

Prépa Mastère Digital - Mathématiques

Notions mathématiques fondamentales - Sommes

HETIC

Table des matières

1. Introduction

- 1.1 Somme d'entiers consécutifs
- 1.2 Somme des entiers pairs
- 1.3 Exercices
- 1.4 Correction des exercices

2. Somme de valeurs quelconques

- 2.1 Symbole Sigma
- 2.2 Multiplication par une constante
- 2.3 Somme de somme de deux termes
- 2.4 Linéarité de la somme
- 2.5 Exercices
- 2.6 Corrigés des exercices

Table des matières

1. Introduction

- 1.1 Somme d'entiers consécutifs
- 1.2 Somme des entiers pairs
- 1.3 Exercices
- 1.4 Correction des exercices

2. Somme de valeurs quelconques

- 2.1 Symbole Sigma
- 2.2 Multiplication par une constante
- 2.3 Somme de somme de deux termes
- 2.4 Linéarité de la somme
- 2.5 Exercices
- 2.6 Corrigés des exercices

1.1 Introduction - Somme d'entiers consécutifs

Exemple - Somme d'entiers consécutifs

- Intéressons nous à cette somme :

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

- Il existe une manière plus concise de l'écrire :

$$\sum_{i=4}^{i=10} i$$

$$\sum_{i=4}^{i=10} i \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \text{ (symbole sigma) : indique que l'on calcule une somme} \\ i = 4 \text{ (en bas) : la somme commence à } 4 \\ i = 10 \text{ (en haut) : la somme finit à } 10 \\ i \text{ (à droite) : on somme (tous) les entiers de } 4 \text{ à } 10 \end{array} \right.$$

1.2 Introduction - Somme des entiers pairs

Exemple - Somme des entiers pairs

- Intéressons nous à cette somme :

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10$$

- On peut réécrire cette somme ainsi :

$$2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4 + 2 \times 5$$

- Finalement, on peut l'écrire avec un symbole Σ ainsi :

$$\sum_{i=1}^{i=5} 2i \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \text{ (à gauche) : indique que l'on calcule une somme} \\ i = 1 : \text{ la somme commence à } 1 \\ i = 5 : \text{ la somme finit à } 5 \\ 2i : \text{ on somme (tous) les doubles de } i (= 2 \times i = 2i) \end{array} \right.$$

1.3 Introduction - Exercices

Exercice 1

- Soit $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
 1. Calculer S et $3S$
 2. Ecrire S en utilisant le symbole Σ
 3. Calculer $S' = \sum_{i=1}^{i=5} 3i$
 4. Que remarquez-vous ?

Exercice 2

- Soit $S = 4 + 8 + 12 + 16$
 1. Ecrire S en utilisant le symbole Σ
 2. Est-ce que $S = 4 \times \sum_{i=1}^{i=4} i$?

1.4 Introduction - Correction des exercices

Exercice 1

• Soit $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$

1. $S = 15$ et $3S = 3 \times 15 = 45$

2. $S = \sum_{i=1}^{i=5} i$

3. $S' = \sum_{i=1}^{i=5} 3i$

$$S' = 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5$$

$$S' = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$$

4. On remarque que $S' = 3S$, donc :

$$3 \times \sum_{i=1}^{i=5} i = \sum_{i=1}^{i=5} 3 \times i$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$3 \sum_{i=1}^{i=5} i = \sum_{i=1}^{i=5} 3i$$

1.4 Introduction - Correction des exercices

Exercice 2

• Soit $S = 4 + 8 + 12 + 16$

1. $S = \sum_{i=1}^{i=4} 4i$

2. $S = 40$ et $4 \times \sum_{i=1}^{i=4} i = 4 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 4 \times 10 = 40$

Donc :

$$S = \sum_{i=1}^{i=4} 4i = 4 \times \sum_{i=1}^{i=4} i$$

Table des matières

1. Introduction

- 1.1 Somme d'entiers consécutifs
- 1.2 Somme des entiers pairs
- 1.3 Exercices
- 1.4 Correction des exercices

2. Somme de valeurs quelconques

- 2.1 Symbole Sigma
- 2.2 Multiplication par une constante
- 2.3 Somme de somme de deux termes
- 2.4 Linéarité de la somme
- 2.5 Exercices
- 2.6 Corrigés des exercices

