Prépa Mastère Digital - Mathématiques

Notions mathématiques fondamentales - Sommes

HETIC

Table des matières

Table des matières

1.1 Introduction - Somme d'entiers consécutifs

Exemple - Somme d'entiers consécutifs

- Intéressons nous à cette somme :

$$4+5+6+7+8+9+10$$

- Il existe une manière plus concise de l'écrire :

$$\sum_{i=4}^{i=10} i$$

$$\sum_{i=4}^{i=10} i \begin{cases} \Sigma \text{ (symbole sigma) : indique que l'on calcule une somme} \\ i = 4 \text{ (en bas) : la somme commence à 4} \\ i = 10 \text{ (en haut) : la somme finit à 10} \\ i \text{ (à droite) : on somme (tous) les entiers de 4 à 10} \end{cases}$$

Exemple - Somme des entiers pairs

- Intéressons nous à cette somme :

$$2+4+6+8+10$$

- On peut réécrire cette somme ainsi :

$$2\times 1+2\times 2+2\times 3+2\times 4+2\times 5$$

- Finalement, on peut l'écrire avec un symbole Σ ainsi :

$$\sum_{i=1}^{i=5} 2i \begin{cases} \Sigma \text{ (à gauche) : indique que l'on calcule une somme} \\ i=1 \text{ : la somme commence à } 4 \\ i=5\text{: la somme finit à } 5 \\ 2i \text{ : on somme (tous) les doubles de } i \ (=2\times i=2i) \end{cases}$$

Exercice 1

- Soit $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
  1. Calculer S et $3S$
  2. Ecrire S en utilisant le symbole Σ
  3. Calculer $S^{'} = \sum_{i=1}^{i=5} 3i$
  4. Que remarquez-vous ?

Exercice 2

- Soit $S = 4 + 8 + 12 + 16$
  1. Ecrire S en utilisant le symbole Σ
  2. Est-ce que $S = 4 \times \sum_{i=1}^{i=4} i$?

Exercice 1

- Soit $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
  1. $S = 15$ et $3S = 3 \times 15 = 45$
  2. $S = \sum_{i=1}^{i=5} i$
  3. $S' = \sum_{i=1}^{i=5} 3i$
     $S' = 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5$
     $S' = 3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$
  4. On remarque que $S' = 3S$, donc :

$$3 \times \sum_{i=1}^{i=5} i = \sum_{i=1}^{i=5} 3 \times i$$

Que l'on peut aussi écrire :

$$3 \sum_{i=1}^{i=5} i = \sum_{i=1}^{i=5} 3i$$

Exercice 2

- Soit $S = 4 + 8 + 12 + 16$
  1. $S = \sum_{i=1}^{i=4} 4i$
  2. $S = 40$ et $4 \times \sum_{i=1}^{i=4} i = 4 \times (1 + 2 + 3 + 4) = 4 \times 10 = 40$
     Donc :
     $$S = \sum_{i=1}^{i=4} 4i = 4 \times \sum_{i=1}^{i=4} i$$

Table des matières

2.1 Somme de valeurs quelconques - Symbole Sigma

Exemple - Somme de valeurs quelconques

- Soit cette série de notes sur 10 (i désigne un élève) :

i	1	2	3	4	5
x_i	2	7	1	9	4

- Il existe une manière plus concise de l'écrire :

$$\sum_{i=1}^{i=5} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{i=5} x_i \begin{cases} \Sigma \text{ (symbole sigma) : indique que l'on calcule une somme} \\ i = 1 \text{ (en bas) : la somme commence à 1} \\ i = 5 \text{ (en haut) : la somme finit à 5} \\ x_i \text{ (à droite) : on somme les valeurs } x_i \text{ de la 1ère à la 5ème} \end{cases}$$

2.2 Somme de valeurs quelconques - Multiplication par une constante

Exemple - Multiplication par une constante

- Soit une série de valeurs x_i et la même série multipliée par 3

i	1	2	3	4
x_i	10	20	15	5
$3x_i$	30	60	45	15

- On a : $\sum_{i=1}^{4} x_i = 10 + 20 + 15 + 5 = 50$
- Et : $\sum_{i=1}^{4} 3 \times x_i = 30 + 60 + 45 + 15 = 150$
- Donc $3 \times \sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} 3 \times x_i$

2.2 Somme de valeurs quelconques - Multiplication par une constante

Formule - Multiplication par une constante

- Multiplier toutes les valeurs dans une somme par une constante, c'est multiplier par cette constance la somme des valeurs initiales
- Autrement dit :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2.3 Somme de valeurs quelconques - Somme de somme de deux termes

Exemple - Somme de somme de deux séries

- Soit deux séries de valeurs y_i et x_i

i	1	2	3	4
x_i	10	20	15	5
y_i	5	10	20	5

- On a : $\sum_{i=1}^{4} x_i = 10 + 20 + 15 + 5 = 50$
- Et : $\sum_{i=1}^{4} y_i = 5 + 10 + 20 + 5 = 40$
- $\sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i) = (10 + 5) + (20 + 10) + (15 + 20) + (5 + 5) = 15 + 30 + 35 + 10 = 90$
- Finalement : $\sum_{i=1}^{4} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i + \sum_{i=1}^{4} y_i$

2.3 Somme de valeurs quelconques - Somme de somme de deux termes

Formule - Somme de somme de deux termes

- $$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

2.4 Somme de valeurs quelconques - Linéarité de la somme

Formule - Linéarité de la somme

- On peut résumer tout ceci ainsi :

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + \lambda y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Exercice 1 (utilisez au maximum les formules vues ci-dessus !)

