TD N°1

EXERCICE1:

On se propose de calculer une valeur approchée de $\sqrt{5}$ en appliquant la méthode de newton à l'équation : $x^2 - 5 = 0,\ pour\ x > 0$

1) Formuler la suite (x_n) de Newton
2) En prenant x_0= 2 comme valeur initiale, donner les 3 premiers décimaux de $\sqrt{5}$
3) Même question en utilisant la méthode de la sécante.

EXERCICE2 :

Déterminer la suite des premiers trois itérés des méthodes de dichotomie dans l'intervalle $[1,3]$et de Newton avec x_0 =2 pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 5$. Combien de pas de dichotomie doit-on effectuer pour améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine ?

Exercice3 :

Considérons l'équation : $x(1 + e^x) = e^x$

1. Montrer que cette équation admet une unique solution réelle $\alpha\ dans\ [0,1]$
2. Ecrire la méthode de newton pour approcher la solution α
3. Proposer une autre itération du point fixe pour approcher α . montrer que cette itération converge vers α pour tout $x_0 \in [0,1]$

Exercice4 :

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2\ sur \mathbb{R}$. On suppose que f' ne s'annule pas. On appelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$la suite de newton définie par f à partir d'un élément $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé.

1. Donner l'équation cartésienne de la droite D_n tangente au graphe de f au point $(x_n, f(x_n))$.
2. Justifier que D_n coupe l'axe des abscisses, et donner l'expression de x_{n+1} .
3. On étudie plus précisément la suite obtenue en partant de $f(x) = x^2 - 2$ et x_0=1
   a. Donner l'expression $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ en fonction de x_n . justifier que la suite x_n est bien définie.
   b. Montrer par récurrence que $x_n \geq 1$ puis que $\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2}\left|x_n - \sqrt{2}\right|^2$
   c. Déduisez-en que $\left|x_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{2^{2^n}}$
   d. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtient-on avec x_5 ?