Logique : le calcul des prédicats

Sophie Pinchinat
sophie.pinchinat@irisa.fr

IRISA, Université de Rennes 1

UE LOG – année 2017-2018

Motivation

Le calcul des propositions est bien trop limité pour décrire des situations réelles.

- Il permet de n'exprimer que des énoncés dont la vérité ne dépend pas d'individus/objets comme par exemple "Il pleut".
- Il ne peut pas exprimer des énoncés qui mettent en jeu des individus ou des objets comme par exemple
  - "Si x est le père de y et si z est le père de x alors z est un grand-père de y"
  - "Toute personne a un père".
  - ...

Relation avec le calcul propositionnel

Le calcul des prédicats hérite des propriétés établies pour celui des propositions.

- Le langage est défini inductivement.
- Les énoncés de cette logique sont *interprétés*, comme ceux du calcul propositionnel. Une *interprétation* en calcul des prédicats joue le rôle d'une valuation dans le calcul propositionnel. Étant donnée une interprétation, on peut évaluer les formules du calcul des prédicats et le résultat de cette évaluation est soit "vrai" soit "faux".

Remarque (Différence algorithmique importante)

On peut montrer qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de répondre à la question de la validité d'une formule du calcul des prédicat. On dit que le calcul des prédicat est indécidable.

Rappels sur les fonctions

Étant donnés un ensemble E et un entier $k \in \mathbb{N}$, une fonction d'arité k (ou k-aire) sur E est une fonction de E^k dans E.

Exemple

1. Soit la fonction d'arité 1 $succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $succ(n) = n + 1$ et la fonction 0 d'arité zéro (pas d'argument, donc une constante).
2. Soit la fonction binaire (d'arité 2) $+_3 : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui fait la somme de deux éléments modulo 3.

($E^k = E \times E \times \ldots E$, k fois)

Rappels sur les relations

Étant donnés un ensemble E et un entier $k \in \mathbb{N}$, une relation d'arité k (ou k-aire) sur E est un sous-ensemble de E^k.

Exemple

1. $E = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R}$ est la relation binaire (d'arité 2) définie par $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\} \subseteq E^2$.
2. $E = \mathbb{N}$ et $\mathcal{S}$ est la relation binaire $\mathcal{S} = \{(n, n + 1) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq E^2$.
3. $E = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{R}$ est la relation unaire (d'arité 1) définie par $\mathcal{R} = \{1, 2\}$. Notez que l'on a bien $\mathcal{R} \subseteq E$

Remarque

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'arité n, on note $\mathcal{R}(a_1, ..., a_n)$ pour $(a_1, ..., a_n) \in \mathcal{R}$.

Exercice

Quel est l'ensemble E^0 ?

Valeur de vérité

Exemple

On pourra écrire des formules telles que :

1. $\varphi_G : \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
2. $\varphi_P : \forall x \exists y P(y,x)$
3. $\varphi_C : \forall x \exists y G(y,x)$
4. $\varphi_D : \forall x \forall z P(z,f(x)) \rightarrow G(z,x)$
5. $\varphi_F : (\varphi_G \wedge \varphi_P) \rightarrow \varphi_C$

Valeur de vérité

Exemple

On pourra écrire des formules telles que :

1. $\varphi_G : \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
2. $\varphi_P : \forall x \exists y P(y,x)$
3. $\varphi_C : \forall x \exists y G(y,x)$
4. $\varphi_D : \forall x \forall z P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
5. $\varphi_F : (\varphi_G \wedge \varphi_P) \rightarrow \varphi_C$

On ne peut donner une valeur de vérité à ces formules :

- On ne sait dans quel ensemble les variables x, y, z prennent leur valeur.
- On ne connaît pas non plus la fonction f.
- On ne connaît pas les relations binaires P et G.

Valeur de vérité

Exemple

On pourra écrire des formules telles que :

1. $\varphi_G : \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \land P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$
2. $\varphi_P : \forall x \exists y P(y,x)$
3. $\varphi_C : \forall x \exists y G(y,x)$
4. $\varphi_D : \forall x \forall z P(z, f(x)) \rightarrow G(z,x)$
5. $\varphi_F : (\varphi_G \land \varphi_P) \rightarrow \varphi_C$

On ne peut donner une valeur de vérité à ces formules :

- On ne sait dans quel ensemble les variables x, y, z prennent leur valeur.
- On ne connaît pas non plus la fonction f.
- On ne connaît pas les relations binaires P et G.

Il faut fixer une interprétation pour pouvoir évaluer les formules.

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous êtres humains x, y, z, si x est le père de y et y est le père de z, alors x est un grand-père de z".

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous êtres humains x, y, z, si x est le père de y et y est le père de z, alors x est un grand-père de z".
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous êtres humains x, y, z, si x est le père de y et y est le père de z, alors x est un grand-père de z".
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le père de x" c-à-d. "tout individu a un père".

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous êtres humains x, y, z, si x est le père de y et y est le père de z, alors x est un grand-père de z".
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le père de x" c-à-d. "tout individu a un père".
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ signifie

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous êtres humains x, y, z, si x est le père de y et y est le père de z, alors x est un grand-père de z".
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le père de x" c-à-d. "tout individu a un père".
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le grand père de x", c-à-d. "tout individu a un grand-père".

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \land P(y, z)) \to G(x, z)$ signifie "pour tous êtres humains x, y, z, si x est le père de y et y est le père de z, alors x est un grand-père de z".
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le père de x" c-à-d. "tout individu a un père".
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le grand père de x", c-à-d. "tout individu a un grand-père".
- $\varphi_D = \forall x \forall z P(z, f(x)) \to G(z, x)$ signifie

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous êtres humains x, y, z, si x est le père de y et y est le père de z, alors x est un grand-père de z".
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le père de x" c-à-d. "tout individu a un père".
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le grand père de x", c-à-d. "tout individu a un grand-père".
- $\varphi_D = \forall x \forall z P(z, f(x)) \rightarrow G(z, x)$ signifie "si z est le père de la mère de x, alors z est un grand-père de x".

Interprétation 1

Les objets/individus sont les êtres humains, avec tout ce qui en découle.

- $P(x, y)$ signifie que "x est le père de y", $G(x, y)$ signifie que "x est un grand-père de y", et f retourne la mère d'un individu.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous êtres humains x, y, z, si x est le père de y et y est le père de z, alors x est un grand-père de z".
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le père de x" c-à-d. "tout individu a un père".
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ signifie "pour tout individu x il existe un individu y tel que y est le grand père de x", c-à-d. "tout individu a un grand-père".
- $\varphi_D = \forall x \forall z P(z, f(x)) \rightarrow G(z, x)$ signifie "si z est le père de la mère de x, alors z est un grand-père de x".

