Introduction à la logique : logique propositionnelle

Brice Halimi

LLPHI133

1 Introduction

1.1 Qu'est-ce que la logique ?

Il existe deux définitions traditionnelles concurrentes de la logique : l'une, dite rationaliste, identifie la logique à la science du vrai, l'autre, dite psychologiste, identifie la logique à la science du raisonnement. La tradition psychologiste remonte à l'empirisme anglais, avec David Hume ou John Stuart Mill, mais a aussi pour représentants des philosophes de langue allemande du XIXe siècle, tels Ernst Mach et Franz Brentano. Selon cette tradition, les rapports logiques se réduisent à des abstractions tirées de relations mentales concrètes. Par exemple, le principe de contradiction tiendrait au fait que croire et ne pas croire sont deux états mentaux incompatibles, et ne serait que l'expression idéalisée de cette incompatibilité. Dans la mesure où la logique concerne des concepts, des jugements, des raisonnements, des déductions, elle ne fait qu'exprimer le fonctionnement normal de notre vie mentale. Mais tout le problème est évidemment de définir la notion de fonctionnement « normal » de notre pensée. Par ailleurs, même à supposer qu'on puisse le faire, le simple fait de parler de « lois de la pensée », c'est-à-dire de lois auxquelles le raisonnement d'un individu *doit* se conformer, suggère qu'il est justement *possible* de ne pas s'y conformer. Les lois logiques ne seraient donc pas absolument valides, mais seulement *normatives*, c'est-à-dire qu'elles se contenteraient d'énoncer la façon dont on a intérêt à raisonner.

On peut par opposition souhaiter accorder à la logique le statut de science objective, dont les vérités sont indépendantes de la façon dont empiriquement la plupart des hommes raisonnent. Les lois logiques, comme par exemple le principe de contradiction (« Une proposition et sa négation ne peuvent pas être vraies en même temps »), énoncent des affirmations absolument certaines, indépendantes de toute application dans le monde empirique. Nous ne nous bornons pas à constater qu'en général de deux affirmations contradictoires, l'une est vraie et l'autre est fausse : nous en sommes absolument certains, c'est-à-dire indépendamment de toute circonstance particulière, et même sans savoir de quelles affirmations il s'agit (du moment qu'elles sont contradictoires). On peut avancer un autre argument : au moment même d'observer et de décrire la façon dont les individus raisonnent, le psychologue présuppose déjà les lois logiques telles que le principe de contradiction : pour que l'observation « L'individu A a fait ceci » ait un sens, il faut évidemment déjà admettre qu'elle exclut l'observation contraire « L'individu A n'a pas fait ceci ». De façon générale, les vérités logiques ne concernent ni ne constituent aucun domaine de connaissance en particulier, et sont valables en amont de toute vérité scientifique particulière. Les vérités logiques sont les vérités sans lesquelles il n'y aurait pas de vérité du tout. C'est pourquoi le philosophe et logicien allemand Gottlob Frege a pu définir la logique, non pas comme la science des lois de la pensée, mais comme « la science de l'être vrai[1] ».

À vrai dire, le rejet d'une explication purement psychologique de la pensée logique est essentiellement motivé par la volonté de rendre compte de l'objectivité très solide propre aux mathématiques : l'armature purement logique des raisonnements mathématiques est l'une des raisons pour lesquelles les vérités mathématiques peuvent être considérées comme indépendantes de toute condition factuelle, et en particulier comme indépendantes de la façon dont *de fait* la plupart des hommes ont l'habitude de raisonner. Le débat opposant le rationalisme et le psychologisme à propos de la logique est en réalité sous-déterminé par le statut à accorder aux mathématiques.

Un débat plus contemporain (ancré dans le XX^e siècle et non plus le XIX^e siècle) concerne le domaine de pertinence de la logique : les lois logiques concernent-elles la pensée en prise avec le monde empirique et exprimée par le langage ordinaire, ou bien ne font-elles au contraire que schématiser les raisonnements que l'on trouve dans les théories mathématiques ? La logique doit-elle être conçue comme une grammaire générale, ou au contraire comme une formalisation des mathématiques ? Ce débat n'est pas si éloigné du débat précédent opposant le psychologisme et le rationalisme. Il s'agit même en quelque sorte d'une réédition du même débat. Il ne s'agira pas ici de trancher ce débat, mais au contraire d'insister sur les deux aspects que l'on

[1] « La Pensée », 1918, in [Frege(1971)].

peut voir dans la logique, et par conséquent sur les deux intérêts d'une introduction à la logique moderne. La logique est à la fois du côté du raisonnement en général, et du côté des mathématiques. C'est du moins ainsi que le philosophe peut commencer par voir les choses. Car pour le reste, l'histoire est assez triste. Quelle fut en effet (très grossièrement) l'évolution de la logique depuis la fin du XIX^e siècle ? Le philosophe prétendait que la psychologie est incapable de rendre compte de la validité très spéciale des mathématiques. Que s'est-il alors passé ? La psychologie a décidé d'abandonner le terrain de la logique pure, pour se consacrer à un terrain qui lui convient entièrement, celui de la cognition. De son côté, la logique a été happée par les mathématiques : prévue pour formaliser de façon uniforme les mathématiques, la logique ne s'intéresse plus qu'aux différentes théories mathématiques. Le philosophe s'intéressait à la logique comme à ce qui peut être commun au langage ordinaire et aux mathématiques. Mais l'étude du langage a décidé de devenir l'étude empirique des différentes grammaires, et la logique utilisée pour formaliser les mathématiques a naturellement fini par devenir une discipline mathématique à part entière. Le bilan des courses est qu'entre les sciences cognitives, la linguistique et les mathématiques, il ne reste (apparemment) plus rien de la logique au philosophe. Mais ceci est une autre histoire, ou plutôt justement l'histoire de la logique au XX^e siècle, dont je ne parlerai pas.

1.2 Méthodologie

La logique est une discipline spéciale au sein des études philosophiques dans la mesure où elle est technique et pratique. Ces deux mots ont une implication simple : il est *indispensable* de s'entraîner et de faire des exercices. Il ne suffit pas d'avoir l'impression d'avoir compris en lisant et il est inutile de relire sans pratiquer. La seule chose qui prouve qu'on a compris est la capacité qu'on a à résoudre les exercices. Il sera pour cela important de faire autant que possible les exercices proposés.

- [van Dalen(2004)] : conseillé en particulier pour la déduction naturelle (théorie de la démonstration) ;
- [Bell et Machover(1997)] : conseillé en particulier pour la méthode dites des tableaux ;
- [Mendelson(1997)] : conseillé en particulier pour la notion de système complet de connecteurs ;
- [Rivenc(1989)] : manuel complet et très rigoureux dans sa présentation ;

– [Tarski(1941)] : manuel d'introduction accessible, rédigé par l'un des principaux logiciens du XX^{e} siècle ;
– [Cori et Lascar(1993)] : manuel de référence, qu'on suivra principalement ;
– [Blanché et Dubucs(1996)] : ouvrage de synthèse permettant de mettre en perspective l'énmergence de la logique mathématique ;
– [Ruyer(1990)] : manuel partiel mais didactique.

Le parti pris de ce cours est de proposer une introduction *élémentaire* à la logique *mathématique*, en s'en tenant à la logique propositionnelle. Introduction élémentaire, mais néanmoins à la logique mathématique, de façon à faire d'une pierre deux coups : d'une part, permettre un accès aux questions philosophiques dont la discussion demande quelques notions de logique (ces notions sont en général très limitées, mais le philosophe, surtout de langue française, prend facilement peur) ; d'autre part, étudier une théorie mathématique (la logique propositionnelle) qui peut servir d'exemple pour les mathématiques en général.

2 L'idée de logique propositionnelle

2.1 Énoncés et propositions

L'essentiel est de revenir au double aspect des relations logiques : ce sont à la fois les connections fondamentales qui organisent un raisonnement ou articulent un discours, et les schémas des déductions qu'on trouve en mathématiques. Considérons l'enchaînement suivant :

(1) Tous les hommes sont mortels, or Socrate est un homme, donc Socrate est mortel,

ou mieux :

(2) Si tous les hommes sont mortels et que Socrate est un homme, alors Socrate est mortel.

On voit bien que la vérité de (2) ne dépend d'aucune condition particulière, et repose uniquement sur la *forme* de cet énoncé. Si l'on remplace respectivement « homme », « mortel » et « Socrate » par « fourmi », « rapace » et « Fernand », on retombe sur un énoncé qui est encore évidemment vrai. Il n'en est pas de même pour :

(3) Nous sommes trois dans cette pièce, donc si quelqu'un d'autre rentre, nous serons quatre.

Si je remplace « trois » par « sept », l'énoncé ainsi obtenu à partir de (3) n'est plus vrai. Mais si je dis

(4) Si 2 est un nombre pair, alors ou bien 2 est un nombre pair ou bien 4 est un nombre

impair.

Manifestement, la vérité de (4) est uniquement fondée sur la signification des expressions « si, ... alors » et « ou ». Le contenu des autres termes n'importe pas. On pourrait remplacer « 2 est un nombre pair » et « 4 est un nombre impair » par n'importe quelles autres phrases, on conserverait un énoncé valide, par exemple :

(5) Si l'acier est un métal, alors ou bien l'acier est un métal ou bien il pleut sur Brest.

Pour exprimer par un seul énoncé toutes les variantes de (4) ou de (5) imaginables, il est naturel d'écrire :

(6) Si p, alors (p ou q)

où p et q désignent *n'importe quels énoncés* (la seule chose qui importe, c'est que chacun des deux « p » désigne le même énoncé). On dira que l'énoncé (6) est *valide* pour exprimer le fait qu'on obtient un énoncé vrai à chaque fois qu'on remplace « p » et « q » par des énoncés particuliers. En écrivant (6), on fait ressortir les deux connexions exprimées par « ou » et « si ... alors ». Par opposition à « être un nombre pair », « 2 », « être un métal » ou « l'acier », « ou » et « si ... alors » ne font référence à aucun domaine de connaissance particulier. On dira que ces termes sont des *connecteurs logiques* : ils permettent de construire des énoncés complexes, comme par exemple l'énoncé (5) à partir des deux énoncés simples « L'acier est un métal » et « Il pleut sur Brest ». Mais il faut ajouter qu'ils ont chacun une signification telle que certains énoncés complexes vont être automatiquement vrais. Les connecteurs logiques ne sont pas simplement un ciment permettant d'assembler les briques que sont les énoncés simples : ce sont avant tout des formes de construction.

La logique propositionnelle est l'étude des connecteurs logiques, à savoir principalement :

- « ne ... pas »,
- « et »,
- « ou bien ... ou bien », et
- « si ... alors ».

Ces expressions correspondent à des formes grammaticales, principalement des conjonctions de coordination. Cependant la logique ne s'intéresse pas, comme la grammaire, à des énoncés particuliers, comme (4) ou (5), mais plutôt à des schémas d'énoncés, comme (6). En effet, la perspective adoptée par la logique consiste à s'intéresser aux connecteurs logiques eux-mêmes plutôt qu'aux propositions qu'ils permettent de construire. On peut le dire autrement : les énoncés simples qui interviennent dans une phrase (c'est-à-dire dans un énoncé complexe) n'intéressent la logique que dans la mesure où ils peuvent être vrais ou faux. La logique vise la généralité en gommant la signification particulière des énoncés, pour ne retenir que le fait d'être ou bien vrai ou bien faux. Peu importe ce que signifie « L'acier est un métal » ou bien « Il pleut sur Brest » : l'essentiel est que ces deux énoncés est chacun soit vrai soit faux. C'est pourquoi dans (6) « p » (de même que « q ») symbolise simplement quelque chose qui peut être soit vrai soit faux.

Définition 2.1. *On appelle* proposition *toute expression susceptible d'être vraie ou fausse.*

Toute proposition est soit vraie soit fausse, mais elle est au moins l'un des deux, et elle ne peut pas être les deux en même temps : c'est ce qu'on appelle le *principe de bivalence*.

