Introduction à la logique floue:
Les concepts fondamentaux et applications

Mastère de recherche : R.O.G.P.

Sabeur ELKOSANTINI

Sabeur.Elkosantini@isima.rnu.tn

Plan

- Partie 1 : I.A. – L'approche classique
- Partie 2 : La théorie des sous ensembles flous
- Partie 3 : Logique Floue
  - Partie 3.1 : Fuzzification
  - Partie 3.2 : Inférence floue
  - Partie 3.3 : Défuzzification
- Partie 4 : Exemple d'applications

Plan

- Partie 1 : I.A. – L'approche classique
- Partie 2 : La théorie des sous ensembles flous
- Partie 3 : Logique Floue
  - Partie 3.1 : Fuzzification
  - Partie 3.2 : Inférence floue
  - Partie 3.3 : Défuzzification
- Partie 4 : Exemple d'applications

I.A. – L'approche classique

Introduction

- « L'intelligence artificielle est une science qui s'intéresse à la réalisation de machines qui réalisent des tâches qui nécessiteraient de l'intelligence si elles étaient faites par un homme » (Minsky, 1968)

- « Science qui étudie comment faire faire à des machines des tâches pour lesquelles l'homme est, aujourd'hui encore, le meilleur » (Rich et Knight).

I.A. – L'approche classique

☞ La logique propositionnelle

- On appelle logique propositionnelle la partie de la logique qui traite des *propositions*.
  - ✓ Les propositions sont des affirmations qui ne peuvent être que vraies ou fausses.

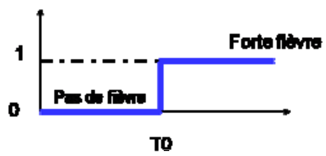
    Exemples : la température est élevée, la couleur est noire.

- Les *propositions* sont traitées comme des variables (désignées par des lettres).
- Des *opérateurs* permettent de combiner les valeurs de ces variables.

I.A. – L'approche classique

☞ La logique propositionnelle

- Les propositions ont des valeurs dans l'ensemble {Vrai, faux} ou {0 , 1}.



Exemple de propositions :

Si p, alors q Noté aussi par $p \Rightarrow q$

- Les connectives sont : $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

I.A. – L'approche classique

Règle d'inférence

- Définition: Un mécanisme par lequel on peut tirer des conclusions.

  Modus Ponens:

  $A \Rightarrow B$

  A

  B MP: 1,2

  Conjonction

  A

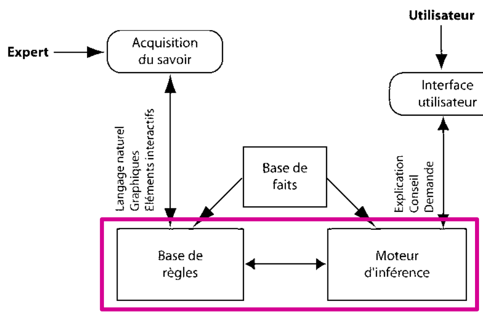
  B

  $A \Rightarrow B$ CONJ: 1,2

I.A. – L'approche classique

Les systèmes experts

- Un système expert utilise la connaissance correspondante à un domaine spécifique afin de fournir une performance comparable à l'expert humain.
- Les connaissances sont issues de l'expertise ou/et de la pratique .



Structure d'un système expert

I.A. – L'approche classique

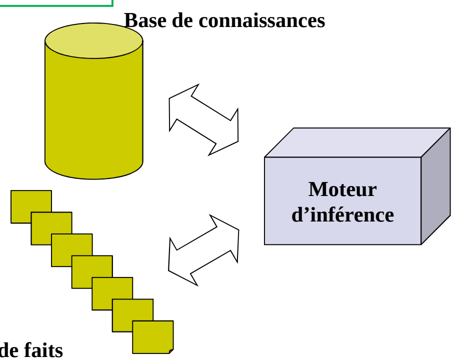
Les systèmes experts

- *La base de règles* (ou base de connaissances) contient les connaissances concernant la résolution du problème.
- *Le moteur d'inférence* applique une stratégie de résolution en utilisant les connaissances et ceci pour en dériver une nouvelle information.
- *Le moteur d'inférence* simule le raisonnement de l'expert en enchaînant les connaissances suivant une certaine logique.

I.A. – L'approche classique

Les systèmes experts

R1 : **Si** (distance.<.2km) **Alors** (aller.à.pied)
R2 : **Si** ((non distance.<.2km) ^ distance.<.300km) **Alors** (prendre.le.train)
R3 : **Si** (non distance.<.300km) **Alors** (prendre.l'avion)
R4 : **Si** (acheter.un.billet ^ avoir.le.téléphone) **Alors** (téléphoner.à.l'agence)
R5 : **Si** (acheter.un.billet ^ (non avoir.le.téléphone)) **Alors** (aller.à.l'agence)
R6 : **Si** (prendre.l'avion) **Alors** (acheter.un.billet)
R7 : **Si** (durée.>.2.jours ^ être.fonctionnaire) **Alors** (non prendre.l'avion)

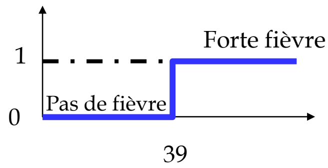


- F1 : (non distance.<.300km)
- F2 : (avoir.le.téléphone)

I.A. – L'approche classique

☞ Les systèmes experts

- Exemple d'application : aide au diagnostique des malades :
  - ✓ Un patient atteint d'hépatite présente généralement les symptômes suivants :
    - ➢ Le patient a une forte fièvre,
    - ➢ Sa peau présente une coloration jaune,
    - ➢ Il a des nausées.



Si le patient à 37,5°C de température ⇒ Le patient n'a pas de forte fièvre.

Si le patient n'a pas de forte fièvre ⇒ Le patient n'a pas d'hépatite.

I.A. – L'approche classique

☞ Les systèmes experts : les moteurs d'inférences

- Dans un système à base de règles, les connaissances sont représentées par des *règles*.
- Le moteur d'inférence peut fonctionner en *chaînage arrière* ou *avant*.
- *Le moteur d'inférence* simule le raisonnement de l'expert en enchaînant les connaissances suivant une certaine logique.

I.A. – L'approche classique

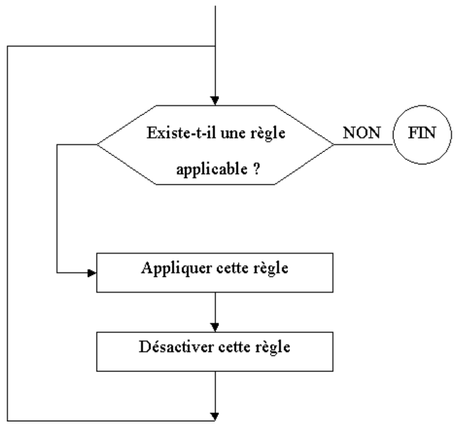
☞ Les systèmes experts : les moteurs d'inférences

- Le chaînage avant: raisonnement guidé par le but :
  - ✓ Part des faits pour arriver au but
  - ✓ Ne sélectionne que les règles dont la partie prémisse est vérifiée par les faits présents
  - ✓ Déclenchement des règles jusqu'à épuisement des faits possibles à produire.
  - ✓ S'arrête :
    - ➢ Avec succès dès que le but est atteint
    - ➢ Avec échec quand il n'y a plus de règles applicables

I.A. – L'approche classique

☞ Les systèmes experts : les moteurs d'inférences

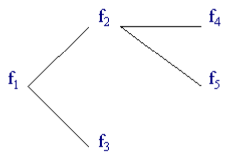
- Le chaînage avant: raisonnement guidé par le but :
  - ✓ Algorithme :



I.A. – L’approche classique

Les systèmes experts : les moteurs d’inférences

- Le chaînage avant: raisonnement guidé par le but :
  - Exemple :
    - si **f1 est vrai** et **f1 → f2** alors **<u>f2 est vrai</u>**.