Ces quatre formules sont vraies dans l'Interprétation 1.

L'énoncé $\varphi_F = ((\varphi_G \wedge \varphi_P) \rightarrow \varphi_C)$ est donc aussi vraie.

Remarque

Les deux formules φ_P et φ_G sont loin de modéliser toutes les propriétés des relations P et G, respectivement : par exemple, on n'a pas énoncé que "le père de chaque individu est unique", ni qu' "un individu x peut être le grand-père d'un autre z sans qu'il existe un individu dont x soit le père et qui soit le père de z".

Interprétation 2

Les objets sont les trois sommets a, b, c du graphe

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl] & \\ b \arrow[rr] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

- P décrit la relation prédécesseur, donc les couples (a, b), (b, c) et (c, a), et G décrit la relation successeur, donc les couples (b, a), (c, b) et (a, c).
- La fonction f s'interpréte comme $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie

Interprétation 2

Les objets sont les trois sommets a, b, c du graphe

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl] & \\ b \arrow[rr] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

- P décrit la relation prédécesseur, donc les couples (a, b), (b, c) et (c, a), et G décrit la relation successeur, donc les couples (b, a), (c, b) et (a, c).
- La fonction f s'interpréte comme $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "tout point a un prédécesseur immédiat"

Elle est vraie dans ce graphe.

Interprétation 2

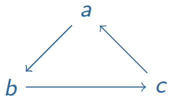
Les objets sont les trois sommets a, b, c du graphe

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl] & \\ b \arrow[rr] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

- P décrit la relation prédécesseur, donc les couples (a, b), (b, c) et (c, a), et G décrit la relation successeur, donc les couples (b, a), (c, b) et (a, c).
- La fonction f s'interpréte comme $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "tout point a un prédécesseur immédiat"
  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie

Interprétation 2

Les objets sont les trois sommets a, b, c du graphe



- P décrit la relation prédécesseur, donc les couples (a, b), (b, c) et (c, a), et G décrit la relation successeur, donc les couples (b, a), (c, b) et (a, c).
- La fonction f s'interpréte comme $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "tout point a un prédécesseur immédiat"

  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous points x, y, z, si x précède IMMÉD. y et si y précède imméd. z, alors x suit imméd. z"

  Elle est vraie dans ce graphe.

Interprétation 2

Les objets sont les trois sommets a, b, c du graphe

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl] & \\ b \arrow[rr] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

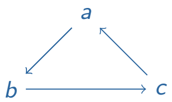
- P décrit la relation prédécesseur, donc les couples (a, b), (b, c) et (c, a), et G décrit la relation successeur, donc les couples (b, a), (c, b) et (a, c).
- La fonction f s'interpréte comme $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "tout point a un prédécesseur immédiat"

  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous points x, y, z, si x précède imméd. y et si y précède imméd. z, alors x suit imméd. z"

  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$

Interprétation 2

Les objets sont les trois sommets a, b, c du graphe



- P décrit la relation prédécesseur, donc les couples (a, b), (b, c) et (c, a), et G décrit la relation successeur, donc les couples (b, a), (c, b) et (a, c).
- La fonction f s'interpréte comme $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "tout point a un prédécesseur immédiat"
  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous points x, y, z, si x précède imméd. y et si y précède imméd. z, alors x suit imméd. z"
  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ "tout point a un successeur immédiat"
  Elle est vraie dans ce graphe.

Interprétation 2

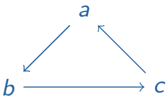
Les objets sont les trois sommets a, b, c du graphe

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl] & \\ b \arrow[rr] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

- P décrit la relation prédécesseur, donc les couples (a, b), (b, c) et (c, a), et G décrit la relation successeur, donc les couples (b, a), (c, b) et (a, c).
- La fonction f s'interpréte comme $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "tout point a un prédécesseur immédiat"
  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous points x, y, z, si x précède imméd. y et si y précède imméd. z, alors x suit imméd. z"
  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ "tout point a un successeur immédiat"
  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_F = ((\varphi_P \wedge \varphi_G) \rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans ce graphe.

Interprétation 2

Les objets sont les trois sommets a, b, c du graphe



- P décrit la relation prédécesseur, donc les couples (a, b), (b, c) et (c, a), et G décrit la relation successeur, donc les couples (b, a), (c, b) et (a, c).
- La fonction f s'interpréte comme $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "tout point a un prédécesseur immédiat"

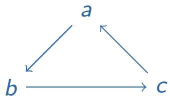
  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous points x, y, z, si x précède househ. y et si y précède househ. z, alors x suit househ. z"

  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ "tout point a un successeur immédiat"

  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_F = ((\varphi_P \wedge \varphi_G) \rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans ce graphe.
- $\varphi_D = \forall x \forall z P(z, f(x)) \rightarrow G(z, x)$

Interprétation 2

Les objets sont les trois sommets a, b, c du graphe



- P décrit la relation prédécesseur, donc les couples (a, b), (b, c) et (c, a), et G décrit la relation successeur, donc les couples (b, a), (c, b) et (a, c).
- La fonction f s'interpréte comme $a \mapsto a, b \mapsto b, c \mapsto a$.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ signifie "tout point a un prédécesseur immédiat"

  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ signifie "pour tous points x, y, z, si x précède imméd. y et si y précède imméd. z, alors x suit imméd. z"

  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ "tout point a un successeur immédiat"

  Elle est vraie dans ce graphe.
- $\varphi_F = ((\varphi_P \wedge \varphi_G) \rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans ce graphe.
- $\varphi_D = \forall x \forall z P(z, f(x)) \rightarrow G(z, x)$ "pour tout z et pour tout x, si z précède immédiatement $f(x)$, alors z suit immédiatement x".

  Elle est fausse.

Interprétation 3

Les objets sont les quatre sommets a, b, c, d du graphe

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[d] \\ d \arrow[u] & c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

- $P(x, y)$ "x précède immédiatement y sur le graphe".
- $G(x, y)$ "x suit immédiatement y sur le graphe".
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ " tout point a un prédécesseur immédiat". Elle est vraie.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ "pour tous points x, y, z, si x précède imméd. y et si y précède imméd. z, alors x suit imméd. z". Elle est fausse.
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ "tout point a un successeur immédiat". Elle est vraie.

$\varphi_F = ((\varphi_P \wedge \varphi_G) \rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

Interprétation 4

Les objets sont les quatre sommets a, b, c, d du graphe

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[d] \\ d \arrow[u] & c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

- $P(x, y)$ "x précède imméd. y" et $G(x, y)$ "pour aller de x à y on rencontre exactement un point z différent de x et de y".
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ "tout point a un prédécesseur immédiat". Elle est vraie.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \land P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ "pour tous points x, y, z, si x précède imméd. y et si y précède imméd. z, alors x suit imméd. z".Elle est vraie.
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ "tout point a un successeur immédiat". Elle est vraie.