On verra par la suite comment une valeur de vérité *déterminée* est à chaque fois attribuée à une proposition donnée (de façon à ne pas rester en suspens, en sachant par exemple que p doit être soit vraie soit fausse mais sans savoir si c'est vraie ou si c'est fausse).

Définition 2.2. *On dit d'une proposition vraie qu'elle a « le vrai » (noté V) pour valeur de vérité, et d'une proposition fausse qu'elle a « le faux » (noté F) pour valeur de vérité.*

La perspective propre à la logique propositionnelle est donc de remplacer tout énoncé simple particulier (par exemple « Il pleut sur Brest ») par une lettre (« p », « q », etc.). Le but de cette opération est 1°) de ne retenir d'un énoncé que le fait qu'il constitue une proposition, c'est-à-dire quelque chose qui est soit vrai soit faux ; 2°) de viser des schémas d'énoncés, des formes logiques, plutôt que des énoncés particuliers. En fait, ces deux objectifs vont ensemble, et se traduisent par le fait qu'en logique on a affaire à des lettres plutôt qu'à des énoncés simples particuliers, et ainsi à des constructions symboliques (« si p, alors p ou q ») plutôt qu'à des énoncés complexes écrits en français. L'intérêt de cette abstraction est précisément qu'un certain nombre de choses peuvent être dites en même temps d'une infinité d'énoncés particuliers. Par exemple, (4) et (5) sont vrais pour les mêmes raisons, et il est naturel de vouloir directement se placer au niveau de généralité qui permet de traiter en même temps de (4) et de (5) (ainsi d'ailleurs que de tous les énoncés construits selon le même schéma).

Convention 1. *Désormais, lorsqu'on parlera de « proposition », ce sera toujours en se plaçant dans la perspective symbolique propre à la logique. On parlera donc d'*énoncés *(simples ou complexes) pour désigner les phrases du langage ordinaire (par exemple : « Il pleut sur Brest »,*

« S'il pleut sur Brest, alors Dieu n'existe pas »), et de propositions *uniquement pour désigner les constructions symboliques (par exemple « p », « Si p, alors q », « Si p, alors p ou q », etc.) qui interviennent en logique.*

Remarque 2.3. *Lorsqu'on parle d'un énoncé au sens d'une phrase du langage ordinaire, c'est en se limitant aux phrases qui ont un sens, et une valeur de vérité déterminée. Par exemple : « Le gâteau devant moi » n'est pas un énoncé, car ce n'est pas une phrase ; « Des gâteaux s'insultent constitutionnellement » n'est pas un énoncé, car cette phrase n'a pas de sens clair ; « Apporte-moi un gâteau » n'est pas un énoncé, car c'est une demande ou un ordre, et à ce titre n'est ni vrai ni faux.*

Remarque 2.4. *Lorsqu'on parle d'énoncés complexes, c'est* uniquement *pour désigner des énoncés construits à l'aide des connecteurs logiques. En particulier, on exclut le cas d'un énoncé tel que*

« Othello croit que Desdémone a été déloyale »,

qui n'est pas *construit à partir des énoncés « Othello croit » et « Desdémone a été déloyale » au moyen de connecteurs logiques : « que » n'est pas un connecteur logique, et plus radicalement « Othello croit » n'est pas un énoncé complet (car dans ce contexte « croire » doit être suivi d'un complément d'objet).*

Définition 2.5. *D'après la convention qui précède, une proposition est toujours seulement un* schéma d'énoncé. *On dira ainsi que la proposition (6) est le* schéma propositionnel *de l'énoncé (4), aussi bien d'ailleurs que de l'énoncé (5) et que d'une infinité d'autres énoncés. La proposition (6) est la visualisation de la forme commune à tous les énoncés construits de la même manière que (4) et (5). Une proposition simple est une lettre pour n'importe quel énoncé simple, et une proposition complexe est une expression pour n'importe quel schéma d'énoncé, ce qui justifie le va-et-vient qu'on peut effectuer entre énoncés (du langage ordinaire) et propositions (qui sont les objets étudiés par la logique propositionnelle proprement dite).*

Définition 2.6. *Une proposition réduite à une lettre s'appelle une* proposition atomique. *Une proposition qui n'est pas atomique mais est construite à partie de propositions atomiques, s'appelle une* proposition complexe.

Remarque 2.7. *Par convention, toute proposition est soit vraie soit fausse. Ceci est vrai de toute proposition, qu'elle soit atomique ou complexe. La seule différence est qu'une proposition* *atomique sera arbitrairement considérée ou bien comme vraie ou bien comme fausse, alors que la valeur de vérité d'une proposition complexe dépend de la valeur de vérité des propositions atomiques qui la composent. Par exemple, si « p » est vraie, alors « p ou q » sera vraie, et si p est fausse, alors « p et q » sera fausse. Bien entendu, tant qu'on ne précise rien, « p » peut être aussi bien vraie que fausse, mais il n'en demeure pas moins que la valeur de vérité de « p ou q » (ainsi que la valeur de vérité de « p et q ») dépend de façon non arbitraire de la valeur de vérité de p et de la valeur de vérité de q. C'est ce qu'on appelle le* principe de vérifonctionnalité, *qu'on va détailler à partir de maintenant.*

Convention 2 (À propos des guillemets)**.** *Je viens d'employer des guillemets pour parler de propositions. Pourquoi ? Réponse : si je parle d'une chaise, je vais employer le mot « chaise », en disant par exemple : « Cette chaise m'appartient ». Mais si je veux parler du mot chaise lui-même, et non de la chose que ce mot désigne, un procédé courant consiste à mettre ce mot entre guillemets. Donc un mot désigne une chose, et un mot mis entre guillemets (c'est-à-dire l'ensemble composé par le mot et les deux guillemets) constitue un nouveau mot, qui désigne le mot mis entre guillemets (car après tout un mot, considéré au repos au lieu d'être utilisé dans une phrase, constitue lui-même une certaine chose). Autrement dit : le mot « chaise » fait référence à une chaise, et l'expression « « chaise » » fait référence au mot « chaise » lui-même – mais pour dire cela, comme on le voit, c'est-à-dire pour parler de l'expression entre guillemets elle-même, il faut employer de nouveaux guillemets, et c'est pourquoi on obtient une expression avec des doubles guillemets.*

À présent, une proposition est une certaine expression. Donc pour parler de la proposition « p » elle-même (et non de ce qu'elle signifie), il faut la mettre entre guillemets. Il en est de même pour la proposition « p ou q », ou bien de l'énoncé « Il pleut sur Brest » : si j'emploie cet énoncé tel quel, je parle de Brest ; pour parler de l'énoncé lui-même et non de Brest, j'emploie l'expression obtenue en mettant l'énoncé en question entre guillemets.

2.2 Les différents connecteurs logiques

2.2.1 « ne … pas »

Dans le langage ordinaire, l'expression de la négation est ambiguë, car on peut nier un énoncé entier ou bien seulement un prédicat. Dans le premier cas on passera de « Le facteur est passé » à « Le facteur n'est pas passé » ; dans le second cas, on passera de « Antoine est inscrit » à « Antoine est non-inscrit ». Pour éviter toute ambiguïté, on décide de s'en tenir au premier cas de figure et d'exclure le second. De plus, au lieu d'être construite autour d'un verbe, la négation est plus clairement exprimée si elle est placée en début de phrase. Ceci revient à exprimer la négation de « Le facteur est passé » par « Ce n'est pas le cas que le facteur soit passé ».

Si l'on décide à présent de se replacer dans la perspective de la logique propositionnelle, et donc de considérer des propositions au lieu d'énoncés concrets, la négation de la proposition « p » sera « non p », et la négation de la proposition « p ou q » sera « non (p ou q) ».

Remarque 2.8. *On voit que l'emploi de parenthèses entre naturellement en scène, car la négation de « p ou q » n'est pas la même chose* a priori *que « (négation de p) ou q ». On reviendra sur ce point plus bas.*

Pour être le plus symbolique, c'est-à-dire le plus compact possible (on verra l'intérêt que cela a lorsqu'on a affaire à des des propositions très compliquées, c'est-à-dire très longues) , on exprime la négation au moyen d'un symbole spécifique, à savoir « $\neg$ » qui se lit « non ». La négation de « p » s'écrira donc désormais « $\neg p$ », et la négation de la proposition « p ou q » sera « $\neg(p$ ou $q)$ ».

Comme on l'a dit, le propre du point de vue logique est de ne retenir d'une proposition que la double possibilité d'être vraie ou fausse. De ce point de vue, quelle est la caractéristique essentielle de la négation ? Réponse : la négation transforme une proposition vraie en une proposition fausse, et réciproquement transforme une proposition fausse en une proposition vraie. Au niveau des énoncés, on voit bien en effet que si « Il pleut sur Brest » est vrai, alors « Il ne pleut pas sur Brest » (ou plutôt : « Ce n'est pas le cas qu'il pleuve sur Brest ») est faux, et réciproquement. L'idée logique de négation est entièrement contenue dans ce jeu de bascule : la nagation inverse la valeur de vérité, et ceci suffit à caractériser l'essence de la négation. Gardons ce comportement de la négation en tête, on y reviendra bientôt.

2.2.2 « et »

L'association de deux propositions au moyen de « et » s'appelle une *conjonction*, et chacune des deux propositions s'appelle un *conjoint*. Si l'on revient au niveau des énoncés, la conjonction de « 2 est un nombre entier positif » et de « $2 < 3$ » est tout simplement : « 2 est un nombre entier positif et $2 < 3$ ». Comme pour la négation, la conjonction a lieu à l'échelle des énoncés

(« Jean est beau et Jean est grand »), et non des prédicats (« Jean est beau et grand »), ce qui est compréhensible étant donné qu'une proposition schématise un énoncé tout entier, sans rentrer dans le détail de cet énoncé (c'est-à-dire des prédicats ou des verbes que cet énoncé contient).

En logique, la conjonction (comme tout à l'heure la négation) est exprimée par un symbole spécifique, à savoir « $\wedge$ », qui se lit « et ». Ainsi la conjonction de « p » et de « q » devient : « $p \wedge q$ ». De même, la conjonction de « p ou q » et de « si p, alors q » est :
« (p ou q) $\wedge$ (si p, alors q) ».

À présent, quelle est la signification logique de la conjonction ? Autrement dit quel est la caractéristique d'une conjonction en termes de valeurs de vérité ? La réponse est simple. Si j'affirme : « L'acier est un métal et il pleut sur Brest », j'affirme que l'acier est un métal et qu'il pleut sur Brest. Je prétends donc que les deux énoncés sont vrais. Il suffit que l'acier ne soit pas un métal ou qu'il ne pleuve pas sur Brest pour que je dise faux, mais si ces deux conditions sont vraies, je suis assuré de dire vrai. Autrement dit, si l'on une conjonction est vraie si et seulement si chacun des deux conjoints est vrai.

2.2.3 « ou »

Comme précédemment, l'expression « ou » (ou encore « ou bien ... ou bien ») est supposée relier des énoncés et non des prédicats. Cette expression exprime ce qu'on appelle une *disjonction*. Lorsque je dis « L'acier est un métal ou il pleut sur Brest », chacun des deux énoncés ainsi reliés s'appelle les *disjoints* de la disjonction. Il existe deux types de disjonction : la disjonction dite *exclusive*, qui suppose que les deux disjoints sont incompatibles (c'est le sens de « ou bien ... ou bien » au sens de : « de deux choses l'une »), et la disjonction *inclusive*, qui n'exclut pas que les deux disjoints soient vrais en même temps. Le sens de la disjonction retenu par la logique propositionnelle est seulement celui de la *disjonction inclusive*. Son symbole est : « $\vee$ », qui se lit « ou ». Par exemple, on écrira « $p \vee (p \wedge q)$ » pour dire « p ou bien (p et q) ».

