# La Logique des propositions

Intuition : Qu’est-ce qu’une proposition ? Quelque chose qui est vrai ou faux !

Ex : ‘il pleut’ , ‘il fait beau’, l’herbe est mouillée’, ‘ il y a un bon film à la télévision ce soir’…

On peut aussi fabriquer d’autres énoncés. Par ex : ‘il fait beau ou l’herbe est mouillée’ qui peut être vrai ou faux. Donc c’est aussi une proposition

Proposition bien formées : reconnaître les propositions qui ont un sens

Par exemple la proposition $p1 \neg \wedge p2$ n’est pas une proposition. Elle n’est pas bien formée.

# Langage

L'alphabet auxiliaire contient le seul symbole <u>*formule*</u>, l'axiome.

Les réécritures sont :

<u>*Formule*</u> $\rightarrow \boldsymbol{\ell}$/ a / b /…/(<u>*formule*</u> $\supset$ <u>*formule*</u>).

Si F est l'ensemble des formules bien formées définies par ce langage.

Soit $\{\boldsymbol{\upsilon}, \neg , \wedge, \vee, \equiv \}$ un ensemble de symboles logiques. Les formules qui les utilisent sont des abréviations de formules de F où :

$\boldsymbol{\upsilon}$ désigne la formule $(\boldsymbol{\ell} \supset \boldsymbol{\ell})$

$\forall$x, $\neg$ x désigne la formule $(x \supset \boldsymbol{\ell})$

$\forall x,y,\ x \vee y$ ssi $((x \supset y) \supset y)$

$\forall x,y,\ x \wedge y$ ssi $((x \supset (y \supset \boldsymbol{\ell})) \supset \boldsymbol{\ell})$

$\forall x,y,\ x \equiv y$ ssi $(((x \supset y) \supset ((y \supset x) \supset \boldsymbol{\ell})) \supset \boldsymbol{\ell})$

# Langage

- Un sous-ensemble de F : les <u>axiomes</u> ,
  - (A1) $(a \supset (b \supset a))$
  - (A2) $((c \supset ( a \supset b )) \supset (( c \supset a ) \supset (c \supset b)))$
  - (A3) $(((a \supset \boldsymbol{\ell}) \supset \boldsymbol{\ell} \supset a)$
- Un ensemble de <u>règles d'inférence</u> :
  - (R1) [**substitution**] : si *x* est une formule, alors une formule *y* appartient à R1(*x*) ssi il existe une application qui, à tout symbole non logique *ai*, fait correspondre une formule *zi*, et *y* est la formule obtenue en remplaçant chaque occurrence de *ai* dans *x* par *zi*.

**<u>Exemple</u>**: si *x* est une formule ($a \supset a$), et *y* la formule $((a \supset b) \supset (a \supset b))$, *y* appartient à R1(*x*) car on l'obtient en remplaçant chaque occurrence du symbole a dans *x* par la formule $(a \supset b)$

  - (R2)[**modus ponens**] : si *x* , *y* sont deux formules, et que *y* a la forme

$(x \supset z)$, alors $R2(x, y)$ est l'ensemble contenant l'unique élément *z*.

**<u>Exemple</u>**: si *x* est la formule $(a \supset a)$, *y* la formule$((a \supset a) \supset (b \supset c))$, la seul formule appartenant à $R2(x,y)$ est $(b \supset c)$.

# Système de déduction

Un système de déduction permet de définir la notion de **preuve**.

**Une preuve** est une liste finie de formules x[i] pour

$1 \leq i \leq m$, telle que pour tout i dans cet intervalle,

- Ou bien x[i] est un axiome
- Ou bien il existe une règle d'inférence Rj et des entiers $i_1, \ldots, i_n$ tous strictement inférieurs à i, et tels que x[i] appartienne à $Rj(x[i_1],\ldots,x[i_n])$.

**Un théorème** est une formule x telle qu'il existe une preuve x[i] pour $1 \leq i \leq m$ avec x = x[m]

<u>Exemple</u>: [réflexivité] : $(a \supset a)$est un théorème de la logique propositionnelle

x[1] : $(c \supset (a \supset b)) \supset((c \supset a) \supset ( c \supset b)$  (A2)

x[2] : $(a\supset(b\supset a))\supset((a\supset b)\supset(a\supset a))$ R1(c/a, a/b, b/a)

x[3] : $a \supset (b \supset a)$   (A1)

x[4] : $(a \supset b) \supset (a \supset a)$   R2(X(2),X(3))

x[5] : $a \supset (b \supset a) \supset (a \supset a)$  R1(b/ $b \supset a$)

x[6] : $a \supset a$ R2(X(5), X(3))

Si E est un ensemble de formules, on notera $Th_s(E)$ l'ensemble des formules prouvables par un système déductif S lorsqu'il ajoute à son stock d'axiomes les éléments de E. Nous avons donc défini les théorèmes par $Th_{lp}(\emptyset)$.