$\varphi_F = ((\varphi_P \land \varphi_G) \rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

Interprétation 5

Les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$, les entiers naturels.

- $P(x, y)$ “$x = y + 1$”. Ex. $P(5, 4)$ est vraie, mais $P(4, 5)$ est fausse.
- $G(x, y)$ “$x = y + 2$”. Ex. $G(6, 4)$ est vraie, mais $G(4, 6)$ est fausse.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y, x)$ “pour tout $x \in \mathbb{N}$, il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que $y = x + 1$”. VRAIE.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow G(x, z)$ “pour tous $x, y, z \in \mathbb{N}$, si $x = y + 1$ et $z = y + 1$ alors $z = x + 2$”. VRAIE.
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y, x)$ “pour tout $x \in \mathbb{N}$, il existe $y \in \mathbb{N}$ tel que $y = x + 2$”. VRAIE.

$\varphi_F = ((\varphi_P \wedge \varphi_G) \rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

Interprétation 6

Les objets sont les éléments de $\mathbb{N}$, les entiers naturels.

- $P(x,y)$ "$y = x + 1$". Ex. $P(5,4)$ est vraie, mais $P(4,5)$ est fausse.
- $G(x,y)$ "$y = x + 2$". Ex. $G(6,4)$ est vraie, mais $G(4,6)$ est fausse.
- $\varphi_P = \forall x \exists y P(y,x)$ "pour tout $x \in \mathbb{N}$, il existe un entier y tel que $x = y + 1$". FAUSSE.
- $\varphi_G = \forall x \forall y \forall z (P(x,y) \wedge P(y,z)) \rightarrow G(x,z)$ "pour tous entiers x, y, z, si $x = y + 1$ et $z = y + 1$ alors $z = x + 2$". VRAIE.
- $\varphi_C = \forall x \exists y G(y,x)$ "pour tout $x \in \mathbb{N}$, il existe $z \in setn$ tel que $x = z + 2$". FAUSSE

$\varphi_F = ((\varphi_P \wedge \varphi_G) \rightarrow \varphi_C)$ est donc vraie dans cette interprétation.

Comparaison des interprétations : leurs points communs

Informellement, une interprétation est donnée par :

- un domaine pour les objets, *e.g.*, , l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des étudiants d'une classe, l'ensemble des sommets d'un graphe, l'ensemble des graphes, etc.,
- des fonctions sur le domaine pour les symboles de fonctions,
- des relations sur les objets du domaine pour les symboles de relations.

Exercice

Trouver les symboles de fonctions dans les formules de l'introduction et les opérateurs qui leur correspondent pour chacune des interprétations.
Trouver les symboles de relations dans les formules de l'introduction et les relations qui leur correspondent pour chacune des interprétations.

Interprétations

- Certaines interprétations ont finies (Interprétations 2,3,4), d'autres sont infinies (Interprétations 1,5,6).
- Les formules possèdent autant d'interprétations que l'on peut imaginer. Pour une interprétation donnée, certaines formules y sont vraies d'autres fausses.
- On pourra distinguer certaines formules qui sont vraies dans toutes les interprétations, c-à-d. les validités.

Vue d'ensemble du calcul des prédicats

Le calcul des prédicats (ou Logique du premier ordre) permet d'exprimer des relations entre objets $\rightsquigarrow$ Il est donc plus riche que le calcul propositionnel.
Le calcul des prédicats contient :

- des symboles de variables $x, y, z, \ldots$ qui prennent leur valeurs dans l'ensemble des *objets* (ou entités) du discours.
- des symboles de fonctions $(c, f(x), g(x, y), \ldots)$ permettant d'opérer sur les objets.
- des symboles de relations $(P(x), Q(x, y), R(x, y, z), \ldots)$ permettant de relier les objets entre eux.

Pour former les phrases du langage du premier ordre on utilise :

- Des formules atomiques : celles basées sur les relations, ex. $Q(c, f(x))$, qui s'évaluent à `vrai` ou `faux` (selon les *interprétations*).
- Leur combinaison à l'aide des connecteurs classiques de la logique du calcul propositionnel,
- mais aussi de connecteurs $\forall x$ et $\exists x$ (autant que de variables x), appelés quantificateurs (leur sémantique est celle de nos mathématiques).

Syntaxe du calcul des prédicats

Elle s'effectue en 2 étapes.

1. Syntaxe des termes et des formules atomiques.
2. Syntaxe des formules plus complexes.

Syntaxe des termes

On se fixe

- un ensemble infini de variables X
- un ensemble de $\mathcal{F} = \{c, f, g, \ldots\}$ de symboles de fonctions avec leur arité $\mathrm{ar} : \mathcal{F} \to \mathbb{N}$.

Définition

L'ensemble des termes $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{X}$ sur $\mathcal{F}$ et X est défini par induction.

- $x \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{X}$ pour toute variable $x \in X$
- $c \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{X}$ pour tout symbole d'arité 0 (constante)
- si $\mathrm{ar}(f) = n$ et $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{X}$, alors $f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{X}$.

Un terme décrit un objet du domaine de l'interprétation choisie. Il est dit clos s'il ne contient aucune variable.

Remarque

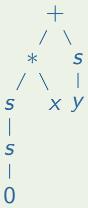
On notera $\mathcal{F} = \{c(0), f(1), \ldots\}$ pour indiquer que $\mathrm{ar}(c) = 0$, $\mathrm{ar}(f) = 1$, etc.

Exemple de termes

Soit $\mathcal{F} = \{0(0), s(1), +(2), *(2)\}$.

Exemple

Soient $x, y \in X$. L'expression $+(*(s(s(0)), x), s(y))$ est un terme, que l'on peut représenter par l'arbre suivant :



Le terme $+(*(s(s(0)), x), s(y))$ n'est pas clos.

Parfois, nous noterons ABUSIVEMENT $(s(s(0)) * x) + s(y))$

Langage, vocabulaire pour les énoncés/propriétés

Pour toute la suite, on se fixe un ensemble $X = \{x, y, z, \ldots\}$ de variables.

En plus des symboles de fonctions, on aura besoin de symboles de relations pour les énoncer des propriétés, et obtenir un langage du premier ordre.

Définition

Un langage du premier ordre est une paire $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ où :

- $\mathcal{F}$ est une signature pour les termes.
- $\mathcal{P}$ est une signature pour les formules atomiques.

Exemple (Énoncés sur les ensembles)

$\mathcal{F} = \{\emptyset(0), \cap(2), \cup(2), \mathtt{Compl}(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2), \subseteq(2)\}$.

Exercice

- Quel(s) langage(s) proposeriez-vous pour les entiers naturels ?
- Quel est le langage sur lequel reposent les énoncés $\varphi_P, \ldots$ de l'introduction ?