Le sens de la disjonction (inclusive) découle de ce qu'on vient de dire : pour que la disjonction de deux énoncés soit vraie, il faut et il suffit qu'au moins un des deux énoncés soit vrai. Ceci se transpose directement au niveau des propositions :

« $p \vee q$ » est vraie si et seulement si « p » est vraie ou « q » est vraie,
et de même « $(p \wedge q) \vee$ (si p, alors q) » est vraie si et seulement si au moins « $p \wedge q$ » ou « si p, alors q » est vraie.

2.2.4 « si ... alors »

Un énoncé de la forme « S'il pleut sur Brest, alors je ne pars pas en vacances » s'appelle une *implication*. L'énoncé précédé par « si » s'appelle l'*antécédent*, et l'énoncé précédé par « alors » s'appelle le *conséquent*. L'implication exprime un lien de conséquence, mais, contrairement à ce qu'on pourrait attendre, cette conséquence n'a pas à être fondée sur un lien de cause à effet précis. L'essentiel, d'un point de vue logique, c'est-à-dire du point de vue des valeurs de vérité, est que *l'antécédent n'est pas vrai sans que le conséquent le soit aussi* – quelles que soient les raisons pour lesquelles il en est ainsi, c'est-à-dire y compris si aucune raison précise n'explique que la vérité de l'antécédent entraîne la vérité du conséquent. Par exemple, l'énoncé

(7) « Si Paris est une grande ville, alors $3 > 2$ »

est considéré comme vrai (en vertu du sens de « si ... alors » qu'on décide de retenir), car il se trouve que « Paris est une grande ville » est vrai et que « $3 > 2$ » l'est aussi.

Autrement dit : la seule façon pour une implication d'être fausse est que l'antécédent soit vrai et que pourtant le conséquent soit faux. Il s'agit là du sens que l'on attribue par convention à l'implication en logique, et ceci constitue un point de divergence important entre le langage ordinaire et la logique propositionnelle. Car ordinairement lorsqu'on emploie l'expression « si ... alors », c'est pour exprimer un véritable rapport de cause à effet, ce qui n'est pas le cas de l'énoncé (7). Pour mieux souligner le sens très particulier qu'a l'implication en logique, on parle aussi d'*implication matérielle* plutôt que d'implication tout court. Le symbole de l'implication (matérielle) est « $\rightarrow$ », qui se lit : « implique ». Si l'on rejoint le niveau des propositions, le symbole de l'implication permet de construire des propositions telles que :

« $p \rightarrow q$ », « $(p \wedge q) \rightarrow p$ », « $(\neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ », « $p \rightarrow (q \vee (p \rightarrow q))$ », etc.

On commence maintenant à entrevoir les possibilités de construire des propositions de plus en plus complexes à partir des propositions simples telles que p ou q. C'est ce qu'on peut appeler le *principe de générativité* de la logique propositionnelle : il est indéfiniment possible de construire des propositions toujours plus complexes à partir de propositions moins complexes.

2.3 Conventions supplémentaires

Convention 3. *On a expliqué la raison de l'emploi de guillemets. Mais les exemples qui précèdent montrent qu'il est un peu fastidieux de toujours mettre entre guillemets les propositions* *dont on veut parler. Dans le cas d'un énoncé, qui dit vraiment quelque chose, qui fait vraiment référence au monde extérieur (par exemple « Il pleut sur Brest et tu es malade »), les guillemets sont indispensables pour ne pas confondre l'énoncé avec ce dont il parle. Mais comme une proposition n'est qu'une suite de symboles qui en eux-mêmes ne veulent rien dire, le risque est beaucoup moins grand. C'est pourquoi on s'autorisera désormais à ne pas mettre entre guillemets les propositions dont on veut parler, autrement dit* à utiliser les propositions comme leurs propres noms. *On dit alors que les propositions sont* autonymes. *On parlera donc désormais de la proposition $(p \wedge q) \rightarrow p$ ou de la proposition $(\neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$, sans risque de confusion.*

Convention 4. *Au lieu de dire qu'une proposition est vraie, on dira désormais qu'elle* vaut V*, et au lieu de dire qu'elle est fausse, on dira qu'elle* vaut F*. Ceci est justifié par le fait qu'une proposition n'est pas réellement vraie : seul un énoncé peut être dit vrai, or une proposition représente un énoncé qu'on ne spécifie pas (donc une proposition n'est vraie qu'une fois qu'a été décidé qu'elle représentait un énoncé considéré comme vrai).*

La logique propositionnelle est la logique des valeurs de vérité. Elle concerne tout ce qui peut être dit de la dualité du vrai et du faux, et à ce titre elle intéresse le philosophe. Mais la logique propositionnelle est en même temps celle des schémas déductifs. Par exemple, $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ est le schéma du raisonnement dit par *modus ponens*, qui est si fréquent en mathématiques : j'ai démontré p, or par ailleurs je peux démontrer q en faisant l'hypothèse que p est vraie (autrement dit je peux démontrer que p implique q), donc q est démontrée. Ces deux aspects se réunissent dans un même domaine d'étude : *la logique propositionnelle s'intéresse à la façon dont la valeur de vérité d'une proposition complexe (construite à l'aide des connecteurs logiques) dépend des valeurs de vérité respectives des propositions simples qu'elle contient.*

3 Syntaxe de la logique propositionnelle

Nous savons désormais construire toutes les propositions. Nous partons de propositions simples (qui représentent chacune un énoncé simple quelconque), notées par des lettres (p, q, r, etc.), et nous construisons à partir de là, au moyen des connecteurs propositionnels – à savoir $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$ – des propositions complexes. Nous allons préciser de façon plus formelle le mode d'engendrement des propositions. La partie de la logique qui s'intéresse à la formation des propositions considérées comme des expressions symboliques s'appelle la *syntaxe*.

3.1 L'ensemble des propositions

3.1.1 Note sur les ensembles

Qu'est-ce qu'un ensemble ? Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets, considérée comme formant un tout. Un ensemble est donc par lui-même un objet, et en tant qu'ensemble il contient des objets qui sont ses *éléments*. Ce sont là les deux aspects essentiels d'un ensemble. Un ensemble est à chaque fois un certain quelque chose (différent de ses éléments), mais d'un autre côté un ensemble est entièrement déterminé dès qu'on indique quels sont ses éléments : c'est ce qu'on appelle en théorie des ensembles le *principe d'extensionnalité* : un ensemble est caractérisé par son contenu, c'est-à-dire par la donnée de ses éléments (deux ensembles qui ont les mêmes éléments sont identiques par définition de ce qu'est un ensemble). Comme un ensemble est un objet par lui-même, il faut pouvoir le désigner lui-même, au-delà de ses éléments. Pour cela, si a, b et c sont trois objets donnés (peu importe qui sont a, b et c), on notera ainsi l'ensemble qui a pour éléments a, b et c :

$$\{a, b, c\}.$$

Appelons E cet ensemble. On dit que a, b et c *appartiennent* à E, ce qu'on note : $a \in E$, $b \in E$, $c \in E$. (« être dans », « appartenir à », « être un élément de » sont des expressions synonymes). Évidemment, lorsqu'on a affaire à un ensemble infini, c'est-à-dire à un ensemble possédant une infinité d'éléments (pensez à l'ensemble de tous les nombres entiers positifs, noté $\mathbb{N}$), on ne peut plus écrire la liste des éléments, car cette liste n'est jamais complète. Il faut donc trouver d'autres moyens : un exemple va montrer comment. Supposons que soit donné l'ensemble $\mathbb{N}$ de tous les nombres entiers positifs (peu importe comment), et supposons qu'on veuille introduire l'ensemble M de tous les nombres entiers négatifs. M n'est rien d'autre que l'ensemble de tous les nombres $-n$, lorsqu'on considère tous les n appartenant à l'ensemble $\mathbb{N}$. Cela se note :

$$M = \{-n : n \in \mathbb{N}\},$$

ce qui se dit : « M est l'ensemble de tous les $-n$ tels que n appartient à $\mathbb{N}$ ».

On dit qu'un ensemble B est *inclus* dans un ensemble A (ou ensore que B est un *sous-ensemble* de A) si tout élément de B est un élément de A. On note : $B \subseteq A$. Il est aisé de voir que si A est inclus dans B et B inclus dans A, alors $A = B$ (car alors A et B ont exactement les mêmes éléments). Autrement dit :

Si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, alors $A = B$.

De façon générale, si un ensemble A est donné, on peut vouloir considérer le sous-ensemble de A formé par les élements de A ayant une certaine propriété $\mathcal{P}$: parmi les éléments de A, certains ont la propriété $\mathcal{P}$, les autres non. Par exemple, parmi les éléments de $\mathbb{N}$, certains ont la propriété d'être pair (0, 2, 4, etc.), les autres (1, 3, 5, etc.) non. Appelons B l'ensemble des éléments de A ayant la propriété $\mathcal{P}$: c'est une partie de A. L'ensemble B est explicité de la manière suivante :

$$B = \{x \in A : \mathcal{P}(x)\}$$

(« B est l'ensemble des éléments x de A ayant la propriété $\mathcal{P}$ »).

Les ensembles sont les objets de la théorie des ensembles, ce sont des objets d'étude parmi d'autres pour le mathématicien. En particulier, on peut les manipuler, et on peut définir sur eux certaines opérations. En particulier la réunion et l'intersection. Étant donnés deux ensembles A et B, l'*union* de A et de B, notée $A \cup B$, désigne l'ensemble dont les éléments sont soit dans A soit dans B : c'est l'ensemble obtenu en mettant en commun le contenu de A et le contenu de B. L'intersection de A et de B, notée $A \cap B$ désigne quant à elle l'ensemble dont les éléments sont à la fois dans A et dans B : c'est l'ensemble obtenu en ne conservant que ce que A et B ont en commun. Par exemple, si $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{a, d, e\}$, alors :

$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$ et $A \cap B = \{a\}$.

On peut vouloir réunir d'un seul coup une infinité d'ensembles, ou considérer l'intersection d'une infinité d'ensembles. Si $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ sont des ensembles, alors on note

$\bigcup_{n=0,1,\dots} E_i$ leur union, et $\bigcap_{n=0,1,\dots} E_i$ leur intersection.

Remarque 3.1. *D'autres notions de théorie des ensembles seront éventuellement indiquées au fur et à mesure de ce cours. Ce ne sera pas un accident : la théorie des ensembles est la théorie fondamentale à l'aide de laquelle les mathématiques sont formulées. Si la théorie des ensembles intervient dans la logique propositionnelle, c'est tout simplement parce que la logique propositionnelle est une mathématisation de la logique du vrai et du faux, et à ce titre elle a recours, comme n'importe quelle théorie mathématique, au langage de la théorie des ensembles.*

3.1.2 Définition constructive de l'ensemble des propositions

Il existe essentiellement deux façons de décrire l'ensemble de toutes les propositions. La première façon est constructive, elle opère du bas vers le haut, au sens suivant. On part des propositions simples, p, q, r, etc. : ce sont les propositions de niveau zéro. Puis on construit les premières propositions complexes, directement construites à partir des propositions simples : $\neg p$, $p \wedge q$, $q \vee p$, $q \rightarrow q$, $p \rightarrow q$: ce sont les propositions de niveau 1, c'est-à-dire les propositions construites en utilisant un seul connecteur. Il y a ensuite les propositions de niveau 2 : ce sont les propositions directement construites à partir des propositions de niveau 1 (au moyen d'un connecteur supplémentaire), ce qui veut dire que ce sont les propositions construites à l'aide de deux connecteurs. Et ainsi de suite.

Plus formellement : on suppose donné un ensemble de lettres p, q, r, s, etc., ainsi que les quatre connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$. À cela il convient d'ajouter, comme on l'a remarqué, deux parenthèses : « (» (parenthèse ouvrante) et «) » (parenthèse fermante) pour ponctuer précisément les propositions complexes. L'ensemble de tous ces symboles primitifs (lettres, parenthèses et connecteurs) forment ce qu'on appelle l'*alphabet* de la logique propositionnelle : ce sont les symboles dont toutes les propositions vont être formées. On appelle *expression* (du langage de la logique propositionnelle) toute suite de symboles de l'alphabet. Par exemple, $\neg \vee pr \rightarrow$ est une expression. Les propositions forment seulement un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les expressions : elles corresondent aux expressions formées selon certaines règles précises.