- de f1 sont déduits f2 et f3
- de f2 sont déduits f4 et f5
- etc ...

I.A. – L’approche classique

Les systèmes experts : les moteurs d’inférences

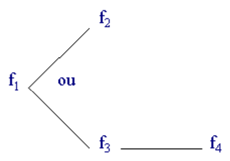
- Le chaînage arrière : raisonnement guidé par le but :
  - Le système cherche dans sa base de connaissances les règles dont la conclusion correspond au but posé.
  - Une des règles est choisie selon une stratégie donnée.
  - Ses prémisses sont empilées dans la mémoire de travail et deviennent les sous-buts actuels à résoudre.
  - Le système continue à travailler de cette façon jusqu’à ce que tous les sous buts placés en mémoire soient vérifiés.

Le système garde aussi la trace de son raisonnement sous forme d’un graphe

I.A. – L'approche classique

☞ Les systèmes experts : les moteurs d'inférences

- Le chaînage arrière : raisonnement guidé par le but :
  - ✓ Exemple :
    - Si est **q non vrai** et **si p → q** alors **<u>p est non vrai</u>**.



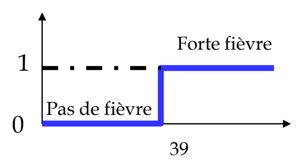
- de f4 est déduit f3
- de f3 est déduit f1

I.A. – L'approche classique

☞ Inconvénients

- Les variables décrivant des états sont booléennes.

La variable booléenne, qui ne peut prendre que deux valeurs (vrai ou faux) est mal adaptée à la représentation de la plupart des phénomènes courants.



<u>Et si la température était de 38,99 ?!</u>
<u>Et si la température était de 39,01 ?!</u>

<u>Et si le phénomène était plus complexe ?!</u>

I.A. – L'approche classique

☞ **Inconvénients**

Exemple : Dans un environnement de gestion des ressources humaines, que signifie : Le stress de l'opérateur est 0.8

~~Valuation numérique~~ ↓ Valuation qualitative: langage naturel

Le stress de l'opérateur est *fort*

Comment représenter ces valeurs linguistiques ?

Comment formuler cette quantification linguistique ?

Comment intégrer ces valeurs linguistiques dans un système intelligent ?

Plan

- Partie 1 : I.A. – L'approche classique
- Partie 2 : La théorie des sous ensembles flous
- Partie 3 : Logique Floue
  - Partie 3.1 : Fuzzification
  - Partie 3.2 : Inférence floue
  - Partie 3.3 : Défuzzification
- Partie 4 : Exemples d'applications

Théorie des sous ensembles flous

☞ L'incertain et l'imprécis

- Je crois que la température est élevée.

  Incertitude... "Je crois, mais ce n'est pas sûr."

  Mise en question de la validité de l'observation

- La température de la chambre est très élevée

  Imprécision... Que signifie " très élevée " ?

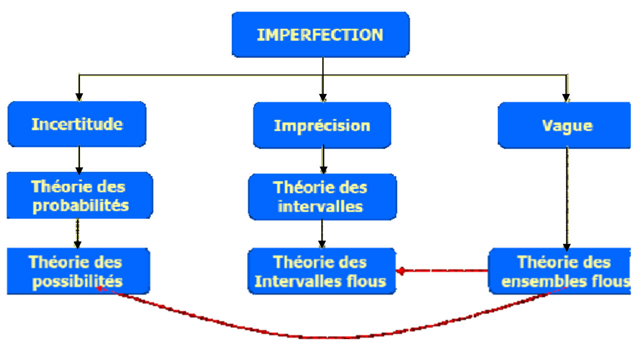
  Appréciation

- La température de la chambre a augmenté de à peu prés 20%

  Imprécision ou incertitude ??

Théorie des sous ensembles flous

☞ L'incertain et l'imprécis



Théorie des sous ensembles flous

Historique

- 1965 : Théorie des ensembles flous introduite par **L.A. Zadeh** (UC Berkeley)
- En 1973, le Pr. Zadeh publie un article (dans l'IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics) qui mentionne pour la première fois le terme de variables linguistiques (dont la valeur est un mot et non un nombre).
- En 1974, première application industrielle. Régulation floue d'une chaudière à vapeur réalisée par Mamdani.
- En 1980, F.L. Smidth & Co. A/S (au Danemark) met en application la théorie de la logique floue dans le contrôle de fours à ciment. C'est la première mise en œuvre pratique de cette nouvelle théorie.

Théorie des sous ensembles flous

Historique

- Dans les années 80, plusieurs applications commencent à immerger (notamment au Japon).
- 1990: Généralisation de l'utilisation de cette technique.
  - ✓ Appareils électroménagers (laves-linges, aspirateurs, autocuiseurs,...etc) ,
  - ✓ Systèmes audio-visuels (appareils de photos autofocus, caméscopes à stabilisateur d'images, photocopieurs,...)
  - ✓ Systèmes automobiles embarqués (BVA, ABS, suspension, climatisation,...etc.),
  - ✓ Systèmes autonomes mobiles,
  - ✓ Systèmes de décision, diagnostic, reconnaissance,
  - ✓ Systèmes de contrôle/commande dans la plupart des domaines industriels de production.

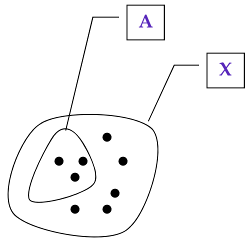
Théorie des sous ensembles flous

Concepts fondamentaux

- Le concept de sous-ensemble flou permet des graduations dans l'appartenance d'un élément à une classe.
- Dans l'approche classique :

Si μ_A est la fonction d'appartenance de l'ensemble A

$$\forall x \in X \qquad \mu_A(x) = 0 \quad \text{si } x \notin X$$
$$\mu_A(x) = 1 \quad \text{si } x \in X$$



L'ensemble *A* est défini par : $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$

Théorie des sous ensembles flous

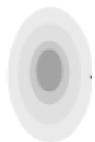
Concepts fondamentaux

- Dans l'approche floue :
  - ✓ Un élément peut appartenir plus ou moins fortement à cette classe.
  - ✓ Un sous-ensemble flou *A* d'un référentiel *X* est caractérisé par une fonction d'appartenance μ_A :

Si μ_A est la fonction d'appartenance de l'ensemble flou A

$$\forall x \in X \qquad \mu_A \in [0,1]$$

L'ensemble *A* est défini par : $A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$



Théorie des sous ensembles flous

Concepts fondamentaux

Si $\mu_A(x)=0{,}10$
x appartient à l'ensemble flou A avec un degré d'appartenance de 10%

⇔ Faible appartenance ⇔ Traduction de la valeur linguistique « Faible »

Si $\mu_A(x)=0{,}90$
x appartient à l'ensemble flou A avec un degré d'appartenance de 90%

⇔ Forte appartenance ⇔ Traduction de la valeur linguistique « Fort»

degré d'appartenance = valeur de vérité.

