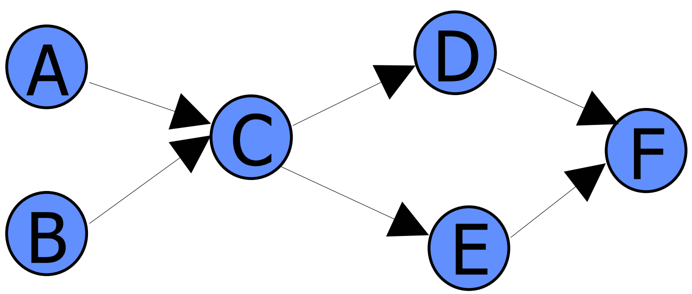
Réseaux Bayésiens

Modèles étendus

Philippe Leray
Philippe.Leray@insa-rouen.fr

INSA Rouen – Département ASI – Laboratoire PSI (FRE CNRS 2645)



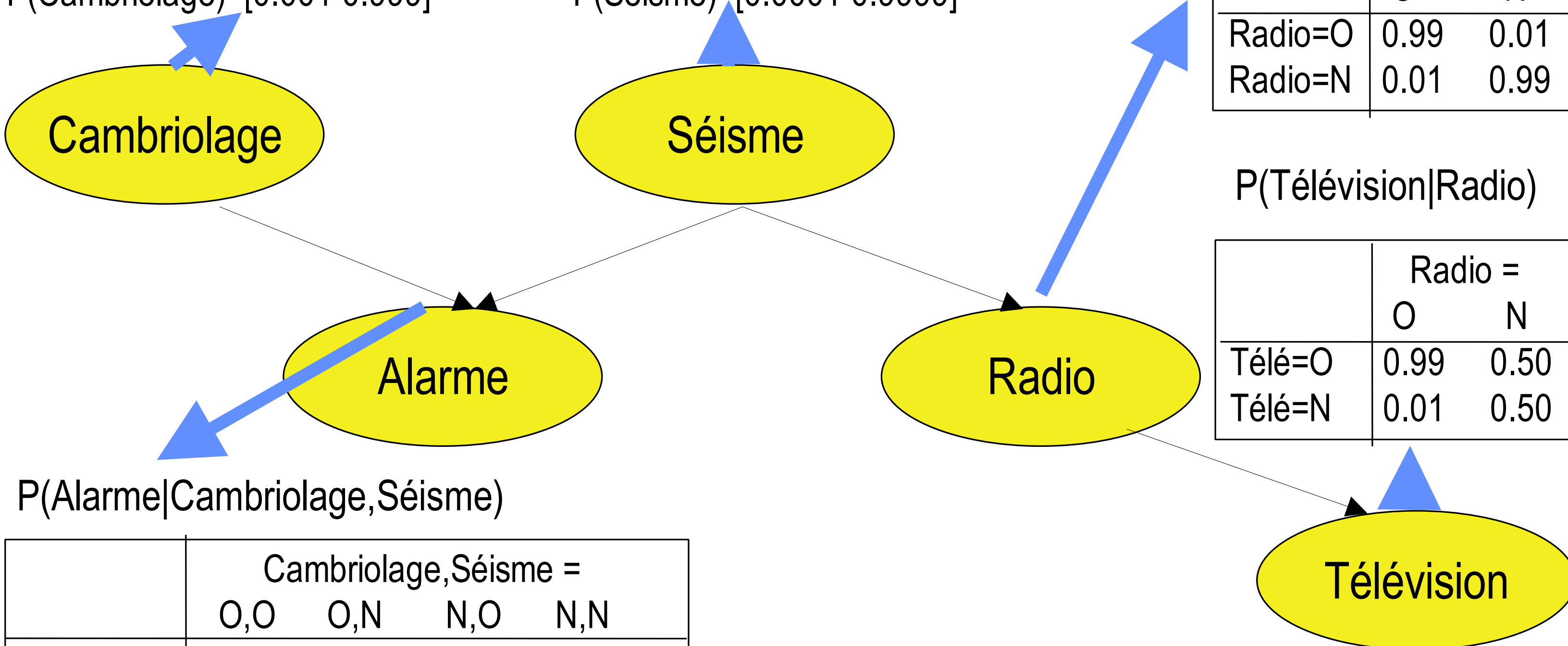
Architecture des Systèmes d'Information

Réseau Bayésien

- Réseau bayésien =
  - des variables
  - un graphe entre ces variables
  - des probabilités conditionnelles

P(Cambriolage)=[0.001 0.999]

P(Séisme)=[0.0001 0.9999]



P(Radio|Séisme)

	Séisme = O	N
Radio=O	0.99	0.01
Radio=N	0.01	0.99

P(Télévision|Radio)

	Radio = O	N
Télé=O	0.99	0.50
Télé=N	0.01	0.50

P(Alarme|Cambriolage,Séisme)

	Cambriolage,Séisme = O,O	O,N	N,O	N,N
Alarme=O	0.75	0.10	0.99	0.10
Alarme=N	0.25	0.90	0.01	0.90

Plan

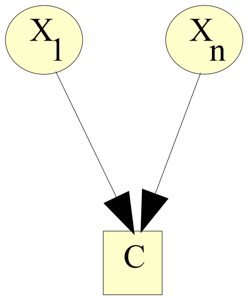
- Définition
- Algorithmes d'inférence
  - Bucket Elimination
  - Message Passing (Pearl)
  - Junction Tree (Jensen)
- Applications et Offre logicielle

- Apprentissage
  - des paramètres
  - de la structure

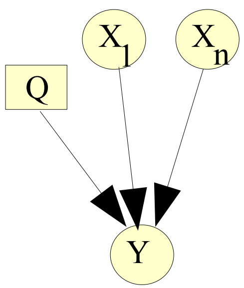
- Modèles étendus
  - variables continues : CG, MTE, ...
  - problèmes temporels : modèles dynamiques
  - théorie de la décision : diagrammes d'influence

Variables continues ?