Les lettres constituent les propositions simples (désormais on dira au choix « lettres » ou « propositions simples »), on les appelle aussi parfois les *variables propositionnelles*. On note P l'ensemble des lettres :

$P = \{p, q, r, s \ldots\}$.

Remarque 3.2 (À propos des lettres)**.** *Plutôt que p, q, r, s, etc., on peut choisir de prendre p_1, p_2, p_3, p_4, etc., si l'on a besoin d'un grand nombre de propositions simples pour construire une proposition très compliquée. Peu importe le choix de départ que l'on fait, il s'agit seulement de variantes. L'essentiel est de savoir que l'on dispose idéalement d'un nombre illimité (dénombrable) de propositions simples (lettres).*

Question : si l'on a besoin de beaucoup de lettres (disons 17), pourquoi ne pas utiliser autant de fois que l'on veut p, ce qui dispenserait d'introduire $p_1, \ldots p_{17}$? Réponse : parce que $(p \rightarrow p)$ et $(p \rightarrow q)$ ne sont pas les même propositions, elles ne schématisent pas les *mêmes énoncés. En effet, la première est intuitivement toujours vraie, c'est-à-dire que tous les énoncés qui lui correspondent (= tous les énoncés qu'elle schématise) sont des énoncés vrais : « S'il pleut sur Brest, alors il pleut sur Brest », « Si tu es malade, alors tu es malade », etc. En revanche, la proposition* $(p \to q)$ *n'a pas de raison particulière de schématiser un énoncé vrai : « S'il pleut sur Brest, alros tu es malade », « Si tu es malade, alors il pleut sur Brest », « Si* $3 > 2$, *alors Paris est sur la Loire », etc. Dans le premier cas, les deux* occurrences *de* p *schématisent le même énoncé, car ce sont deux occurrences d'une même proposition, tandis que dans le second cas* p *et* q *sont deux propositions différentes, et schématisent donc* a priori *des énoncés différents. Il faut retenir ce point : ce sont d'abord les connecteurs qui font les schémas d'énoncés, mais les lettres de propositions simples sont cruciales pour marquer les répétitions et les différences entre énoncés. À tout cela s'ajoutent les parenthèses, cf. remarque suivante. Les différentes lettres, les connecteurs, les parenthèses : c'est là ce qui est indispensable pour formuler des schémas d'énoncés avec précision. L'alphabet de la logique propositionnelle contient tout cela, sans rien ajouter d'autre : cela peut donner l'impression de donner naissance à un langage très aride, mais c'est uniquement parce que l'on décide de s'en tenir à l'essentiel.*

Remarque 3.3 (À propos des parenthèses)**.** *Les parenthèses sont essentielles pour différencier clairement des propositions complexes qui sont formées à l'aide des mêmes connecteurs et des mêmes lettres, et ce dans le même ordre, mais qui n'en sont pas moins différentes. Par exemple,* $(p \lor (q \land r))$ *et* $((p \lor q) \land r)$ *sont distinctes, parce qu'elles n'ont pas nécessairement les mêmes valeurs de vérité : par exemple, si* p *est* V, *alors* $(p \lor (q \land r))$ *est* V, *alors que* $((p \lor q) \land r)$ *ne sera pas forcément* V *(il faudrait en plus pour cela que* r *soit* V*).*

(Si l'on remplace p *par un énoncé vrai, la première proposition donnera nécessairement un énoncé vrai tandis que la seconde pourra tout de même donner un énoncé faux, donc les deux propositions ne schématisent pas les mêmes énoncés, donc elles sont bien différentes.)*

D'où l'importance des parenthèses, pour dissiper toute ambiguïté en précisant de quelle proposition exactement on veut parler (de la première ou de la seconde).

Remarque 3.4 (À propos des connecteurs)**.** *Il faut bien faire une différence entre la négation* $\neg$ *et les trois autres connecteurs : la négation s'applique à chaque fois à une seule proposition (on dit que c'est un connnecteur* unaire*) tandis que les trois autres connecteurs relient à chaque fois deux propositions (on dit que ce sont des connnecteurs* binaires*). La négation est censée s'appliquer à la proposition qui la suit immédiatement, et grâce à cette convention l'emploi* *de $\neg$ ne demande pas l'ajout de parenthèses. En revanche, à chaque fois qu'un connecteur binaire est employé, on met le tout de la proposition ainsi construite entre parenthèses, pour bien découper cette proposition comme un tout et pouvoir la réutiliser sans ambiguïté dans des propositions plus complexes.*

À présent, définissons formellement les différents niveaux de propositions. Le niveau 0 n'est rien d'autre que l'ensemble des propositions simples, c'est-à-dire P. On note : $N_0 = P$.
Le niveau 1 est composé de toutes les propositions obtenues en utilisant un seul connecteur (et une ou deux propositions simples). Cela signifie (il faut essayer de bien comprendre cela) que le niveau 1 est exactement composé de toutes les propositions de la forme $\neg p$ avec p dans P, de toutes les propositions de la forme $(p \wedge q)$ avec p et q dans P, de toutes les propositions de la forme $(p \vee q)$ avec p et q dans P et enfin de toutes les propositions de la forme $(p \rightarrow q)$ avec p et q dans P. Autrement dit c'est l'ensemble :

$$N_1 = \{\neg p : p \in P\} \cup \{(p \wedge q) : p, q \in P\} \cup \{(p \vee q) : p, q \in P\} \cup \{(p \rightarrow q) : p, q \in P\}.$$

Convention 5 (Attention)**.** *Comme les propositions sont l'objet de notre étude, on comprend bien qu'il est utile de pouvoir parler d'une proposition* en général *: il faut donc introduire un symbole qui désigne* n'importe quelle proposition *(simple ou complexe). On utilisera à cet effet des lettres grecques : ϕ (qui se lit : « fi »), ψ (qui se lit : « psi »), χ (qui se lit : « qui »), θ (qui se lit : « téta »), etc.*

Ces symboles ne sont pas *des propositions. Ils n'appartiennent même pas au langage de la logique propositionnelle, car ce ne sont pas des expressions formées à l'aide de l'alphabet. Ce sont des symboles qui nomment* n'importe quelle proposition*, c'est pourquoi on les appelle des* variables*. Ils font* référence aux *propositions, mais ne sont justement pas des propositions. Pour cette raison, le langage de la logique propositionnelle (c'est-à-dire l'ensemble de toutes les propositions que l'on peut écrire) s'appelle le* langage objet*, c'est-à-dire le langage qu'on étudie, tandis que les variables ϕ, ψ font partie du* métalangage*, car ce sont des instruments qui permettent de parler des expressions du langage objet. On peut donc dire que les lettres grecques sont des* métavariables de propositions.

De même, si je dis : « si p est une proposition, alors $\neg p$ aussi », le « si . . . alors » que j'emploie ne se situe pas au niveau des propositions : ce n'est pas le connecteur propositionnel $\rightarrow$, mais une expression que j'emploie (dans le métalangage) pour raisonner à propos des propositions.

Bilan : désormais, nous allons employer (entre nous) des lettres grecques pour nous faire comprendre, ces lettres grecques ne doivent pas être confondues avec les lettres des propositions simples, car elles ne se situent pas au même niveau. Tout cela va relativement de soi pour peu qu'on ne se pose pas trop de questions. Il faut simplement ajouter une précision : ϕ représente *n'importe quelle proposition, par exemple* $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$*, ce qui veut dire qu'on est libre de remplacer (dans sa tête)* ϕ *par la proposition qu'on veut, par exemple* $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$ *: ce qu'on dit de* ϕ *doit être vrai de n'importe quelle proposition. Par convention, on se permettra d'écrire des choses telles que «* $\neg\phi$ *». C'est la forme « négation d'une proposition quelconque ». Cel veut dire que si* ϕ *représente* $((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$*, alors* $\neg\phi$ *représente* $\neg((p \wedge q) \rightarrow (p \vee q))$*. Et de même pour* $\phi \wedge \psi$*,* $\phi \vee \psi$*,* $\phi \rightarrow \psi$ *(formes de la conjonction de deux propositions, de la disjonction de deux propositions et de l'implication entre deux propositions).*

Soit à présent N_2 l'ensemble des propositions de deuxième niveau. Cet ensemble est composé de toutes les propositions obtenues directement en appliquant un connecteur (et un seul) **à une ou deux propositions de niveau 1**. Cela signifie (il faut essayer de bien comprendre cela) que N_2 est exactement composé de toutes les propositions de la forme $\neg\phi$ avec ϕ dans N_1, de toutes les propositions de la forme $p \wedge q$ avec p ou q (ou les deux) dans N_1, de toutes les propositions de la forme $p \vee q$ avec p ou q (ou les deux) dans N_1 et enfin de toutes les propositions de la forme $p \rightarrow q$ avec p ou q (ou les deux) dans N_1. Autrement dit :

$N_2 = \{\neg\phi : \phi \in F_1\} \cup \{(\phi \wedge \psi) : \phi \text{ ou } \psi \in F_1\} \cup \{(\phi \vee \psi) : \phi \text{ ou } \psi \in F_1\} \cup \{(\phi \rightarrow \psi) : \phi \text{ ou } \psi \in F_1\}$.

On comprend la nécessité de recourir à des lettres grecques (métavariables) : car si l'on voulait utiliser p ou q, on serait contraint d'écrire « $p \in N_1$ », « $p, q \in N_1$ », ce qui est faux car p et q sont des propositions de niveau 0 et non des propositions de niveau 1.

De façon générale :

$N_{n+1} = \{\neg\phi : \phi \in N_n\} \cup \{(\phi \wedge \psi) : \phi \text{ ou } \psi \in N_n\} \cup \{(\phi \vee \psi) : \phi \text{ ou } \psi \in N_n\} \cup \{(\phi \rightarrow \psi) : \phi \text{ ou } \psi \in N_n\}$,

c'est-à-dire que N_3 est construit à partir de N_2 comme N_2 a été construit à partir de N_1, et de même pour N_4, N_5, etc.

Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, il est plus commode de considérer non pas les formules de niveau 1, mais les formules de niveau 0 ou 1 ; non pas les formules de niveau 2, mais les formules de niveau 0, 1 ou 2 ; et de manière générale, non pas les formules de niveau

n, mais les formules de niveau $\leq n$. On définit donc :

$F_0 = N_0, F_1 = N_0 \cup N_1, \ldots F_n = N_0 \cup N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_n$.

F_n est l'ensemble des formules **de niveau** $0, 1, \ldots, n$.

Définition 3.5. *L'ensemble $\mathcal{F}$ de toutes les propositions n'est rien d'autre que la réunion de tous les F_n (ou,cela revient au même, de tous les N_n) :*

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n=0,1,\ldots} F_n,$$

ce qui signifie qu'être une proposition, c'est être une propositions d'un certain niveau, c'est-à-dire un élément d'un des différents ensembles F_n. L'ensemble $\mathcal{F}$ de toutes les propositions, c'est par définition la mise en commun de toutes les propositions des différents niveaux.

Exercice 1. *Montrer que* $\bigcup_{n=0,1,\ldots} F_n = \bigcup_{n=0,1,\ldots} N_n$.

3.1.3 Entraînement

Il faut s'entraîner à écrire des propositions, et des propositions de tous niveaux. Par exemple, il faut se convaincre que $\neg \rightarrow p$ n'est pas une proposition. Pourquoi ? Réponse : parce que $\rightarrow$ doit relier deux propositions et que $\neg$ n'est pas une proposition. Toute suite de symboles de l'alphabet (autrement dit : toute expression du langage) n'est pas une proposition. Les propositions correspondent seulement à certaines suites. Il faut s'exercer à les identifier. Aucun moyen de faire autrement. Il faut bien comprendre que du point de vue de la syntaxe une proposition n'est rien d'autre qu'une séquence de symboles, qu'un ordinateur pourrait passer en revue pour vérifier qu'il s'agit bien d'une expression bien formée (il suffit qu'il manque une parenthèse pour que l'ordinateur déclare l'expression incompréhensible).