Ne pas confondre $\mathcal{F}$ "fonctions" et $\mathcal{P}$ "relations"

Les concepts de fonctions et de relations sont très différents.

- Les symboles de fonctions (dont les constantes) sont utilisés dans les termes pour décrire des objets.
- Les symboles de relations sont utilisés dans les formules pour décrire des propriétés entre les objets.

Exemple

Si $+(2) \in \mathcal{F}$ et $\geq (2) \in \mathcal{P}$:

- $+(1, 2)$ est un terme,
- $\geq (+(1, 2), 4)$ est une formule.

Les formules atomiques

Étant donné un langage $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$, on construit les formules atomiques en appliquant un symbole de relation à des termes.

Définition

Une formule atomique sur $\mathcal{S}$ est une expression de la forme $R(t_1, \ldots, t_n)$ avec $R(n) \in \mathcal{P}$ et $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{X}$ sont des termes.

Example

Avec $\mathcal{F} = \{\emptyset(0), \cap(2), \cup(2), \texttt{Compl}(1)\}$ et $\mathcal{P} = \{=(2), \subseteq(2)\}$, on peut écrire la formule atomique

$$\subseteq (\cap(x, \texttt{Compl}(\emptyset)), x)$$

(en maths on écrit plutôt $(x \cap \emptyset^C) \subseteq x)$)

Remarque

Sauf mention contraire, chaque langage du premier ordre contient le symbole de relation $=(2)$ et le symbole de relation $\perp(0)$ qui représentera l'énoncé toujours faux.

Formules (on utilise FO pour "First Order")

On se fixe un langage du premier ordre $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$.

Définition

L'ensemble $FO_{\mathcal{S}}$ des formules du premier ordre sur $\mathcal{S}$ (et Var) est défini par induction.

1. toute formule atomique sur $\mathcal{S}$ appartient à $FO_{\mathcal{S}}$
2. si $\varphi \in FO_{\mathcal{S}}$, alors $\neg\varphi \in FO_{\mathcal{S}}$
3. si $\varphi, \psi \in FO_{\mathcal{S}}$, alors $\varphi \wedge \psi \in FO_{\mathcal{S}}$
4. si $\varphi, \psi \in FO_{\mathcal{S}}$, alors $\varphi \vee \psi \in FO_{\mathcal{S}}$
5. si $\varphi, \psi \in FO_{\mathcal{S}}$, alors $\varphi \rightarrow \psi \in FO_{\mathcal{S}}$
6. si $\varphi \in FO_{\mathcal{S}}$ et $x \in X$, alors $\forall x\varphi, \exists x\varphi \in FO_{\mathcal{S}}$.

Exercice

Définir par induction l'ensemble $X(\varphi)$ des variables qui apparaissent dans une formule $\varphi \in FO_{\mathcal{S}}$.

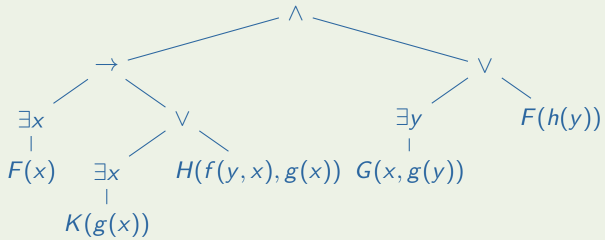
Arbre d'une formule

Comme pour le calcul propositionnel, on peut voir une formule comme un arbre.

Exemple

Soit la formule

$$[(\exists x F(x)) \rightarrow (\exists x K(g(x)) \vee H(f(y,x), g(x)))] \wedge [(\exists y G(x, g(y))) \vee F(h(y))]$$



Remarque

Les feuilles de l'arbre sont des formules atomiques (de façon similaire au cas des propositions pour le calcul propositionnel).

Occurrences libres et liées d'une variable

Definition

Lorsqu'une variable x appartient à une sous-formule précédée d'un quantificateur, $\forall x$ ou $\exists x$, elle est dite liée par ce quantificateur. Si une variable n'est liée par aucun quantificateur, elle est libre.

Remarque

La distinction entre variable libre et variable liée est importante : une variable liée ne possède pas d'identité propre et peut être remplacée par n'importe quel autre nom de variable qui n'apparaît pas dans la formule.

Exemple

La formule $\exists x(x < y)$ est "équivalente" à la formule $\exists z(z < y)$ car on a simplement renommé la variable liée x en z.

Remarque

On pourrait faire une analogie entre variable liée dans une formule et variable locale à une méthode en programmation.

Occurrences libres et liées d'une variable

Définition

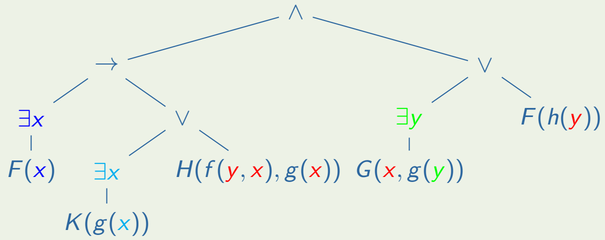
L'ensemble des variables libres ("free variables") $FV(\varphi)$, et l'ensemble des variables liées ("bound variables") $BV(\varphi)$ d'une formule φ sont des sous-ensembles de $Var(\varphi)$ définis par induction sur φ :

- si φ est une formule atomique : $\begin{cases} FV(\varphi) = Var(\varphi) \\ BV(\varphi) = \emptyset \end{cases}$
- $\begin{cases} FV(\neg\varphi) = FV(\varphi) \\ BV(\neg\varphi) = BV(\varphi) \end{cases}$
- $\begin{cases} FV(\varphi \to \psi) = FV(\varphi \wedge \psi) = FV(\varphi \vee \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi) \\ BV(\varphi \to \psi) = BV(\varphi \wedge \psi) = BV(\varphi \vee \psi) = BV(\varphi) \cup BV(\psi) \end{cases}$
- $\begin{cases} FV(\forall x\varphi) = FV(\exists x\varphi) = FV(\varphi) \setminus \{x\} \\ BV(\forall x\varphi) = BV(\exists x\varphi) = BV(\varphi) \cup \{x\} \end{cases}$

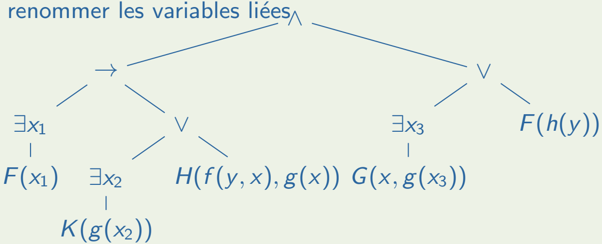
Une formule φ est close si elle ne possède aucune variable libre, *i.e.*, $FV(\varphi) = \emptyset$.