- Comment modéliser les densités de probabilité ?



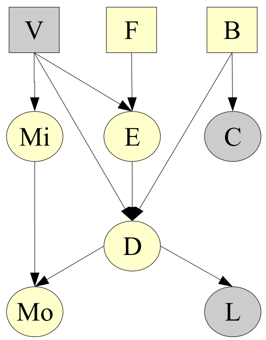
- softmax : $P(C = i|X = x) = \frac{e^{W_i x + b_i}}{\sum_j e^{W_j x + b_j}}$
- modèles plus complexes (MLP, ...)



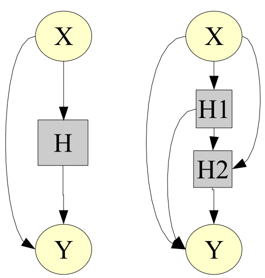
- gaussienne
  - $Y|Q = i \sim N(\mu_i, \Sigma_i)$
  - $Y|X = x \sim N(\mu + Wx, \Sigma)$
  - $Y|X = x, Q = i \sim N(\mu_i + W_i x, \Sigma_i)$
- mélange d'exponentielles tronquées (MTE)
  - approximation de n'importe quelle loi

Variables continues ?

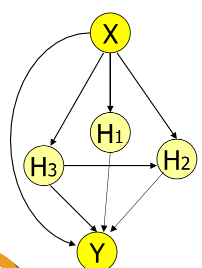
- Des RB "mixtes"



  - modèle gaussien conditionnel
    - discret $\longrightarrow$ gaussien,
    - gaussien $\longrightarrow$ gaussien
    - discret $\longrightarrow$ discret,
    - gaussien (observé) $\longrightarrow$ discret



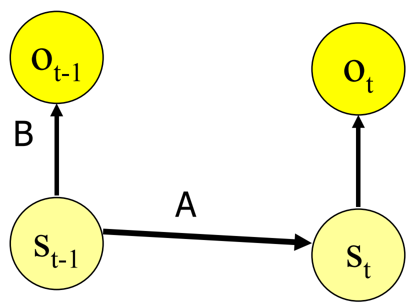
  - mélange (hiérarchique) d'experts
    - gaussien $\longrightarrow$ discret (softmax)
    - $P(Y|X=x) = \sum_i P(Y|X=x, H=i)P(H=i|X=x))$
    - $P(Y|X=x, H=i)$: réponse de l'expert n$^o i$
    - $P(H=i|X=x)$: poids de l'expert n$^o i$



  - arbre de décision

Extensions temporelles

- HMM = RB = modèle graphique

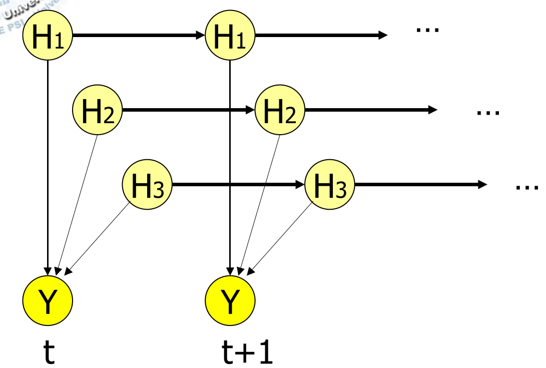


- $P(S_0)$ état initial de S,
- $P(O_t|S_t)$ indépendant de t
  = B (tables, gaussiennes, MLP)
- $P(S_t|S_{t-1})$ indépendant de t
  = A (matrice de transition)

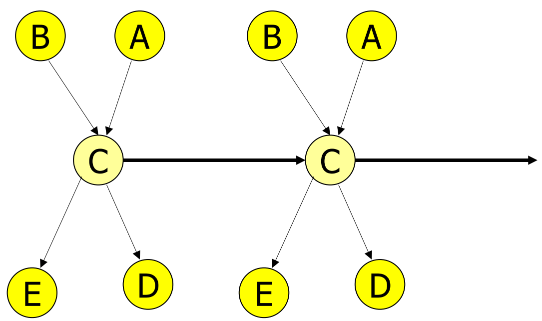
- Inférence : Forward-Backward $\approx$ Message Passing
- Explication : Viterbi $\approx$ Most Likely Explanation
- Apprentissage : Baum&Welch $\approx$ EM

Architecture des Systèmes d'Information

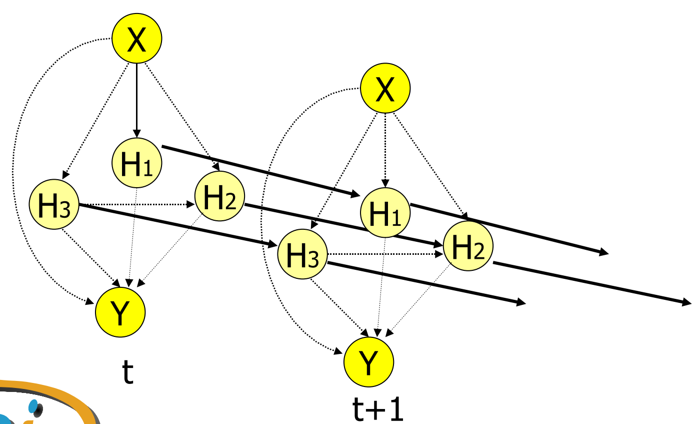
Extensions temporelles



- Factorial HMM



- Input Output HMM



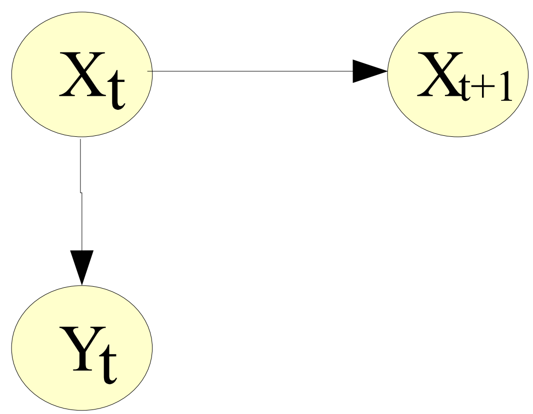
- Hidden Markov Decision Tree

Architecture des Systèmes d'Information

Extensions temporelles

- Filtrage de Kalman - Systèmes Linéaires Dynamiques
  - même topologie qu'un HMM,
  - mais avec X continu et non discret
  - $X(t+1) \mid X(t) \sim$ gaussienne linéaire
  - $Y(t) \mid X(t) \sim$ gaussienne linéaire