Un ensemble flou est totalement déterminé par sa fonction d'appartenance

Théorie des sous ensembles flous

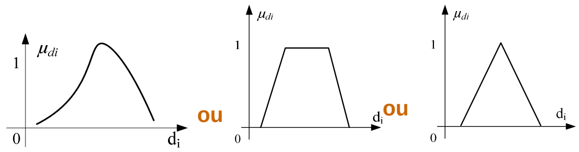
Concepts fondamentaux

- La fonction d'appartenance décrivant un sous-ensemble flou est caractérisée par quatre propriétés :
  - ✓ Le type : la forme du nombre flou qui peut être triangulaire, trapézoïdale, gaussienne ou sigmoïdale.
  - ✓ La hauteur : $H(A) = Sup_{x \in X} (\mu_A(x))$ de la fonction d'appartenance. Un sous-ensemble flou est dit normalisé s'il est de hauteur 1.
  - ✓ Le noyau : $N(A) = \{x / \mu_A(x) = 1\}$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent totalement à A. Pour les fonctions de type triangulaire, le noyau est un singleton qui est appelé aussi valeur modale.
  - ✓ Le support : $S(A) = \{x / \mu A(x) \neq 0\}$; cet ensemble décrit l'ensemble des éléments qui sont partiellement dans A.

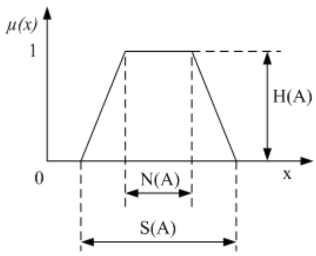
Théorie des sous ensembles flous

Concepts fondamentaux

- La fonction d'appartenance décrivant un sous-ensemble flou est caractérisée par quatre propriétés :
  - ✓ Le type :



  - ✓ La hauteur, le noyau, le support :

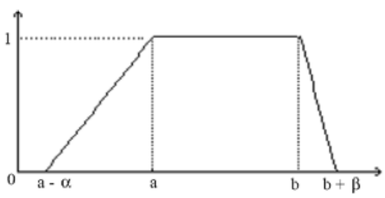


Théorie des sous ensembles flous

Notation :

- L'intervalle flou couramment utilisé dans R est décrit par sa fonction d'appartenance.
- Un nombre flou trapézoïdale est notée généralement par (a, b, α, β) :

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x, \ \text{(x hors du support de A)} \\ 1 \text{ si } a < x < b, \ \text{(x dans le noyau de A)} \\ 1 + (x - a) / \alpha \text{ si } a - \alpha < x < a, \\ 1 - (b - x) / \beta \text{ si } b < x < b + \beta \end{cases}$$



Théorie des sous ensembles flous

Notation :

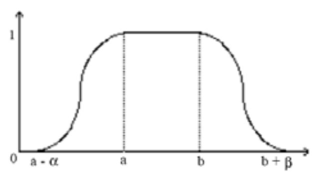
- Un nombre flou triangulaire est un cas particulier d'un nombre trapézoïdale. Il est notée généralement par (a, α, β).
- Dans le domaine de la recherche, ce type de nombres flous est très utilisé :
  - ✓ Ils contiennent tous les intervalles de confiance des distributions de probabilité symétrique ayant même noyau et même support que les nombres flous (Dubois et al., 2004)
  - ✓ La traduction de l'expertise humaine vers ce type de nombre flou est plus facile.

La manipulation mathématique est plus facile avec cette forme

Théorie des sous ensembles flous

Notation :

- La fonction d'appartenance d'un nombre flou avec des cotés paraboliques est définie de la manière suivante :

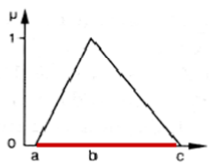


$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < a - \alpha \text{ ou } b + \beta < x, \text{ (x hors du support de A)} \\ 1 \text{ si } a < x < b, \text{ (x dans le noyau de A)} \\ \text{si } a - \alpha < x < a - \alpha/2 \text{ alors } 2(x - a + \alpha)^2/\alpha^2 \\ \text{si } a - \alpha/2 < x < a \text{ alors } 1 + 2(x - a)^2/\alpha^2 \\ \text{si } b < x < b + \beta/2 \text{ alors} 1 - 2(b - x)^2/\beta^2 \\ \text{si } a + \beta/2 < x < b \text{ alors } 2(x - b + \beta)^2/\beta^2 \end{cases}$$

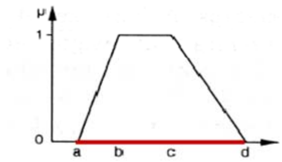
Les nombres flous de forme gaussienne est un cas particulier

Théorie des sous ensembles flous

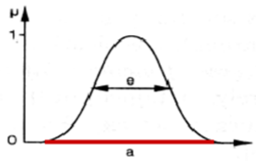
☞ Concepts fondamentaux : le support



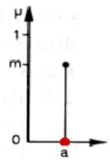
Triangle [a,b,c]



Trapézoïdale [a,b,c,d]



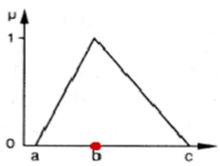
Gaussien [a, Θ]



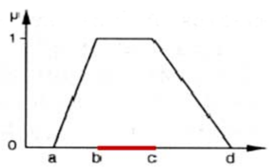
singleton [a, m]

Théorie des sous ensembles flous

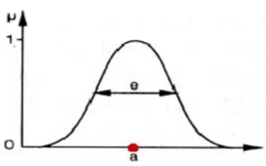
☞ Concepts fondamentaux : le noyau



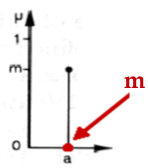
Triangle [a,b,c]



Trapézoïdale [a,b,c,d]



Gaussien [a, Θ]



singleton [a, m]

Théorie des sous ensembles flous

Les opérateurs flous

- Extension des opérations de la théorie des ensembles classiques: =, ∪, ∩, ⊂, complément.
- Soient A et B deux sefs de X, définis par les fonctions d'apprentissage μ_A et μ_B :

Égalité de sefs:

$A = B$ *ssi* $\forall x \in X, \mu_A(x) = \mu_B(x)$

Inclusion de sefs:

$A \subset B$ *ssi* $\forall x \in X, \mu_A(x) < \mu_B(x)$

Intersection de sefs: $A \cap B$:

$\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Union de sefs: $A \cup B$:

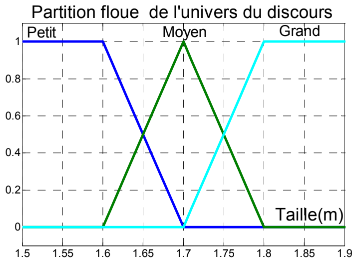
$\forall x \in X, \mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$

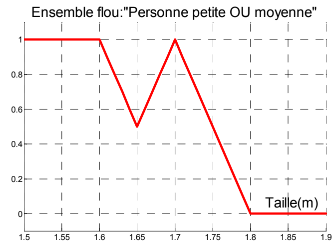
Théorie des sous ensembles flous

Les opérateurs flous : Union

L'ensemble des personnes petites OU moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{A \cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U$$



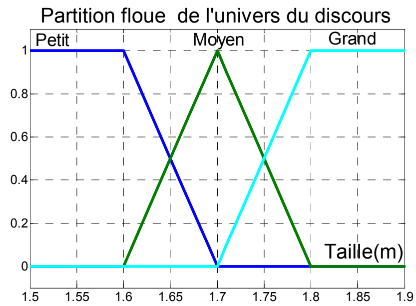


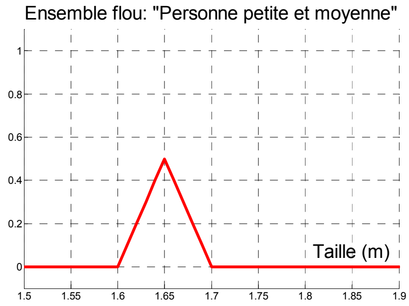
Théorie des sous ensembles flous

Les opérateurs flous : Intersection

L'ensemble des personnes petites ET moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{A\cup B}(x) = min\left(\mu_A(x), \mu_B(x)\right) \quad \forall x \in U$$



