normalenvektoren bei \mathbf{p} nach beiden Seiten der Tangentialebene bei \mathbf{p} zeigen; die Fläche schneidet die Tangentialebene in \mathbf{p} .

In einem *parabolischen* Punkt ist die Gaußsche Krümmung Null, aber eine der Hauptkrümmungen von Null verschieden. Beispielsweise sind alle Punkte eines Zylinders parabolisch.

Schließlich sind in einem *Flachpunkt* alle Hauptkrümmungen gleich Null. Die Punkte einer Ebene erfüllen trivialerweise diese Bedingung.

2.5 Formeln zur Berechnung von H , K , κ_1 und κ_2

Wir wollen uns zuerst an die Definition der Determinante und der Spur einer $(2, 2)$ -Matrix erinnern. Es gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\text{Spur} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} := a_{11} + a_{22}$$

Sei $\mathbf{b}: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B$ eine Parametrisierung der Fläche B , die mit der Orientierung \mathbf{N} von B verträglich ist, d. h. in $\mathbf{b}(U)$ gilt

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{b}_u \times \mathbf{b}_v}{\|\mathbf{b}_u \times \mathbf{b}_v\|}.$$

Um die Notation zu vereinfachen, treffen wir die Vereinbarung, dass alle unten auftretenden Funktionen für ihren Wert im Punkt \mathbf{p} stehen.

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &:= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{b}_u, \mathbf{b}_u \rangle & \langle \mathbf{b}_u, \mathbf{b}_v \rangle \\ \langle \mathbf{b}_v, \mathbf{b}_u \rangle & \langle \mathbf{b}_v, \mathbf{b}_v \rangle \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \\ \mathbf{H} &:= \begin{pmatrix} \langle \mathbf{N}, \mathbf{b}_{uu} \rangle & \langle \mathbf{N}, \mathbf{b}_{uv} \rangle \\ \langle \mathbf{N}, \mathbf{b}_{vu} \rangle & \langle \mathbf{N}, \mathbf{b}_{vv} \rangle \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \end{aligned}$$

lassen sich die Gaußsche und die mittlere Krümmung berechnen aus

$$K = \det(\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}^{-1}) = \frac{\det \mathbf{H}}{\det \mathbf{G}} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (3)$$

$$H = \frac{1}{2} \text{Spur}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{G}^{-1}) = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}. \quad (4)$$

Der letzte Ausdruck in der zweiten Formel ergibt sich aus der Tatsache, dass

$$\mathbf{G}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}$$

ist.

Die Matrizen \mathbf{G} bzw. \mathbf{H} heißen *Fundamentalmatrix* erster bzw. zweiter Art.

Die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 lassen sich nun aus den Gleichungen (1) und (2) ermitteln. Es gilt $2H = \kappa_i + K/\kappa_i$ ($i = 1, 2$), d. h. $\kappa_{1,2}$ sind Lösungen der quadratischen Gleichung $\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0$:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ \kappa_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned}$$

Mit den Formeln dieses Abschnitts lassen sich also bei einer gegebenen Parametrisierung der Fläche B die Gaußsche Krümmung K , die mittlere Krümmung H und die beiden Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 berechnen. Die Herleitung dieser Formeln ist in der zahlreichen Literatur zur Differentialgeometrie zu finden.

3 Berechnung der Krümmungen einer TP-Fläche

Gegeben sei eine Tensorprodukt-Fläche in Bézier-Darstellung

$$\mathbf{b}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2,$$

$\mathcal{B}(\mathbf{b}) = (\mathbf{b}_{ij})_{i=0, j=0}^{m, n}$ das zugehörige Bézier-Netz. Es sollen die Gaußsche Krümmung K , die mittlere Krümmung H und die beiden Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 zu den vier Parameterwerten $(u, v) \in \{0, 1\}^2$ (die Eckpunkte der TP-B-Fläche) berechnet werden. In den Formeln (3), (4) werden die Werte von $\mathbf{b}_u, \mathbf{b}_v, \mathbf{b}_{uu}, \mathbf{b}_{uv}, \mathbf{b}_{vv}$ benötigt.