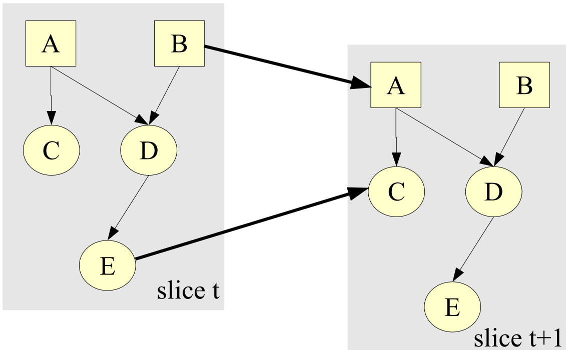
$$X(t+1) = A*X(t) + v(t)$$



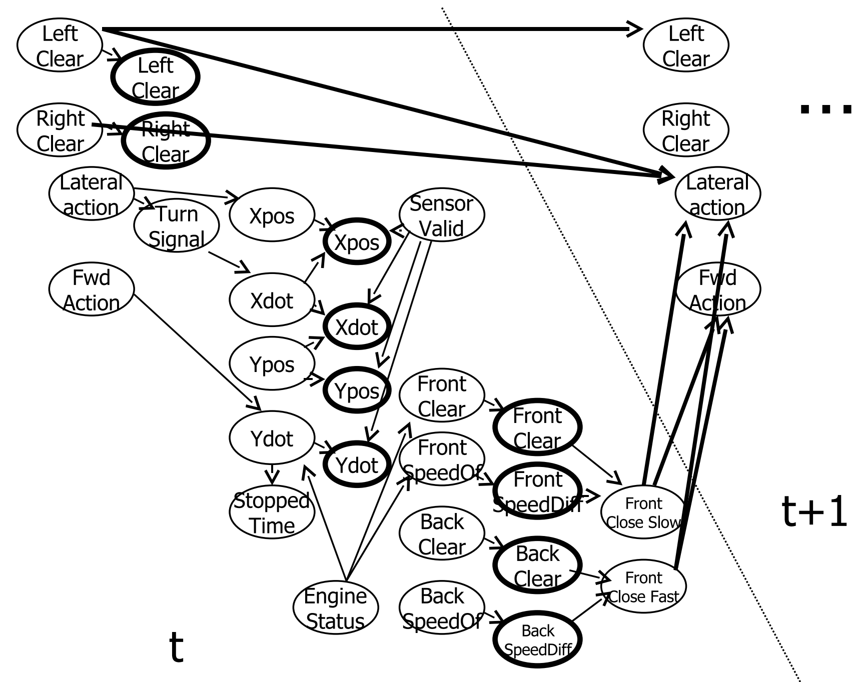
$$Y(t) = C*X(t) + w(t)$$

Extensions temporelles

- 2TBN = 2-time-slice bayesian network



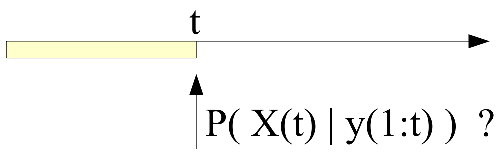
- généralisation des modèles précédents



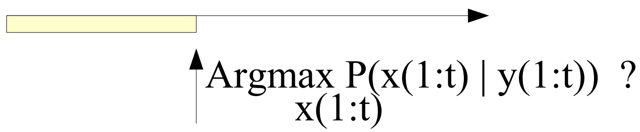
- une "tranche" pour $t = 0$
- une "tranche" pour t (= un graphe reliant les X_t)
- des relations entre t et $t+1$

Extensions temporelles

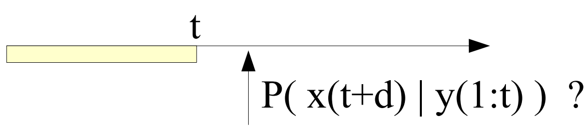
- Inférence dans les 2TBN



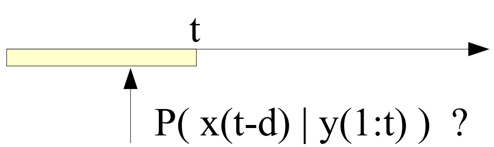
- Filtrage



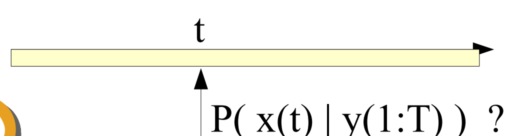
- Explication (Viterbi)



- Prédiction



- Lissage



- Lissage (off-line)

Extensions temporelles

- Inférence dans les 2TBN = NP difficile
  - Inférence exacte :
    - Forward-backward

      variables cachées discrètes,
      conversion du 2TBN en HMM, pratique si N_H petit

    - Unrolled junction tree

      dérouler le 2TBN sur T et appliquer algo "statique",
      pb = grandes cliques,
      besoin d'optimiser l'ordre d'élimination des variables

    - Frontier algorithm [Zweig 96]
    - Interface algorithm [Murphy 01]
    - Filtrage et lissage de Kalman [Minka 98]

Extensions temporelles

- Inférence dans les 2TBN = NP difficile
  - Inférence approchée :
    - algorithmes déterministes :
      – Boyen-Koller (BK) [Boyen & Koller 98]
      – Factored frontier (FF) [Murphy & Weiss 01]
      – Assumed Density Filter (ADF)
    - algorithmes stochastiques (échantillonage) :
      – importance sampling, MCMC (inférence offline)
      – Particle filtering (PF) (inférence online)

Architecture des Systèmes d'Information

Extension à la décision

Notion de décision

- Un enfant de 12 ans se présente aux urgences
  - il a mal au ventre depuis 8h
  - il a vomi une fois
  - il a mangé au restaurant récemment
  - pas de "passif" médical, ni de traitement en cours
  - premier examen : douleur abdominale diffuse, CBC moyenne
- Faut-il envoyer le garçon se faire opérer de l'appendicite ? le mettre en observation ? le laisser partir ?