2.1 Somme de valeurs quelconques - Symbole Sigma

Exemple - Somme de valeurs quelconques

- Soit cette série de notes sur 10 (i désigne un élève) :

i	1	2	3	4	5
x_i	2	7	1	9	4

- Il existe une manière plus concise de l'écrire :

$$\sum_{i=1}^{i=5} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{i=5} x_i \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \text{ (symbole sigma) : indique que l'on calcule une somme} \\ i = 1 \text{ (en bas) : la somme commence à 1} \\ i = 5 \text{ (en haut) : la somme finit à 5} \\ x_i \text{ (à droite) : on somme les valeurs } x_i \text{ de la 1ère à la 5ème} \end{array} \right.$$

2.2 Somme de valeurs quelconques - Multiplication par une constante

Exemple - Multiplication par une constante

- Soit une série de valeurs x_i et la même série multipliée par 3

i	1	2	3	4
x_i	10	20	15	5
$3x_i$	30	60	45	15

- On a : $\sum_{i=1}^4 x_i = 10 + 20 + 15 + 5 = 50$
- Et : $\sum_{i=1}^4 3 \times x_i = 30 + 60 + 45 + 15 = 150$
- Donc $3 \times \sum_{i=1}^4 x_i = \sum_{i=1}^4 3 \times x_i$

2.2 Somme de valeurs quelconques - Multiplication par une constante

Formule - Multiplication par une constante

- Multiplier toutes les valeurs dans une somme par une constante, c'est multiplier par cette constante la somme des valeurs initiales
- Autrement dit :

$$\sum_{i=1}^n \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

2.3 Somme de valeurs quelconques - Somme de somme de deux termes

Exemple - Somme de somme de deux séries

- Soit deux séries de valeurs y_i et x_i

i	1	2	3	4
x_i	10	20	15	5
y_i	5	10	20	5

- On a : $\sum_{i=1}^4 x_i = 10 + 20 + 15 + 5 = 50$
- Et : $\sum_{i=1}^4 y_i = 5 + 10 + 20 + 5 = 40$
- $\sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) = (10 + 5) + (20 + 10) + (15 + 20) + (5 + 5) = 15 + 30 + 35 + 10 = 90$
- Finalement : $\sum_{i=1}^4 (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^4 x_i + \sum_{i=1}^4 y_i$

2.3 Somme de valeurs quelconques - Somme de somme de deux termes

Formule - Somme de somme de deux termes

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$$

2.4 Somme de valeurs quelconques - Linéarité de la somme

Formule - Linéarité de la somme

- On peut résumer tout ceci ainsi :

$$\sum_{i=1}^n (x_i + \lambda y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \lambda \sum_{i=1}^n y_i$$

2.5 Somme de valeurs quelconques - Exercices

Exercice 1 (utilisez au maximum les formules vues ci-dessus !)

- Calculer les sommes suivantes :

1.

$$\sum_{i=1}^{21} 3 ; \sum_{i=5}^{i=9} (i+1) ; \sum_{i=1}^{i=6} i^2 ; \sum_{i=2}^{i=4} \frac{1}{i}$$

2. Soit $x_1 = 1, x_2 = 10, x_3 = 100$ et $x_4 = 1000$

3. Calculer $\sum_{i=1}^4 x_i$

4. Soit $y_i = x_i - 1$ (les 4 valeurs de y sont égales aux 4 valeurs de x auxquelles on a retranché 1) Calculer $\sum_{i=1}^4 y_i$

5. Soit $y_i = 10 \times x_i$ (les 4 valeurs de y sont égales à celles de x fois 10) Calculer $\sum_{i=1}^4 y_i$

2.5 Somme de valeurs quelconques - Exercices

Exercice 2 (utilisez au maximum les formules vues ci-dessus !)

- Soit cette série de notes sur 20 (i désigne un élève) :

i	1	2	3	4	5
x_i	20	17	11	12	?

- On sait aussi que

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{i=5} x_i = 14$$

1. Interpréter le fait que cette somme soit égale à 14
2. Ecrire une égalité pour exprimer la note du 5ème élève comme étant un nombre entier moins une somme
3. Calculer la note du 5ème élève
4. Calculer $\frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2$ où \bar{x} est égal à la somme précédente. Quelle est cette quantité ?