Für die Ableitung einer Bézier-Kurve $\mathbf{s}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i B_i^m(u)$, $u \in [0, 1]$ gilt

$$\frac{d}{du} \mathbf{s}(u) = \begin{cases} m \cdot \sum_{i=0}^{m-1} \Delta \mathbf{b}_i B_i^{m-1}(u) & \text{für } m > 0 \\ 0 & \text{für } m = 0 \end{cases}$$

mit $\Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i$. Δ heißt *Vorwärtsdifferenzenoperator*; er bildet ein Bézier-Polygon $(\mathbf{b}_i)_{i=0}^n$ auf ein anderes $(\Delta \mathbf{b}_i)_{i=0}^{n-1}$ ab. Daraus ergeben sich unmittelbar die Formeln zur Berechnung der Bézier-Netze der partiellen Ableitungen von $\mathbf{b}(u, v)$ (für $m, n \geq 2$):

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{b}_u) &= \left(m \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{ij} \right)_{i=0, j=0}^{m-1, n}, \\ \mathcal{B}(\mathbf{b}_v) &= \left(n \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij} \right)_{i=0, j=0}^{m, n-1}, \\ \mathcal{B}(\mathbf{b}_{uu}) &= \left(m(m-1) \Delta^{1,0} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{ij} \right)_{i=0, j=0}^{m-2, n}, \\ \mathcal{B}(\mathbf{b}_{uv}) &= \left(mn \Delta^{1,0} \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij} \right)_{i=0, j=0}^{m-1, n-1}, \\ \mathcal{B}(\mathbf{b}_{vv}) &= \left(n(n-1) \Delta^{0,1} \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij} \right)_{i=0, j=0}^{m, n-2}, \end{aligned}$$

mit den beiden Vorwärtsdifferenzenoperatoren

$$\begin{aligned} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{ij} &:= \mathbf{b}_{i+1, j} - \mathbf{b}_{ij}, \\ \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij} &:= \mathbf{b}_{i, j+1} - \mathbf{b}_{ij}. \end{aligned}$$

Dabei ist z. B. $\Delta^{1,0} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{ij} = [\Delta^{1,0}(\Delta^{1,0} \mathbf{b})]_{ij} = (\Delta^{1,0} \mathbf{b})_{i+1, j} - (\Delta^{1,0} \mathbf{b})_{i, j} = (\mathbf{b}_{i+2, j} - \mathbf{b}_{i+1, j}) - (\mathbf{b}_{i+1, j} - \mathbf{b}_{i, j}) = \mathbf{b}_{i+2, j} - 2\mathbf{b}_{i+1, j} + \mathbf{b}_{i, j}$. Das heißt die Bézier-Netze der partiellen Ableitungen von \mathbf{b} lassen sich einfach durch Subtraktionen von Punkten und anschließende Skalierung mit dem Grad berechnen.

Da $B_0^m(0) = 1$ und $B_i^m(0) = 0$ für $i \neq 0$ und analog $B_m^m(1) = 1$ und $B_i^m(1) = 0$ für $i \neq m$ ist, gilt

$$\mathbf{b}(u, v) = \mathbf{b}_{um, vn} \quad \text{für } (u, v) \in \{0, 1\}^2,$$

d. h. $\mathbf{b}(u, v)$ ausgewertet an den vier Parameterwerten $(u, v) \in \{0, 1\}^2$ ergibt einfach die vier Eckpunkte des Bézier-Netzes (\mathbf{b}_{ij}) . Das Gleiche gilt entsprechend für die Bézier-Netze der partiellen Ableitungen. Diese Rechenschritte sind schematisch in der Abb. 3 dargestellt.

Die so ermittelten Werte $\mathbf{b}_u, \mathbf{b}_v, \mathbf{b}_{uu}, \mathbf{b}_{uv}, \mathbf{b}_{vv}$ zu den vier Parametern $(u, v) \in \{0, 1\}^2$ eingesetzt in die Formeln (3), (4) ergeben die Krümmungen K und H an den Stellen $(u, v) \in \{0, 1\}^2$.

Um die Krümmungen zu visualisieren, muss jetzt nur noch jedem Krümmungswert eine Farbe, d. h. ein RGB-Wert, zugeordnet werden.

4 Zuordnung von RGB-Werten zu Krümmungswerten

Gehen wir davon aus, dass wir nicht nur eine, sondern mehrere TP-B-Flächen graphisch darstellen wollen. Die Krümmungswerte (z. B. der Gaußschen oder der mittleren Krümmung) in den 4 Ecken einer jeden TP-B-Fläche seien berechnet. Jedem Krümmungswert soll nun eine Farbe zugeordnet werden.

Jede Farbe lässt sich durch drei Zahlen $(r, g, b) \in [0, 1]^3$ im sog. RGB-Format (*Red, Green, Blue*) beschreiben. Die Zahlen r, g, b geben den Rot-, Grün- und Blauanteil in der Farbe an.

