Théorie Dempster-Shafer : Fonctions de croyance et raisonnement plausible

I. Truck
Dépt MIME
Université Paris 8

Théorie Dempster-Shafer

- Plan général du cours
  - Introduction
  - Exemple utilisé
  - Le modèle probabiliste
  - Le modèle ULP
  - Le modèle de Dempster
  - Le modèle TBM

Tout ceci est très largement inspiré de Philippe Smets, de l'ULB : http://iridia.ulb.ac.be/~psmets/WhatIsDS.pdf

D
é
p
t.

M
I
M
E

Introduction

- Plusieurs modèles ont été proposés pour la modélisation des degrés de croyance :
  - Modèle bayésien est le plus ancien
  - Les modèles suivants généralisent l'approche bayésienne :
    - modèle de probabilités par défaut et par excès (ULP pour upper & lower probabilities)
    - Modèle de Dempster
    - Modèle de l'évidence
  - Le modèle des croyances transférables (TBM pour *transferable belief model*) utilise des fonctions de croyance

D
é
p
t.

M
I
M
E

Introduction (2)

- Choix d'un modèle ?
  - Dépend du domaine d'application
  - S'il existe une mesure de proba avec des valeurs connues, alors modèle bayésien ;
  - S'il existe une mesure de proba mais avec qqs valeurs inconnues, alors modèle ULP ;
  - Si l'existence d'une mesure de proba n'est pas connue, alors modèle TBM.
  - Modèle de Dempster est un cas particulier du modèle ULP.

D é p t. M I M E

Introduction (3)

- Un modèle Dempster-Shafer (DS) utilise l'obj. mathématique appelé *fonction de croyance*
  - => correspond à la modélisation du degré de croyance d'une personne
- Il y a bcp d'interprétations de la théorie de DS, c'est pourquoi on évoque plusieurs modèles (TBM, ULP, etc.)
- Croyances résultent de l'incertitude quantifiées par les fonctions de probabilité :
  - Incertitude peut résulter d'un psus aléatoire (le cas probabiliste objectif)
  - Ou d'une absence d'information qui induit de la 'croyance' (au lieu de 'connaissance')

D é p t. M I M E

Introduction (4)

- On qualifie, par approximation, tous les modèles qui utilisent des fonctions de croyance comme des modèles DS
- Cependant, le modèle TBM est considéré comme un modèle « purifié »
  - Utilisation de l'information disponible et rien d'autre
  - On n'assume pas l'existence d'une mesure de proba sur chaque espace (chaque univers de discours)
- Tout modèle de croyance a, au moins, 2 composants:
  - Un *statique* qui décrit l'état de la croyance
  - Un *dynamique* qui explique comment mettre à jour la croyance, étant données de nouvelles informations

Introduction (5)

Dépt. MIME

- L'originalité des modèles repose surtout ds leur composant dynamique
- La différence entre les modèles peut être décrite au travers de la transformée de Möbius des différentes mesures de croyance
- Définition de la transformée de Möbius :
  - Cf. section 1.2 du document de P. Smets
  - Cf. aussi http://fr.wikipedia.org/wiki/Transform%C3%A9e_de_M%C3%B6bius

Exemple utilisé (1)

Dépt. MIME

- Le capteur de température
  - On veut vérifier la température d'un processus
  - Le capteur est composé de :
    - Un thermomètre
    - Un dispositif qui allume une lampe bleue ou une lampe rouge selon la température captée
    - Mais il est probable que le thermomètre soit cassé
    - La seule information dont on dispose est ce qu'il est écrit sur l'écran du capteur : « *Attention, le thermomètre inclus ds ce capteur est peut-être défectueux. La probabilité qu'il est défectueux est de 20 %. Quand le thermomètre n'est pas cassé, le capteur est complètement fiable : lumière rouge veut dire température chaude, lumière bleue veut dire température froide. Quand le thermomètre est cassé, la réponse du capteur est décorrélée de la température.* »

Exemple utilisé (2)

