Probabilités Discrètes

Table des matières:

I. Vocabulaire probabiliste

- On nomme cette section « probabilités discrètes » car les issues possibles des expériences aléatoires traitées sont en nombre fini. (« discret » s'oppose à « continu »)

Expérience aléatoire :

- Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on ne peut connaître le résultat a priori.
- Les résultats possibles sont appelées **issues** ou **éventualités**.

Exemple :

- Un lancer de dé est une expérience aléatoire. Il y a 6 issues possibles.

Univers :

- L'**univers** d'une expérience aléatoire est l'ensemble de ses issues possibles. On le note Ω

Exemple :

- Pour un lancer de dé, les issues sont : $\{1;2;3;4;5;6\}$
- Dans le cas du lancer de dé, l'univers est donc : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

Evénement :

- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers (c'est à dire seulement une partie de Ω)

Exemple :

- Pour le lancer de dé, l'évènement "obtenir un nombre inférieur ou égal à 3" est égal à l'ensemble $\{1,2,3\}$
- Pour le lancer de dé, l'évènement "obtenir un nombre pair" est égal à l'ensemble $\{2,4,6\}$

Evénement élémentaire :

- **Un événement élémentaire** est un sous-ensemble de l'univers composé d'une seule issue.

Exemple : "Obtenir un 1" est un événement élémentaire (il vaut $\{1\}$).

Cardinal :

- Le cardinal d'un ensemble est le nombre d'éléments dans cet ensemble.
- C'est donc le nombre d'évènements élémentaires d'un évènement

Exemple :

- Le cardinal de le l'évènement obtenir un nombre pair est 3 (il y a 3 éléments dans $\{2;4;6\}$

Evénement certain :

L'événement certains est l'événement constitué de toutes les issues possibles. C'est l'univers tout entier.

Exemple :

- Il est certain en lançant un dé de faire soit 1, soit 2, soit 3, soit 4, soit 5, soit 6.
- Donc l'évènement $\{1;2;3;4;5;6\}$ est certain (c'est bien Ω, l'univers tout entier)

Evénement impossible :

- L'événement impossible est l'ensemble vide, on le note : $\emptyset$

Exemple :

- Il est impossible de ne faire aucun chiffre

Intersection d'événements :

- L'intersection de deux événements A et B (notée $A \bigcap B$) est l'ensemble des issues qui sont à la fois dans A et à la fois dans B.

Exemple :

- Si on note $A =$"obtenir un nombre pair" et $B =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 "
- Alors $A = \{2;4;6\}$
- Et $B = \{1;2;3\}$
- Donc $A \bigcap B = \{2\}$

Union d'événements :

- L'union de deux événements A et B (notée $A \bigcup B$) est l'ensemble des issues qui sont soit dans A soit dans B.

Exemple :

- Si on note $A =$"obtenir un nombre pair" et $B =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 "
- Alors $A = \{2;4;6\}$
- Et $B = \{1;2;3\}$
- Donc $A \bigcup B = \{1;2;3;4;6\}$

Evénement contraire :

- L'**événement contraire** d'un événement A (noté $\bar{A}$) est l'ensemble des issues de l'univers qui n'appartiennent pas à A.
- On appelle aussi le **complémentaire** de l'événement A.

Exemple :

- Si on note $A =$"obtenir un nombre pair" et $B =$"obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 "
- Alors $A = \{2;4;6\}$
- Et $B = \{1;2;3\}$
- Donc $\bar{A} = \{1;3;5\}$
- Donc $\bar{B} = \{4;5;6\}$

Evénement incompatibles :

- Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent se réaliser simultanément (s'ils n'ont aucune issue en commun).
- Ainsi, deux événements contraires sont incompatibles

Exemple :

- Si on note $A =$"obtenir un nombre pair" et $B =$"obtenir un nombre impair"
- Alors $A = \{2;4;6\}$
- Et $B = \{1;3;5\}$
- Donc A et B n'ont aucune issue en commun et sont donc incompatibles

---

Partition d'évènements :

- Une famille d'évènements (A_i) forme une partition (de l'ensemble Ω s'ils sont tous deux à deux incompatibles et si leur réunion est égale à Ω

Exemple 1 :

- Si on note A_1 = "obtenir un nombre pair" et A_2 = "obtenir un nombre impair"
- Alors $A_1 = \{2;4;6\}$
- Et $A_2 = \{1;3;5\}$
- Donc A_1 et A_2 sont incompatibles (ou disjoints) car ils n'ont pas d'issue en commun
- De plus $A_1 \bigcup A_2 = \{1;2;3;4;5;6\} = \Omega$
- Donc (A_1, A_2) forme une partition