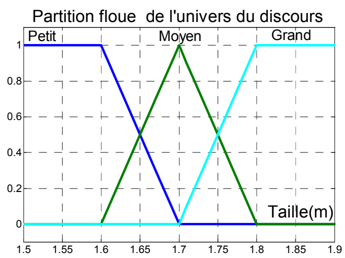


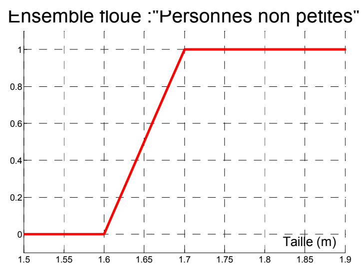
Théorie des sous ensembles flous

Les opérateurs flous : complément

L'ensemble des personnes NON petites est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in U$$





Théorie des sous ensembles flous

☞ Les opérateurs flous : propriétés

- Certaines propriétés de la théorie des ensembles classiques sont vérifiées :
  - ✓ $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup X = X$, $A \cap X = A$
  - ✓ Associativité de ∩ et de ∪ : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - ✓ Commutativité de ∩ et de ∪ : $A \cap B = B \cap A$
  - ✓ Distributivité de ∩ par rapport à U :
    - ➢ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - ➢ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Théorie des sous ensembles flous

☞ Les opérateurs flous : propriétés

- Certaines propriétés de la théorie des ensembles classiques sont vérifiées :
  - ✓ La relation de Morgan :
    - ➢ $\neg(A \cap B) = (\neg A) \cup (\neg B)$
    - ➢ $\neg(A \cup B) = (\neg A) \cap (\neg B)$
  - ✓ Les lois d'absorption :
    - ➢ $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

Théorie des sous ensembles flous

Les opérateurs arithmétiques :

- L'addition :

  $\mu_{A+B}(z) = \max \{\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \;/\; x + y = z\}$:

- La multiplication :

  $\mu_{A.B}(z) = \max \{\min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \;/\; xy = z\}$

A+B :
$(a, b, \alpha, \beta) + (a', b', \alpha', \beta') = (a + a', b + b', \alpha + \alpha', \beta + \beta')$

λB :
$\lambda\,(a, b, \alpha, \beta) = (\lambda\, a, \lambda\, b, \lambda\, \alpha, \lambda\, \beta)$

Et pour la multiplication et la division ?

Théorie des sous ensembles flous

Le produit cartésien :

- Le produit cartésien est défini par $\mu_{A*B}(x, y) = \min [\mu_A(x), \mu_B(y)]$.

Cardinalité d'un ensemble flou

- Dans le cas fini, on peut définir le nombre d'éléments d'un ensemble flou A par : $card(A) = \sum \mu_A(x)$
- Si A est continu, le nombre d'éléments d'un ensemble flou A par :

$$card(A) = \int_x \mu_x(x)dx$$

Théorie des sous ensembles flous

☞ La distance de Hamming

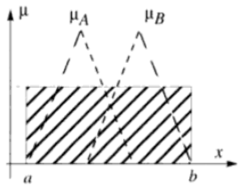
- La notion de distance entre ensembles flous peut être utile pour définir des relations telles que «*à peu près égal*» ou «*très supérieur à*».
- La distance de Hamming est : d(A, B) = (x ∈ X) | $\mu_A(x)$ - $\mu_B(x)$ |

  Ou autrement :

$$\int_a^b |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx$$

- La distance de Hamming relative est :

$$\delta(A,B) = \frac{d(A,B)}{card(X)}$$



Théorie des sous ensembles flous

☞ La distance de Hamming

- Soit un ensemble de référence X={a,b,c,d,e,f,g} et deux sous ensembles flous représentés de la manière suivante :

	a	b	c	d	e	f	g
A =	0.5	1	0.7	0	0.2	0.5	0.9
B =	0.8	0.2	0.7	0.3	0.1	1	0.6

Quelle est la distance de Hamming entre les deux sous ensembles flous A et B ?

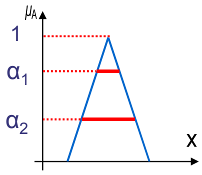
Théorie des sous ensembles flous

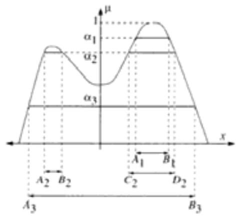
Les α-coupes

- Il est important aussi d'introduire le concept d'α-coupe ou coupe de niveau α:
- Une α-coupe d'un sous-ensemble ou A pour une valeur $\alpha \in [0..1]$ est le sous-ensemble classique noté A_α et déni par :

$$A_\alpha = \{x \,;\, \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

- Les α-coupes A_α d'un sous-ensemble A sont des intervalles non-flous emboités par rapport à la valeur de niveau α.

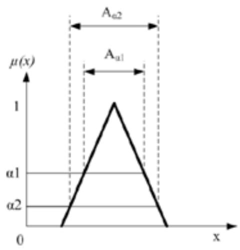




Théorie des sous ensembles flous

Les α-coupes

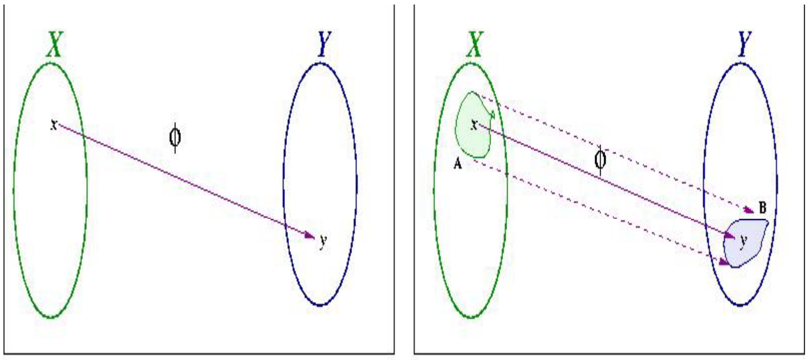
Si $\alpha_1 \geq \alpha_2$ alors $A_{\alpha 2} \supseteq A_{\alpha 1}$



- Les α-coupes des sous-ensembles A et B flous vérifient les propriétés suivantes:
  - ✓ $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$
  - ✓ $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$
  - ✓ Si $(A \supseteq B)_\alpha$ alors $A_\alpha \supseteq B_\alpha$
  - ✓ $(\neg A)_{1-\alpha 1} \neq \neg(A_\alpha)$, sauf pour $\alpha = 1/2$.

Principe d'extension

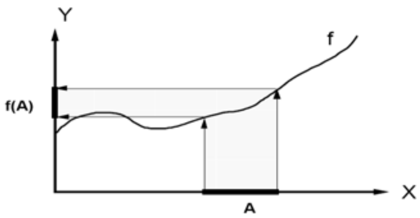
- Utilisé pour étendre une fonction classique aux sefs :

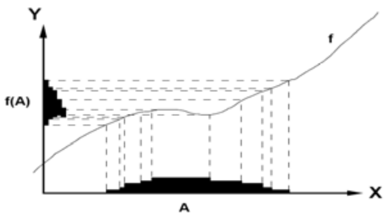


Fonction classique Fonction étendue

Principe d'extension

Mesure précise





Mesure floue

Théorie des sous ensembles flous

☞ Principe d'extension

- Principe : possédant une fonction sur un univers classique X, permettre son utilisation avec des sefs de X .

> Définition : Étant donné un sef A de X, et une application φ de X vers Y, le principe d'extension permet de définir un sef B de Y associé à A par φ :
>
> $\forall y \in Y,\ \mu_B(y) = \sup_{\{x,\ \varphi(x)=y\}} \mu_A(x)$
>
> avec $\sup_{\varphi} \mu_A(x) = 0$

- Le sef B est l'image du sef A par la fonction φ.