Exemple 3.6. *Exemples de proposition de niveau* 0 *: p, q, etc.*

Exemples de proposition de niveau 1 *: $\neg p$, $\neg q$, etc., $(p \wedge q)$, $(q \wedge r)$, $(p \vee r)$, $(q \rightarrow r)$, etc.*

Exemples de proposition de niveau 2 *: $\neg(p \wedge q)$, $(\neg q \rightarrow (p \wedge q))$, $((q \wedge r) \vee (p \vee r))$, etc.*

Etc.

Exercice 2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow r)$ *est-elle une proposition ? Et* $((p \rightarrow q))$ *? Et* $(p \rightarrow q \vee r)$ *?*

Exercice 3. *Donner cinq exemples de propositions de niveau 3 (c'est-à-dire d'éléments de F_3), cinq exemples de propositions de niveau 4 et cinq exemples d'expressions qui ne sont pas des* *propositions.*

Exercice 4. $\neg\neg p$ *est-elle une proposition de niveau 1 ou de niveau 2 ? Y a-t-il un rapport entre le niveau d'une proposition et le nombre de lettres différentes qu'elle contient ?*

Exercice 5. *Combien de propositions différentes peut-on écrire en ajoutant convenablement des parenthèses à*

$p \wedge q \to r \vee p$ *?*

Exercice 6. *Est-ce qu'on peut dire qu'une proposition de niveau* n*, c'est une proposition qui comporte* n *connecteurs ?*

3.1.4 Définition inductive de l'ensemble des propositions

La deuxième façon de décrire l'ensemble de toutes les propositions est *inductive*, elle opère par le haut, au sens où *on suppose donné* l'ensemble $\mathcal{G}$ de toutes les propositions : on fait comme si cet ensemble $\mathcal{G}$ était tombé du ciel et qu'on pouvait le caractériser de l'extérieur, sans avoir à le construire. $\mathcal{G}$ est un ensemble (infini) qui contient P et qui est tel que :

- si x appartient à $\mathcal{G}$ (autrement dit, par définition, si x est une proposition), alors $\neg x$ est une proposition, c'est-à-dire $\neg x$ appartient à $\mathcal{G}$;
- si x et y appartiennent à $\mathcal{G}$, alors $(x \wedge y)$ appartient à $\mathcal{G}$ (si x et y sont deux propositions, peu importe leurs niveaux, alors $(x \wedge y)$ est une proposition) ;
- de même pour $(x \vee y)$ et $(x \to y)$.

Intuitivement, l'ajout de la négation et la composition au moyen d'un connecteur binaire ne font pas sortir de $\mathcal{G}$. On dit que $\mathcal{G}$ est *clos pour les connecteurs*. En fait :

Définition 3.7. *L'ensemble* $\mathcal{G}$ *de toutes les propositions est le plus petit ensemble d'expressions contenant* P *et clos pour les connecteurs.*

On dispose maintenant de deux définitions différentes de l'ensemble de toutes les propositions. Il faut absolument vérifier que ces deux définitions reviennent au même, c'est-à-dire que :

$\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Remarque 3.8 (Remarque importante sur le déroulement du cours)**.** *À partir de maintenant, nous allons développer la logique propositionnelle proprement dite, c'est-à-dire démontrer un* *certain nombre de résultats* à propos de *l'univers des propositions. La logique ne consiste plus à introduire les propositions pour formaliser les énoncés : désormais, la logique consistera à faire la théorie mathématique des propositions. Autrement dit, on va démontrer logiquement,* au moyen de la logique naturelle propre aux mathématiques*, un certain nombre de théorèmes concernant les propositions.*

Remarque 3.9 (Rappel à propos du raisonnement par récurrence)**.** *Quand on veut démontrer qu'une certaine propriété est vraie de chaque nombre entier, il suffit de démontrer qu'elle est vraie de* 0 *et qu'elle se transmet de* n *à* $n + 1$*, c'est-à-dire que si on fait l'hypothèse que cette propriété est vraie de* n*, alors on peut démontrer qu'elle est également vraie de* $n + 1$*.*

Théorème 3.10. $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

Démonstration. Pour cela il suffit de vérifier que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ et que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$. Par construction $\mathcal{F}$ contient P et est clos pour les connecteurs logiques (si x et y appartiennent à $\mathcal{F}$, alors x est dans un certain F_{n_1} et y dans un certain F_{n_2}, donc x et y sont dans F_{n_0}, pour n_0 = max (n_1, n_2), et donc $x \wedge y$ est dans F_{n_0+1}, donc dans $\mathcal{F}$). Or $\mathcal{G}$ est par définition le plus petit des ensembles d'expressions contenant P et clos pour les connecteurs logiques, donc $\mathcal{G}$ est inclus dans $\mathcal{F}$.

Réciproquement, montrons que chaque F_n est inclus dans $\mathcal{G}$. On le montre par récurrence sur n. $F_0 = P$ est contenu dans $\mathcal{G}$ par définition de $\mathcal{G}$. Supposons à présent que F_n soit inclus dans $\mathcal{G}$. Alors, par définition de F_{n+1}, F_{n+1} est également inclus dans $\mathcal{G}$. En effet, tous les éléments de F_{n+1} proviennent de l'application d'un connecteur à des éléments de F_n, et donc (par hypothèse) à des éléments de $\mathcal{G}$; or $\mathcal{G}$ est clos pour les connecteurs, donc l'application d'un connecteur à des éléments de F_n fait retomber sur un élément de $\mathcal{G}$. Donc chaque F_n est contenu dans $\mathcal{G}$, et par suite la réunion de tous ces F_n est également contenue dans $\mathcal{G}$, ce qui veut dire que $\mathcal{F}$ est inclus dans $\mathcal{G}$. $\square$

Remarque 3.11. *Dans la preuve qui précède, la propriété qui est vraie de* n *est : «* F_n *est inclus dans* $\mathcal{G}$ *».*

Il est très naturel d'utiliser un raisonnement par récurrence à propos des F_n *étant donné que les* F_n *ont été en fait définis par récurrence : on a donné* F_0*, puis on a indiqué comment construire chaque* F_{n+1} *à partir de* F_n *!*

3.2 Induction, hauteur, longueur

Raisonner par récurrence sur les F_n pour montrer que *toutes les propositions* vérifient une certaine propriété π (lire : « pi »), cela revient à montrer que

- chaque proposition simple $p \in P$ vérifie π ;
- que la propriété π se transmet par ajout d'un connecteur, c'est-à-dire qu'à chaque fois que deux propositions ϕ et ψ ont la propriété π, alors $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ et $(\phi \to \psi)$ ont *également* la propriété π.

Théorème 3.12. *Si une propriété est vraie de toutes les lettres $p \in P$ et qu'elle se transmet par ajout d'un connecteur (au sens qu'on vient de dire), alors elle est vraie de n'importe quelle proposition.*

Démonstration. C'est évident d'après la définition de $\mathcal{F}$. On peut aussi le démontrer en partant de la définition de $\mathcal{G}$: soit $\mathcal{H}$ l'ensemble de toutes les expressions ayant la propriété considérée. Par hypothèse, H contient P et est clos pour les connecteurs. Or par définition $\mathcal{G}$ est le plus petit ensemble d'expressions contenant P et clos pour les connecteurs, donc $\mathcal{G}$ est contenu dans $\mathcal{H}$. Cela veut dire que tous les éléments de $\mathcal{G}$ (autrement dit toutes les propositions, puisque $\mathcal{G} = \mathcal{F}$) ont la propriété considérée. $\square$

Si l'on veut démontrer que quelque chose est vraie de n'importe quelle proposition, il n'y a qu'une seule solution, indiquée par le théorème 3.12 qu'on vient de démontrer : il faut simplement démontrer que ce quelque chose est vrai des propositions simples, puis que ce quelque chose se transmet par ajout d'un connecteur. Cette méthode de preuve s'appelle une *preuve par induction*.

Soit, mais qu'est-ce que peut bien être une propriété vraie de n'importe quelle proposition ? Quel genre de chose est une propriété de proposition ? Le théorème 3.17 qui suit va donner un exemple de propriété vraie de chaque proposition (en utilisant le théorème 3.12, évidemment).

Définition 3.13. *La* hauteur *d'une proposition ϕ n'est rien d'autre que le niveau auquel se situe ϕ : c'est le n tel que $\phi \in N_n$, ou (c'est la même chose) c'est le plus petit m tel que $\phi \in F_m$. La hauteur de ϕ se note $h(\phi)$.*

Exemple 3.14. $h(p) = 0$, $h((p \vee q)) = 1$, $h(\neg\neg p) = 2$, $h(((p \to q) \wedge r)) = 2$.

Exercice 7. $h(((p \wedge q) \to (q \to (r \vee p))))$ = ?

Définition 3.15. *La* longueur *d'une proposition est le nombre total de symboles de l'alphabet qui composent cette proposition. La longueur d'une proposition ϕ se note $l(\phi)$.*

Exemple 3.16. $l(p) = 1$, $l((p \to q)) = 5$.

Exercice 8. $l(((p \wedge q) \to (q \to (r \vee p))))$ = ?

Théorème 3.17. *La hauteur d'une proposition est toujours strictement inférieure à sa longueur, ce qu'on note :*

pour tout ϕ, $h(\phi) < l(\phi)$.

Par induction. Considérons la propriété « avoir une hauteur strictement inférieure à sa longueur », ce qu'on peut écrire comme la propriété $\pi(\phi)$ = « $h(\phi) < l(\phi)$ » (c'est-à-dire : ϕ a la propriété π si et seulement si $h(\phi) < l(\phi)$). Cette propriété π est la propriété dont on va montrer qu'elle est vraie de n'importe quelle proposition. Comment va-t-on le montrer ? Évidemment par induction, c'est-à-dire en utilisant le théorème.

1) Première étape : la propriété π est vraie de toute proposition simple, autrement dit : si l'on considère une proposition simple p, alors on voit que $h(p) < l(p)$. En effet, $h(p) = 0$ et $l(p) = 1$!

2) Seconde étape : Supposons que deux propositions ϕ et ψ quelconques aient la propriété π. Attention : on ne sait pas précisément de quelles propositions il s'agit, ce sont deux propositions prises au hasard ; en particulier, malgré les apparences, ϕ et ψ ne sont pas forcément des propositions simples, on doit raisonner en sachant que ϕ et ψ peuvent être complexes. On suppose donc que ϕ et ψ ont la propriété π. Cela signifie qu'on pose par hypothèse (cette hypothèse s'appelle « l'hypothèse d'induction », ou encore le « cran d'induction ») :

(HYP) $h(\phi) < l(\phi)$ et $h(\psi) < l(\psi)$.

Montrons à partir de là que $\neg\phi$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$ et $(\phi \to \psi)$ ont *également* la propriété π.

2.1) Commençons par $\neg\phi$: il faut montrer (par définition de π) que $h(\neg\phi) < l(\neg\phi)$. Comment faire ? La seule solution est de se ramener à ce qu'on connaît par hypothèse, c'est-à-dire au cas de ϕ. Il faut exprimer $h(\neg\phi)$ et $l(\neg\phi)$ en fonction de $h(\phi)$ et de $l(\phi)$. Il suffit pour cela de comprendre la définition de la hauteur et de la longueur :

$h(\neg\phi) = h(\phi) + 1$, car en ajoutant le connecteur $\neg$ devant ϕ on est monté d'un niveau ;

$l(\neg\phi) = l(\phi) + 1$, car en ajoutant $\neg$ devant ϕ on a ajouté un symbole à l'expression de ϕ (cf. fin de la convention 5).