Exemple

Exemple



On pourra renommer les variables liées



Sémantique du calcul des prédicats

Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ un langage du calcul des prédicats. On note $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{P}_n$ les symboles de fonction et les symboles de relation d'arité n, respectivement.

On évalue les formules de $FO_{\mathcal{S}}$ sur des $\mathcal{S}$-structures, ou $\mathcal{S}$-interprétations.

Définition

Une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ est la donnée

1. d'un domaine $D_{\mathcal{M}}$,
2. de l'interprétation des symboles sur ce domaine :
   - pour chaque $f \in \mathcal{F}_n$, d'une fonction **totale** $f^{\mathcal{M}} : D^n_{\mathcal{M}} \to D_{\mathcal{M}}$
   - pour chaque $r \in \mathcal{P}_n$, d'une relation $r^{\mathcal{M}} \subseteq D^n_{\mathcal{M}}$

Remarque

Lorsque $c \in \mathcal{F}_0$ (constante), alors son interprétation $c^{\mathcal{M}}$ est un élément de $D_{\mathcal{M}}$.

Exemples d'interprétations

Soit le langage $\mathcal{S} = (\{o(0), f(1)\}, \{P(2)\})$.

Exemple

Soit $\mathcal{M}$ la structure/interprétation définie par :

- $D_{\mathcal{M}} = \mathbb{N}$
- $o^{\mathcal{M}} = 0$
- $f^{\mathcal{M}}(n) = n + 1$
- $P^{\mathcal{M}} = \{(n, n') \mid n \leq n'\}$

Exemple

Soit $\mathcal{M}'$ la structure/interprétation définie par :

- $D_{\mathcal{M}'} = \{Paul, Anne, Ida\}$
- $o^{\mathcal{M}'} = Paul$
- $f^{\mathcal{M}'}(Paul) = Anne$, $f^{\mathcal{M}'}(Anne) = Paul$, $f^{\mathcal{M}'}(Ida) = Anne$, par exemple pour "héritier"
- $P^{\mathcal{M}'} = \{(Anne, Paul), (Paul, Ida), (Anne, Ida)\}$, par exemple pour "est plus âgé que"

Quelques structures importantes

Sur la signature $\{\{0, s, +, \times\}, \{=, \leq\}\}$.

Domaine	fonc.	rel.	Nom de la structure
$\mathbb{N}$	$0, s, +, \times$	$=, \leq$	Arithmétique de Péano
$\mathbb{N}$	$0, s, +$	$=, \leq$	Arithmétique de Presburger
$\mathbb{R}$	$0, s, +, \times$	$=, \leq$	Théorie des réels
$\mathbb{R}$	$0, s, +$	$=, \leq$	Théorie additive des réels

Interprétation des variables libres

On se donne un moyen de savoir à quel élément du domaine une variable correspond.

Définition

Une valuation dans une structure $\mathcal{M}$ est une fonction $\nu : X \to D_{\mathcal{M}}$ qui associe chaque variable à un élément du domaine.

On note $Val_{\mathcal{M}}$ (ou plus simplement Val) l'ensemble des valuations dans $\mathcal{M}$.

Pour $\nu \in Val$, $x \in X$ et $d \in D_{\mathcal{M}}$, on définit :

$$\nu[x := d](y) = \begin{cases} d & \text{si } y = x \\ \nu(y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, $\nu[x := d]$ est comme ν sauf pour la variable x qui maintenant est associée à d.

Valeur d'une formule

On se fixe un langage $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ et un ensemble de variables X pour écrire des formules.
On se fixe aussi une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$, et $\nu \in Val_{\mathcal{M}}$ une valuation pour les variables de X.

Pour savoir ce que vaut la formule $\exists x(P(f(x), y) \vee Q(g(x, y)))$ dans $\mathcal{M}$, il faut savoir

1. ce que vallent les termes $f(x)$, y, et $g(x, y)$
2. ce que vallent les formules atomiques $P(f(x), y)$ et $Q(g(x, y))$, dont on déduira ce que vaut $P(f(x), y) \vee Q(g(x, y))$
3. et enfin, ce que vaut $\exists x(P(f(x), y) \vee Q(g(x, y)))$

Valeur d'un terme

On a fixé un langage $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ et un ensemble de variables X, une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$, et $\nu \in Val_{\mathcal{M}}$ une valuation pour les variables de X.

Définition

Soit $t \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}^{X}$, sa valeur dans $\mathcal{M}$ pour la valuation ν est un élément du domaine $D_{\mathcal{M}}$, noté $[\![t]\!]_{\mathcal{M},\nu}$, et défini par induction sur t :

1. si $t = x$ est une variable, alors $[\![t]\!]_{\mathcal{M},\nu} = [\![x]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \nu(x)$
2. sinon $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, et alors
   $[\![t]\!]_{\mathcal{M},\nu} = [\![f(t_1, t_2, \ldots, t_n)]\!]_{\mathcal{M},\nu} = f^{\mathcal{M}}([\![t_1]\!]_{\mathcal{M},\nu}, [\![t_2]\!]_{\mathcal{M},\nu}, \ldots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},\nu})$

Remarque

Le cas d'une constante c est un cas particulier de 2. pour un symbole d'arité 0 :

$$[\![c]\!]_{\mathcal{M},\nu} = c^{\mathcal{M}} \in D_{\mathcal{M}}$$

Valeur d'une formule atomique (de la forme $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$)

On a fixé un langage $\mathcal{S} = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ et un ensemble de variables X, une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$, et $\nu \in Val_{\mathcal{M}}$ une valuation pour les variables de X.

Définition

La valeur de $r(t_1, t_2, \dots, t_n)$ dans $\mathcal{M}$ pour ν, notée $[\![r(t_1, t_2, \dots, t_n)]\!]_{\mathcal{M},\nu}$, est dans $\{\mathtt{faux}, \mathtt{vrai}\}$ et est donnée par :

$$[\![r(t_1, t_2, \dots, t_n)]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai} \text{ ssi } ([\![t_1]\!]_{\mathcal{M},\nu}, [\![t_2]\!]_{\mathcal{M},\nu}, \dots, [\![t_n]\!]_{\mathcal{M},\nu}) \in r^{\mathcal{M}}$$

Exemple

Considérons la formule atomique $P(f(x), y)$ que l'on évaluer dans la structure $\mathcal{N}$ de domaine les entiers naturels $\boldsymbol{N}$, et pour laquelle $f^{\mathcal{N}}(n) = n + 1$ et $P^{\mathcal{N}}$ est la relation $\geq$, et pour la valuation ν définie par $[x := 42, y := 3, z := \dots]$.
Par définition pour les formules atomiques, $[\![P(f(x), y)]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$ dès lors que $(\nu(f(x)), \nu(y)) \in P^{\mathcal{N}}$, ce qui se lit $42 + 1 \geq 3$ qui est bien vraie.