Dépt. MIME

- Un technicien arrive, sans aucune connaissance préalable sur le capteur
- Tout ce qu'il voit est :
  - le message indiqué sur l'écran du capteur, et
  - la lampe ***bleue*** est allumée
- La question est : que dire de l'état de la température ? Quelle est son opinion (= sa croyance) sur l'état (froid ou chaud) de la température ?
- Avant toute chose, il faut établir un espace d'états possibles noté $\Omega = S \times T \times \Theta$. Ω contient 8 éléments notés a, b, …, h. (cf. Table 1 du document de P. Smets)
  - S correspond à la valeur du capteur (bleu ou rouge)
  - T à la valeur de la température (chaud ou froid)
  - Θ à la valeur du thermomètre (en état ou cassé)

Le modèle probabiliste (1)

Dépt. MIME

- La théorie
  - Composant statique
    - Calcul d'une densité de probabilité p
    - Calcul de degrés de croyance
    - => cf. définitions ds P. Smets, section 3.1
  - Composant dynamique
    - Règle conditionnelle lorsqu'on apprend que $B \subseteq \Omega$ est vrai
    - => cf. définition ds P. Smets, section 3.1
- L'exemple
  - $P(ThW) = 0.8$ et $P(ThB) = 0.2$
  - $P(TC|B) = (.8+.2x)\,\pi / (.8\pi + .2x)$
  - Cf. tous les calculs en 3.2 et Table 2.

Le modèle probabiliste (2)

Dépt. MIME

- Analyse
  - Même en connaissant π, quelle valeur doit-on donner à x, càd à la probabilité que la lampe du capteur soit bleue alors que le thermomètre est cassé ?
  - Il y a plusieurs approches dont une qui mène (lire la fin de la page 6 du document de P. Smets) à x = 0.5, mais on doit introduire des hypothèses supplémentaires
  - Les résultats que l'on obtiendra par la suite seront l'image de ces hypothèses posées.
  - Et l'approche probabiliste classique ***s'arrête dès maintenant*** (et donc échoue) car elle ne pose pas d'hypothèses supplémentaires.

Le modèle ULP (1)

Dépt. MIME

- La théorie
  - Calcul de valeurs extrêmes
    - Calcul de probabilités par excès et par défaut (upper et lower)
    - Ces 2 probabilités vont encadrer la probabilité P
    - Etc., cf. définitions dans P. Smets, section 4.1
- L'exemple
  - On a donc vu que les infos manquantes concernaient π et x. Mais on sait tout de même que π et x sont dans l'intervalle [0,1].
  - Dans les calculs proposés en section 4.2, on fait d'abord varier à la fois π et x (variation de 0 à 1, donc) et on retient les valeurs min et max que l'on peut atteindre : on trouve 0 et 1
  - Ensuite, on fait seulement varier x en supposant que π est connu et on obtient comme valeur min : $\pi / (.8\,\pi + .2)$ et max : 1.

Le modèle ULP (2)

Dépt. MIME

- Analyse
  - Donc, si le technicien ne connait pas π, il n'est pas plus avancé (car les résultats min et max donnent des valeurs entre 0 et 1)
  - Mais s'il connaît π, il peut calculer les limites intéressantes et encadrer les probabilités d'occurrence des événements qui l'intéressent (ici, P(TC|B))

Le modèle de Dempster

Dépt. MIME

- La théorie
  - Calcul de valeurs extrêmes
    - Calcul de probabilités par excès et par défaut (upper et lower)
    - Etc., cf. définitions ds P. Smets, section 5.1
- L'exemple
  - On reprend les mêmes idées que ds le cas du modèle ULP
  - Cependant, les probabilités définies sur Θ induisent des masses de croyance sur 2^{Ω}.   m ({b,c}) = .8 et m ({e,f,g,h}) = .2
  - Cf. tous les calculs à lire en 4.2 et la table 3.
  - Dans les remarques de la section 5.3, il faut retenir surtout:
    - Ds le modèle Dempster, on reconnaît l'existence d'une distribution de probabilité P_Y sur Y (3e paragraphe)

Le modèle TBM

- La théorie
  - Modèle fondé sur deux niveaux
    - Niveau crédal
    - Niveau pignistique
  - Ce modèle a été imaginé par Philippe Smets, cf. la section 6.1
- L'exemple
  - Cf. section 6.2