

Epreuve de Rattrapage : Complexité et algorithmique avancée (Durée 1h30 mn)

Exercice 1

On considère deux ensembles d'entiers $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ tels que $a_1 < \dots < a_n$ et $b_1 < \dots < b_m$. On rappelle que la différence symétrique de A et B, notée $A \Delta B$, est le sous ensemble des éléments de A ou de B qui ne sont pas communs à A et B. On a donc $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. L'objet de l'exercice est de proposer un algorithme pour le calcul de $A \Delta B$.

1. Quelle est la valeur de $A \Delta B$ si $A = \emptyset$? Même question si $B = \emptyset$. (1 pts)

On suppose ici que $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ et l'on note $A' = \{a_2, \dots, a_n\}$ et $B' = \{b_2, \dots, b_m\}$.

2. Démontrer que : (1 pts)

$$A \Delta B = \begin{cases} (A' \Delta B') & \text{si } a_1 = b_1 \\ \{a_1\} \cup (A' \Delta B) & \text{si } a_1 < b_1 \\ \{b_1\} \cup (A \Delta B') & \text{si } a_1 > b_1 \end{cases}$$

3. Proposer un algorithme itératif pour le calcul de $A \Delta B$. Calculer sa complexité (3 pts).
4. En vous basant sur la propriété démontrée à la question 2, proposer un algorithme récursif pour le calcul de $A \Delta B$. Calculer sa complexité (3 pts)

Exercice 2 <12 points>

Considérons le problème de partition d'un ensemble d'entier suivant :

Instance : Un ensemble de n entier $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ et un entier positif k.

Question : Peut-on partitionner l'ensemble d'entiers S en k sous-ensembles distincts de même somme ?

On s'intéresse à la variante du problème ou $k = 2$. La question à laquelle doit répondre le problème devient :

Question : Peut-on partitionner l'ensemble d'entiers S en (2) sous-ensembles distincts S_1 et S_2 tel que :

$$\sum_{i=1}^m S_{i1} = \sum_{j=1}^p S_{j2}$$

Sachant que : $m + p = n$, et S_{i1} : représente les éléments de l'ensemble S_1 et S_{j2} représente les éléments de l'ensemble S_2 .

Nous considérons par ailleurs le concept de solution au sens large pour le problème. Une solution est dite positive (valide) si elle répond par l'affirmation à la question du problème. Elle est dite négative dans le cas contraire.

Soit l'ensemble d'entier suivant : $S = \{1, 2, 5, 10, 9, 15, 21, 19, -4, 7, 12, 6, 3\}$

- 1) A quoi correspond une solution potentielle au problème du 2-Partition ? Donner un exemple de solution positive et un autre de solution négative. (2 pts)
- 2) Proposer une structure de données pour représenter une solution. (2 pts)
- 3) On s'intéresse à construire des solutions potentielles. Ecrire un algorithme permettant d'engendrer une solution quelconque au problème. Calculer la complexité de l'algorithme proposé. (3 pts)
- 4) Ecrire un algorithme permettant de vérifier que la solution engendrée est positive ou négative. Calculer sa complexité. (3 pts)
- 5) Que peut-on conclure sur le problème de partition ? (2 pts).

BON COURAGE!