Extension à la décision

- Un problème de décision a 3 composantes :
  - les valeurs (les "symptômes", les observables, ... à prendre en compte)
  - les actions (les choix proposés au décideur)
  - les conséquences

- Hypothèses :
  - les valeurs, options et conséquences sont données
  - le décideur peut ranger les conséquences par ordre de préférence : **fonction d'utilité**

Extension à la décision

- U fonction d'utilité, définie pour des conséquences
  - $U(c_1) > U(c_2)$ ssi le décideur préfère la conséquence c_1 à c_2
  - $U(c_1) = U(c_2)$ ssi le décideur n'a aucune préfèrence entre c_1 à c_2

- Exemple
  - Conséquence c = {réussir l'UV | rater l'UV}
  - $U(c_1) = 5$ crédits ECTS et $U(c_2) = 0$

- U n'a pas a être normalisée, et ne représente pas forcément une probabilité

Extension à la décision

- Comment modéliser le raisonnement ?
- Comment trouver la décision optimale ?

  - Arbre de décision
    - Prendre une décision sans probabilités :
      - Critère Maximax
      - Critère Maximin
      - Critère Minimax
      - Critère d'Hurwicz
      - Critère de Laplace
    - Prendre une décision avec probabilités :
      - Utilité Moyenne

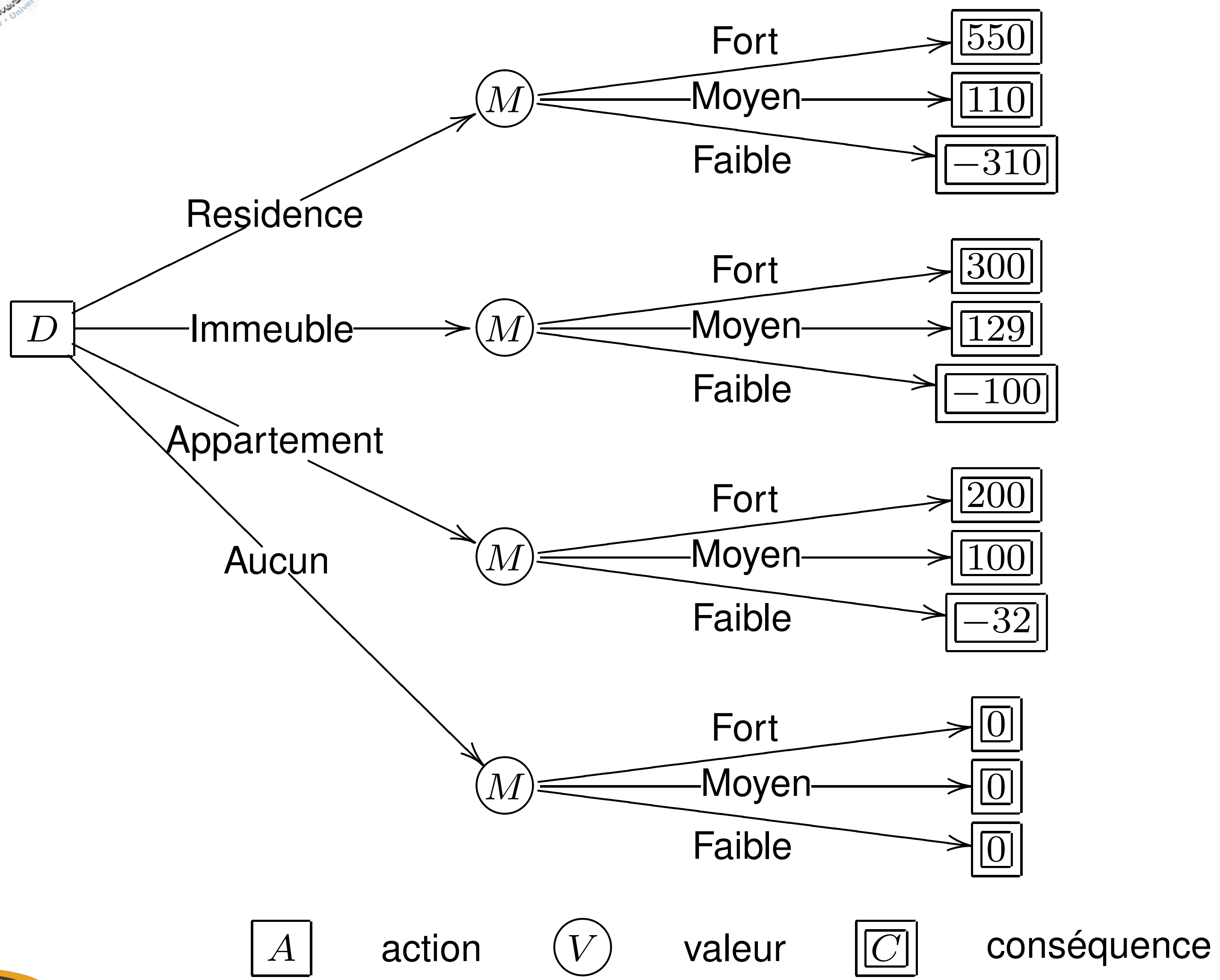
  - Diagramme d'influence

Exemple "immobilier"