Exercice

Trouver une structure $\mathcal{M}$ et une valuation ν pour lesquelle $[\![P(f(x), y)]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{faux}$.

Valeur d'une formule

Maintenant que l'on connaît les valeurs des formules atomiques, on peut définir les valeurs de formules plus complexes.

Définition

Soit $\varphi \in FO$ une formule non atomique. La valeur de φ dans $\mathcal{M}$ pour la valuation ν, notée $[\![\,\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu}$, est dans $\{\mathtt{faux}, \mathtt{vrai}\}$ et est définie par (induction) :

- $[\![\,\varphi \wedge \psi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$ ssi $[\![\,\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$ et $[\![\,\psi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$
- $[\![\,\varphi \vee \psi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$ ssi $[\![\,\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$ ou $[\![\,\psi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$
- $[\![\,\neg\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$ ssi $[\![\,\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{faux}$
- $[\![\,\varphi \to \psi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{faux}$ ssi $[\![\,\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$ et $[\![\,\psi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{faux}$
- $[\![\,\exists x\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$ ssi il existe $d \in D_{\mathcal{M}}$ tel que $[\![\,\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu[x:=d]} = \mathtt{vrai}$
- $[\![\,\forall x\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$ ssi pour tout $d \in D_{\mathcal{M}}$, $[\![\,\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu[x:=d]} = \mathtt{vrai}$

Lorsque $[\![\,\varphi\,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \mathtt{vrai}$, on dit que "$\varphi$ est vraie ...", et on note $\mathcal{M}, \nu \models \varphi$.

Prenons un peu de temps pour ...

Définition

Soit $\varphi \in FO$ une formule non atomique. La valeur de φ dans $\mathcal{M}$ pour la valuation ν, notée $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu}$, est dans $\{\texttt{faux}, \texttt{vrai}\}$ et est définie par (induction) :

$\vdots$

- $[\![\, \exists x \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \texttt{vrai}$ ssi il existe $d \in D_{\mathcal{M}}$ tel que $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu[x:=d]} = \texttt{vrai}$
- $[\![\, \forall x \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \texttt{vrai}$ ssi pour tout $d \in D_{\mathcal{M}}$, $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu[x:=d]} = \texttt{vrai}$

Des exemples au tableau ...

Remarques

- $[\![\, \exists x \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \texttt{vrai}$ ssi il existe $d \in D_{\mathcal{M}}$ tel que $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu[x:=d]} = \texttt{vrai}$
- $[\![\, \forall x \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu} = \texttt{vrai}$ ssi pour tout $d \in D_{\mathcal{M}}$, $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu[x:=d]} = \texttt{vrai}$

Remarque

On a vu que les valeurs $[\![\, \exists x \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu}$ et $[\![\, \forall x \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu}$ sont indépendantes de $\nu(x)$.

Plus généralement, les valeurs $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu}$ et $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu}$ ne dépendent pas des valuations des variables $x \in BV(\varphi)$ (variables liées), mais de celles de variables libres.

Remarque

Lorsque φ est une formule close (*i.e.*, pas de variables libres), sa valeur $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M},\nu}$ ne dépend pas de la valuation ν.

Lorsque φ est close, on note $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M}}$ sa valeur dans $\mathcal{M}$, et on écrit $\mathcal{M} \models \varphi$ lorsque $[\![\, \varphi \,]\!]_{\mathcal{M}} = \texttt{vrai}$.

La notion pertinente est celle de **formule close**, les formules non closes ne servent qu'à donner la sémantique.

Exemple d'application de la sémantique : Ordre des quantificateurs

Avec notre sémantique des formules, on peut montrer que l'ordre dans lequel sont écrits certains quantificateurs est important : par exemple, les formules $\forall y \exists x P(x, y)$ et $\exists x \forall y P(x, y)$ ne signifient pas la même chose puisqu'il existe une structure dans laquelle $\forall y \exists x P(x, y)$ est vraie, mais $\exists x \forall y P(x, y)$ est fausse.

On choisit la structure des entiers ordonnées $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, \geq)$, dans laquelle P s'interprète comme $\geq$.

$[\![\forall y \exists x P(x, y)]\!]_{[\mathcal{N}]} = \mathtt{vrai}$
ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[\![\exists x P(x, y)]\!]_{\mathcal{N},[y:=n]} = \mathtt{vrai}$
ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$, $[\![P(x, y)]\!]_{\mathcal{N},[y:=n,x:=m]} = \mathtt{vrai}$
ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$, $([\![x]\!]_{\mathcal{N},[y:=n,x:=m]}, [\![y]\!]_{\mathcal{N},[y:=n,x:=m]}) \in P^{\mathcal{N}}$
ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$
c'est VRAI !

$[\![\exists x \forall y P(x, y)]\!]_{[\mathcal{N}]} = \mathtt{vrai}$
ssi il existe $m \in \mathbb{N}$ t.q, $[\![\forall y P(x, y)]\!]_{\mathcal{N},[x:=m]} = \mathtt{vrai}$
ssi il existe $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[\![P(x, y)]\!]_{\mathcal{N},[x:=m,y:=n]} = \mathtt{vrai}$
ssi il existe $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $([\![x]\!]_{\mathcal{N},[x:=m,y:=n]}, [\![y]\!]_{\mathcal{N},[x:=m,y:=n]}) \in P^{\mathcal{N}}$
ssi il existe $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$
c'est FAUX !

Notions sémantiques

Comme pour le calcul propositionnel, on définit les notions de :

- modèles d'une formule close
- thérorème
- validité/satisfaisabilité
- conséquence logique
- équivalence
- etc.

Modèles, théorèmes, et tout et tout ...

Soit $\mathcal{S}$ un langage du premier ordre.

Définition

Soit $\mathcal{M}$ une $\mathcal{S}$-structure.

- Soit $\varphi \in FO$ une formule close sur $\mathcal{S}$.
  La structure $\mathcal{M}$ est un modèle de φ si $\mathcal{M} \models \varphi$ (c-à-d. $[\![\, \varphi \,]\!]_{=}\texttt{vrai}$).
- Soit $\Gamma \in FO$ un ensemble de formules closes sur $\mathcal{S}$.
  La structure $\mathcal{M}$ est un modèle de Γ si $\mathcal{M} \models \varphi$, pour tout $\varphi \in \Gamma$.

Définition

- Une formule close $\varphi \in FO$ est insatisfaisable si elle n'a pas de modèle, sinon elle est satisfaisable.
- Une formule close $\varphi \in FO$ sur $\mathcal{S}$ est valide (ou une tautologie), noté $\models \varphi$, si $\mathcal{M} \models \varphi$, pour toute $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$.