Une propriété qui cause des soucis à la communauté de l'I.A., est la propriété de **monotonie** qui s'énonce ainsi : si l'ensemble E inclut l'ensemble F, alors l'ensemble Th(E) inclut l'ensemble Th(F).

# Règles de valuation

Dans cette logique, l'ensemble des valeurs de vérité V comprend deux symboles : **vrai** et **faux.**

Un **modèle** est une fonction *v* de l'ensemble des symboles non logiques (a, b, …) dans V.

Si la formule est le symbole $\boldsymbol{f}$, sa valeur est faux;

Si elle est atomique, i.e., si elle se réduit à un symbole non logique a, sa valeur est v(a);

Si elle est da forme (p $\supset$ q), sa valeur est vrai sauf si v(p) est vrai et v(q) est faux.

Il existe des formules dont la valeur ne dépend pas de la valeur choisie pour les symboles non logiques. Puisque V a deux éléments, il peut en exister de deux sortes:

- Celles qui prennent la valeur vrai $\forall$ la valeur que l'on attribue à leurs symboles non logiques : on les appelle **tautologies.**
- Celle qui prennent la valeur faux dans les mêmes conditions : ce sont les **antilogies**.

**<u>Propriété:</u>** (A1), (A2) et (A3) sont des tautologies.

Le système de déduction et les règles de valuation peuvent être reliés par deux propriétés;

**<u>Correction :</u>** toutes les formules qui sont des théorèmes sont aussi des tautologies.

**<u>Complétude :</u>** toutes les formules qui sont des tautologies sont aussi des théorèmes.

**<u>Théorème :</u>** la logique des propositions est à la fois correcte et complète.

# Connaissances propositionnelles

Nous disposons maintenant d'un système déductif apte à accomplir un certain type d'inférences. Peut-on alimenter ce système par des connaissances?

Les seuls ''point d'entrée'' sont les symboles non logiques. Que se passe-t-il si nous décidons d'interpréter ces symboles comme de connaissances?

**Exemple:** Jean affirme ''si Bernard est coupable, Sophie l'est aussi'';

Bernard dit : Jean est coupable et Sophie ne l'est pas'';

Sophie assure qu'elle n'est pas coupable, mais qu'au moins l'un des deux protagonistes l'est.

On suppose que chacune de ces personnes ment ssi elle est coupable. Quels est (sont) le(s) coupable(s)?

On choisit un langage à 3 symboles non logiques, J,B et S, on interprète ceux-ci par : ''Jean (resp. Bernard, Sophie) est coupable''

Ce que jean affirme est traduit par:

$$(B \supset S)$$

Cette formule a la valeur vrai ssi jean est coupable d'où:

$$\text{(F1)} \qquad \neg J \equiv (B \supset S)$$

De même, ce que dit Bernard de traduit par :

$$(J \wedge \neg S)$$

Cette formule a la valeur vrai ssi Bernard est coupable d'où:

$$\text{(F2)} \qquad \neg B \equiv (J \wedge \neg S)$$

Enfin, ce qu'assure Sophie est :

$$(\neg S \wedge (J \vee B))$$

Cette formule a la valeur vrai ssi Sophie est coupable d'où:

$$\text{(F3)} \qquad \neg S \equiv (\neg S \wedge (J \vee B))$$

La question est de savoir s’il existe une ou plusieurs assignations des valeurs de vérité de J,B, S qui donnent simultanément la valeur vrai à ces trois formules (donc à leur conjonction)

| J | B | S | $B \supset S$ | (F1) | $J \wedge \neg S$ | (F2) | $\neg S \wedge (J \vee B)$ | (F3) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | F | V | F | V |
| V | V | F | F | V | V | F | V | V |
| V | F | V | V | F | F | F | F | V |
| V | F | F | V | F | V | V | V | V |
| **F** | **V** | **V** | **V** | **V** | **F** | **V** | **F** | **V** |
| F | V | F | F | F | F | V | V | V |
| F | F | V | V | V | F | F | F | V |
| F | F | F | V | V | F | F | F | F |

Exemple 2

Les nautiles sont des céphalopodes;

Les céphalopodes sont des mollusques;

Les mollusques ont généralement une coquille;

Les céphalopodes n’en ont généralement pas;

Les nautiles en ont une.

a est un nautile,

b est un céphalopode,

c est un mollusque.