- Investissement immobilier : faut-il investir dans
  - une résidence
  - un immeuble
  - un appartement
  - aucun investissement
- Cela va dépendre de l'état du marché immobilier :
  - Fort | Moyen | Faible
- Profit selon la décision et l'état du marché

	Fort	Moyen	Faible
Residence	550	110	-310
Immeuble	300	129	-100
Appartement	200	100	-32
Aucun	0	0	0

Arbre de décision

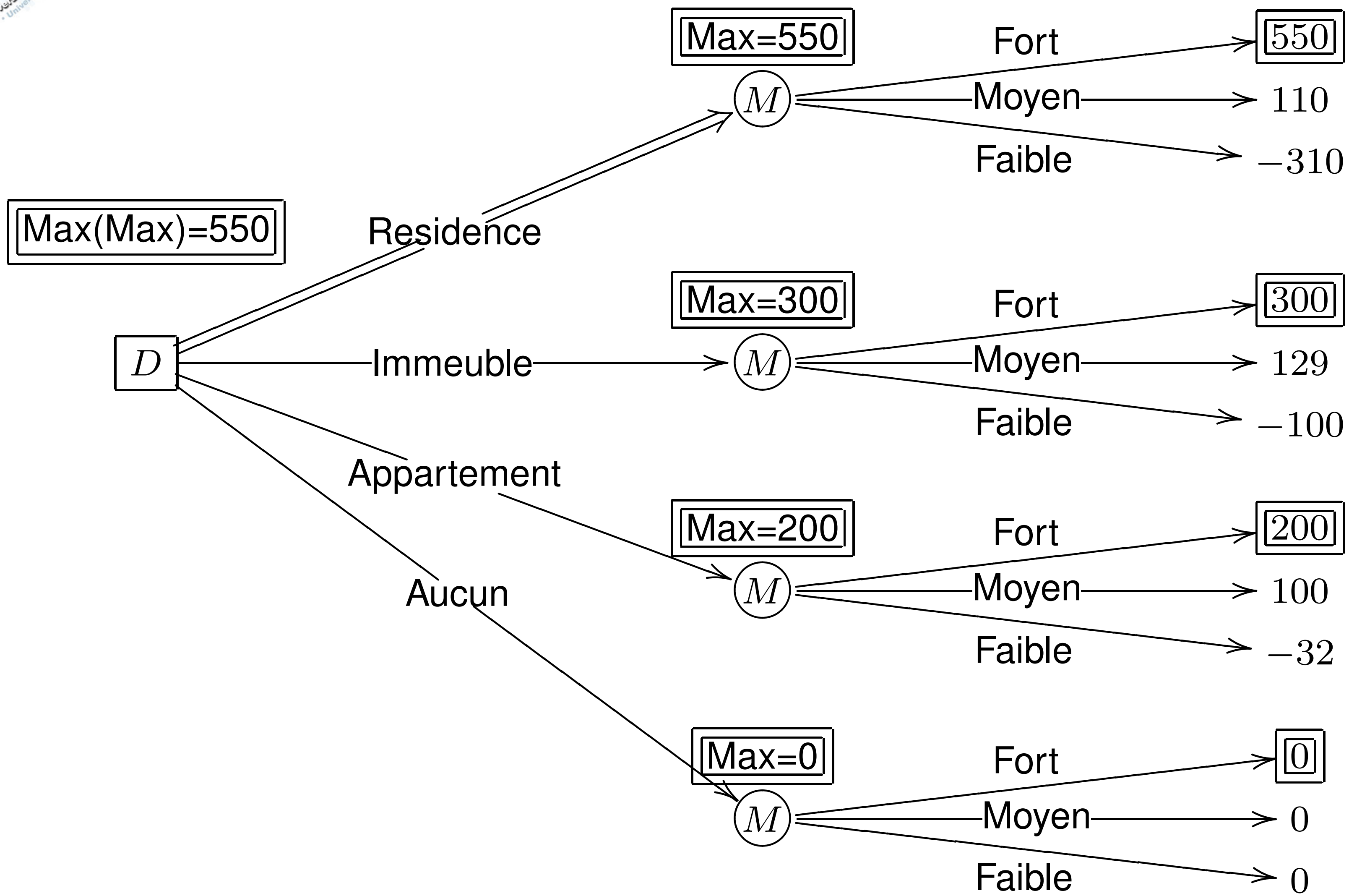


Critères de décision non probabilistes

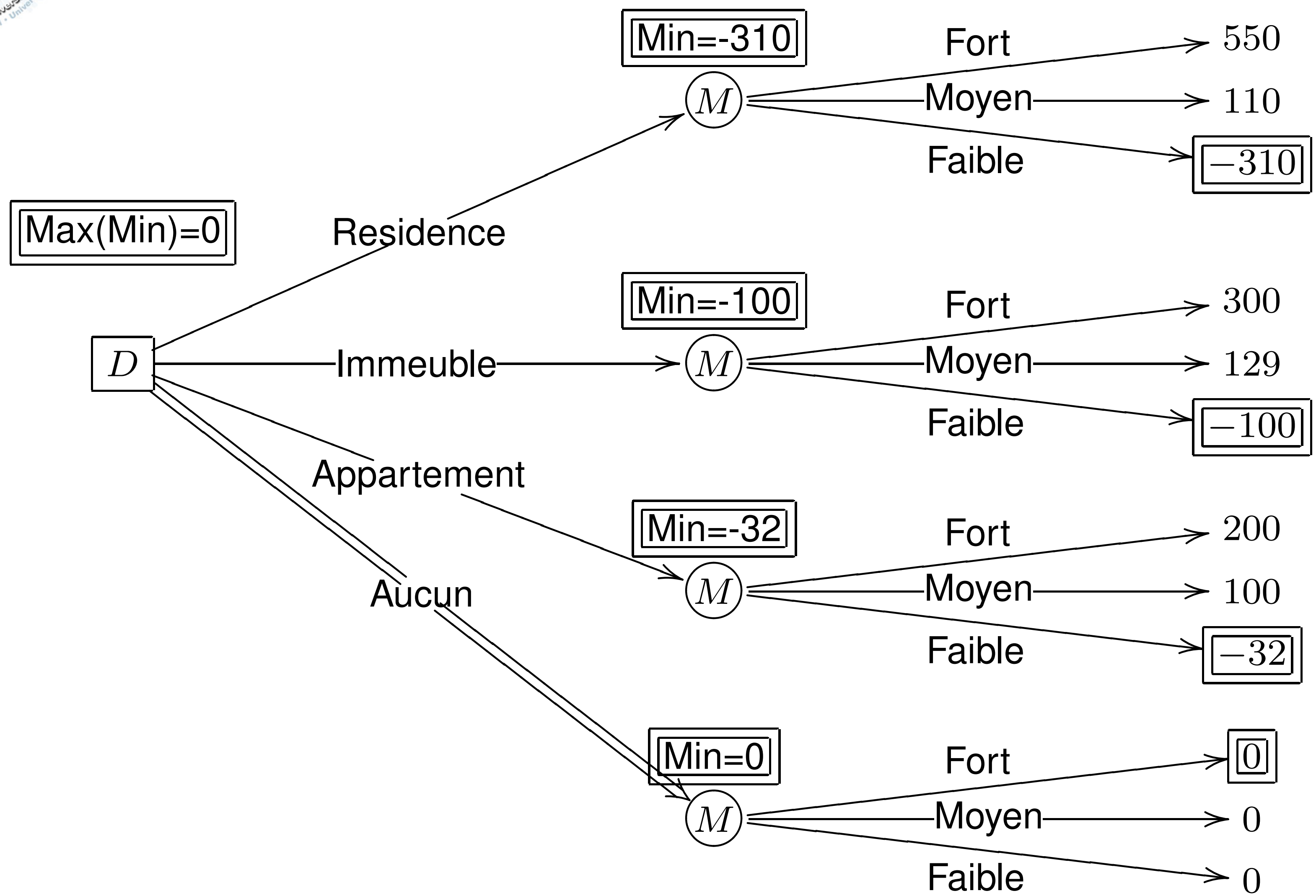
- Maximax
  - *Le critère du décideur optimiste*
  - on "redescend" l'utilité maximale de chaque "valeur"
