# La circonscription

Conformément à une tradition établie pour les bases de données (hypothèse du monde clos:[K.Clark79] Negation as failure)

Mc Carthy suppose que l'absence d'information positive concernant l'applicabilité de certains prédicats équivaut à leur non applicabilité

ou en d'autre termes :

*Circonscrire une propriété dans une base de connaissances consiste à limiter le domaine de vérification de cette propriété à ce qui est exigé par la base de connaissances.*

J. Mc Carthy : Circumscription : a form of non monotonic reasoning , A.I. N° 13 1980.

Exemple :

Soit à conceptualiser les lois générales suivantes :

- Un objet normal ne vole pas
- Un oiseau est un objet qui fait exception à cette règle
- Un oiseau normal vole, et un manchot est un oiseau qui ne vole pas

Qui se traduisent :

$\forall x\ (Objet(x) \wedge \neg\ Ab1(x) \supset \neg\ Vole(x))$

$\forall x\ (Oiseau(x) \supset Objet(x) \wedge Ab1(x)$

$\forall x\ (Oiseau(x) \wedge \neg\ Ab2(x) \supset Vole(x)$

$\forall x\ (Manchot(x) \supset (Oiseau(x) \wedge \neg\ Vole(x))$

Les objets et les oiseaux anormaux ne peuvent être que des cas explicitement prévus dans la base de connaissances.

Techniquement , soit A l'ensemble de formules décrivant une base de connaissances, et soit P un prédicat d'arité n; On note A[P/P'] la conjonction des formules obtenues en remplaçant toutes les occurrences du prédicat P dans A par P'.

*Circonscrire* le prédicat P dans A, c'est ajouter à A le schéma d'axiomes :

$$(A[P/P'] \wedge (\forall x1,\ldots,xn)(P'(x1,\ldots,xn) \supset P(x1,\ldots,xn))) \supset (\forall x1,\ldots xn)(P(x1,\ldots,xn) \supset P'(x1,\ldots,xn))$$

C'est-à-dire l'ensemble des formules obtenues en instanciant P' par toute formule du langage possédant n variables libres. L'intention est de permettre de déduire $\neg$P sauf sur les arguments pour lesquels on a les moyens de prouver P;

Exemple [Besnard 89] :

Soit la base de connaissances A={cube(a), cube(b), pyramide (c), cylindre(d), sur(c,a)}

La logique ordinaire ne donne aucun moyen de déduire que d n'est pas sur b.

*Circonscrire le prédicat '**sur**' dans A, c'est se donner les moyens de déduire qu'aucun objet n'est sur un autre à moins que A ne permette de l'affirmer.*

En effet, ceci correspond à ajouter le schéma d'axiomes :

$$(A[sur/P']\wedge(\forall x,y)(P'(x,y)\supset Sur(x,y)))\supset(\forall x,y)Sur(x,y)\supset P'(x,y))$$

si on choisit d'instancier P' par la formule $=(x,c) \wedge =(y,a)$, la théorie circonscrite comprendra la formule

(F) : $(A[Sur/P'] \wedge (\forall x,y)((=(x,c) \wedge =(y,a)) \supset Sur(x,y))) \supset (\forall x,y)(Sur(x,y) \supset (=(x,c) \wedge =(y,a)))$

Où (A[Sur/P'] est la formule :

$Cube(a) \wedge Cube(b) \wedge Pyramide(c) \wedge Cylindre(d) \wedge (=(c,c) \wedge (=(a,a))$

Cette formule est impliquée par A, de même que :

$$(\forall x,y)((=(x,c) \wedge =(y,a)) \supset Sur(x,y))$$

dont la prémisse n'est vraie que pour le couple (c, a), cas où la conclusion , sur(c,a), fait partie de A. Les prémisses de (F) étant satisfaites, la conclusion :

$$(\forall x,y)(Sur(x,y) \supset (=(x,c) \wedge =(y,a))$$

est dérivable : l'extension du prédicat 'sur' se limite au couple c,a. Si l'on veut conclure que b n'est pas sur a, il faut de plus se donner des *axiomes de nom unique*, c'est-à-dire imposer que deux constantes de nom différents ne s'interprètent pas sur le même objet de l'univers; de $\neg=(b,a)$ on peut en effet obtenir $\neg Sur(b,a)$.

Le gros avantage de la circonscription est qu'elle autorise des conclusions générales. Par exemple, circonscrire 'Sphère' dans la base A de l'exemple ci-dessus permet de dériver : $(\forall x)(\neg \text{Sphère}(x))$, alors que le raisonnement par défaut ne peut apporter que des conclusions particulières pour les objets a, b, c, d.

En termes de modèles, la circonscription du prédicat P dans A se présente comme une relation d'ordre : si M et M' sont des modèles de A, c'est-à-dire si le calcul dans M et dans M' de toutes les formules de A aboutit à la valeur vrai, on préfère M à M', et l'on note $M \leq M'$, ssi l'interprétation de tous les prédicats autres que P est la même dans M et dans M', et si l'interprétation de P dans M est incluse dans l'interprétation de P dans M' (nous avons vu que dans un modèle ayant pour domaine D, un prédicat d'arité n s'interprète par un sous-ensemble de $D^n$ et c'est de l'inclusion de ces sous-ensembles qu'il est question ici)

On dit qu'un modèle est minimal si :

$(\forall M')\ ((M' \leq M) \supset M' = M)$

Exemple :

Les modèles minimaux de la circonscription de ‘sur’ dans

A ={cube(a),cube(b), pyramide(c), cylindre(d),sur(c,a)}

Sont ceux où l’interprétation de ce prédicat se limite à la paire : <interprétation(c), interprétation(a)>

Preuve : tout modèle de A doit attribuer la valeur vrai à Sur(c,a); l’interprétation de ‘Sur’ doit contenir la paire indiquée ; pour tout modèle M’ dans lequel elle contient d’autres paires, il existe un modèle M de A qui est identique à M’ sauf qu’il n’interprète P que par la paire indiquée : on a donc M ≤M’.

**Théorème :** Un modèle minimal de la circonscription de P dans A vérifie toutes les instances du schéma de circonscription de P dans A

Ce théorème affirme la correction du schéma de circonscription par rapport aux modèles minimaux.

Nous avions affirmé l'incompatibilité de la propriété de correction avec la non-monotonie, si du moins on définit cette propriété par le fait que g est déductible de f seulement si tous les modèles de f vérifient g ; le théorème ne contredit en rien cette affirmation, car la correction définie ici ne concerne que les modèles minimaux.