Comme par hypothèse (HYP) $h(\phi) < l(\phi)$, on a $h(\phi) + 1 < l(\phi) + 1$, donc d'après ce qu'on vient de calculer : $h(\neg\phi) < l(\neg\phi)$. Donc on a démontré que π était vraie de $\neg\phi$ en partant de l'hypothèse que π était vraie de ϕ. On ne sait rien de ϕ, et pourtant on peut démontrer quelque chose ! Ceci s'explique tout à fait : on ne sait rien de ϕ précisément parce qu'on veut raisonner sur n'importe quelle proposition, et ce qu'on démontre c'est seulement une transmission : si π est vraie de ϕ, alors π est vraie de $\neg\phi$.

2.2) Passons au cas de $(\phi \wedge \psi)$. Il faut montrer que $h((\phi \wedge \psi)) < l((\phi \wedge \psi))$ en s'appuyant sur (HYP). Il faut donc, comme précédemment, calculer $h((\phi \wedge \psi))$ et $l((\phi \wedge \psi))$ en fonction de $h(\phi)$ et $h(\psi)$ d'une part, de $l(\phi)$ et $l(\psi)$ d'autre part. Le niveau de $(\phi \wedge \psi)$ est atteint en montant d'un cran (ajout du connecteur $\wedge$) en partant du niveau de ϕ ou de ψ, c'est-à-dire du niveau de ϕ si ϕ est à un niveau plus élevé que ψ, et au contraire du niveau de ψ si ψ est à un niveau plus élevé que ϕ. Autrement dit :

(a) $h((\phi \wedge \psi))$ = max($h(\phi)$, $h(\psi)$) + 1

D'autre part on *voit* que :

(b) $l((\phi \wedge \psi)) = 1 + l(\phi) + 1 + l(\psi) + 1 = l(\phi) + l(\psi) + 3.$

Il est clair que max($h(\phi)$, $h(\psi)$)+1 $< h(\phi) + h(\psi) + 1$. Donc :

$$\begin{aligned}
h((\phi \wedge \psi)) &< h(\phi) + h(\psi) + 1 \ \text{(d'après (a))}\\
&< l(\phi) + l(\psi) + 1 \ \text{(d'après (HYP))}\\
&< l(\phi) + l(\psi) + 3 \ \text{(évident)}\\
&= l((\phi \wedge \psi)) \ \text{(d'après (b)).}
\end{aligned}$$

On vient donc de démontrer que $(\phi \wedge \psi)$ vérifiait la propriété π du moment que ϕ et ψ la vérifiaient. Autrement dit que l'ajout du connecteur $\wedge$ transmettait la propriété π.

2.3) Le cas de $(\phi \vee \psi)$ et le cas de $(\phi \rightarrow \psi)$ sont exactement identiques au cas de $(\phi \wedge \psi)$ (il suffit de réécrire 2.2 en remplaçant « $\wedge$ » par « $\vee$ » et par « $\rightarrow$ »). □

Remarque 3.18 (À propos du raisonnement par induction)**.** *C'est la rencontre avec l'infini mathématique. L'ensemble de toutes les propositions est un ensemble infini en ce sens qu'on peut indéfiniment construire des propositions de plus en plus complexes. Pour prouver que quelque chose est vrai de chaque proposition, il n'est donc pas possible de passer en revue toutes les propositions, parce que ce serait sans fin. Il faut trouver un autre moyen.*

C'est nous-mêmes qui avons introduit l'ensemble (infini) des propositions, au moyen de deux définitions équivalentes (l'une par récurrence, l'autre par induction) : nous ne pouvons être dépassés par notre propre création, l'infini n'est pas Frankenstein. Comment avons-nous introduit l'ensemble infini de toutes les propositions ? Essentiellement sous la forme d'un règle : « partez d'un ensemble de lettres ; ajoutez un connecteur de façon appropriée, cela donne une nouvelle proposition ; ajouter à nouveau un connecteur (de façon appropriée) à une ou deux propositions (selon qu'il s'agit de la négation ou d'un connecteur binaire) et vous obtenez à nouveau une proposition, etc. » L'essentiel, c'est qu'on a un point de départ (les lettres) et une règle de parcours *: « à chaque niveau (indéterminé), l'ajout convenable d'un connecteur fait passer à un niveau supérieur ». Cette règle est générale : elle indique comment on monte d'un cran quel que soit le niveau auquel on se trouve (la règle reste la même pour tous les niveaux). Le fait de raisonner sur des propositions* quelconques *ϕ et ψ (à la seconde étape du raisonnement par induction) correspond au fait de reprendre la règle d'engendrement des propositions* à un niveau indéterminé. *Au fond, on se contente de reparcourir l'ensemble de toutes les propositions* tel qu'on l'a introduit *: non pas par énumération, mais par le moyen d'une règle. On montre qu'une certaine propriété* colle *à l'engendrement progressif de toutes les propositions. Le raisonnement* par induction *s'adapte à un objet (l'ensemble de toutes les propositions) qui a été défini* par induction.

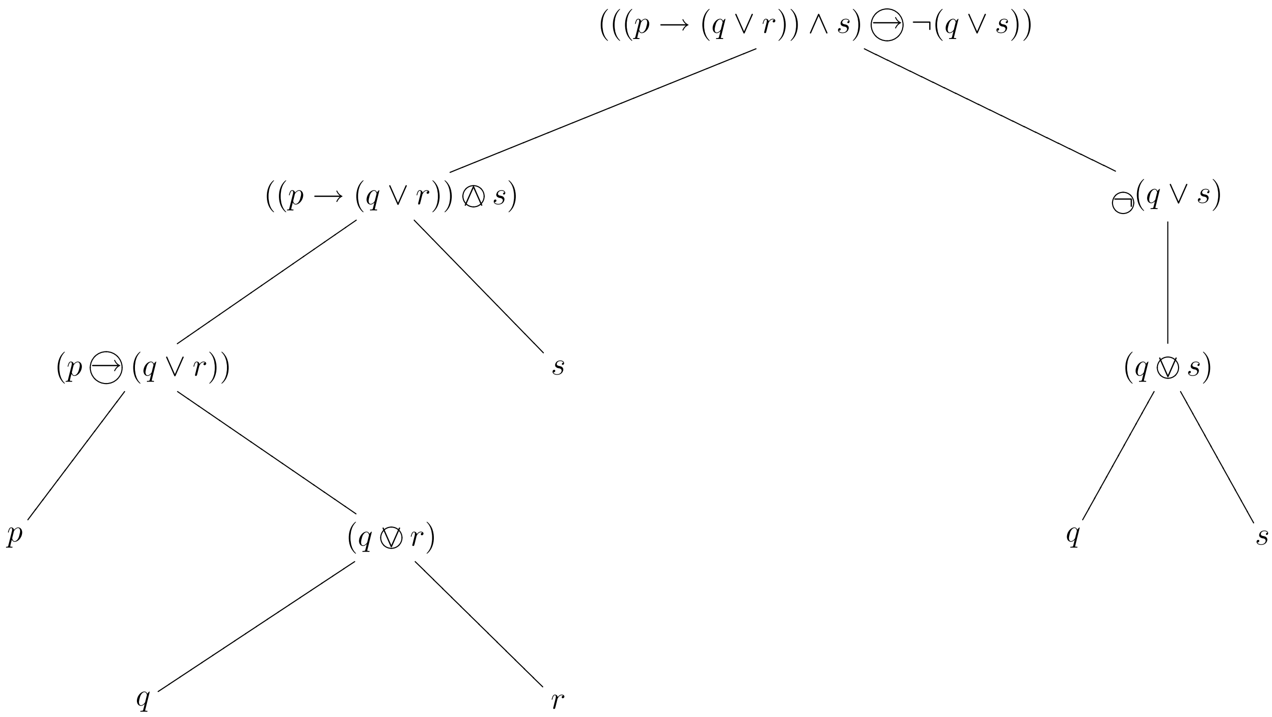
Exercice 9. *Montrer par induction que toute formule a autant de parenthèses ouvrantes que de parenthèses fermantes. (La propriété $\pi(\phi)$ à considérer sera donc ici : « $o(\phi) = f(\phi)$ », où $o(\phi)$ = nombre de parenthèses ouvrantes dans ϕ et $f(\phi)$ = nombre de parenthèses fermantes dans ϕ.)*

3.3 Arbre de décomposition d'une proposition

Toute proposition appartient à un certain niveau, ce qui veut dire qu'elle a été construite progressivement à partir de propositions simples, par ajouts successifs de connecteurs. L'arbre de décomposition d'une proposition est l'analyse qui permet de retracer l'histoire de la ocnstruction de cette proposition. Un exemple suffira pour comprendre de quoi il s'agit.

Exemple 3.19. *Soit ϕ la proposition $(((p \to (q \vee r)) \wedge s) \to (q \vee s))$.*

L'arbre de décomposition de ϕ est alors :



L'arbre de décomposition d'une formule est un fait un arbre renversé, avec la *racine* en haut (c'est la formule ϕ) et les branches poussant vers le bas. Les extrémités des différentes *branches* sont « étiquetées » par des propositions simples (sinon, c'est que la décomposition n'a pas été menée jusqu'au bout), appelées les *feuilles* de l'arbre. On aura compris qu'une branche de l'arbre de décomposition de ϕ est n'importe quel chemin partant de ϕ et allant jusqu'à l'une des feuilles.

Chaque *nœud* de l'arbre correspond au *connecteur principal* de la formule qui étiquète ce noeud (ce connecteur est à chaque fois entouré dans l'exemple ci-dessus). Par exemple $\to$ est le connecteur principal de ϕ. Ce connecteur relie les deux *sous-formules principales* de ϕ que sont $((p \to (q \vee r)) \wedge s)$ et $(q \vee s)$. Ensuite, $\wedge$ est le connecteur principal de $((p \to (q \vee r)) \wedge s)$, et $\vee$ est le connecteur principal de $(q \vee s)$. Et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de lettres c'est-à-dire de propositions sans connecteur.

Exercice 10. *Essayer de comprendre et d'expliquer que la hauteur de ϕ est égale à la longueur de la plus longue des branches de l'arbre de décomposition de ϕ. Pour calculer la hauteur d'une formule très complexe, il faut donc construire l'arbre de décomposition de cette formule, et passer en revue toutes les branches de cet arbre pour savoir quelle est la plus longue.*

3.4 Substitution à l'intérieur d'une proposition

Considérons la proposition $\phi_1 = (p \vee \neg p)$ et la proposition $\phi_2 = ((q \rightarrow r) \vee \neg(q \rightarrow r))$. Il est tentant de dire que ϕ_2 est construite selon le même schéma que ϕ_1, et qu'elle est simplement obtenue en remplaçant, dans ϕ_1, la proposition simple « p » par la proposition complexe « $(q \rightarrow r)$ ». C'est bien le cas. Il suffit pour cela de noter $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ pour indiquer qu'une proposition ϕ contient les lettres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (plus éventuellement d'autres) : par exemple $((p_2 \wedge p_3) \rightarrow p_1)$ contient p_1, p_2 et p_3.

Définition 3.20. *Soit $\phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ une proposition et soient $\psi_1, \ldots, \psi_n)$ n propositions (simples ou complexes) données. On note $\phi[\psi_1/p_1, \psi_2/p_2, \ldots, \psi_n/p_n]$ le résultat de la substitution, dans ϕ, de ψ_1 à p_1, de ψ_2 à p_2, ..., et de ψ_n à p_n.*

Exemple 3.21. *Soit $\phi = (p \rightarrow (q \vee p))$, $\psi_1 = ((p \rightarrow (s \vee t))$ et $\psi_2 = (r \wedge s)$. Alors :*

$\phi[\psi_1/p, \psi_2/q] = ((p \rightarrow (s \vee t)) \rightarrow ((r \wedge s) \vee (p \rightarrow (s \vee t))))$.