  - on choisit la décision qui à la plus grande utilité maximale

- Maximin
  - *Le critère du décideur pessimiste*
  - on "redescend" l'utilité minimale de chaque "valeur"
  - on choisit la décision qui à la plus grande utilité minimale (la "moins pire")

Arbre de décision : maximax



Arbre de décision : maximin



Utilité moyenne

- Notion d'utilité moyenne (expected utility)
  - action a_1 est liée à la conséquence c par $P(c|a_1)$
  - action a_2 est liée à la conséquence c par $P(c|a_2)$
  - on préfèrera a_1 à a_2 si :

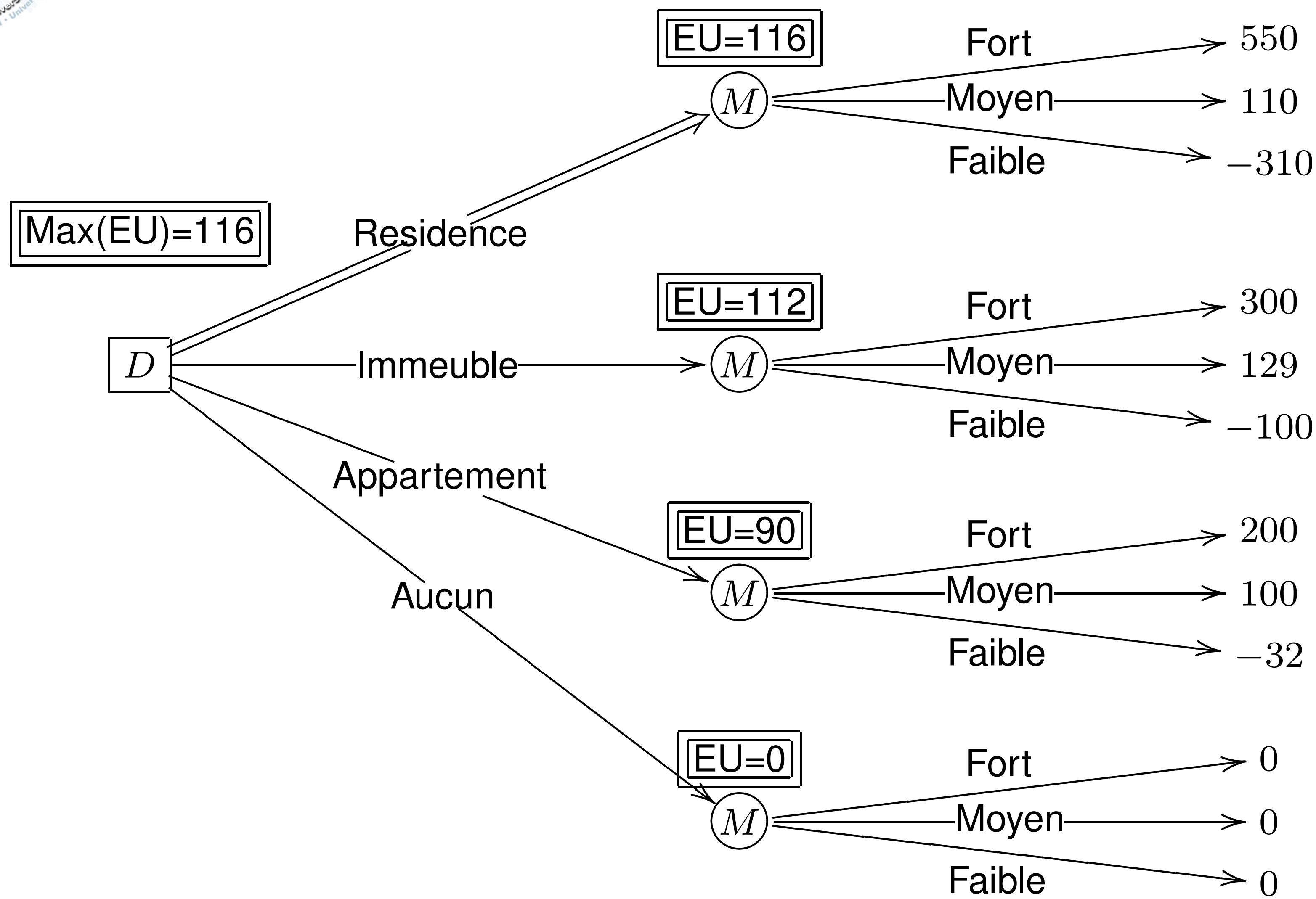
$$\sum_c U(c)P(c|a_1) > \sum_c U(c)P(c|a_1)$$