Gesucht ist also eine sinnvolle Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow [0, 1]^3$, die einen Krümmungswert auf einen RGB-Wert abbildet. In Anlehnung an physikalische Karten, in denen Niederungen blau, Flachland grün und Hochland rot dargestellt werden, sollen kleine Krümmungswerte Blau, mittlere Grün und große Rot zugewiesen bekommen. Die Berechnung der Farbwerte erfolgt in zwei Stufen.

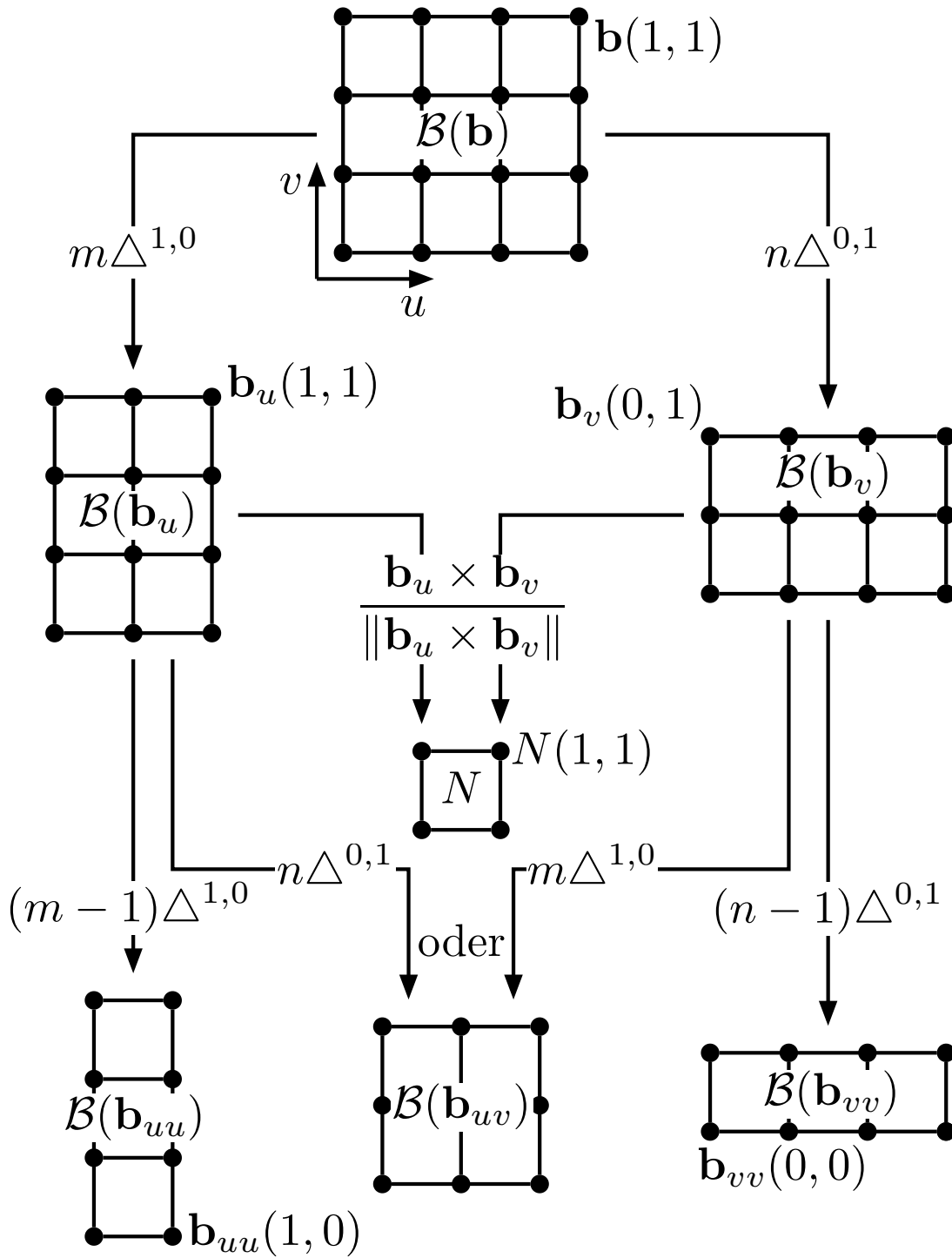


Abbildung 3: Schematische Darstellung der Schritte zur Berechnung der Bézier-Netze der partiellen Ableitungen einer bikubischen TP-Bézier-Fläche