En ce sens, on peut dire qu'une proposition ϕ est le *squelette* d'une proposition ψ si ψ peut être obtenue par substitution à partir de ϕ. Ce n'est pas la même chose de dire qu'une proposition est le *schéma* d'un énoncé : une proposition ϕ est le schéma d'un énoncé e si cet énoncé e peut être obtenu en remplaçant les propositions simples de ϕ par des énoncés simples, alors qu'une proposition ϕ est le squelette d'une proposition ψ si ψ est obtenue en remplaçant les propositions simples de ϕ par des propositions (simples ou complexes, en général complexes). Les deux choses sont similaires, mais dans un cas on aboutit à un énoncé, alors que dans l'autre on retombe sur une proposition (en général plus complexe et qui ne schématise donc pas les mêmes énoncés que la proposition de départ).

Remarque 3.22. *Si ϕ est par exemple $(p \rightarrow q)$, on peut tout à fait remplacer p par une proposition complexe contenant p, par exemple $p \vee r$ (ce qui veut dire qu'en remplaçant p par autre chose on ne fait pas forcément disparaître tous les p).*

D'autre part, il faut signaler que la substitution est simultanée. Considérons par exemple $\phi = (p \rightarrow q)$. On a bien sûr :

$\phi[(q \wedge r)/p, (r \vee s)/q] = ((q \wedge r) \rightarrow (r \vee s))$.

On remarque donc que le remplacement de q a lieu en même temps que celui de p. Si le remplacement de q avait lieu après celui de p, alors, comme p est remplacé par une proposition *contenant q, il faudrait non seulement remplacer q dans ϕ, mais aussi q tel qu'il apparaît à la suite de la première substitution. Autrement dit, on écrirait :*

- *Remplacement de p dans ϕ : $((q \wedge r) \rightarrow q)$;*
- *Remplacement de q dans la proposition qu'on vient d'obtenir :*

  $((q \wedge r) \rightarrow q)[(r \vee s)/q]$ = $(((r \vee s) \wedge r) \rightarrow (r \vee s))$.

Si la substitution de p avait lieu avant celle de q, on obtiendrait donc $(((r \vee s) \wedge r) \rightarrow (r \vee s))$ au lieu de $((q \wedge r) \rightarrow (r \vee s))$. Il y aurait une sorte de rétroaction de la seconde substitution sur la première. Par opposition à ce genre de phénomènes, on convient que les substitutions au sein de ϕ (de p par une certaine proposition, de q par une autre proposition, etc.) sont simultanées.

Exercice 11. *Écrire $\phi[\psi/p]$ pour $\phi = (p \rightarrow (q \vee p))$ et $\psi = (q \rightarrow p)$.*

Écrire $\phi[\psi_1/p_1, \ldots \psi_n/p_n]$ pour $\phi = (((p_1 \vee p_2) \vee p_3) \vee \ldots \vee p_n))$ et $\psi_i = p_{i+1}$ pour $i = 1, 2, \ldots n - 1$ et $\psi_n = p_1$.

4 Sémantique de la logique propositionnelle

La syntaxe de la logique propositionnelle concernait la morphologie du langage de cette logique : elle concernait les propositions comme entités purement symboliques, littérales, qu'il est possible de construire inductivement, de manipuler, de combiner. Nous savons qu'une proposition peut être interprétée par un énoncé, *en remplaçant toutes les propositions simples contenues dans cette proposition par des énoncés simples*. Par cette opération, une proposition devient un énoncé, qui dit quelque chose du monde, et qui à ce titre est soit vrai soit faux.

Pour que les propositions cessent de se réduire à des entités purement symboliques, il faut leur assigner une valeur de vérité. Plutôt que d'interpréter les propositions simples par des énoncés simples, on procède directement en assignant arbitrairement une valeur de vérité à chaque proposition simple. La *sémantique* est l'étude des propositions en tant qu'interprétées par des valeurs de vérité (abrév. : VV).

Définition 4.1. *On appelle* distribution de valeurs de vérité *(«* ddvv *», en abrégé) l'attribution d'une VV (c'est-à-dire ou bien V ou bien F) à chacune des propositions simples (ou lettres) de l'alphabet. Ainsi, une ddvv n'est rien d'autre qu'une fonction de l'ensemble P vers l'ensemble $\{V, F\}$.*

Il y a donc autant de ddvv qu'il y a de façons différentes de donner des VV aux différentes lettres. Par exemple, supposons que p, q et r soient les seules lettres de l'alphabet. Dans ce cas, les différentes ddvv possibles sont :

- $p = V, q = V, r = V$
- $p = V, q = V, r = F$
- $p = V, q = F, r = V$
- $p = V, q = F, r = F$
- $p = F, q = V, r = V$
- $p = F, q = V, r = F$
- $p = F, q = F, r = V$
- $p = F, q = F, r = F$

Il y a $2^3 = 8$ ddvv possibles pour 3 lettres. De façon générale, il y a, si l'on prend en compte n lettres, 2^n ddvv différentes possibles.

L'important, du point de vue sémantique, n'est pas tant telle ou telle ddvv particulière (car aucune n'a de priorité sur les autres), mais plutôt ce qui se passe lorsqu'on fait varier les différentes ddvv possibles.

4.1 Tables de vérité

Chaque connecteur, on l'a vu, a un comportement spécifique du point de vue des VV. Par exemple si ϕ vaut V, alors $\neg\phi$ vaut F. Pour que $\phi \wedge \psi = V$, il faut que $\phi = V$ et $\psi = V$. Et il suffit que ϕ ou ψ vaille F pour que $\phi \wedge \psi$ vaut F. Ceci *caractérise* complètement le comportement sémantique du connecteur $\wedge$, c'est-à-dire la façon dont $\wedge$ réagit aux VV des propositions qu'il relie. On peut figurer les choses au moyen du tableau suivant, appelé la *table de vérité du connecteur* $\wedge$:

p	q	$(p \wedge q)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Chaque ligne de la table correspond à une certaine ddvv pour p et q, et du coup (sur la troisième case de chaque ligne) à une certaine valeur de vérité pour $(p \wedge q)$. L'essentiel, c'est que *la VV* *d'une conjonction dépend de façon déterminée des VV des deux propositions conjointes*. Il en est de même pour tous les autres connecteurs, et par suite la VV d'une proposition complexe dépend de façon déterminée de la VV de ses sous-formules principales, et ainsi finalement, **de proche en proche**, de la VV de chacune des propositions simples qui la composent. C'est le principe de vérifonctionnalité : la VV d'une proposition complexe est entièrement fonction des VV des lettres qu'elle contient. Les tables de vérité des autres connecteurs sont également directement tirées de la discussion précédente (section 2.2).

Table de vérité du connecteur $\neg$:

ϕ	$\neg\phi$
V	F
F	V

Table de vérité du connecteur $\vee$:

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table de vérité du connecteur $\rightarrow$:

ϕ	ψ	$(\phi \rightarrow \psi)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 4.2. *On fait figurer « ϕ » et « ψ » sur les tables de vérité ci-dessus pour souligner que le comportement de s connecteurs reste le même, qu'ils relient des propositions simples ou des propositions complexes.*

On peut ainsi, de proche en proche, connaître la VV de n'importe quelle proposition complexe en fonction des VV des propositions simples qu'elle contient. Autrement dit, on admettra le théorème suivant :

Théorème 4.3. *Toute ddvv $\delta : P \to \{V, F\}$ admet une unique extension $\overline{\delta} : \mathcal{F} \to \{V, F\}$ à l'ensemble de toutes les formules qui respecte les tables de vérité des différents connecteurs. Autrement dit, il n'y a qu'une seule ddvv $\overline{\delta}$ sur l'ensemble des propositions (et non plus seulement sur les propositions simples) telle que :*
1°) $\overline{\delta}(p) = \delta(p)$ pour toute proposition simple $p \in P$;
2.1°) $\overline{\delta}(\neg\phi) = V$ si $\overline{\delta}(\phi) = F$, et V sinon ;
2.2°)$\overline{\delta}(\phi \wedge \psi) = V$ si $\overline{\delta}(\phi) = \overline{\delta}(\psi) = V$, et F sinon ;
2.3°) $\overline{\delta}(\phi \vee \psi) = V$ si $\overline{\delta}(\phi)$ ou $\overline{\delta}(\psi) = V$, et F sinon ;
2.4°) $\overline{\delta}(\phi \to \psi) = F$ si $\overline{\delta}(\phi) = V$ et $\overline{\delta}(\psi) = F$, et F sinon.

Autrement dit, dès qu'on connaît la VV qu'une ddvv attribue à chacune des lettres, on sait quelle VV cette ddvv attribue à *n'importe quelle* proposition complexe.

Démonstration. On voit (en vertu de la définition inductive des propositions) que les règles 2.1°-2.4° permettent d'étendre δ à n'importe quelle proposition à partir de la valeur de δ sur les lettres. On montre ensuite l'unicité de l'extension de δ ...par induction : on montre que s'il existe deux extensions e et e' de δ vérifiant les règles 2.1°-2.4°, alors $e(\phi) = e'(\phi)$ pour toute proposition ϕ (en raisonnant par induction sur ϕ comme on l'a fait depuis le théorème 3.17), et ainsi que e et e' sont en fait identiques. □

Si ϕ est une proposition et δ une ddvv telle que $\overline{\delta}(\phi) = V$, on dit que δ *satisfait* ϕ.

Exemple 4.4. *On vient d'écrire les tableaux donnant la VV de $(p \to q)$ en fonction des VV de p et de q, et la VV de $(q \vee r)$ en fonction des VV de q et de r. D'autre part, on connaît la VV de $\phi = ((p \to q) \wedge (q \vee r))$ en fonction des VV de $(p \to q)$ et de $(q \vee r)$, donc finalement en* *fonction des VV de p, de q et de r.*

p	q	r	$(p \to q)$	$(q \vee r)$	ϕ
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F

Par conséquent chaque proposition donne elle aussi naissance à une table de vérité, d'autant plus grosse que la proposition contient beaucoup de lettres différentes (une proposition à n lettres peut-être vue comme une fonction qui à chaque séquence de n VV associe une certaine VV).

Remarque 4.5. *Il va de soi qu'on ne prend en considération que les lettres qui figurent dans la proposition étudiée : dans l'exemple ci-dessus, la valeur des ddvv sur d'autres lettres que p, q et r n'a pas d'importance pour faire la table de vérité de ϕ. (La première ligne représente si l'on veut toutes les ddvv qui ont en commun de donner les valeurs V, V, V à p, q, r.)*

Exercice 12. *Refaire la table de vérité ci-dessus.*

Exercice 13. *Écrire la table de vérité de la formule $\phi = (((p \wedge q) \vee \neg q) \to (p \vee r))$.*

Il est courant de noter 1 plutôt que V et 0 plutôt que F. L'intérêt est de pouvoir résumer la table de vérité de $\vee$ en écrivant par exemple : $\overline{\delta}(\neg p) = 1 - \delta(p)$ et $\overline{\delta}((p \vee q)) = \max(\delta(p), \delta(q))$. Autrement dit, l'intérêt est de rendre explicite et d'exploiter le *calcul* des VV (logique propositionnelle comme « calcul propositionnel »).

Exercice 14. *Essayer de réécrire la table de vérité des connecteurs avec des 0 et des 1 plutôt que des V et des F. Essayer de trouver la règle de calcul pour $\overline{\delta}((p \to q))$.*

4.2 Tautologies et propositions logiquement équivalentes

Définition 4.6. *On appelle* tautologie *une proposition que toute ddvv satisfait ϕ (c'est-à-dire telle que $\overline{\delta}(\phi) = V$ pour toute ddvv δ). Autrement dit, ϕ est une tautologie si toute ddvv la rend vraie, ou encore (c'est évidemment la même chose) si la dernière colonne de la table de vérité de ϕ ne comporte que des « V ». Ce qu'on note : « $\models \phi$ ».*

On appelle antilogie *toute proposition ϕ telle que la proposition $\neg\phi$ soit une tautologie.*

On dit que deux propositions ϕ et ψ sont logiquement équivalentes si la proposition $((\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi))$ (proposition qu'on note également « $(\phi \leftrightarrow \psi)$ » : le connecteur $\leftrightarrow$ » s'appelle le biconditionnel et se lit « si et seulement si ») est une tautologie. Ce qu'on note : « $\phi \equiv \psi$ ».