$$EU(a_i) > EU(a_2)$$

Décider = choisir l'action qui maximise l'utilité moyenne

Architecture des Systèmes d'Information

Arbre de décision : Utilité moyenne



P(Fort)=0.3 , P(Moyen)=0.4 et P(Faible)=0.3

Architecture des Systèmes d'Information

Arbre de décision

- Avantage de l'arbre de décision
  - Structure adaptée à la recherche de la solution optimale

- Inconvénients
  - La taille de l'arbre devient vite énorme !
  - Comment représenter des connaissances sur le domaine ?

$\Rightarrow$ Diagrammes d'influence

Exemple

- Exemple : Faut-il prendre son parapluie demain ?
  - $P(\text{Temps = Pluie}) = 0.3$
  - $P(\text{Prévision = Pluvieux}|\text{Temps = Pluie}) = 0.6$
  - $P(\text{Prévision = Nuageux}|\text{Temps = Pluie}) = 0.25$
  - $P(\text{Prévision = Soleil}|\text{Temps = Pluie}) = 0.15$
  - $P(\text{Prévision = Pluvieux}|\text{Temps = PasDePluie}) = 0.1$
  - $P(\text{Prévision = Nuageux}|\text{Temps = PasDePluie}) = 0.2$
  - $P(\text{Prévision = Soleil}|\text{Temps = PasDePluie}) = 0.7$
  - $U(\text{PasDePluie, Parapluie}) = 20$
  - $U(\text{PasDePluie, PasDeParapluie}) = 100$
  - $U(\text{Pluie, Parapluie}) = 70$
  - $U(\text{Pluie, PasDeParapluie}) = 0$

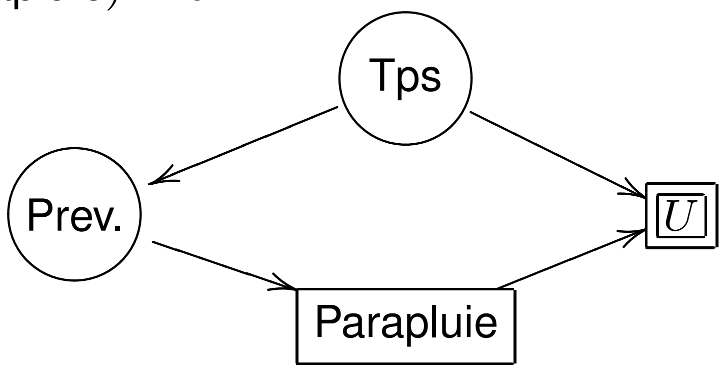


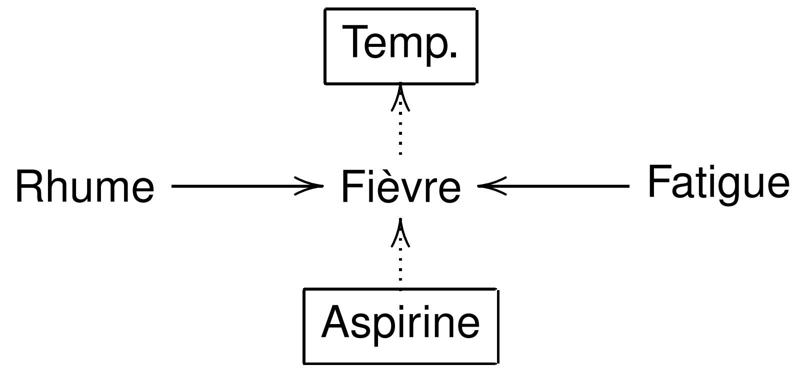
Diagramme d'Influence

- Utilisation du formalisme des réseaux bayésiens

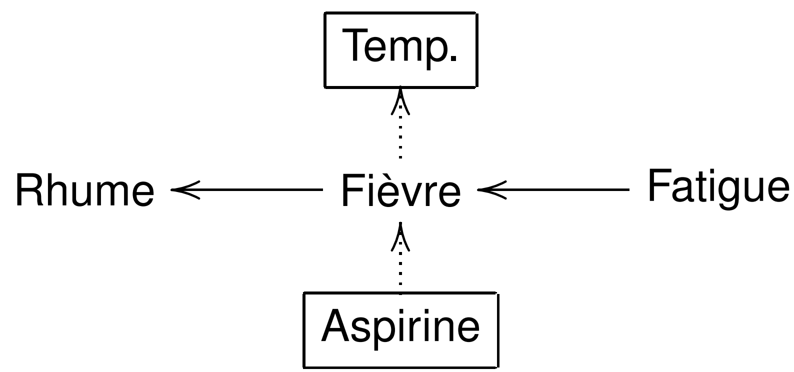
- Séparation des décisions en 2 familles
  - Les tests
  - Les actions
    - actions "non-intervenantes" (ex : Prendre Parapluie)
    - actions "intervenantes" : agit sur certaines variables