- Calculer les sommes suivantes :

1. $$\sum_{i=1}^{21} 3 \; ; \; \sum_{i=5}^{i=9} (i+1) \; ; \; \sum_{i=1}^{i=6} i^2 \; ; \; \sum_{i=2}^{i=4} \frac{1}{i}$$
2. Soit $x_1 = 1, x_2 = 10, x_3 = 100$ et $x_4 = 1000$. Calculer $\sum_{i=1}^{4} x_i$
3. Soit $y_i = x_i - 1$ (les 4 valeurs de y sont égales aux 4 valeurs de x auxquelles on a retranché 1) Calculer $\sum_{i=1}^{4} y_i$
4. Soit $y_i = 10 \times x_i$ (les 4 valeurs de y sont égales à celles de x fois 10) Calculer $\sum_{i=1}^{4} y_i$

Exercice 2 (utilisez au maximum les formules vues ci-dessus !)

- Soit cette série de notes sur 20 (i désigne un élève) :

i	1	2	3	4	5
x_i	20	17	11	12	?

- On sait aussi que

$$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{i=5} x_i = 14$$

1. Interpréter le fait que cette somme soit égale à 14
2. Ecrire une égalité pour exprimer la note du 5ème élève comme étant un nombre entier moins une somme
3. Calculer la note du 5ème élève
4. Calculer $\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2$ où $\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{i=5} x_i = 14$. Quelle est cette quantité ?

Exercice 3 (utilisez au maximum les formules vues ci-dessus !)

- 4 amis vont au restaurant, soit m_i l'argent dépensé pour manger et b_i l'argent dépensé pour boire, par chacun des 4 convives.

i	1	2	3	4
b_i	?	?	?	?
m_i	15	17	11	12
$b_i + m_i$	25	20	25	32

1. Combien ont-ils dépensé en tout (les 4 amis, pour manger et boire) ?
2. Ecrire la somme d'argent dépensée en boisson par les 4 personnes comme la différence de deux sommes et la calculer.
3. Si le prix des boissons augmente de 100 %, de combien est le nouveau total ?

Exercice 4 (utilisez au maximum les formules vues ci-dessus !)

- Calculer $\sum_{i=1}^{i=1000}(i-(i-1))$
- Calculer $\sum_{i=1}^{i=5} i^2-(i-1)^2$
- Calculer $\sum_{i=1}^{4} 7i-(6i-6)$
- Calculer $\sum_{i=1}^{5} i(i-1)$

Exercice 1

1. $\sum_{i=1}^{21} 3 = 21 \times 3 = 63$
   $\sum_{i=5}^{i=9}(i+1) = (5+1)+(6+1)+(7+1)+(8+1)+(9+1) = 40$
   $\sum_{i=1}^{i=6} i^2 = 1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 1+4+9+16+25+36 = 91$
   $\sum_{i=2}^{i=4} \frac{1}{i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12}$
2. $\sum_{i=1}^{4} x_i = 1+10+100+1000 = 1111$
3. $\sum_{i=1}^{4} y_i = \sum_{i=1}^{4}(x_i - 1) = \sum_{i=1}^{4} x_i - \sum_{i=1}^{4} 1 = 1111 - 4 = 1107$
4. $\sum_{i=1}^{4} y_i = \sum_{i=1}^{4} 10x_i = 10 \times \sum_{i=1}^{4} x_i = 10 \times 1111 = 11110$

Exercice 2

- Soit cette série de notes sur 20 (i désigne un élève) :

i	1	2	3	4	5
x_i	20	17	11	12	?

- On sait aussi que

$$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{i=5} x_i = 14$$

1. Il s'agît de la moyenne de la série
2. La note de l'élève 5 est égale à $5 \times 14 - \sum_{i=1}^{i=4} x_i = 70 - \sum_{i=1}^{i=4} x_i$
3. Sa note est égale à 10 $(= 70 - \sum_{i=1}^{i=4} x_i = 70 - (20 + 17 + 11 + 12))$
4. Cette quantité est la variance de la série. Elle vaut : $(20-14)^2 + (17-14)^2 + (11-14)^2 + (12-14)^2 + (10-14)^2 = 36 + 9 + 9 + 4 + 16 = 74$

Exercice 3

- 4 amis vont au restaurant, soit m_i l'argent dépensé pour manger et b_i l'argent dépensé pour boire, par chacun des 4 convives.

i	1	2	3	4
b_i	?	?	?	?
m_i	15	17	11	12
$b_i + m_i$	25	20	25	32

1. $\sum_{i=1}^{4}(m_i + b_i) = 25 + 20 + 25 + 32 = 102$
2. $\sum_{i=1}^{4} b_i = \sum_{i=1}^{4}(b_i + m_i) - \sum_{i=1}^{4} m_i = 102 - (15 + 17 + 11 + 12) = 102 - 55 = 47$
3. Dans ce cas la nouvelle somme vaut :
$\sum_{i=1}^{4}(2b_i + m_i) = 2\sum_{i=1}^{4} b_i + \sum_{i=1}^{4} m_i = 2 \times 47 + 55 = 94 + 55 = 149$