Zuerst definieren wir eine Hilfsfunktion $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^3$, die 0 auf $(0, 0, 1)$ (blau), $1/2$ auf $(0, 1, 0)$ (grün) und 1 auf $(1, 0, 0)$ (rot) abbildet und die die Werte dazwischen linear interpoliert:

$$h(x) := \begin{cases} (0, 4x, 1) & \text{für } 0.00 \leq x \leq 0.25, \\ (0, 1, 2 - 4x) & \text{für } 0.25 < x \leq 0.50, \\ (4x - 2, 1, 0) & \text{für } 0.50 < x \leq 0.75, \\ (1, 4 - 4x, 0) & \text{für } 0.75 < x \leq 1.00. \end{cases}$$

Jetzt können wir Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definieren, die jedem Krümmungswert einen Wert aus dem Bereich $[0, 1]$ zuordnen; auf das Ergebnis wird die Hilfsfunktion h angewendet, d. h. dem Krümmungswert κ (z. B. $\kappa = K$ oder $\kappa = H$) wird der RGB-Wert $h(f(\kappa))$ zugewiesen.

Eine sehr einfache Möglichkeit ist es, alle Werte unter 0 und über 1 „abzuschneiden“:

$$f_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ x & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{für } 1 < x. \end{cases}$$

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Krümmungswerte linear auf das Intervall $[0, 1]$ abzubilden. Bestimme zuerst das Minimum κ_{\min} und das Maximum κ_{\max} aller Krümmungswerte (in den Eckpunkten) aller darzustellenden TP-B-Flächen. Mit der Funktion f_2 wird κ_{\min} auf 0, κ_{\max} auf 1 abgebildet und die Werte dazwischen werden linear interpoliert:

$$f_2(x) := \frac{x - \kappa_{\min}}{\kappa_{\max} - \kappa_{\min}}.$$

Zum Schluss soll eine Funktion angegeben werden, die die hyperbolischen Punkte blau, die parabolischen und die Flachpunkte grün und die elliptischen Punkte rot darstellen lässt. Dazu betrachten wir natürlich die Krümmungswerte der Gaußschen Krümmung K und setzen

$$f_3(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0, \\ 0.5 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Aufgabe: Welche Vor- und Nachteile haben die einzelnen Funktionen? Entwerfen Sie selbst andere sinnvolle Funktionen.

5 Praktischer Teil

Mit dem Programm *curvature-visualization.py* soll die Krümmung einer B-Spline-Tensorproduktfläche visualisiert werden. Es kann die im Programm definierte Beispielfläche oder eine andere Fläche, zum Beispiel aus dem vorherigen Versuch, verwendet werden. Zuerst wird zu jedem Parameterquadrat der B-Spline-Tensorproduktfläche die entsprechende Bézier-Darstellung berechnet. Die Bézier-Fläche wird anschließend u -mal unterteilt, so dass eine Menge von $2^u \cdot 2^u$ Bézier-Patches entsteht. Aus diesem Grund genügt es, die Krümmungen nur in den 4 Ecken eines Bézier-Patches zu berechnen. Den Krümmungen wird dann ein RGB-Wert nach einem der 3 Farbzuzuordnungsverfahren zugewiesen. Die exportierte Datei kann dann mit **geomview** betrachtet werden.

5.1 Programmierung

In der Klasse *bezier_patches* fehlt die Methode *visualize_curvature*.

Dazu sollen für jede Bézierfläche zuerst die Ableitungen an den Eckpunkten berechnet werden. Je nach gewähltem Krümmungsmaß soll der entsprechende Wert aus den Ableitungen berechnet werden und mittels *bezier_surface.set_curvature()* gesetzt werden.

Anschließend müssen die Krümmungswerte entsprechend dem Parameter *color_map* auf Farbwerte abgebildet werden. Verwenden sie dazu die Methode *bezier_surface.set_color()*.

Literatur

- [BOE] *W. Boehm, H. Prautzsch*, Geometric Concepts for Geometric Design, 1994, A K Peters, Wellesley
- [CAR] *Manfredo P. do Carmo*, Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, 2., durchges. Auflage, Wiesbaden, Vieweg, 1992. Teubner Verlag.
- [FAR] *G. Farin*, Curves and Surfaces for Computer Aided Design, Second Edition, Academic Press.
- [LIP] *M. Lipschutz*, Differentialgeometrie: Theorie und Anwendung, Düsseldorf, McGraw-Hill, 1980. (Schaum's outline: Überblicke/Aufgaben)
- [PRA] *H. Prautzsch, W. Boehm, M. Paluszny*, Bézier- and B-Spline Techniques, 2002, Springer-Verlag, Berlin.