    - règle à suivre : l'impact d'une action "intervenante" peut uniquement suivre le sens des flèches

Action intervenante



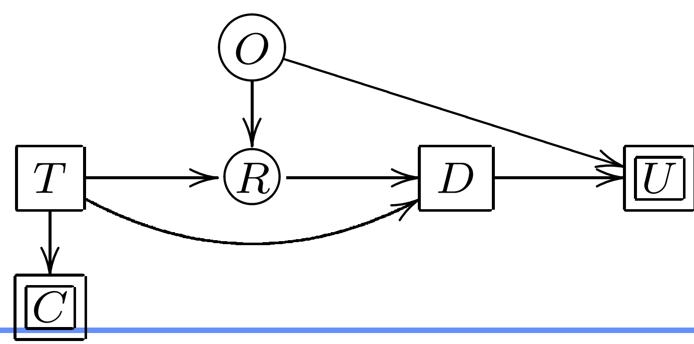
- Temp. est un test
- Aspirine est une action intervenante qui agit sur Fièvre
  ... mais pas sur Rhume ! ! !



- Aspirine agit sur Fièvre et sur Rhume !
- Les 2 RB encodent les mêmes probabilités

Oil Wildcatter

- Exemple Forage Pétrolier ("Oil Wildcatter")
  - Décisions
    - D = Faire un forage (70$) | Pas de forage
    - T = Sondage sismique = Oui (10$) | Non
  - Variables
    - O = Etat du puits = sec | humide | imbibé
    - R = Rés. sondage = grande | peu | aucune trace de pétrole
  - Utilités
    - C = Coût du test
    - U = Gain du forage



Oil Wildcatter (suite)

- Utilités
  - U(D,O)

	O=sec	0=hum.	O=imb.
D=Forage	-70	50	200
D=PasForage	0	0	0

  - C(T)

T=Oui	T=non
-10	0

- Probabilités
  - P(O)

O=sec	0=hum.	O=imb.
0.5	0.3	0.2

  - P(R|O,T=Non)= 1/3 $\forall$ R,O
  - P(R|O,T=Oui)

	O=sec	0=hum.	O=imb.
R = aucun	0.6	0.3	0.1
R = peu	0.3	0.4	0.4
R = grand	0.1	0.3	0.5

Oil Wildcatter (suite)

- Faut-il faire un forage ?

$$EU(\text{D=PasForage}) = 0$$

$$EU(\text{D=Forage}) = \sum_O U(\text{D=Forage,O})P(O)$$

$$EU(\text{D=Forage}) = 0.5 * -70 + 0.3 * 50 + 0.2 * 200 = +20$$

$$MEU(D|\text{T=Non}) = Max(0, +20) = +20$$

- Si l'on ne fait pas de test, la meilleure décision est de forer

Architecture des Systèmes d'Information

Oil Wildcatter (suite)

- Faut-il faire un sondage sismique ?

$$P(O|\text{R=auc.}) \;\alpha\; P(\text{R=auc.}|O)P(O) = [0.6\;0.3\;0.1]*[0.5\;0.3\;0.2]$$

$$P(O|\text{R=auc.}) \;\alpha\; [0.3\;0.09\;0.02]$$

$$P(O|\text{R=auc.}) = [0.3\;0.09\;0.02]/0.41 = [0.732\;0.22\;0.049]$$

$$EU(\text{D=For.}|\text{R=auc.}) = \sum_{O} U(\text{D=For.}, O)P(O|\text{R=auc.})$$

$$EU(\text{D=For.}|\text{R=auc.}) = -30.5$$

- et on continue pour toutes les valeurs de (D,R) pour obtenir la table EU(D|R, T=oui)

Oil Wildcatter (fin)

- Faut-il faire un sondage sismique ? (fin)

$$MEU(D|R, \text{T=oui}) = [87.5\ 32.9\ 0]$$

$$MEU(D|\text{T=oui}) = \sum_S MEU(D|S, \text{T=oui})P(R) - C(\text{T=oui})$$

$$MEU(D|\text{T=oui}) = +22.5$$

$$MEU(D|\text{T=oui}) = 22.5 > MEU(D|\text{T=non}) = 20$$

- Il faut faire le sondage !

Architecture des Systèmes d'Information

Trouver la politique optimale

- Comment trouver la politique optimale d'un diagramme d'influence quelconque ?

- Plusieurs solutions
  - convertir le diagramme en un arbre de décision
  - utiliser les méthodes de propagation des RB

  Quelques références :
    - Jensen et al. 1994 : From Influence Diagrams to Junction Trees
    - Zhang 1996 : Probabilistic Inference in Influence Diagrams
    - Lauritzen & Nilsson 2001 : Representing and Solving Decision Problems with Limited Information
    - ...

Plein d'autres choses intéréssantes...

dont on aurait aimé parlé, mais il aurait fallu une autre UV :-)

- Processus de décision markovien (MDP)
  - MDP $\sim$ chaine de Markov + Décision
- Partiellement Observable : POMDP
  - POMDP $\sim$ MDP + HMM
- Dynamic Decision Network (DDN)
  - DDN $\sim$ RB Dynamique + utilité

$\longrightarrow$ Politique optimale ? Apprentissage ?

Références

- **Les Réseaux Bayésiens** - P. Naïm, P.H. Wuillemin, Ph. Leray, O. Pourret, A. Becker (Eyrolles)
- **Probabilistic reasoning in Intelligent Systems : Networks of plausible inference** - J. Pearl (Morgan Kaufman)
- **An introduction to Bayesian Networks** - F. Jensen (Springer Verlag)
- **Learning Bayesian Networks** - R. Neapolitan (Prenctice Hall)
- **Learning in Graphical Models** - Jordan M.I. ed. (Kluwer)
- **Dynamic Bayesian Networks : Representation, Inference and Learning** - K. Murphy - PhD Thesis, Berkeley