Définition

Deux formules closes φ et ψ de FO sont dites équivalentes (noté $\varphi \equiv \psi$) si pour toute $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$, on a $\mathcal{M} \models \varphi$ ssi $\mathcal{M} \models \psi$.

Equivalences classiques (1/2)

- Loi de conversion des quantificateurs

$$\begin{array}{rcl} \neg\forall x\varphi & \equiv & \exists x\neg\varphi \\ \neg\exists x\varphi & \equiv & \forall x\neg\varphi \end{array}$$

- Loi de distribution des quantificateurs

$$\begin{array}{rcl} \forall x(\varphi \wedge \psi) & \equiv & (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi) \\ \exists x(\varphi \vee \psi) & \equiv & (\exists x\varphi \vee \exists x\psi) \end{array}$$

- Lois de permutation des quantificateurs de même sorte

$$\begin{array}{rcl} \forall x\forall y\varphi & \equiv & \forall y\forall x\varphi \\ \exists x\exists y\varphi & \equiv & \exists y\exists x\varphi \end{array}$$

Exercice

Utiliser la sémantique de $\equiv$ et celle des formules pour démontrer ces équivalences.

Equivalences classiques (2/2)

- Lois de réalphabétisation (renommage) des variables. On peut toujours renommer une variable liée et la variable du quantificateur au sein d'une formule. Cependant, le nouveau nom ne doit pas être un nom déjà utilisé pour une variable libre ou liée de la formule.

Exemple

Dans $\exists x(\forall x F(x,y) \rightarrow (G(x) \vee q))$, on peut opérer deux renommages : $\exists z(\forall t F(t,y) \rightarrow (G(z) \vee q))$

- Lois de passage : si $x \notin FV(\psi)$,

$$
\begin{array}{lcl}
\forall x(\varphi \wedge \psi) & \equiv & (\forall x\varphi) \wedge \psi \\
\exists x(\varphi \wedge \psi) & \equiv & (\exists x\varphi) \wedge \psi \\
\forall x(\varphi \vee \psi) & \equiv & (\forall x\varphi) \vee \psi \\
\exists x(\varphi \vee \psi) & \equiv & (\exists x\varphi) \vee \psi \\
\forall x(\varphi \rightarrow \psi) & \equiv & (\exists x\varphi) \rightarrow \psi \\
\exists x(\varphi \rightarrow \psi) & \equiv & (\forall x\varphi) \rightarrow \psi \\
\forall x(\psi \rightarrow \varphi) & \equiv & \psi \rightarrow (\forall x\varphi) \\
\exists x(\psi \rightarrow \varphi) & \equiv & \psi \rightarrow (\exists x\varphi)
\end{array}
$$

Conséquence logique

Définition

Une formule close φ est **conséquence logique** d'un ensemble de formules closes Γ si tout modèle de Γ est un modèle de φ. On écrit alors $\Gamma \models \varphi$.
Une **théorie** est l'ensemble des conséquences logiques d'un ensemble de formules closes.

Exemple

La **théorie des groupes** est l'ensemble des conséquences logiques de l'ensemble de formules suivantes, appelées **axiomes de la théorie des groupes** :

Associativité	$\forall x \forall y \forall z[(x * y) * z = x * (y * z)]$	(Ass)
Élément neutre	$\forall x[(x * e = x) \wedge (e * x = x)]$	(EN)
Inverse	$\forall x[(x * i(x) = e) \wedge (i(x) * x = e)]$	(Inv)

Par exemple,

$$\{Ass, EN, Inv\} \models \forall x \forall y[(x * y = e) \rightarrow (y = i(x))]$$

qui exprime que l'inverse à droite de tout élément est unique.

Formes normales

Toute formule est équivalente à une formule sous :

1. forme prénexe : elle consiste à renvoyer tous les quantificateurs au début de la formule.
2. forme de Skolem : forme prénexe et que des quantifications universelles.
3. forme clausale : forme de Skolem et sous forme normale confonctive

On ne verra sans doute que la forme prénexe.

Formes prénexes

Définition

Une formule φ est sous forme prénexe lorsqu'elle a la forme : $\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, où chaque $\mathcal{Q}_i$ est un quantificateur (existentiel ou universel).
La partie $\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \ldots \mathcal{Q}_n$ est appelée préfixe et ψ est la matrice (elle ne contient aucun quantificateur).

Proposition

Toute formule admet une forme prénexe équivalente.

Preuve On conidère l'algorithme suivant :

1. Renommer les variables de façon à ce qu'aucune variable n'ait à la fois une occurrence libre et une occurrence liée, ni d'occurrence liée à des quantificateurs différents.
2. Appliquer tant que possible les substitutions suivantes : substitution du membre droit par le membre gauche pour toutes les lois de conversion des quantificateurs et les lois de passage.

Ces transformations successives préservent la sémantique des formules. Finir l'argument (exercice).

Formes prénexes

Définition

Une formule φ est sous forme prénexe lorsqu'elle a la forme : $\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \dots \mathcal{Q}_n x_n \psi$, où chaque $\mathcal{Q}_i$ est un quantificateur (existentiel ou universel).

La partie $\mathcal{Q}_1 x_1 \mathcal{Q}_2 x_2 \dots \mathcal{Q}_n$ est appelée préfixe et ψ est la matrice (elle ne contient aucun quantificateur).

Proposition

Toute formule admet une forme prénexe équivalente.

Exemple

La forme prénexe de $\exists x \forall y p(x,y) \rightarrow \forall x \exists y p(y,x)$ est

$$\exists y' \forall x' \exists x \forall y p(x,y) \rightarrow p(y',x')$$

.

Formes de Skolem : intuition

- Soit $\varphi = \exists x \psi$ close un langage $\mathcal{S}$. Une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ est un modele de φ ssi il existe $d \in D_{\mathcal{M}}$ tel que $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M},[x:=d]}$.

  Considérons maintenant le langage $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{c(0)\}$ où c est un nouveau symbole de constante. La $\mathcal{S}'$-structure $\mathcal{M}'$ qui est comme $\mathcal{M}$ avec en plus $c^{\mathcal{M}'} = d$ est clairement un modèle de $\psi_{\{x \mapsto c\}}$.

  Plus généralement, $\exists x \psi$ a un modèle ssi $\psi_{\{x \mapsto c\}}$ a un modèle.

- Considérons maintenant la formule $\varphi = \forall y \exists x \psi$ écrite sur un langage $\mathcal{S}$. Une $\mathcal{S}$-structure $\mathcal{M}$ est un modele de φ ssi pour chaque $e \in D_{\mathcal{M}}$ il existe $d \in D_{\mathcal{M}}$ tel que $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M},[y:=e,x:=d]}$ ssi il existe une fonction $f : D_{\mathcal{M}} \to D_{\mathcal{M}}$ telle que pour chaque $e \in D_{\mathcal{M}}$, $[\![\psi]\!]_{\mathcal{M},[x:=f(e)]}$.