Exercice 15. *Remarquer que $\phi \equiv \psi$ si et seulement si n'importe quelle ddvv donne la même VV à ϕ et à ψ, autrement dit si ϕ et ψ ont la même table de vérité.*

Question : comment deux propositions peuvent-elles avoir la même table de vérité et être cependant différentes ? Réponse : p et $\neg\neg p$ sont différentes (les symboles constitutifs de ces deux propositions sont bien différents) et pourtant on comprend bien que ces deux propositions ont exactement les mêmes conditions de vérité.

Exercice 16. *Montrer que :*

- $\models (p \vee \neg p)$
- $\models (p \to p)$
- $\models (p \to (p \vee q))$
- $\models (p \to (q \to p))$
- $(p \wedge p) \equiv p$
- $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$
- $(p \to q) \equiv (\neg p \vee q)$
- $(p \wedge (q \vee r)) \equiv ((p \wedge q) \vee (p \wedge r))$

4.3 Substitution derechef

Théorème 4.7. *Soit δ une ddvv et $\psi_1, \ldots, \chi_n$ n propositions quelconques, auxquelles δ assigne les VV $\overline{\delta}(\chi_1), \ldots, \overline{\delta}(\chi_n)$. Soit d'autre part $\phi(p_1, \ldots, p_n)$ une proposition contenant les lettres $p_1, \ldots, p_n$. Soit enfin μ la ddvv définie par :*

$\overline{\delta}(\chi_i) = \mu(p_i)$ et $\mu(q) = \delta(q)$ pour toute lettre q distincte de $p_1, \ldots, p_n$

(intuitivement, cela veut dire que μ « part » au niveau où δ s'arrête avec les χ_i).

On a alors : $\overline{\mu}(\phi) = \overline{\delta}(\phi[\chi_i/p_i])$.

Démonstration. Par induction. La propriété $\pi(\phi)$ considérée est : « $\overline{\mu}(\phi) = \overline{\delta}(\phi[\chi_i/p_i])$ ».

1) Si $\phi = p_1$, alors $\phi[\chi_i/p_i] = \chi_1$ et donc

$$\overline{\mu}(\phi) = \mu(p_1) = \overline{\delta}(\chi_1) = \overline{\delta}(\phi[\chi_i/p_i])$$

(la deuxième égalité étant assurée par la définition de μ dans les hypothèses du théorème). Et donc la propriété π est bien vérifiée par p_1 (ou par n'importe quelle autre proposition simple).

2.1) On suppose que ϕ est une proposition (en dehors de cela quelconques) vérifiant : $\overline{\mu}(\phi) = \overline{\delta}(\phi[\chi_i/p_i])$, et on veut montrer à partir de là que la même propriété est vraie de $\neg\phi$. Or $\overline{\mu}(\neg\phi) = V$ exactement lorsque $\overline{\mu}(\phi) = F$, exactement lorsque $\overline{\delta}(\phi[\chi_i/p_i]) = F$ (par hypothèse d'induction), exactement lorsque $\overline{\delta}((\neg\phi)[\chi_i/p_i]) = V$ (table de vérité de $\neg$). Donc $\overline{\mu}(\neg\phi)$ et $\overline{\delta}((\neg\phi)[\chi_i/p_i])$ sont toujours la même VV, c'est-à-dire sont identiques.

2.2) On suppose (hypothèse d'induction) que ϕ et ψ sont deux propositions (en dehors de cela quelconques) vérifiant : $\overline{\mu}(\phi) = \overline{\delta}(\phi[\chi_i/p_i])$ et $\overline{\mu}(\psi) = \overline{\delta}(\phi[\chi_i/p_i])$. On veut montrer que la même propriété est alors vraie de $\phi \wedge \psi$, autrement dit que :

$$\overline{\mu}((\phi \wedge \psi)) = \overline{\delta}((\phi \wedge \psi)[\chi_i/p_i]).$$

Mais c'est bien le cas, puisque :

$$\begin{array}{lll} \overline{\mu}((\phi \wedge \psi)) = V & \text{exactement lorsque} & \overline{\mu}(\phi) = \overline{\mu}(\psi) = \overline{\mu}((\phi \wedge \psi)) \ \text{(table de vérité de } \wedge) \\ & \text{exactement lorsque} & \overline{\delta}(\phi[\chi_i/p_i]) = \overline{\delta}(\psi[\chi_i/p_i]) = V \ \text{(par hypothèse d'induction)} \\ & \text{exactement lorsque} & \overline{\delta}((\phi[\chi_i/p_i] \wedge \psi[\chi_i/p_i])) = V \\ & \text{exactement lorsque} & \overline{\delta}((\phi \wedge \psi)[\chi_i/p_i]) = V. \end{array}$$

Les cas 2.3 et 2.4 sont identiques au cas 2.2. □

Remarque 4.8. *Il y a deux types de variations, en quelque sorte orthogonales l'une à l'autre. La première consiste à faire varier les ddvv, et à voir si la VV d'une proposition reste V sous cette variation (dans ce cas, on a affaire à une tautologie). La seconde consiste au contraire à fixer une ddvv et à remplacer les lettres p_i d'une proposition ϕ par d'autres propositions χ_i.*

Théorème 4.9. *Soit $\phi(p_1, \ldots, p_n)$ une tautologie. Alors, pour n'importe quelles propositions $\chi_1, \ldots, \chi_n$,*

$\phi[\chi_i/p_i]$

est encore une tautologie.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème 4.7. En effet, soit δ une ddvv quelconque. Alors, en notant encore μ la ddvv telle qu'elle est définie dans le théorème 4.7, on a :

$\overline{\delta}([\chi_i/p_i]) = \overline{\mu}(\phi) = V$

(la seconde égalité étant due au fait que ϕ est par hypothèse une tautologie). □

Par conséquent, toute proposition construite sur le squelette d'une tautologie est encore une tautologie. Donc pour montrer que $\phi = ((p \to q) \land \neg r) \lor \neg((p \to q) \land \neg r)$ est une tautologie (ce qu'elle est effectivement), il n'est pas utile de se lancer dans un fastidieuse table de vérité à huit lignes, il suffit de remarquer que $\phi = (p \lor \neg p)[((p \to q) \land \neg r)/p]$ et que $(p \lor \neg p)$ est une tautologie. Si $(p \lor \neg p)$ est une tautologie (ce qui est bien le cas), alors toute proposition de la forme $\phi \lor \neg\phi)$ est une tautologie.

Théorème 4.10. *Soient deux propositions $\phi(p_1, \ldots, p_n)$ et $\psi(p_1, \ldots, p_n)$, et soient $\chi_1, \ldots, \chi_n$ n propositions. Alors :*

si $\phi \equiv \psi$, alors $\phi[\chi_i/p_i] \equiv \psi[\chi_i/p_i]$.

Exercice 17. *Démontrer le théorème 4.10, qui est une conséquence immédiate du théorème 4.9.*

On peut ainsi revenir à l'exercice 16 et le prolonger :

Exercice 18. *Montrer que les propositions suivantes sont des tautologies :*

- $(\phi \lor \neg\phi)$
- $((\phi \leftrightarrow \phi)$
- $(\phi \to (\phi \lor \psi))$
- $(((\phi \to \psi) \land \phi) \to \psi)$ *(« modus ponens »)*
- $(((\phi \to \psi) \land \neg\psi) \to \neg\phi)$ *(« modus tollens »)*
- $(\phi \lor (\phi \to \psi))$
- $(\phi \to (\psi \to \phi))$
- $(((\phi \to \psi) \land (\psi \to \chi)) \to (\phi \to \chi))$
- $((\phi \to \psi) \lor (\chi \to \phi))$
- $((\phi \to \psi) \lor (\phi \to \neg\psi))$

Dans chaque cas, on peut écrire la table de vérité de la tautologie en remplaçant « ϕ » par p (ou bien en faisant comme si ϕ était une proposition simple), et ensuite appliquer le théorème 4.9 : si $\models (p \vee \neg p)$, alors $\models (\phi \vee \neg\phi)$ (pour n'importe quelle proposition ϕ). Et de même pour les autres tautologies de la liste. Si l'on doit montrer des équivalences plutôt que des tautologies, c'est le théorème 4.10 (et non plus 4.9) qu'on applique, mais le principe est le même.

Montrer les équivalences suivantes :

- $(\phi \wedge \phi) \equiv \phi$
- $(\phi \vee \phi) \equiv \phi$
- $(\phi \wedge \psi) \equiv (\psi \wedge \phi)$
- $(\phi \vee \psi) \equiv (\psi \vee \phi)$
- $(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\neg\phi \vee \psi)$
- $\neg(\phi \rightarrow \psi) \equiv (\phi \wedge \neg\psi)$
- $(\phi \wedge (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \wedge \chi)$
- $(\phi \vee (\psi \vee \chi)) \equiv ((\phi \vee \psi) \vee \chi)$
- $(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \equiv ((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))$
- $(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) \equiv ((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi))$

Les deux dernières équivalence s'appellent les *lois de de Morgan*. Les deux précédentes justifient qu'on puisse sans ambiguïté $(\phi \wedge \psi \wedge \chi)$ et $(\phi \vee \psi \vee \chi)$.

4.4 Méthodes sémantiques pour montrer qu'une proposition est une tautologie

Il y en a trois principales. La première consiste à se lancer dans une table de vérité, en décomposant la proposition en propositions moins complexes, et en calculant de proche en proche chaque VV. Cela marche toujours, quitte à être fastidieux voire concrètement impraticable (si l'on a par exemple affaire à une proposition contenant plus de quatre lettres différentes).

La deuxième consiste à utiliser le théorème 4.9 ou le théorème 4.10. Par exemple $\models ((p \rightarrow q) \vee \neg(\neg p \vee q))$, car $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

La troisième consiste à remarquer une astuce. Exemple :

$\models (p \rightarrow (((q \wedge r) \rightarrow s) \vee p))$

car de deux choses l'une : ou bien p vaut F, et dans ce cas $(p \rightarrow \ldots)$ vaut V ; ou bien p vaut V

et dans ce cas $\ldots \vee p)$ vaut V, et donc $(p \to (\ldots \vee p))$ vaut V. En fait, cette astuce se ramène à la deuxième méthode, car on vient en fait d'appliquer le théorème 4.9 à la troisième proposition de l'exercice 18.

5 Théorie de la démonstration

6 Extensions de la logique propositionnelle

6.1 Logique propositionnelle intuitionniste

6.2 Logique modale propositionnelle

6.3 Logique du premier ordre

Références

[Bell et Machover(1997)] BELL, J. et MACHOVER, M. (1997), *A Course in Mathematical Logic*, Amsterdam : North-Holland.

[Blanché et Dubucs(1996)] BLANCHÉ, R. et DUBUCS, J. (1996), *La logique et son histoire*, Paris : Armand Colin.

[Cori et Lascar(1993)] CORI, R. et LASCAR, D. (1993), *Logique mathématique*, Paris : Masson. Vol. 1.

[van Dalen(2004)] VAN DALEN, D. (2004), *Logic and Structure*, Berlin : Springer, 4e éd.

[Frege(1971)] FREGE, G. (1971), *Écrits logiques et philosophiques*, Paris : Seuil. Traduction et introduction de Claude Imbert.

[Mendelson(1997)] MENDELSON, E. (1997), *Introduction to Mathematical Logic*, London : Chapman & Hall, 4e éd.

[Rivenc(1989)] RIVENC, F. (1989), *Introduction à la logique*, Paris : Payot.

[Ruyer(1990)] RUYER, B. (1990), *Logique*, Paris : PUF.

[Tarski(1941)] TARSKI, A. (1941), *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Oxford : Oxford University Press.