2.5 Somme de valeurs quelconques - Exercices

Exercice 3 (utilisez au maximum les formules vues ci-dessus !)

- 4 amis vont au restaurant, soit m_i l'argent dépensé pour manger et b_i l'argent dépensé pour boire, par chacun des 4 convives.

i	1	2	3	4
b_i	?	?	?	?
m_i	15	17	11	12
$b_i + m_i$	25	20	25	32

- Combien ont-ils dépensé en tout (les 4 amis, pour manger et boire) ?
- Ecrire la somme d'argent dépensée en boisson par les 4 personnes comme la différence de deux sommes et la calculer.
- Si le prix des boissons augmente de 100 %, de combien est le nouveau total ?

2.5 Somme de valeurs quelconques - Exercices

Exercice 4 (utilisez au maximum les formules vues ci-dessus !)

- Calculer $\sum_{i=1}^{1000} (i - (i - 1))$
- Calculer $\sum_{i=1}^{i=5} i^2 - (i - 1)^2$
- Calculer $\sum_{i=1}^4 7i - (6i - 6)$
- Calculer $\sum_{i=1}^5 i(i - 1)$

2.6 Somme de valeurs quelconques - Corrigés des exercices

Exercice 1

- $\sum_{i=1}^{21} 3 = 21 \times 3 = 63$
 $\sum_{i=5}^9 (i+1) = (5+1) + (6+1) + (7+1) + (8+1) + (9+1) = 40$
 $\sum_{i=1}^6 i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$
 $\sum_{i=2}^4 \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12+6+4+3}{12} = \frac{25}{12}$
- Soit $x_1 = 1, x_2 = 10, x_3 = 100$ et $x_4 = 1000$
- $\sum_{i=1}^4 x_i = 1 + 10 + 100 + 1000 = 1111$
- $\sum_{i=1}^4 y_i = \sum_{i=1}^4 (x_i - 1) = \sum_{i=1}^4 x_i - \sum_{i=1}^4 1 = 1111 - 4 = 1107$
- $\sum_{i=1}^4 y_i = \sum_{i=1}^4 10x_i = 10 \times \sum_{i=1}^4 x_i = 10 \times 1111 = 11110$

2.6 Somme de valeurs quelconques - Corrigés des exercices

Exercice 2

- Soit cette série de notes sur 20 (i désigne un élève) :

i	1	2	3	4	5
x_i	20	17	11	12	?

- On sait aussi que

$$\frac{1}{5} \sum_{i=1}^{i=5} x_i = 14$$

1. Il s'agit de la moyenne de la série
2. La note de l'élève 5 est égale à $5 \times 14 - \sum_{i=1}^{i=4} x_i = 70 - \sum_{i=1}^{i=4} x_i$
3. Sa note est égale à 10 ($= 70 - \sum_{i=1}^{i=4} x_i = 70 - (20 + 17 + 11 + 12)$)
4. Cette quantité est la variance de la série. Elle vaut :
 $(20 - 14)^2 + (17 - 14)^2 + (11 - 14)^2 + (12 - 14)^2 + (10 - 14)^2 =$
 $36 + 9 + 9 + 4 + 16 = 74$

2.6 Somme de valeurs quelconques - Corrigés des exercices

Exercice 3

- 4 amis vont au restaurant, soit m_i l'argent dépensé pour manger et b_i l'argent dépensé pour boire, par chacun des 4 convives.

i	1	2	3	4
b_i	?	?	?	?
m_i	15	17	11	12
$b_i + m_i$	25	20	25	32

- $\sum_{i=1}^4 (m_i + b_i) = 25 + 20 + 25 + 32 = 97$
- $\sum_{i=1}^4 b_i = \sum_{i=1}^4 (b_i + m_i) - \sum_{i=1}^4 m_i = 97 - (15 + 17 + 11 + 12) = 97 - 55 = 42$
- Dans ce cas la nouvelle somme vaut :
 $\sum_{i=1}^4 (2b_i + m_i) = 2 \sum_{i=1}^4 b_i + \sum_{i=1}^4 m_i = 2 \times 42 + 55 = 84 + 55 = 139$