  Donc φ admet un modèle ssi $\forall y \psi_{\{x \mapsto f(y)\}}$ admet un modèle.

On généralise principe pour mettre une formule sous forme de Skolem.

Règle de Skolémisation

Définition

$$\frac{\forall x_1 \ldots x_n \exists y \varphi}{\forall x_1 \ldots x_n \varphi_{\{y \mapsto f(x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_m)\}}} \ (SK)$$

avec

- f un nouveau symbole de fonction, dit de Skolem
- $\{z_1, \ldots z_m\} = FV(\forall x_1 \ldots x_n \exists y \varphi)$ (variables libres)

Une formule universelle obtenue par application itérée de la règle (SK) est appelée forme de Skolem ou skolémisée de φ.

Exemple

La skolémisation pour de $\exists x \forall y \forall x' \exists y' p(x, y) \rightarrow p(y', x')$ donne

$$\cfrac{\cfrac{\exists x \forall y \forall x' \exists y' p(x, y) \rightarrow p(y', x')}{\forall y \forall x' \exists y' p(c, y) \rightarrow p(y', x')} \ (SK)}{\forall y \forall x' p(c, y) \rightarrow p(f(y, x'), x')} \ (SK)$$

Forme de Skolem

Exemple

La skolémisation de $\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \exists x_6 p(x1, x2, x3, x4, x5, x6)$ donne

$$\frac{\frac{\frac{\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \exists x_6 p(x1, x2, x3, x4, x5, x6)}{\forall x_2 \forall x_3 \exists x_4 \exists x_6 p(c, x2, x3, x4, x5, x6)}}{\forall x_2 \forall x_3 \exists x_6 p(c, x2, x3, f(x_2, x_3), x5, x_6)}}{\forall x_2 \forall x_3 p(c, x2, x3, f(x_2, x_3), x5, g(x_2, x_3 x_5))}$$

Proposition

Si φ_s est obtenue par skolémisation à partir de φ alors

$$\varphi_s \text{ est satisfaisable ssi } \varphi \text{ est satisfaisable.}$$

Formes clausales

Définition

Une formule est sous forme clausale si elle est sous forme standard de Skolem et si sa matrice est sous forme normale conjonctive.

Losqu'une formule est sous forme clausale, on peut ensuite la décomposer en appliquant la règle $\forall x(\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)$

Théorème

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de clauses résultant de la mise sous forme clausale d'une formule φ. Alors φ est insatisfiable ssi $\mathcal{C}$ est insatisfiable.

Remarque

Ce théorème forme la base de nombreux démonstrateurs automatiques utilisant une représentation des formules sous forme de clauses. Il établit que la recherche de l'insatisfiabilité d'une formule φ est équivalente à la recherche d'insatisfiabilité de sa représentation sous forme clausale $\mathcal{C}$.

Cependant φ et $\mathcal{C}$ ne sont pas logiquement équivalentes, seule la satisfiabilité est préservée.

Complétude

On peut donner un nombre fini de principes/systèmes de preuve, c-à-d.

- des axiomes logiques ou schémas d'axiomes logiques : formules (ou schéma de formules) considérés comme vraies
- des règles de déduction : mécanisme syntaxique qui permet de déduire des formules à partir d'autres formules

qui suffisent pour déduire de façon mécanique tous les théorèmes (c-à-d. les formules valides) du langage du premier ordre.

Théorème (de Gödel)

Le calcul des prédicat est complet.

Il existe différents systèmes de preuves corrects (tout ce qu'on infère est vrai) et complet (il existe une preuve de toute formule vraie dans le système de preuve) pour les langages du premier ordre.

Exemple (systèmes de preuve)

- la déduction naturelle
- la résolution
- le calcul des séquents

Décidabilité (1/3)

Bien qu'il existe un système de preuve correct et complet, le calcul des prédicats n'est pas décidable.
Si par exemple on considère le calcul des séquents, on ne va pas pouvoir déterminer qu'une formule n'est pas valide, i.e., qu'il n'en existe pas de preuve, car il y a un nombre non borné d'explorations possibles.

Théorème

La logique du premier ordre n'est pas décidable, mais elle est semi-décidable.

Remarque

Une preuve est un objet fini, et tous ces objets sont dénombrables. On peut donc **énumérer les preuves** (d'un système de preuve donné), et donc tous les théorèmes.
C'est en ce sens que le calcul des prédicats est semi-décidable.

Décidabilité (1/3)

Théorème

La logique du premier ordre n'est pas décidable, mais elle est semi-décidable.

Remarque

Une preuve est un objet fini, et tous ces objets sont dénombrables. On peut donc **énumérer les preuves** (d'un système de preuve donné), et donc tous les théorèmes.
C'est en ce sens que le calcul des prédicats est semi-décidable.

- Si une formule φ est universellement valide, on sait qu'il en existe une preuve (les systèmes sont complets). Il suffit donc dans cette énumération de comparer avec chacun des théorèmes obtenu avec φ et on finira par trouver une preuve de φ.
- Cependant on ne sait pas donner une borne au temps nécessaire pour trouver une preuve de φ dans cette énumération de sorte qu'il n'existe pas de critère pour terminer ce calcul.

Décidabilité (2/3)

Il existe des fragments syntaxiques de la logique du premier ordre qui sont décidables.

Définition

La logique monadique du premier ordre (notée *MFO*) est l'ensemble des formules contenant exclusivement des prédicats unaires (et possiblement l'égalité $=$), mais ne contenant aucun symbole de fonction (en particulier des constantes).

Proposition

MFO est décidable.

Preuve On utilise une technique classique dite de propriété du modèle fini : on montre que si φ est satisfaisable, alors elle admet un modèle de taille fini (fonction de $|\varphi|$, la taille de φ).

Décidabilité (3/3)

Définition

On considère les fragments suivants du calcul des prédicats :

- Bernays-Schönfinkel : $\exists x_1 \dots \exists x_m \forall y_1 \dots \forall y_n . \varphi$ avec $\varphi \in MFO$
- Ackermann : $\exists x_1 \dots \exists x_m \forall y \exists z_1 \dots \forall z_n . \varphi$
- Gödel-Kalmar-Schütte: $\exists x_1 \dots \exists x_m \forall y_1 \forall y_2 \exists z_1 \dots \forall z_n . \varphi$
- $\forall x \exists y \forall z$-Horn : $\forall x \exists y \forall z \varphi$ avec $\varphi = \bigwedge_i h_i$ où h_i est une clause de Horn.
- ...

Proposition

Tous ces fragments sont décidables.