Corrigé du rattrapage

Exercice 1.- Mesures asymptotiques

a- Le classement est comme suit :
$\log \log n$, $\log n$, $\log_2 n$, $(\log n)^2$, $\sqrt{n}$, n, $n \log n$, $n^{3/2}$, n^2, $n^2 + \log n$, n^3, $n+7n^5$, 2^{n-1}, 2^n, e^n, $n!$

b- $p(n) = a_k*n^k + a_{k-1}*n^{k-1} + \ldots + a_1*n + a_0$ est en $O(n^k)$

$p(n) \leq |a_k|*n^k + |a_{k-1}|*n^{k-1} + \ldots + |a_1|*n + |a_0|$

$$p(n) = \left(\frac{|a_k|}{1} + \frac{|a_{k-1}|}{n} + \ldots + \frac{|a_1|}{n^{k-1}} + \frac{|a_0|}{n^k} \right) n^k$$

$$\leq \left(|a_k| + |a_{k-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0| \right) n^k$$

$$\leq c\, n^k \quad \forall n \geq 1$$

c- $\log_2[(n+1)!]$ est en $O(n \log_2 n)$

$$\begin{aligned}
\log_2[(n+1)!] &= \log_2[(n+1) * n!] \\
&= \log_2(n+1) + \log_2(n!) \\
&\leq \log_2(n+1) + \log_2(n^n) \\
&= \log_2(n+1) + n \log_2 n \\
&\leq n + 1 + n \log_2 n \\
&\leq 3\, n \log_2 n \qquad \forall n \geq 3
\end{aligned}$$

L'assertion est donc vraie: $\log_2[(n+1)!]$ est en $O(n \log_2 n)$.

Exercice 2.-

$t(n)= 2 * t(n/2) + n^3$

$= 2* (2*t(n/2^2) + (n/2)^3) + n^3$

$= 2^2* t(n/2^2) + 2*\frac{n^3}{2^3} + n^3$

$= 2^2* t(\frac{n}{2^2}) + \frac{n^3}{2^2} + n^3$

$= 2^2* (2* t(\frac{n}{2^3}) + \left(\frac{n}{2^2}\right)^3) + \frac{n^3}{2^2} + n^3$

$= 2^3 * t(\frac{n}{2^3}) + 2^2 \frac{n^3}{\left(2^2\right)^3} + \frac{n^3}{2^2} + n^3$

$= 2^3 * t(\frac{n}{2^3}) + \frac{n^3}{\left(2^2\right)^2} + \frac{n^3}{\left(2^2\right)^1} + \frac{n^3}{\left(2^2\right)^0}$

…

$= 2^k * t(\frac{n}{2^k}) + n^3 (\frac{1}{\left(2^2\right)^{k-1}} + \frac{1}{\left(2^2\right)^{k-2}} + \ldots + \frac{n^3}{\left(2^2\right)^2} + \frac{n^3}{\left(2^2\right)^1} + \frac{n^3}{\left(2^2\right)^0})$

$= 2^k * t(\frac{n}{2^k}) + n^3 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\left(2^2\right)^i}$

$= 2^k * t(\frac{n}{2^k}) + n^3 * \frac{1}{1-\frac{1}{2^2}}$

$= 2^k * t(\frac{n}{2^k}) + n^3 * \frac{4}{3}$

On pose $n=2^k$

$t(n)= n*t(1) + n^3 * \frac{4}{3}$ avec $t(1)=1$

$= n+ \frac{4}{3} * n^3 = \theta(n^3)$

Exercice 3.-

fonction pgcd (T1,T2 : tableau (structure) d'entiers, i, j :entier, n1,n2 :entier) :entier ;

T1, T2 : tableaux qui représentent les deux nombres
i, j : indices courant respectifs
n1, n2 : tailles respectives
p est la valeur du pgcd initialisé à 1 (variable globale). La fonction est appelée au début avec i=1, j=1, p=1

```
si (i<n1 et j<n2)
  alors
    si (T1[i].prem = T2[j].prem)
      alors
          m=min(T1[i].expo, T2[j].expo) ;
          p=p*(T1[i].prem)^m ;
          retourner(p*pgcd(T1, T2, i+1, j+1, n1, n2)
      sinon  si  (T1[i].prem < T2[j].prem)
                  alors retourner(pgcd(T1, T2, i+1, j, n1, n2)
              sinon retourner(pgcd(T1, T2, i, j+1, n1, n2)
              fsi
      fsi
  sinon  retourner p ;
 fsi ;
finfonction ;
```