Soient Na, Nb, Nc, Céa, Céb, Céc, Ma, Mb, Mc, Coa, Cob, Coc 12 symboles non logiques que nous interprétons par

‘’a (respectivement b, c) est un nautile’’.

‘’(Respectivement, céphalopode, mollusque, coquille)’’

En ignorant pour l’instant les connaissances utilisant le mot ‘’généralement’’ nous avons :

(Na $\supset$ Céa); (Nb $\supset$ Céb); (Nc $\supset$ Céc);

(Céa $\supset$ Ma); (Céb $\supset$ Mb); Céc $\supset$ Mc);

(Na $\supset$ Coa); (Nb $\supset$ Cob); (Nc $\supset$ Coc); Na; Céb; Mc.

Si on ajoute les connaissances dans lesquelles figure le mot ‘’généralement’’ sans prendre en compte la nuance introduite par ce mot, il vient :

- (Ma $\supset$ Coa); (Mb $\supset$ Cob); (Mc $\supset$ Coc);
- (Céa $\supset \neg$ Coa); (Céb $\supset \neg$ Cob); (Céc $\supset \neg$Coc)

par deux applications du modus ponens sur Céb, (Céb $\supset$ Mb) puis (Mb $\supset$ Cob) on peut conclure Cob et

Par Céb et Céb $\supset \neg$Cob on peut conclure $\neg$ Cob .

On obtient un système incohérent

Pour éviter cette incohérence, la seul solution est de modifier la traduction de ‘’généralement’’ : on exclut explicitement les exceptions connues, et on traduit :

‘’ Les céphalopodes qui ne sont pas des nautiles n’ont pas de coquille’’

‘’Les mollusque qui ne sont pas des céphalopodes non nautiles en ont une’’. Soit

$((Céa \wedge \neg Na) \supset \neg Coa)$;

$((Céb \wedge \neg Nb) \supset \neg Cob)$;

$((Céc \wedge \neg Nc) \supset \neg Coc)$;

$((Ma \wedge \neg(Céa \wedge \neg Na)) \supset Coa)$;

$((Mb \wedge \neg(Céb \wedge \neg Nb)) \supset Cob)$;

$((Mc \wedge \neg(Céc \wedge \neg Nc)) \supset Coc)$.

Ce système est cohérent puisqu'il admet des modèles : Na, Céa, Céb, Ma, Mb, Mc, Coa ont la valeur vrai; Nb et Cob ont la même valeur;

Si Céc est faux, Nc est faux et Coc vrai

On constate que parmi les conclusions attendues

(a et c portent une coquille, b n’en porte pas),

seule la première est démontrable : en effet, Coa est vrai dans tous les modèles – le théorème de complétude assure alors que Coa est démontrable -,

et comme il existe des modèles où Coc est faux, Coc n’est pas démontrable (s’il l’était, d’après le théorème de correction, Coc serait vrai dans tous les modèles);

Même chose pour $\neg$ Coc

La première traduction est inutilisable, puisque d’un système incohérent, on peut tirer n’importe quelle conclusion;

La deuxième, plus satisfaisante, est cependant peu utile puisqu’elle ne permet pas d’obtenir toutes les conclusions souhaitées

On voudrait pouvoir traduire une connaissance comme ‘’Les mollusques, sauf ceux dont vous savez qu’ils sont des céphalopodes, ont une coquille’’,

Mais une telle expression est incompatible avec la propriété de monotonie : en effet, nous demandons de conclure :

‘’a coquille’’ à partir de F = {mollusque} mais de ne plus le conclure à partir de

E = {mollusque, céphalopode}.

On se trouve bien dans un cas où l’ensemble E inclut l’ensemble F, alors que l’ensemble Th(E) ne doit pas inclure l’ensemble Th(F).

# Décidabilité

On dit qu'une logique est décidable s'il existe un procédé de calcule qui pour toute formule, indique en un temps fini s'il s'agit ou non d'un théorème de cette logique.

La logique des proposition est décidable.