Théorie des sous ensembles flous

☞ Les valeurs linguistiques :

> **Fonction d'appartenance, distance, cardinalité, ensemble flou, etc.**
> **… et après !!???**

Théorie des sous ensembles flous

☞ Les valeurs linguistiques :

Exemple : Dans un environnement de gestion des ressources humaines, que signifie : Le stress de l'opérateur est 0.8

~~Valuation numérique~~ ↓ Valuation qualitative: langage naturel

Le stress de l'opérateur est *fort*

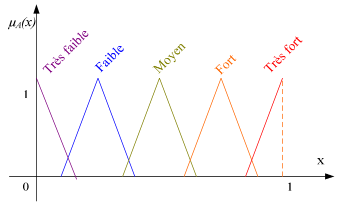
Comment représenter ces valeurs linguistiques ?

Comment formuler cette quantification linguistique ?

Comment intégrer ces valeurs linguistiques dans un système intelligent ?

Théorie des sous ensembles flous

☞ Les valeurs linguistiques :



- L'ensemble de référence d'un mot du langage naturel s'appelle l'univers du discours.
- Une variable linguistique représente un état dans le système à régler.
- Sa valeur est définie dans des termes linguistiques qui peuvent être des mots ou des phrases d'un langage naturel.

Théorie des sous ensembles flous

☞ Les valeurs linguistiques :

- Chaque variable linguistique est caractérisée par l'ensemble :

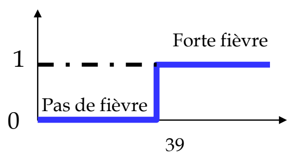
  <x, T(x), U, G, M>

  avec :

  - x est le nom de la variable,
  - T(x) est l'ensemble des valeurs linguistique que peut prendre x
  - U est l'univers du discours associé avec la valeur de base
  - G est la règle syntaxique pour générer les valeurs linguistique de x
  - M est la règle sémantique pour associer un sens à chaque valeur linguistique

Théorie des sous ensembles flous

☞ Les valeurs linguistiques :



Si le patient à 38,9°C de température ⇒ Le patient n'a pas de forte fièvre.

Si le patient n'a pas de forte fièvre ⇒ Le patient n'a pas d'hépatite.

↓

Si le patient n'a pas de forte fièvre ⇒ Le patient n'a pas d'hépatite.

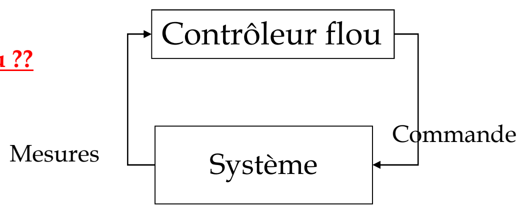
<u>Comment représenter « forte »?</u>

Plan

- Partie 1 : I.A. – L'approche classique
- Partie 2 : La théorie des sous ensembles flous
- **Partie 3 : Logique Floue**
  - Partie 3.1 : Fuzzification
  - Partie 3.2 : Inférence floue
  - Partie 3.3 : Défuzzification
- Partie 4 : Exemples d'applications

Logique floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**



Mais pourquoi un contrôleur flou ??

Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{c}A \Rightarrow B \\ A\end{array}}{B}$$

Et si c'est à peu près A ??

Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{c}A \Rightarrow B \\ A'\end{array}}{??}$$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Les méthodes d'inférence utilisées dans la logique classique, *modus tollens* et *modus ponens* ne permettent pas de raisonner lorsque les règles ou les faits sont dénis de façon imparfaite.
- Cette forme de raisonnement a été adaptée à la logique floue pour prendre en compte les informations et les règles vagues que les systèmes d'inférence peuvent contenir.

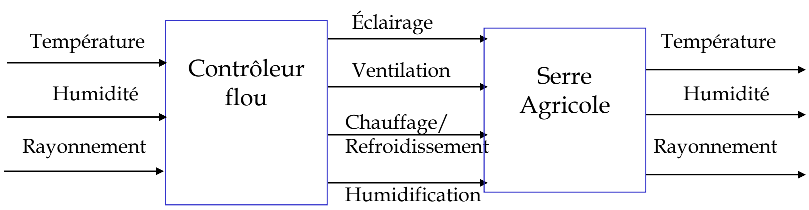
Modus Ponens généralisé :

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow B \\ A' \\ \hline B' \end{array}$$

Logique floue

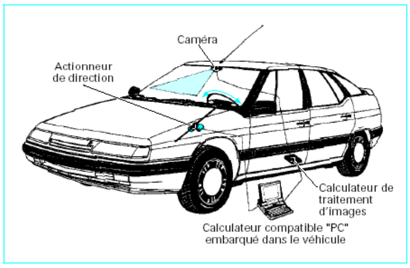
☞ Conception de contrôleur flou :

source : cours de LESCIEUX



Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :



source : (Riat & Aurrand-lions; 98)

Position
Cap/chaussée
Vitesse
Angle volant

Contrôleur flou

Pas moteur volant

Véhicule autonome

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

Mais concrètement, qu'est ce qu'un contrôleur flou ??

Stress
Fatigue
Conflit

Contrôleur flou

Performance

Robot

Système d'inférence flou

R1: SI Degré (Stress de Robot) est *Très faible* ET Degré (Fatigue de Robot) est *Très faible*
ET Degré (Conflit de Robot) est *Faible*
ALORS Performance est *ZE*

R2: SI Degré (Stress de Robot) est *Modéré* ET Degré (Fatigue de Robot) est *Faible*
ET Degré (Conflit de Robot) est *Modéré*
ALORS Performance est *PS*

R3:…

Conception de contrôleur flou :

Si *Temps est beau* ET *Moment est DébutMatinée* ALORS *Moral est haut*

Prémisses — Conjonction — Implication — Conclusion

Conception de contrôleur flou :

- Les conjonctions :
  - La définition des opérateurs logiques est assurée selon le type de la fonction d'appartenance utilisée.
  - Quelques opérateurs mathématiques :

Nom	Intersection "ET"	Union "OU"	"NON"
Zadeh	$\mu_{AETB} = min(\mu_A, \mu_B)$	$\mu_{AOUB} = Max(\mu_A, \mu_B)$	$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$
Probabiliste	$\mu_{AETB} = \mu_A \cdot \mu_B)$	$\mu_{AOUB} = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B$	$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$
Lukasiewicz	$\mu_{AETB} = Max(\mu_A + \mu_B - 1, 0)$	$\mu_{AETB} = min(\mu_A + \mu_B, 1)$	$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$
Weber	$\mu_{AETB} = \begin{cases} \mu_A & si \ \ \mu_B = 1 \\ \mu_B & si \ \ \mu_A = 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$	$\mu_{AOUB} = \begin{cases} \mu_A & si \ \mu_B = 0 \\ \mu_B & si \ \mu_A = 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$	$\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- L'implication :
  - L'implication floue est une relation qui associe à toute règle floue R une fonction d'appartenance qui peut être définie de différentes manières.

	Nom	Fonction d'appartenance
R_m	Mamdani	$min(\mu_A, \mu_B)$
R_l	Larsen	$\mu_A \times \mu_B$
R_r	Reichenbach	$1 - \mu_A + \mu_A \times \mu_B$
R_w	Willmott	$Max(1 - \mu_A, min(\mu_A, \mu_B))$
R_{rg}	Rescher-Gaines	$\begin{cases} 1 & si\ \mu_A \leq \mu_B \\ 0 & sinon \end{cases}$
R_{kd}	Kleene-Dienes	$Max(1 - \mu_A, \mu_B)$

	Nom	Fonction d'appartenance
R_{bg}	Brouwer-Gödel	$\begin{cases} 1 & si\ \mu_A \leq \mu_B \\ \mu_B & sinon \end{cases}$
R_g	Goguen	$\begin{cases} min(\frac{\mu_B}{\mu_A}, 1) & si\ \mu_A \neq 0 \\ 1 & sinon \end{cases}$
R_l	Lukasiewicz	$min(1 - \mu_A + \mu_B, 1))$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Il y a 5 étapes nécessaires lors de la conception d'un contrôleur flou :
  - ➢ Définition des entrées et des sorties du contrôleur:
    - ✓ *nombres, noms, types, univers de discours*
  - ➢ subdivision de toutes les variables d'entrées et de sorties en sous ensembles flous :
    - ✓ *nombres de subdivisions, types de subdivisions, noms, paramètres.*
  - ➢ Définition de la base de règles :
    - ✓ *nombre de règles, type de règles, les combinaisons possibles, les résultats.*
  - ➢ Sélection de la méthode d'inférence
  - ➢ Sélection de la méthode de défuzzification

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Il y a 5 étapes à suivre pour aboutir à la sortie d'un système flou :

Entrée

↓

Fuzzification

↓

Calcul de degré d'activation de chaque règle

↓

Recherche de la fonction d'appartenance pour la sortie de chaque règle

↓

Recherche de la fonction d'appartenance résultante globale

↓

Defuzzification

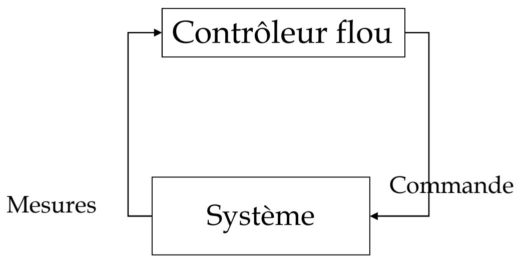
↓

Sortie

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

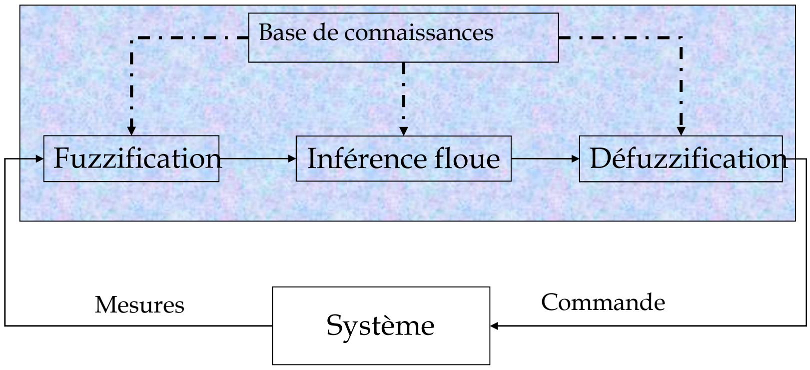
- Il y a 5 étapes à suivre pour aboutir à la sortie d'un système flou :



Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

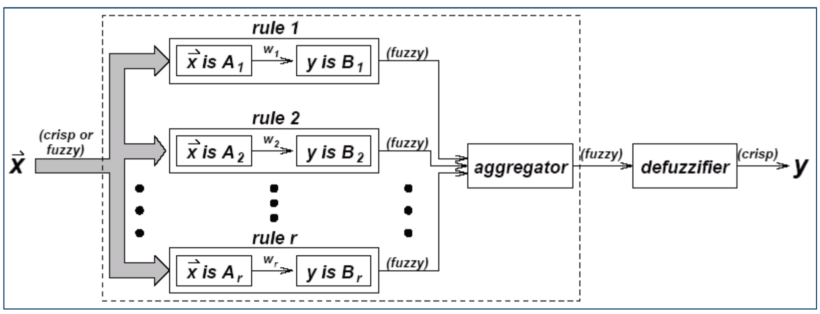
- Il y a 5 étapes à suivre pour aboutir à la sortie d'un système flou :



Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Il y a 5 étapes à suivre pour aboutir à la sortie d'un système flou :



source : cours de Tai-Wen Yue

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

1. Fuzzification : processus qui consiste à transformer une grandeur numérique en un sous-ensemble flou.
   - ✓ Qualifier une valeur numérique avec un terme linguistique.

Pierre mesure 1m625 → **Interface de fuzzification** →
- « Pierre est petit » à un degré de 75%
- « Pierre est moyen » à 25%
- « Pierre est grand » à 0%

Et si on augmente le support des nombres flous utilisés ? ?

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

1. Comment fuzzifier ?
   1. Donner l'univers du discours : plage de variations possibles de l'entrée considérée.
   2. Une partition en classe floue de cet univers.
   3. Les fonctions d'appartenances de chacune de ces classes.

- Exemple : Selon les valeurs des entrées , le système flou indiquera qu'en sortie la puissance de chauffe devra prendre les valeurs de sortie « faible » ou « moyenne » ou « forte ».

La fuzzification des variables est une phase délicate du processus mis en œuvre par la logique floue.
Elle est souvent réalisée de manière itérative et requiert de l'expérience.

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

2. Calcul du degré d'activation de chaque règle :
   - ✓ L'activation des règles consiste à appliquer une norme triangulaire (ou T-norme) pour obtenir le degré d'activation de chacune.
   - ✓ C'est une valeur comprise entre 0 et 1.

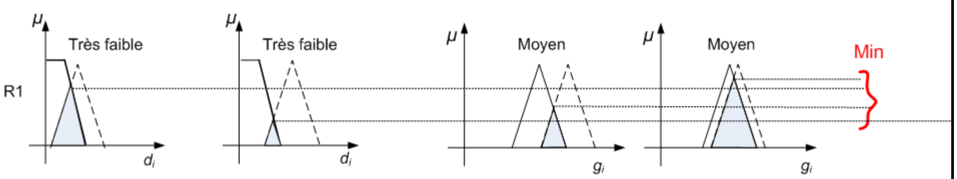
	Opérateur de MGP	Implication floue
Lukasiewicz	$\top_L(u,v) = max(u+v-1,0)$	R_k, R_l, R_m,R_p
Probabiliste	$\top_P(u,v) = u \cdot v$	R_{bg}, R_m, R_p
Zadeh	$\top_Z(u,v) = min(u,v)$	R_{bg}, R_m, R_p

Quelques exemples de t-normes

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

2. Calcul du degré d'activation de chaque règle :

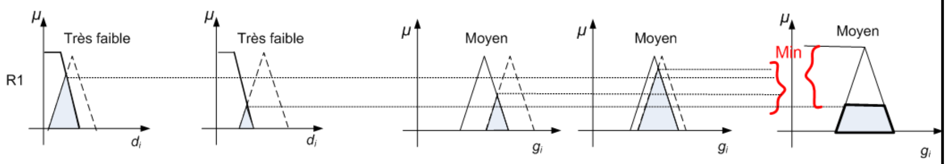


Exemple : t-norme défini par Zadeh

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

3. Recherche de la fonction d'appartenance pour la sortie de chaque règle :



Exemple : Selon la t-norme défini par Zadeh

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

4. Agrégation ou Recherche de la fonction d'appartenance résultante globale :

- La conclusion finale d'un système d'inférence est le résultat de la combinaison des résultats de différentes règles activées en utilisant les normes triangulaires (T-norme) ou T-conorme :

1. Par T-norme : la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou Y', qui est le résultat de l'agrégation, est définie de la manière suivante :

$$\forall y, \mu_{Y'}(y) = \top(\mu_{A'^1}(y), \ldots, \mu_{A'^N}(y))$$

avec T la T-norme Min et N est le nombre de règles activées

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

4. Agrégation ou Recherche de la fonction d'appartenance résultante globale :

    2. Par T-conorme : la fonction d'appartenance du sous-ensemble flou Y', qui est le résultat de l'agrégation, est définie de la manière suivante :

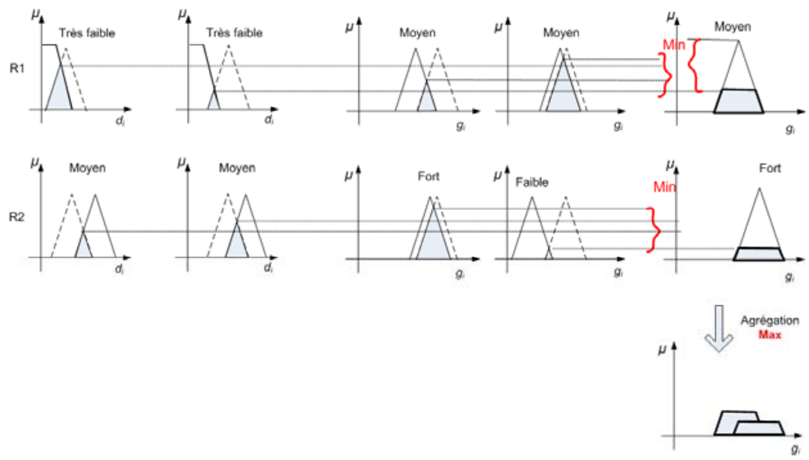
$$\forall y, \mu_{Y'}(y) = \perp(\mu_{A'^1}(y), \ldots, \mu_{A'^N}(y))$$

avec ⊥ la T-conorme Max et N est le nombre de règles activées.

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

4. Agrégation ou Recherche de la fonction d'appartenance résultante globale :



Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

5. Défuzzification :

- C'est l'opération qui, inversement à la fuzzication, consiste à transformer un nombre flou B' en une grandeur numérique y_0
- Parmi les méthodes de défuzzication les plus répandues :

Centre de gravité $$y_0 = \frac{\int_Y y \cdot \mu_{B'}(y)dy}{\int_Y \cdot \mu_{B'}(y)dy}$$

Premier Maximum $$y_0 = min\{z/\mu_{B'}(z) = Max\mu_{B'}(y)\}$$

Dernier Maximum $$y_0 = Max\{z/\mu_{B'}(z) = Max\mu_{B'}(y)\}$$

Centre Maximum
$$y_1 = min\{z/\mu_{B'}(z) = Max\mu_{B'}(y)\}$$
$$y_2 = Max\{z/\mu_{B'}(z) = Max\mu_{B'}(y)\}$$
$$y_0 = \frac{y1+y2}{2}$$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

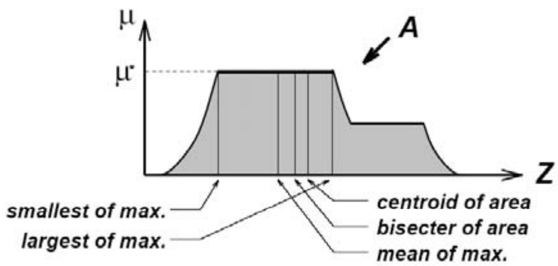
5. Défuzzification :

Centre de gravité

Premier Maximum

Dernier Maximum

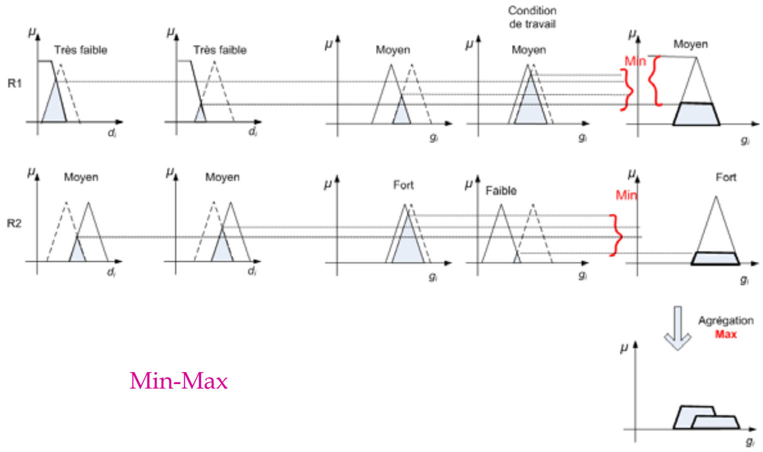
Centre Maximum



Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Mamdani



Min-Max

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Mamdani
  - Considérons les observations : $d_{81}^{obs}, d_{82}^{obs}, g_1^{obs}\ et\ e_1^{obs}$. Le raisonnement flou se décompose comme suit :

    1. Calcul du degré d'activation de chaque règle :

$$\alpha_{R_1} = min(\mu_{Faible}(d_{81}^{obs}), \mu_{Faible}(d_{82}^{obs}), \mu_{Moyen}(g_1^{obs}), \mu_{Moyen}(e_1^{obs})) \quad et$$

$$\alpha_{R_2} = min(\mu_{Moyen}(d_{81}^{obs}), \mu_{Moyen}(d_{82}^{obs}), \mu_{Fort}(g_1^{obs}), \mu_{Faible}(e_1^{obs}))$$

    2. Calcul de l'implication :

$$\mu_{I_1} = min(\alpha_{R_1}, \mu_{ZE}(Variation\_g_1))$$

$$\mu_{I_2} = min(\alpha_{R_2}, \mu_{PS}(Variation\_g_1))$$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Mamdani

  3. Calcul de l'agrégation pour former la conclusion finale floue C :

$$\mu_C = max(\mu_{I_1}, \mu_{I_2})$$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Larsen
  - Considérons les observations : $d_{81}^{obs}, d_{82}^{obs}, g_1^{obs}$ et e_1^{obs}. Le raisonnement flou se décompose comme suit :

  1. Calcul du degré d'activation de chaque règle :

$$\alpha_{R_1} = min(\mu_{Faible}(d_{81}^{obs}), \mu_{Faible}(d_{82}^{obs}), \mu_{Moyen}(g_1^{obs}), \mu_{Moyen}(e_1^{obs})) \quad et$$

$$\alpha_{R_2} = min(\mu_{Moyen}(d_{81}^{obs}), \mu_{Moyen}(d_{82}^{obs}), \mu_{Fort}(g_1^{obs}), \mu_{Faible}(e_1^{obs}))$$

  2. Calcul de l'implication : Cette méthode utilise le produit pour définir la conclusion

$$\mu_{R_1}(d_{81}^{obs}, d_{82}^{obs}, g_1^{obs}, e_1^{obs}, Variation\_g_1) = \mu_{R_1}(d_{81}^{obs}, d_{82}^{obs}, g_1^{obs}, e_1^{obs}) \cdot \mu_{Moyen}(Variation\_g_1)$$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Larsen

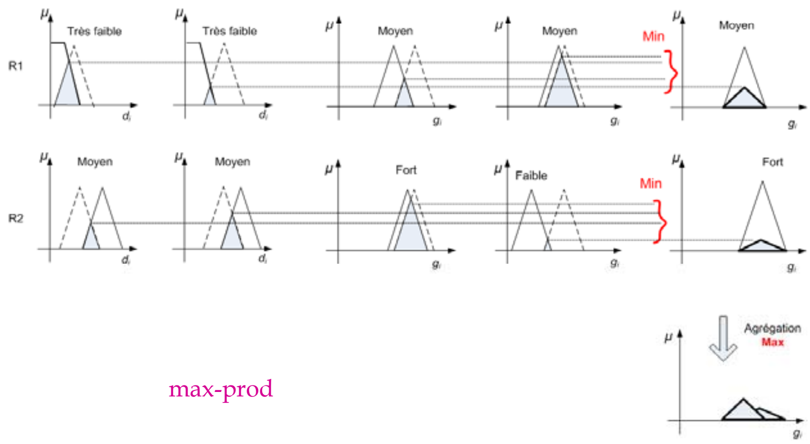
  3. Calcul de l'agrégation pour former la conclusion finale floue C :

$$\mu_C = max(\mu_{I_1}, \mu_{I_2})$$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Larsen



max-prod

Logique floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- Méthode d'inférence : Méthode de Takagi-Sugeno:

If x is A and y is B then $z = f(x, y)$

sous-ensemble flou

Souvent : $f(x, y)$ est une fonction polynomiale en fonction de x et y

Logique floue

☞ **Conception de contrôleur flou :**

- Méthode d'inférence : Méthode de Takagi-Sugeno:

R1: if X is small and Y is small then $z = -x + y + 1$

R2: if X is small and Y is large then $z = -y + 3$

R3: if X is large and Y is small then $z = -x + 3$

R4: if X is large and Y is large then $z = x + y + 2$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Takagi-Sugeno

    1. Calcul du degré d'activation de chaque règle (en utilisant l'opérateur de Larsen - produit) :

$$\alpha_{R_i}(x) = \mu_{R_i}(x) = \prod_{j=1}^{m} \mu_{A_{ij}}(x); \quad i = 1..n$$

    2. Calcul de l'implication :

$$y^i = \alpha_{R_i}(x) \times f_i(x_1, \ldots xm)$$

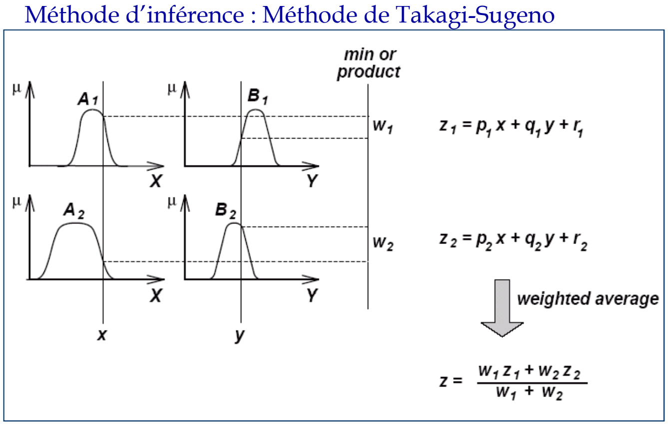
    3. La sortie finale est calculée comme la moyenne des sorties des règles, pondérées par le poids α_{Ri} :

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y^i}{\sum_{i=1}^{n} \omega_{R_i}(x)}$$

Logique floue

☞ Conception de contrôleur flou :

- Méthode d'inférence : Méthode de Takagi-Sugeno



source : cours de Tai-Wen Yue

les étapes 4 et 5 d'un contrôleur flou classique n'existent plus

Plan

- Partie 1 : I.A. – L'approche classique
- Partie 2 : La théorie des sous ensembles flous
- Partie 3 : Logique Floue
  - Partie 3.1 : Fuzzification
  - Partie 3.2 : Inférence floue
  - Partie 3.3 : Défuzzification
- Partie 4 : Exemples d'applications

Exemple d'applications

- Fuzzy logic systems for transportation engineering: the state of the art
- An evaluation of fuzzy transportation underwriting systematic risk
- A fuzzy logic controller for traffic junction signals
- A two-stage fuzzy logic controller for traffic signals
- Design and implementation of a fuzzy inference system for supporting customer requirements(pdf)
- Fuzzy inference to risk assessment on nuclear engineering systems (pdf)
- Fuzzy logic in control systems; Fuzzy logic controller - Part I (pdf)
- Fuzzy rule-based approach to describe solute transport in the unsaturated zone (pdf)

Exemple d'applications

- Fuzzy Allocation of Manufacturing Resources
- Fuzzy modeling of manufacturing and logistic systems
- A fuzzy logic based production scheduling/rescheduling in the presence of uncertain disruptions
- Agents, Emotional Intelligence and Fuzzy Logic
- Applying fuzzy logic to personnel assessment: a case study
- Alterable-Phase Fuzzy Control Based on Neutral Network

Logique floue

Exemple de problème :

- On désire contrôler la qualité de production de téléphone portable. Un Téléphone est caractérisé par un poids P et sa largeur L.

L \ P	150 g	200g	250g
4 cm	Vente	Vente	Rejet
5 cm	Vente	Vente	Rejet
6 cm	Réparation	Réparation	Rejet

Réparation = 0; Vente = +1 ; Rejet = -1

- On souhaite remplacer le système de contrôle de qualité par un système flou de type Takagi-Sugeno.

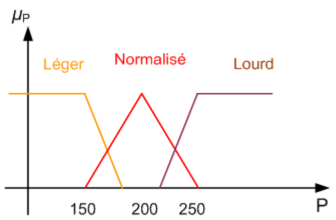
Logique floue

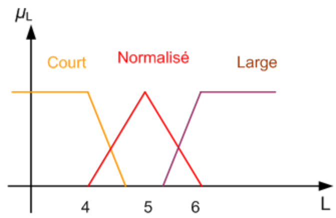
☞ Exemple de problème :

- Les étapes de conception :

  1. identifier les entrées et sorties :

  2. Subdivision de toutes les entrées en sous-ensembles flous :





Logique floue

☞ Exemple de problème :

- Les étapes de conception :

  3. Etablir la base de règles (la tâche d'un expert humain)

     Si (P est léger) ET (L est cout) alors D=+1

     ….

     ….

     Si (P est lourd) ET (L est large) alors D=-1

Quelle est la décision pour un portable de poids 175g et largeur 5,5cm

Logique floue

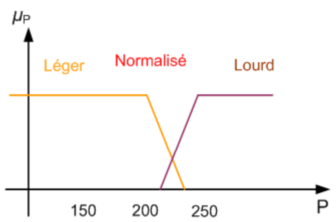
☞ Exemple de problème :

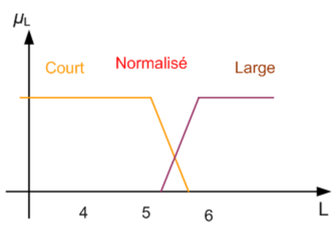
- Les étapes d'inférences:
  1. Fuzzification :
  2. Calcul de l'implication
  3. Calcul du degré d'activation de chaque règle :
  4. Calcul de la sortie finale :

Logique floue

☞ Exemple de problème :

- Améliorons encore plus le système de contrôle de la qualité en minimisant le nombre de de subdivision de chaque entrée.

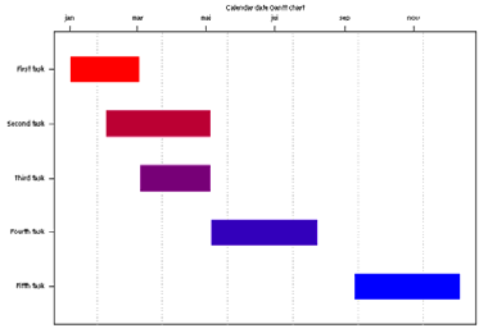




Logique floue

☞ Exemple de problème 2

- Ordonnancement de n tâches sur m machines en utilisant, par exemple, les algorithmes génétiques.



- Durée de la tâche i sur la machine j est égale à 10 min.

Logique floue

☞ Exemple de problème 2

Comment procéder ??

Solution 1 :	1	2	3	4	5	6	7	8
Solution 2 :	8	2	3	4	5	6	7	1

Comparer

Et si les données été imprécises : la durée de la tâche i sur la machine j est égale à 10 min mais pas plus de 15min et pas moins de 5 min

Logique floue

☞ **Exemple de problème 2**

Comment procéder ??

Solution 1 :

1	2	3	4	5	6	7	8

Solution 2 :

8	2	3	4	5	6	7	1

Comparer

Et si les données été imprécises : la durée de la tâche i sur la machine j est égale à 10 min mais pas plus de 15min et pas moins de 5 min

Fin du cours