Exemple 2 :

- Si on note $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$ et $A_3 = \{3;4;5;6\}$
- A_1 et A_2 sont incompatibles (ou disjoints) car ils n'ont pas d'issue en commun
- A_2 et A_3 sont incompatibles (ou disjoints) car ils n'ont pas d'issue en commun
- A_1 et A_3 sont incompatibles (ou disjoints) car ils n'ont pas d'issue en commun
- De plus $A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 = \{1;2;3;4;5;6\} = \Omega$
- Donc (A_1, A_2, A_3) forme une partition

II. Probabilités

II.1. **Loi de probabilité** :

- Soit une expérience aléatoire avec un univers Ω.
- On rappelle que le cardinal d'Ω est le nombre d'issues (dans le cas du dé, il y en a 6, chacune des faces)
- On dit qu'elle suit une loi de probabilité $\mathbb{P}$ si à chaque issue x_i on peut associer une probabilité p_i telle que :
  - Les p_i sont entre 0 et 1 ie $0 \leq p_i \leq 1$
  - la somme des p_i est égale à 1 ie : $\sum_{i=1}^{Card(\Omega)} p_i = 1$
  - A chaque événement $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ on peut associer le nombre $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$
- Le nombre p_i est la probabilité de l'éventualité x_i
- Le nombre $\mathbb{P}$ est la probabilité de l'évènement A

Exemple :

- Pour un dé non truqué, les probabilités de chaque face sont les mêmes, elles sont toutes égales à $1/6$
- Donc pour tout $1 \leq i \leq 6$, on a $p_i = \frac{1}{6}$
- Si on note $A =$"obtenir un nombre pair"
- Alors $A = \{2;4;6\}$
- $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_4 + p_6 = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

II.2. **Propriétés** :

- Pour tout évènement $A : 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
- La probabilité de l'évènement certain est 1 : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- La probabilité de l'évènement impossible est 0 : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- La probabilitié d'un évènement est égal à 1 moins la probabilité de son contraire : $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A})$
- Si A et B sont incompatibles : $\mathbb{P}(A \bigcap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Pour tous les évènements A et B : $\mathbb{P}(A \bigcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \bigcap B)$

II.3 **Equiprobabilité** :

- On dit qu'il y a équiprobabilité quand toutes les éventualités (ou les événements élémentaires) ont la même probabilité.
- Dans le cas d'une équiprobabilité, on a : $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

Exemple :

- Dans un lancer de dé, toutes les faces ont une probabilité de $\frac{1}{6}$
- En effet, si A est un évènement élémentaire il peut s'agir d'un des évènements : $\{1\};\{2\};\{3\};\{4\};\{5\};\{6\}$
- Donc $Card(A) = 1$
- On a $Card(\Omega) = 6$
- Et finalement $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{1}{6}$

Exemple :

- La probabilité de l'événement A = « faire un nombre strictement inférieur à 3 » est : $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{Card(\{1;2;3\})}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- La probabilité de l'événement B = « faire un nombre pair » est : $\mathbb{P}(B) = \frac{Card(\{2;4;6\})}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

II.4 **Répétition d'expériences identiques et indépendantes** :

- Des expériences identiques sont des expériences qui ont les mêmes issues et probabilités associées.
- Des expériences indépendantes sont des expériences dont les résultats ne s'influent pas mutuellement.
- Soit Ω l'univers d'une expérience. Si on répète n fois cette expérience de manière indépendante alors le cardinal (l'ensemble des possibilités) de cette série d'expériences est : $Card(\Omega)^n$

Exemple 1 :

- Quand on lance un dé 2 fois successivement, il s'agit d'une répétition de 2 expériences identiques et indépendantes :
  - L'expérience est évidemment identique
  - Si on a fait un 6 au premier lancer, puis encore un 6 au deuxième lancer, la probabilité de faire un 6 au troisième lancer sera toujours de $\frac{1}{6}$. Donc les répétitions sont indépendantes.
- $Card(\Omega)^n = 6^2 = 36$ Il y a bien 36 issues dans cette nouvelle expérience

Exemple 2 :

- Pour un lancer de pièce, on a $\Omega = \{P, F\}$
- Si on lance une pièce 3 fois successivement, il s'agit d'une répétition de 2 expériences identiques et indépendantes
- $Card(\Omega)^n = 2^3 = 8$ Il y a bien 8 issues dans cette nouvelle expérience :
  - PPP
  - PPF
  - PFP
  - PFF
  - FPP
  - FPF
  - FFP
  - FFF

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]:

In [ ]: