Plan du cours.

1. Présentation	Exemples introductifs Logique floue vs booléenne Champs d’applications et historique
2. Concepts principaux	Ensemble flou Opérateur logique floue Fuzzification>>Inférences floues>>Défuzzification
3. Fuzzification	Variables linguistiques Comment fuzzifier?
4. Inférences floues	Principe du raisonnement approximatif Base de règles Méthodes d’inférences floues
5. Défuzzification	Méthodes de défuzzification Synthèse générale
6. Exemple complet de prise de décisions floues	

Nous faisons de la logique floue….

Exemple de règles floues:

Règles de conduite automobile à l’approche d’un carrefour contrôlé par des feux tricolores.

si le feu est rouge...	**si ma vitesse est élevée ...**	**et si le feu est proche ...**	**alors je freine fort.**
si le feu est rouge...	**si ma vitesse est faible ...**	**et si le feu est loin ...**	**alors je maintiens ma vitesse.**
si le feu est orange...	**si ma vitesse est moyenne ...**	**et si le feu est loin ...**	**alors je freine doucement.**
si le feu est vert...	**si ma vitesse est faible ...**	**et si le feu est proche ...**	**alors j'accélère.**

Les règles floues sont énoncées en langage naturel

…sans le savoir!

<u>Transposition de notre exemple selon un modèle plus mathématique « moins flou »</u>

Si le feu est rouge, si ma vitesse dépasse 85,6 Km/H et si le feu est à moins de 62,3 mètres, alors j'appuie sur la pédale de frein avec une force de 33,2 Newtons !!!

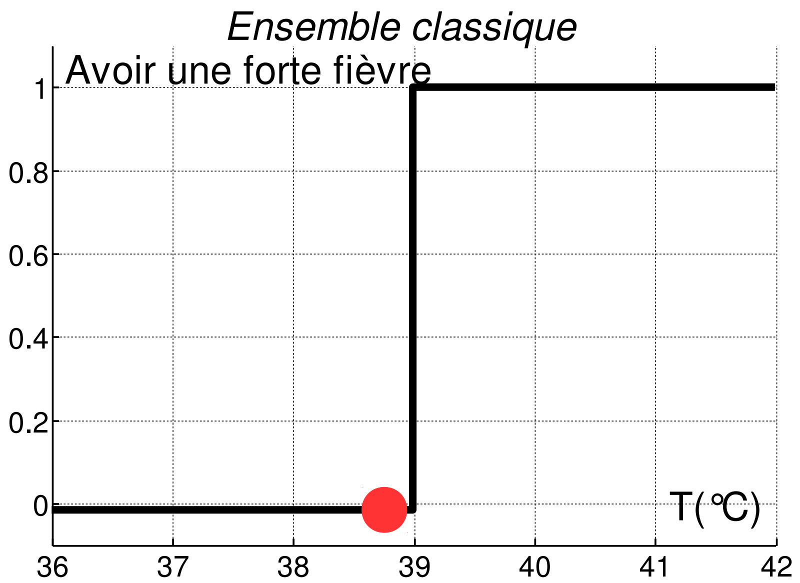
Notre cerveau fonctionne en logique floue.

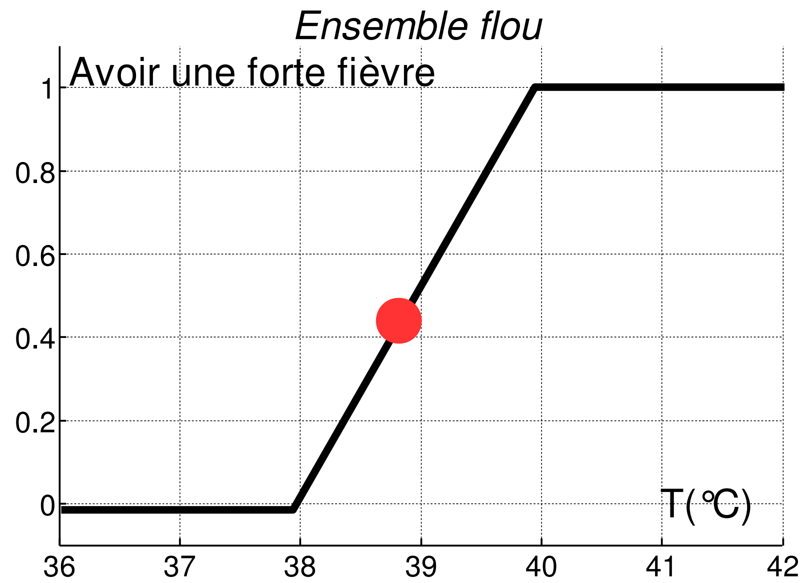
Elle apprécie les variables d'entrées de façon approximative (faible, élevée, loin, proche), fait de mêmes pour les variables de sorties (freinage léger ou fort) et édicte un ensemble de règles permettant de déterminer les sorties en fonction des entrées.

Limite de la logique booléenne

un patient atteint d'hépatite présente généralement les symptômes suivants :

- Le patient a une forte fièvre,
- sa peau présente une coloration jaune,
- il a des nausées.





Si le patient à 38,9°C de température

Logique classique

Le patient n’a pas de forte fièvre ⇒ Le patient n’a pas d’hépatite.

Logique floue

Le patient a une forte fièvre à 48% ⇒ Le patient a une hépatite à ***X*** %.

Champ d'applications de la logique floue

- Aide à la décision, au diagnostic.
  (domaine médical, orientation professionnelle…)
- Base de données.
  (objets flous et/ou requêtes floues)
- Reconnaissance de forme.
- Agrégation multicritère et optimisation
- Commande floue de systèmes…

Bref historique: les débuts

- 1965: Concept introduit par Pr. Lotfi Zadeh (Berkeley):
  « Fuzzy set theory »: Définition des ensembles flous et opérateurs associés

- 1970: Premières applications: Systèmes experts, Aide à la décision en médecine,commerce…

- 1974: Première application industrielle. Régulation floue d’une chaudière à vapeur réalisée par Mamdani

- Longtemps universitaire.

- 1985: Les premiers, les japonais introduisent des produits grand public « Fuzzy Logic Inside ».

Bref historique: la maturité

- 1990: Généralisation de l'utilisation de cette technique.
  - appareils électroménagers (lave-linge, aspirateurs, autocuiseurs,...etc) ,
  - systèmes audio-visuels (appareils de photos autofocus, caméscope à stabilisateur d'images, photocopieurs,...)
  - systèmes automobiles embarqués (BVA, ABS, suspension, climatisation,...etc.),
  - systèmes autonomes mobiles,
  - systèmes de décision, diagnostic, reconnaissance,
  - systèmes de contrôle/commande dans la plupart des domaines industriels de production.

- Il existe de processeurs dédiés et des interfaces de développement spécifiques (Cf doc 68HC12 de Motorola en Annexe)
  - Ex: la famille des processeurs WARP (Weight Associative Rule Processor) de SGS-THOMSON dont les principales caractéristiques sont les suivantes :
    - Nombre de règles traitées : 256
    - Nombre d' entrées : 16
    - Nombre de sorties : 16
    - Méthode de composition des règles : Centre de gravité
    - Vitesse de traitement : 200 microsecondes pour 200 règles.

Avertissement

L'approche des problèmes par la logique floue est différente de celle adoptée, a priori, dans une démarche scientifique.

Elle est beaucoup plus pragmatique que déterministe.

La décision en logique floue est basée sur la notion d'expertise, qui permet de quantifier le flou à partir de connaissance a priori ou acquise antérieurement.

$\Rightarrow$ Ne pas être trop cartésien pour aborder la logique floue

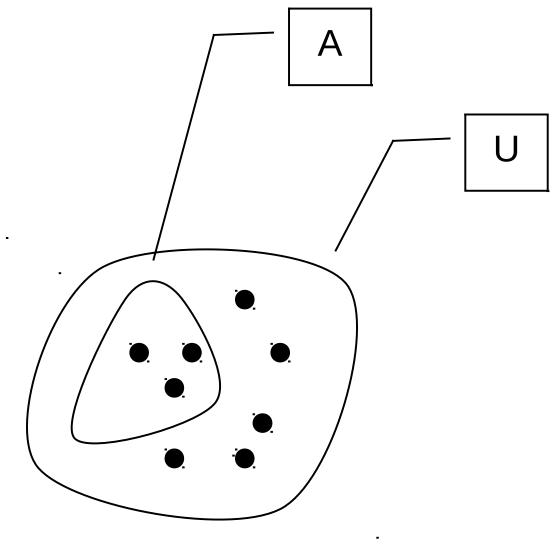
Il n'est pas nécessaire d'avoir un modèle entrées/sorties d'une voiture pour pouvoir la conduire de manière satisfaisante.

Les 2 concepts principaux de la logique floue

1. Les ensembles et variables flous et opérateurs associés.

2. Prise de décision à partir d'un base de règles SI…ALORS..
   C'est l'inférence floue.

L'ensemble flou



Soient U: L'univers du discours.

A: un sous-ensemble de U

Théorie classique des ensembles:

$$Si\ \mu_A\ est\ la\ fonction\ d'appartenance\ de\ l'ensemble\ A$$

$$\forall x \in U \quad \mu_A(x) = 0 \quad si\ x \notin A$$

$$\mu_A(x) = 1 \quad si\ x \in A$$

Concept d'ensemble flou:

$$Si\ \mu_A\ est\ la\ fonction\ d'appartenance\ de\ l'ensemble\ flou\ A$$

$$\forall x \in U \quad \mu_A(x) \in [0;1]$$

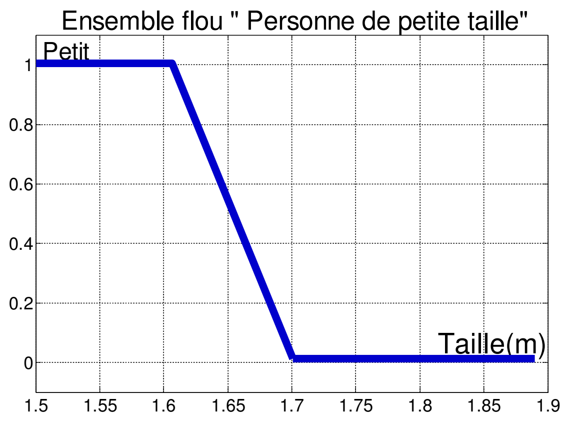
Si $\mu_A(x)$ =0,30

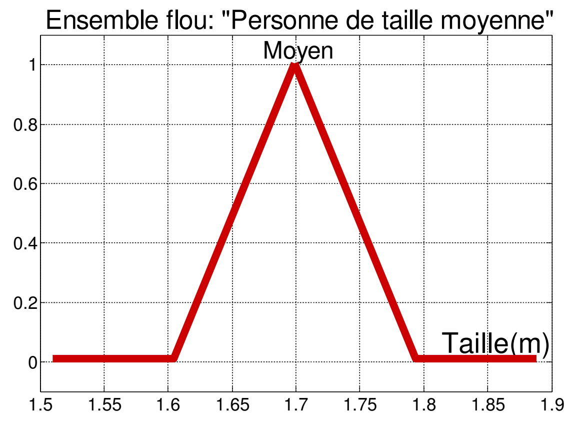
x appartient à l'ensemble flou A avec un degré d'appartenance de 30%

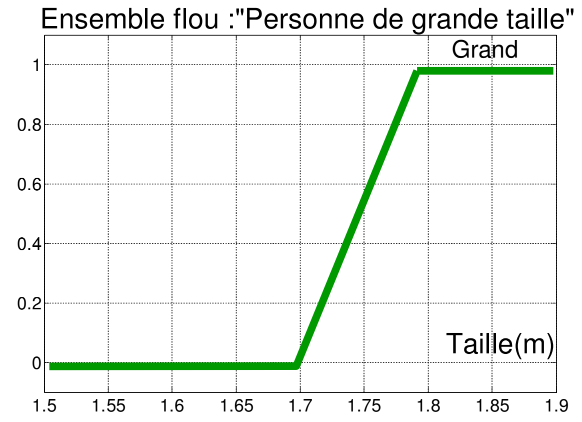
degré d'appartenance = valeur de vérité.

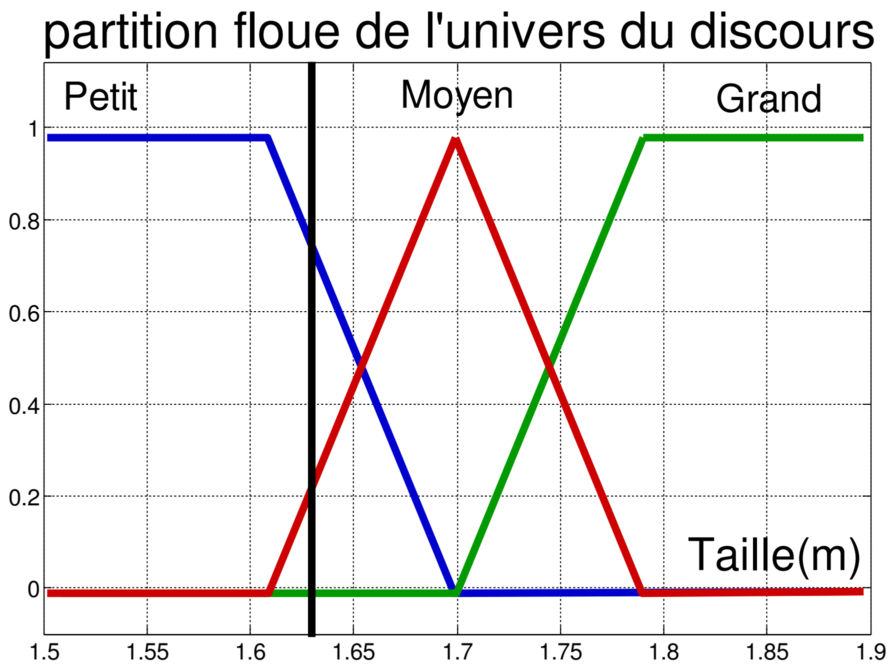
Un ensemble flou est totalement déterminé par sa fonction d'appartenance

Exemples d'ensembles flous.









Ici, Pierre mesure 1m625
se traduit en logique floue par
« Pierre est petit » à un degré de 75%
« Pierre est moyen » à 25%
« Pierre est grand » à 0%

Définition 2.
*La **hauteur** de A, notée $h(A)$, correspond à la borne supérieure de l'ensemble d'arrivée de sa fonction d'appartenance :* $h(A) = \sup\{\mu_A(x) \mid x \in X\}$.

Définition 3.
*A est dit **normalisé** si et seulement si $h(A) = 1$. En pratique, il est extrêmement rare de travailler sur des ensembles flous non normalisés.*

Définition 4.
*Le **support** de A est l'ensemble des éléments de X appartenant au moins un peu à A. Autrement dit, c'est l'ensemble* $\mathrm{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$.

Définition 5.
*Le **noyau** de A est l'ensemble des éléments de X appartenant totalement à A. Autrement dit, c'est l'ensemble $noy(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\}$. Par construction,* $\mathrm{noy}(A) \subseteq \mathrm{supp}(A)$.

Définition 6.
*Une **α-coupe** de A est le sous-ensemble classique des éléments ayant un degré d'appartenance supérieur ou égal à α :* $\alpha\text{-coupe}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geqslant \alpha\}$.

Fonctions d'appartenances particulières

Lorsqu'un fait certain correspond à l'énoncé de la valeur d'une variable, on a un singleton:

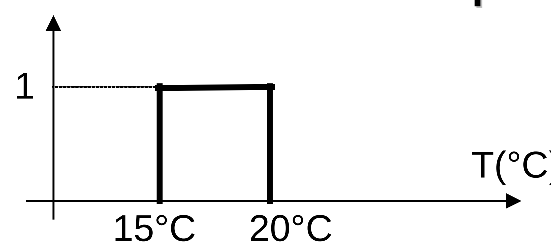
$$\begin{cases} \mu_{x_0}(x_0) = 1 \text{ pour } x = x_0 \\ \mu_{x_0}(x) = 0 \text{ pour } x \neq x_0 \end{cases}$$

Fonction d'appartenance de la classe « Le feu est rouge »

Les ensembles classiques sont des cas particuliers d'ensemble flou.

Leurs fonctions d'appartenances valant 0 ou 1 sont en créneaux

Fonction d'appartenance
de la classe « la température est tiède»



⇒ La logique floue englobe les données certaines

Opérateurs de logique floue

- Comme pour la théorie classique des ensembles.

On définit la réunion, l’intersection, le complément….d’ensembles flous

La logique booléenne standard est un cas particulier de la logique floue

$$\Downarrow$$

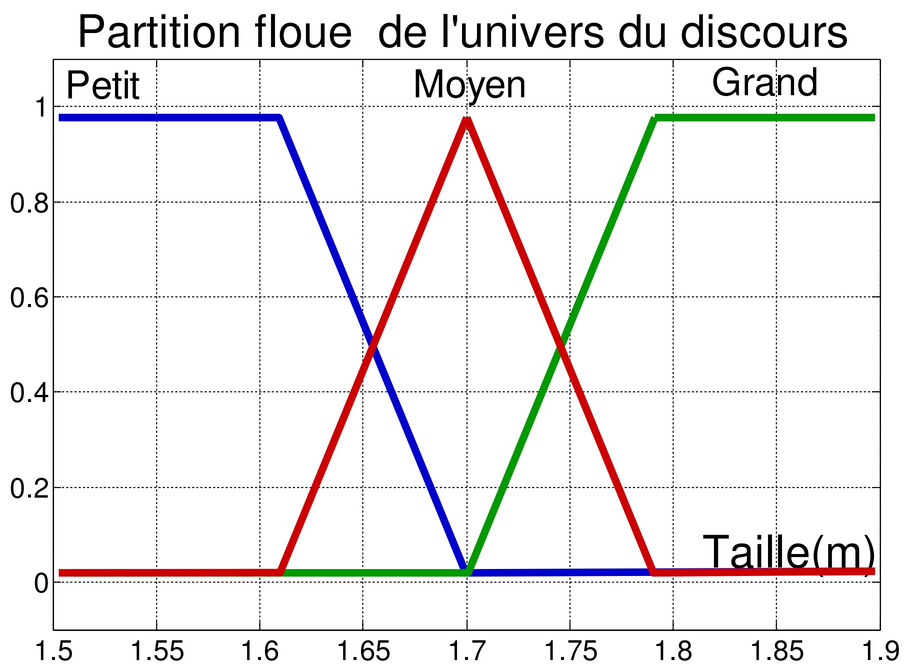
Tous les résultats obtenus en logique classique doivent être retrouvés par la logique floue

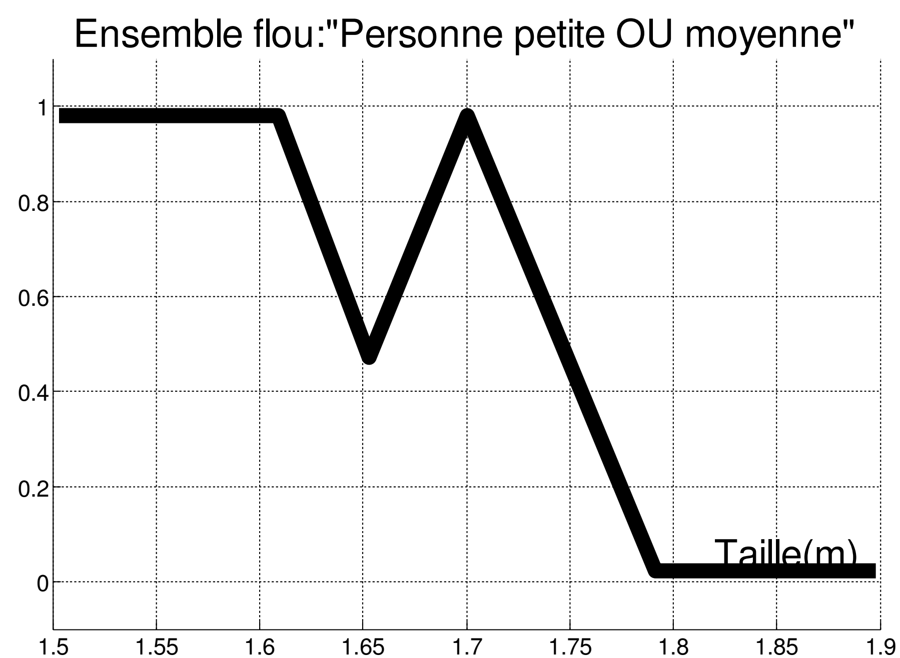
La réunion

A est l'ensemble flou des personnes petites.
B est l'ensemble flou des personnes moyennes.

L'ensemble des personnes petites <u>OU</u> moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{A\cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U$$



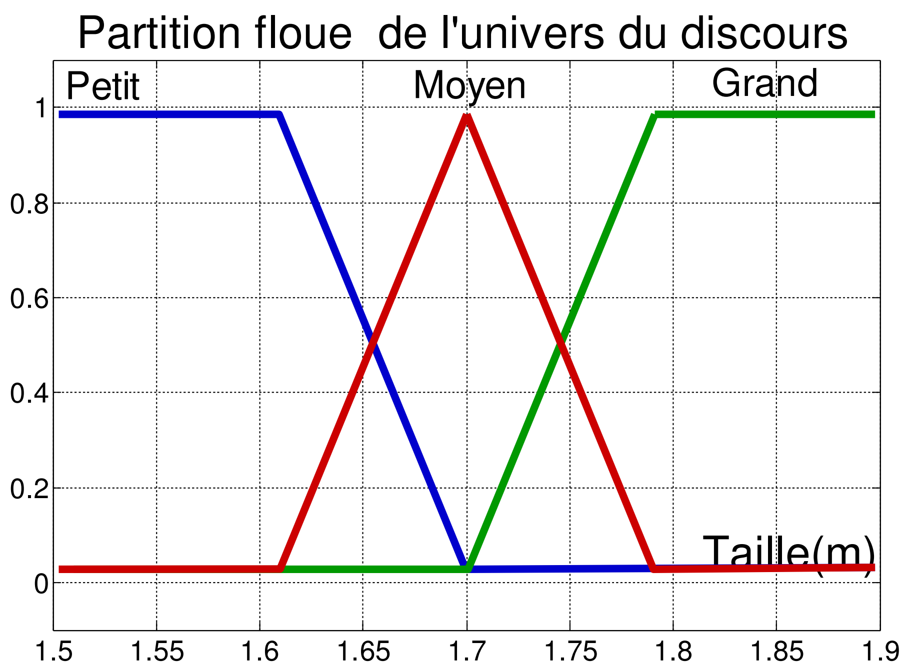


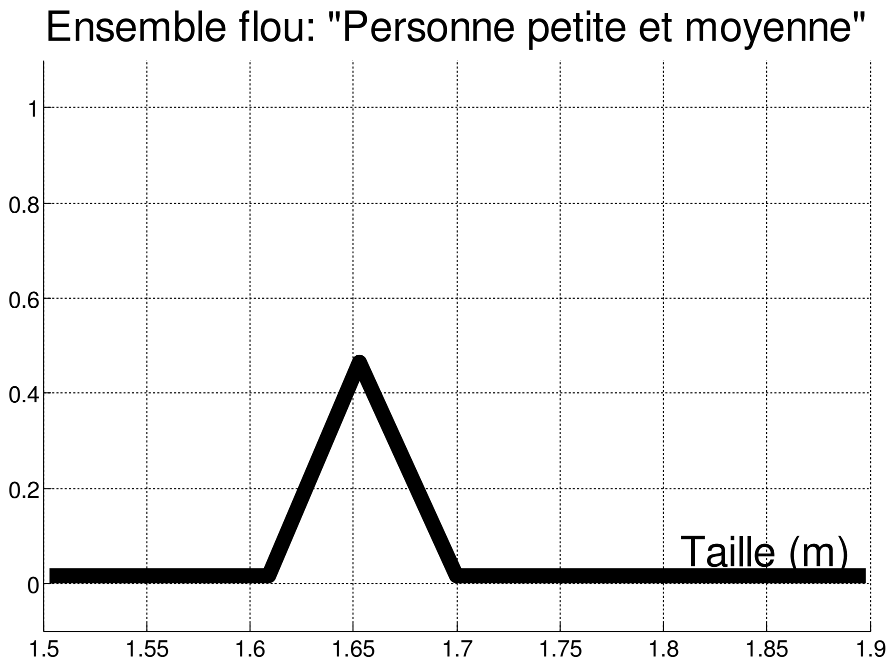
L'intersection

A est l'ensemble flou des personnes petites.
B est l'ensembles flou des personnes moyennes.

L'ensemble des personnes petites ET moyennes est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{A \cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad \forall x \in U$$



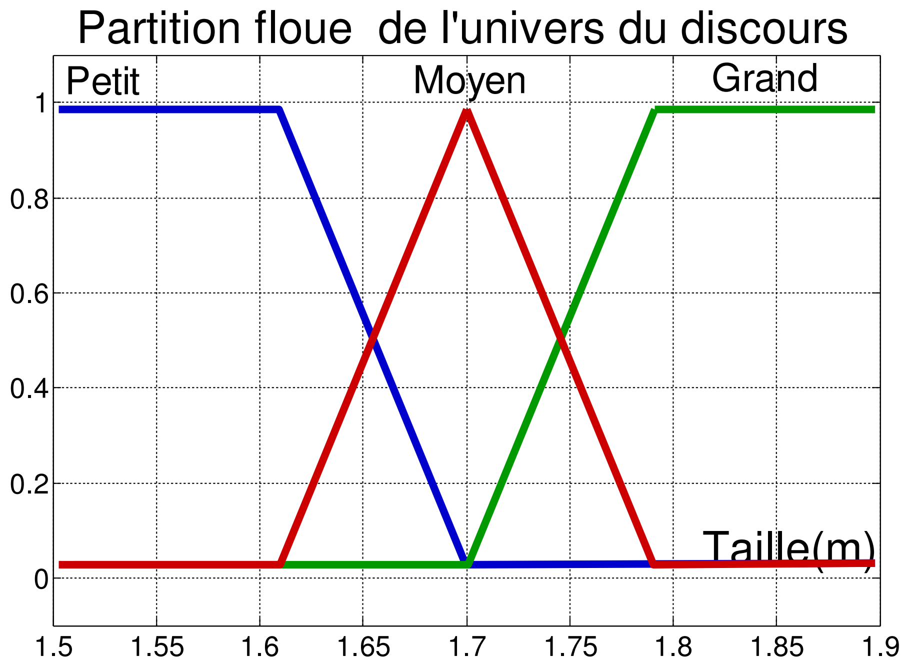


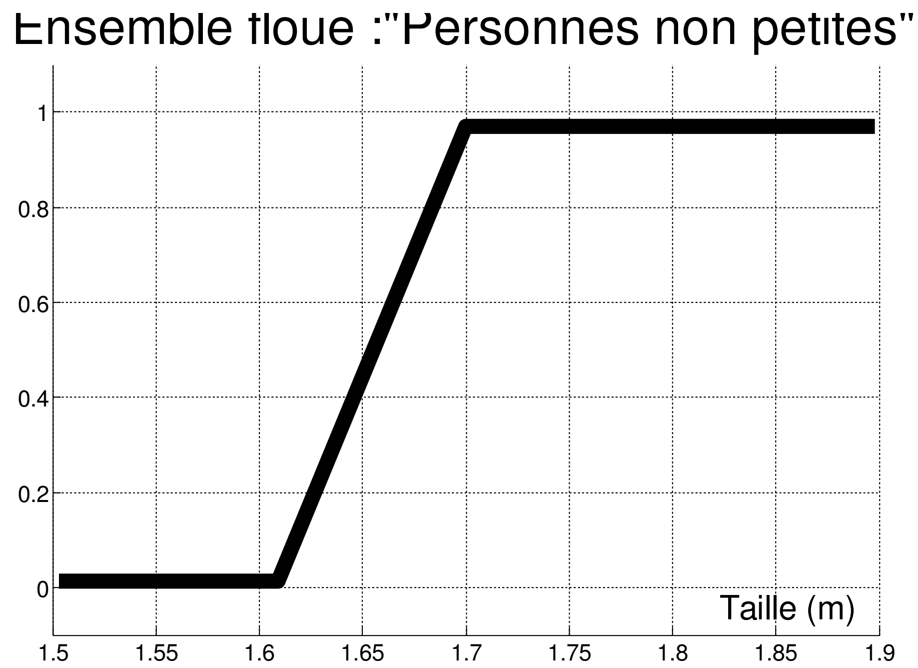
Le complément

A est l'ensemble flou des personnes petites.

L'ensemble des personnes NON petites est un ensemble flou de fonction d'appartenance :

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad \forall x \in U$$





Opérateurs flous alternatifs

Toute t-norme peut servir à définir l'intersection floue

Une t-norme est une application T(x,y) satisfaisant les conditions suivantes:

- 1 est élément neutre $\forall x \in [0,1] \quad T(x,1) = T(1,x) = x.$
- Commutative $T(x,y) = T(y,x)$
- Associative $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$
- Monotone $si\ x \leq z\ et\ y \leq w\ alors\ T(x,y) \leq T(z,w)$

Toute t-conorme peut servir à définir la réunion floue

Une t-conorme est une application S(x,y) satisfaisant les conditions suivantes

- 0 est élément neutre $\forall x \in [0,1] \quad S(x,0) = x.$
- Commutative $S(x,y) = S(y,x)$
- Associative $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$
- Monotone $si\ x \leq z\ et\ y \leq w\ alors\ S(x,y) \leq S(z,w)$

notation	t-norme	dénomination	t-conorme associée
t_G	min(x, y)	Zadeh	max(x, y)
t_P	x.y	probabiliste	x + y - x.y
t_L	max(0, x + y-1)	Lukasiewicz	min(1, x + y)
t_D	min(x, y) pour x = 1 ou y = 1 0 ailleurs		max(x, y) pour x.y = 0 1 ailleurs
t_λ^D, λ>0	$1 - \dfrac{1}{1+\left[\left(\frac{1-x}{x}\right)^\lambda + \left(\frac{1-y}{y}\right)^\lambda\right]^{1/\lambda}}$	Dombi	$\dfrac{1}{1+\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^\lambda + \left(\frac{y}{1-y}\right)^\lambda\right]^{-1/\lambda}}$
t_γ^H, γ≥0	$\dfrac{xy}{\gamma+(1-\gamma)\cdot(x+y-xy)}$	Hamacher	$\dfrac{x+y-xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\lambda)xy}$
t_p^Y, p>0	$1-\min([1-x)^p + (1-y)^p]^{1/p}, 1)$	Yager	$\min((x^p+y^p)^{1/p}, 1)$
t_λ^W, λ>-1	$\max\left(0, \dfrac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda}\right)$	Weber	$\min(x+y+\lambda xy, 1)$

Opérateurs logiques floues les plus utilisés: Synthèse

Dénomination	Intersection ET (t-norme)	Réunion OU (t-conorme)	Complément NON
Opérateurs de Zadeh MIN/MAX	$\mu_{A\cap B}(x) = min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\mu_{A\cup B}(x) = max(\mu_A(x), \mu_B(x))$	$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$
Probabiliste PROD/PROBOR	$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \times \mu_B(x)$	$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$

Opérateurs logiques floues: synthèses

$\forall$ les définitions d'opérateurs ET et OU, on retrouve les propriétés des opérateurs booléens

Commutativité

Distibutivité

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

Associaticité

$$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$$

Lois de Morgan

$$\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$$

2 exceptions notables

1. En logique floue, le principe du tiers exclu est contredit.

$$A \cup \overline{A} \neq U \quad \text{i.e. } \mu_{A \cup \overline{A}}(x) \neq 1$$

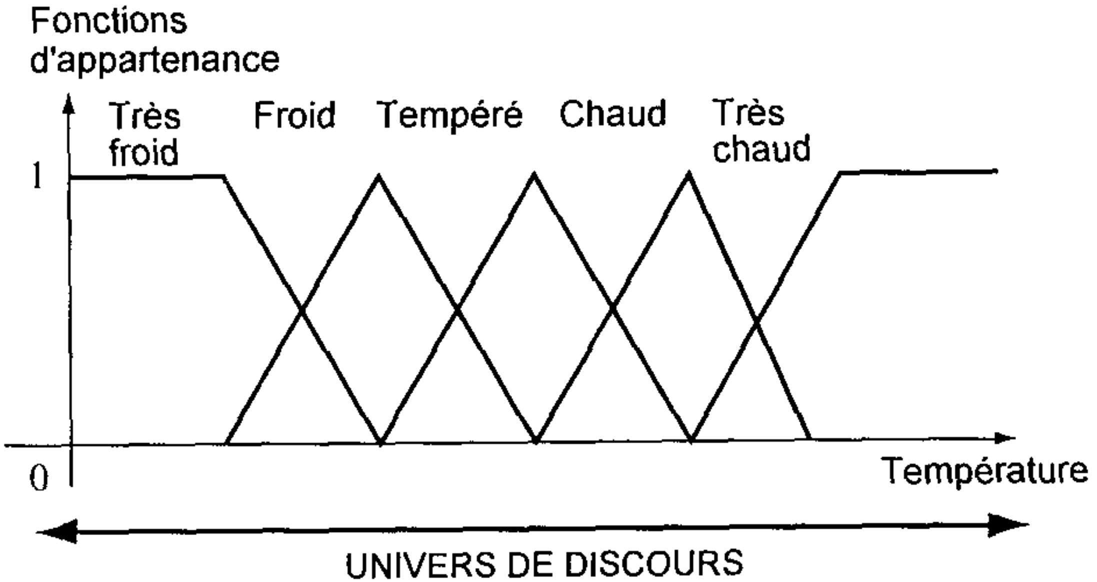
2. En logique floue, on peut être A et non A en même temps.

$$A \cap \overline{A} \neq \varnothing \quad \text{i.e. } \mu_{A \cap \overline{A}}(x) \neq 0$$

Variables floues

- Logique floue → basée sur des variables floues dites ***variables linguistiques*** à valeurs linguistiques dans l'univers du discours U.
- Chaque valeur linguistique constitue alors un ensemble flou de l'univers du discours.

Exemple:

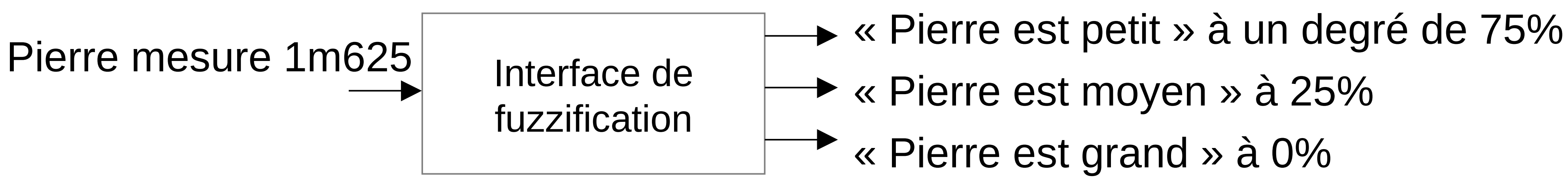


Univers du discours : Gamme de température de 0°C à 200°C.
Variable linguistique : La température.
Valeurs linguistiques : « Très froid» « Froid » « Tempéré » « Chaud » « Très Chaud »

La fuzzification

Les systèmes à logique floue traitent de variables d’entrées floues
et fournissent de résultats sur des variables de sorties elle-mêmes floues

La fuzzification est l’étape qui consiste en la quantification floue des valeurs réelles d’une variable.



Comment fuzzifier?

Pour fuzzifier, il faut donner:

1. L'univers du discours

   i.e.: Plage de variations possibles de l'entrée considérée.
2. Une partition en classe floue de cet univers.
3. Les fonctions d'appartenances de chacune de ces classes.

- Il faut fuzzifier les entrées ET les sorties du processus flou.

Exemple: Selon les valeurs des entrées , le système flou indiquera qu'en sortie la puissance de chauffe devra prendre les valeurs de sortie « faible » ou « moyenne » ou « forte ».

La fuzzification des variables est une phase délicate du processus mis en oeuvre par la logique floue. Elle est souvent réalisée de manière itérative et requiert de l'expérience.

(Cf. suite: Application à la commande floue)

Base de règles

Les systèmes à logique floue utilisent une expertise exprimée sous forme d'une base de règles du type: Si….Alors…

$$Si\left(X\ est\ A\right)\ Alors\left(Y\ est\ B\right)$$

Si *Temps est beau* ET *Moment est DébutMatinée* ALORS *Moral est haut*

Si *Cours est Ennuyeux* ET *Moment est DébutCours* ALORS *Moral est bas*

Si *Cours est Intéressant* ET *ChargedeTravail est Importante* ALORS *Moral est Maussade*

Si ....

Inférence floue

Si *Temps est beau* ET *Moment est DébutMatinée* ALORS *Moral est haut*

Prémisses Conjonction Implication Conclusion

<u>Inférence :</u>
Opération logique par laquelle on admet une proposition en vertu de sa liaison avec d'autres propositions tenues pour vraies.

<u>En logique classique</u>

$$\begin{cases} Si\ \ p\ \ Alors\ \ q \\ p\ vrai\ \ Alors\ \ q\ vrai \end{cases}$$

<u>En logique floue</u>

$$Si\ \left(\ X\ \ est\ \ A\right)\ \ Alors\ \left(\ Y\ \ est\ \ B\right)$$

• La variable floue X appartient à la classe floue A avec un degré de validité $\mu(x_0)$

• La variable floue Y appartient à la classe floue B à un degré qui dépend du degré de validité $\mu(x_0)$ de la prémisse

Principe du raisonnement approximatif

Plus la condition sur les entrées est vraie.

Plus l'action préconisée pour les sorties doit être respectée

SI *la température est très basse* ALORS *Chauffer fort*

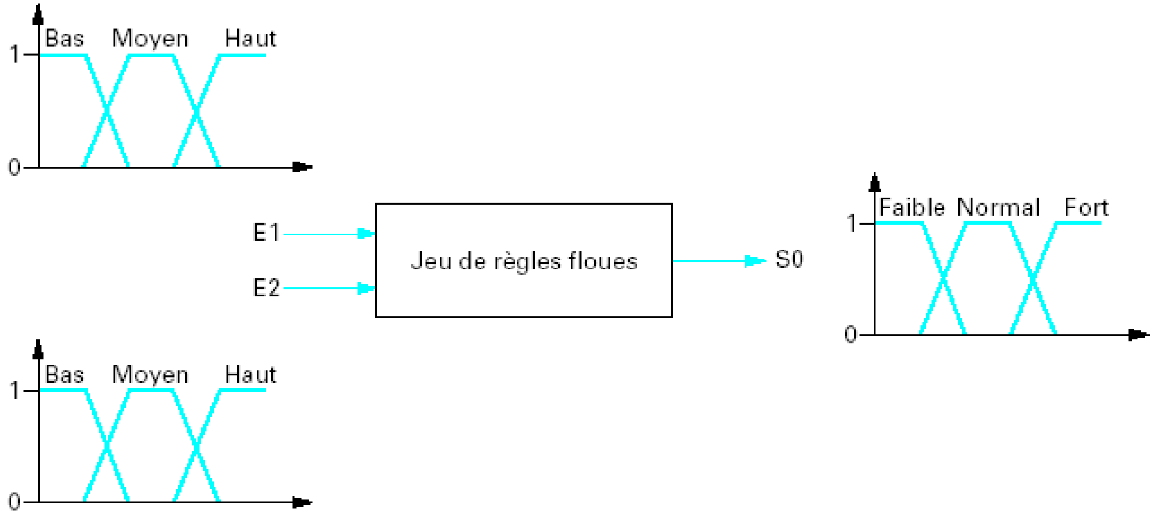
La conclusion d'une règle floue est l'appartenance d'une variable floue de sortie « Chauffer » à une classe floue « fort ».

Cette appartenance dépend de :

1°) La classe floue de sortie considérée.
2°) du degré de validité de la prémisse $\mu_{\text{prémisses}}(x_0)$.
3°) de la méthode d'implication choisie.

Méthodes d'implication

2 méthodes principales d'implication floue:



<u>Méthode de Mamdani :</u>

$$\mu'_{conclusion}(y) = \underset{y}{MIN}\left(\mu_{prémisse}(x_0), \mu_{conclusion}(y)\right)$$

<u>Méthode de larsen :</u>

$$\mu'_{conclusion}(y) = \mu_{prémisse}(x_0) \times \mu_{conclusion}(y)$$

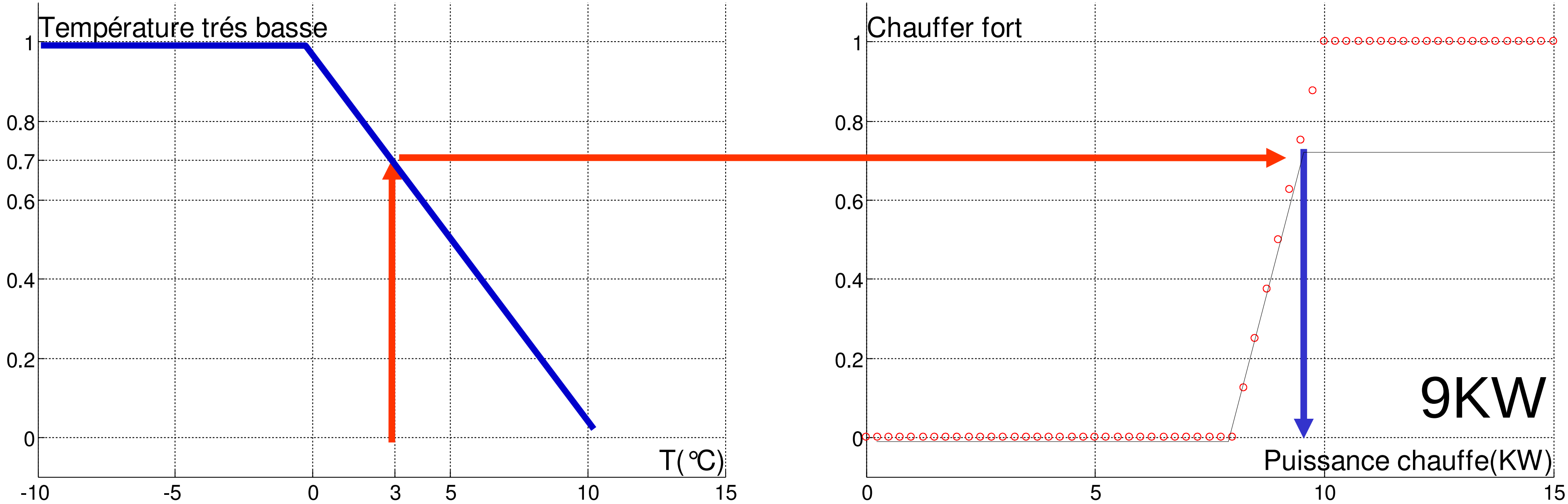
Exemple (Mamdani)

Plus la condition sur les entrées est vraie.

Plus l'action préconisée pour les sorties doit être respectée

Règle: <u>SI</u> *la température est très basse* <u>ALORS</u> *Chauffer fort*

$$\mu'_{conclusion}(y) = \underset{y}{MIN}\left(\mu_{prémisse}(x_0), \mu_{conclusion}(y)\right)$$



T=3°C

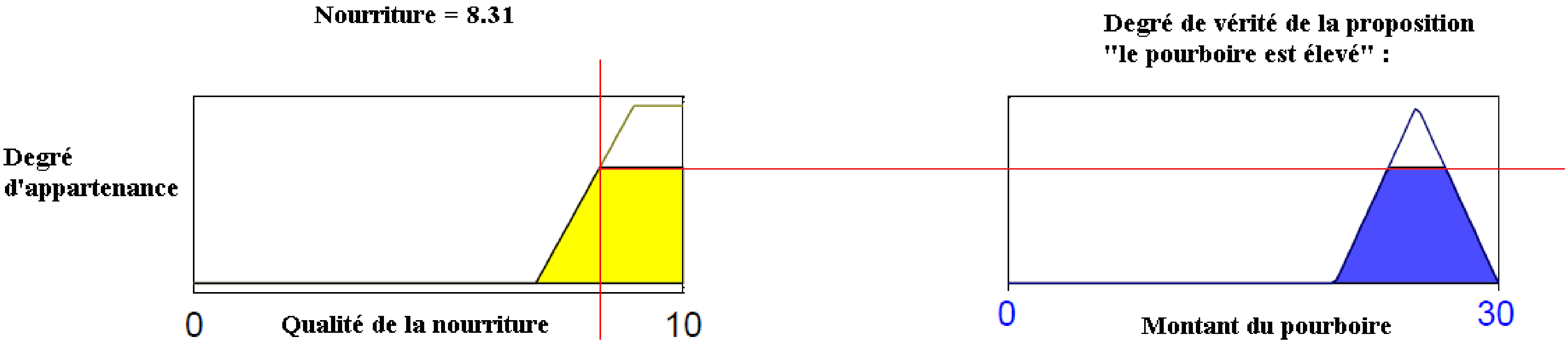
Selon la règle considérée, si T=3°C alors Puissance de chauffe =9KW

Exemple (Mamdani)

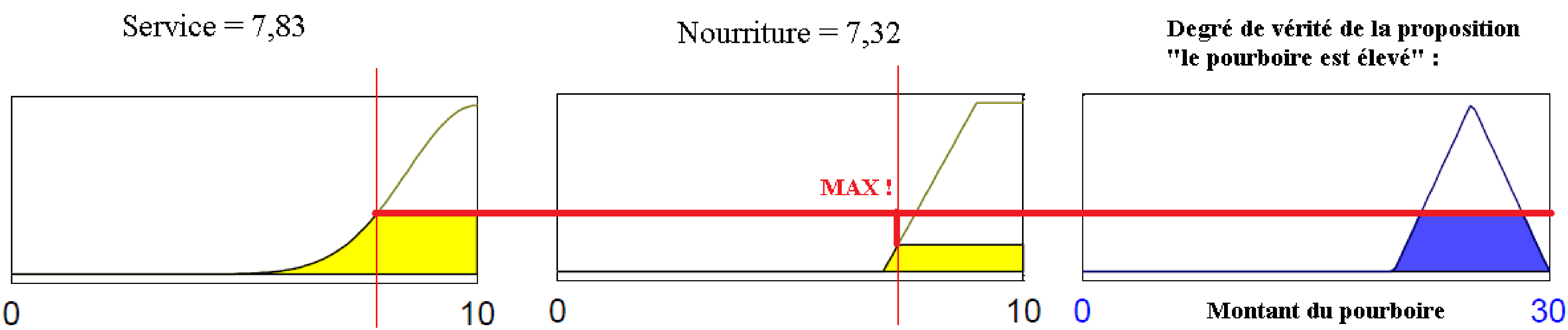
Plus la condition sur les entrées est vraie.

Plus l'action préconisée pour les sorties doit être respectée

Règle: <u>SI</u> nourriture *est bonne* <u>ALORS</u> pourboire *élevé*



Si (le service est excellent ou la nourriture est d́ elicieuse), alors (le pourboire sera eleve) lorsque la qualite du service est not́ ee 7,83 sur 10 et la qualite de la nourriture 7,32 sur 10 si nous choisissons l'implication de Mamdani ainsi que la traduction du OU par MAX.



Activation des règles

R1: $Si\left(X_1\ est\ A_{11}\right)\ et\left(X_2\ est\ A_{12}\right)$ $alors\ Y\ est\ B_1$

R2: $Si\left(X_1\ est\ A_{21}\right)\ ou\left(X_2\ est\ A_{22}\right)$ $alors\ Y\ est\ B_2$

R3: $Si\left(X_1\ est\ A_{31}\right)\ et\left(X_2\ est\ A_{32}\right)\ et\left(X_3\ est\ A_{33}\right)$ $alors\ Y\ est\ B_3$

....

- Une règle est activée dès qu'elle a une prémisse ayant une valeur de vérité non nulle.

- Plusieurs règles peuvent être activées simultanément et préconiser des actions avec différents degrés de validités; ces actions peuvent être contradictoires.

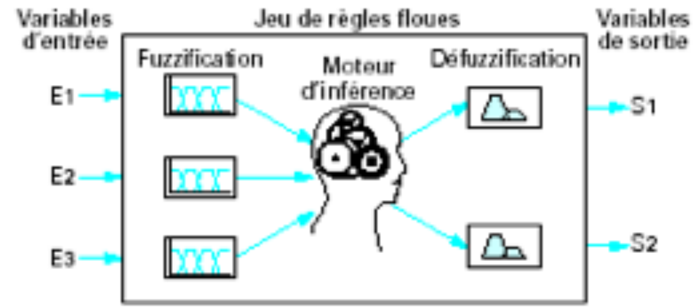
$\Rightarrow$Il convient d'agréger les règles pour fournir une appartenance de la variable floue de sortie à une classe floue consolidée

Composition de règles

On considère que les règles sont liées par un opérateur OU.

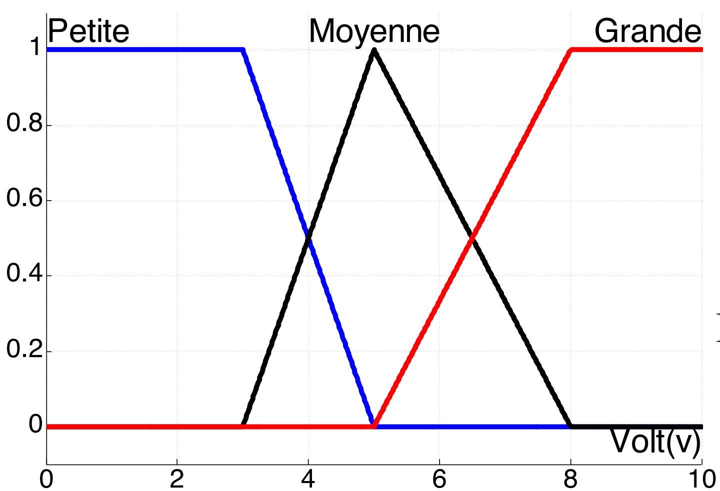
$$\mu_B(y) = MAX\left[\mu_{B_i}(y)\right] \qquad i \in \{\textit{indices des règles activées}\}$$

On considère un moteur d'inférence à 4 règles qui fournit pour sa sortie tension S_1, les résultats suivants :

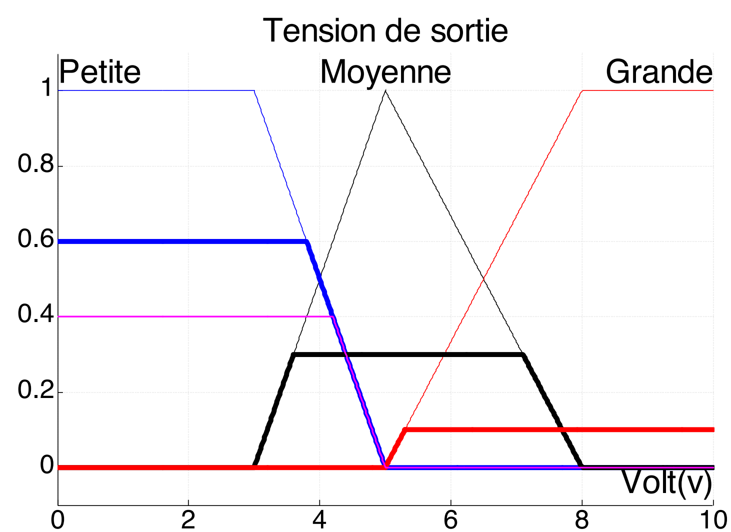


Moteur d'inférences 4 règles

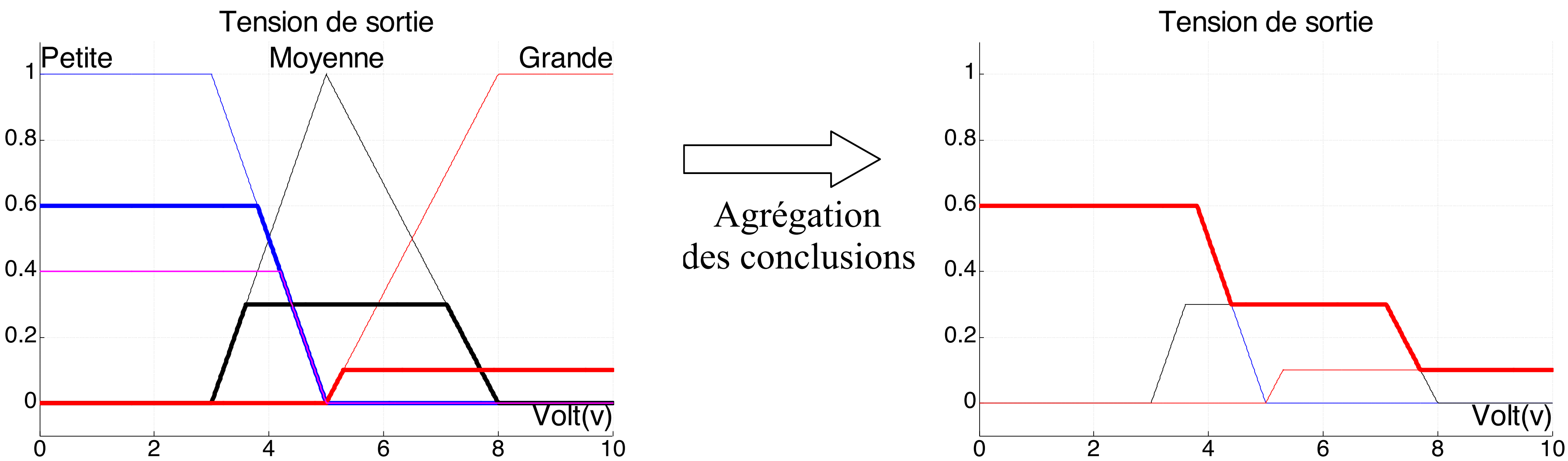
- $R_1 \rightarrow \mu_{petite}=0.6$
- $R_2 \rightarrow \mu_{petite}=0.7$
- $R_3 \rightarrow \mu_{moyenne}=0.3$
- $R_4 \rightarrow \mu_{grande}=0.1$



Implication floue de Mamdani



Exemple (2)

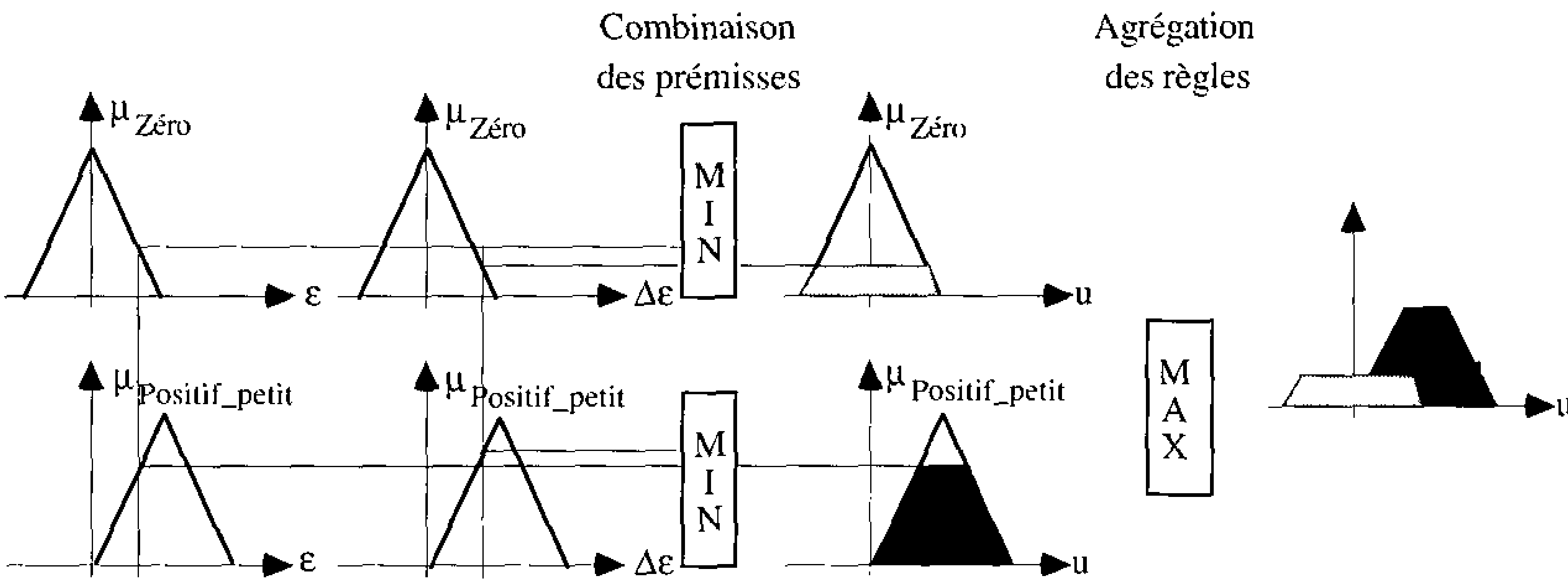


A ce stade,
on a la fonction d'appartenance d'un ensemble flou
qui caractérise le résultat

Il faut défuzzifier, c'est à dire :

Associer à cette ensemble flou un nombre interprétable par l'utilisateur, l'interface de commande…

Principe de la méthode de Mamdani



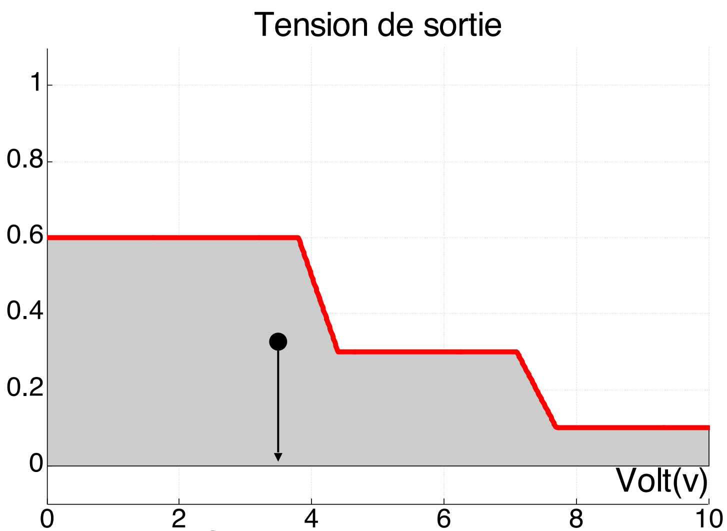
2 principales méthodes de défuzzification.

1. Méthode du centre de gravité (COG)

C'est l'abscisse du centre de gravité de la surface sous la courbe résultat

$$sortie = \frac{\int_U y \cdot \mu(y) \cdot dy}{\int_U \mu(y) \cdot dy}$$

$$U = Univers\ du\ discours$$
$$= Toutes\ les\ valeurs\ de\ sorties\ considérées$$



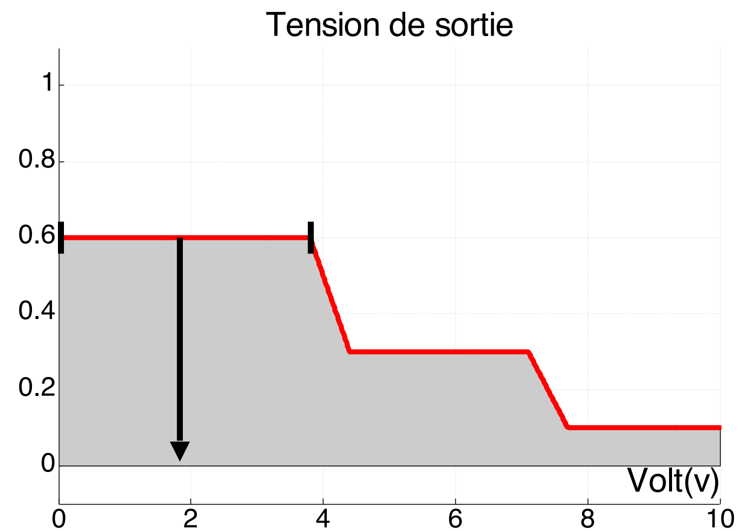
3,5V

2. Méthode moyenne des maximums (MM)

C'est la moyenne des valeurs de sorties les plus vraisemblables

$$sortie = \frac{\int_S y \cdot dy}{\int_S dy}$$

$$où\ S = \left\{ y_0 \in U \,/\, \mu(y_0) = \underset{y \in U}{SUP}\left(\mu(y)\right) \right\}$$



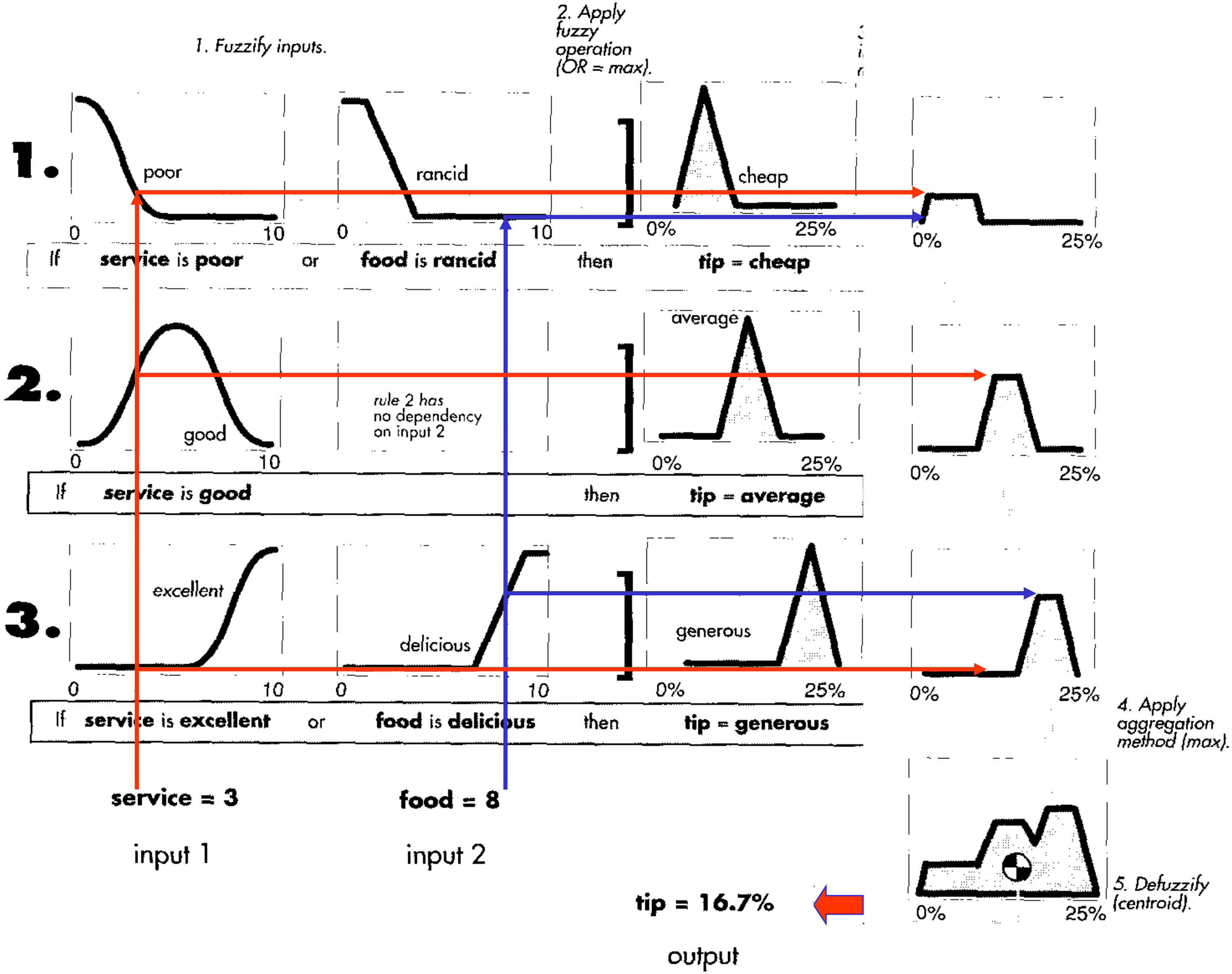
1,9V

Défuzzification

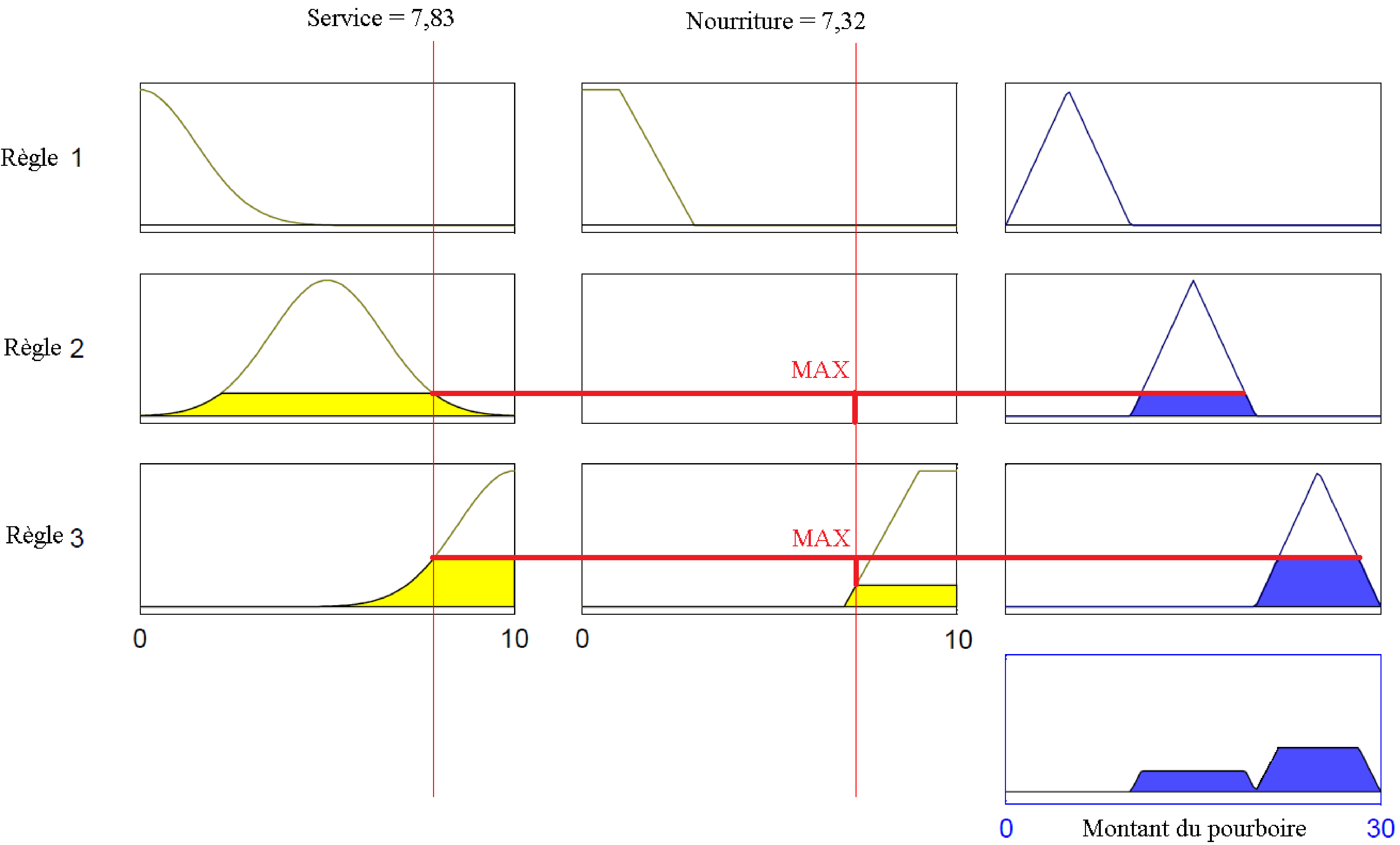
- En commande floue, la défuzzification COG est presque toujours utilisée. Elle prend en compte l'influence de l'ensemble des valeurs proposées par la solution floue.

- La défuzzification MM est plutôt utilisée lorsqu'il s'agit de discriminer une valeur de sortie (Ex: reconnaissance de formes).

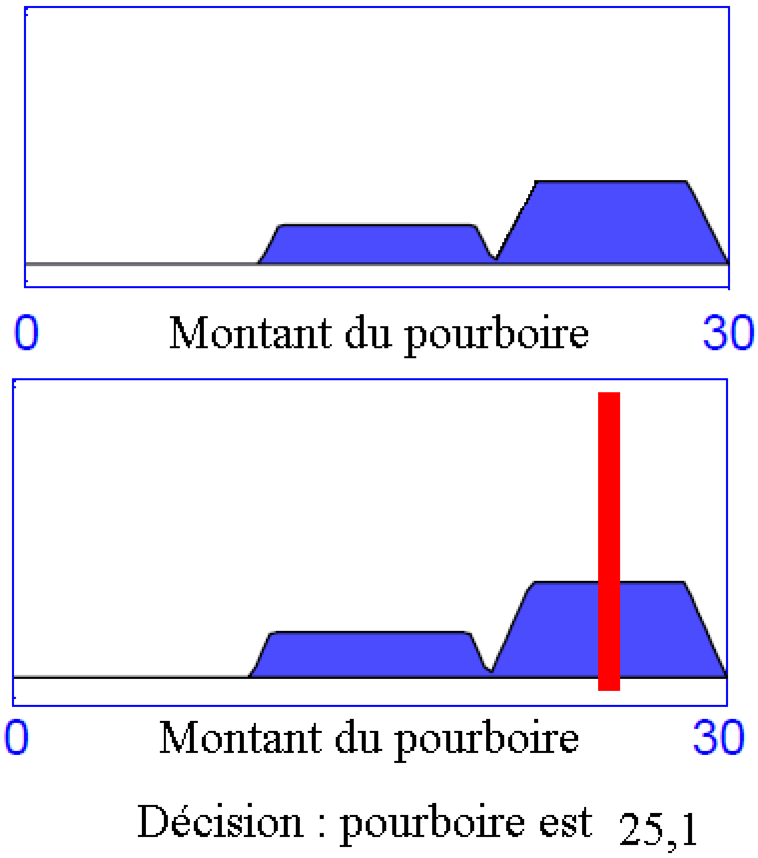
Synthèse d'un prise de décision par logique floue.



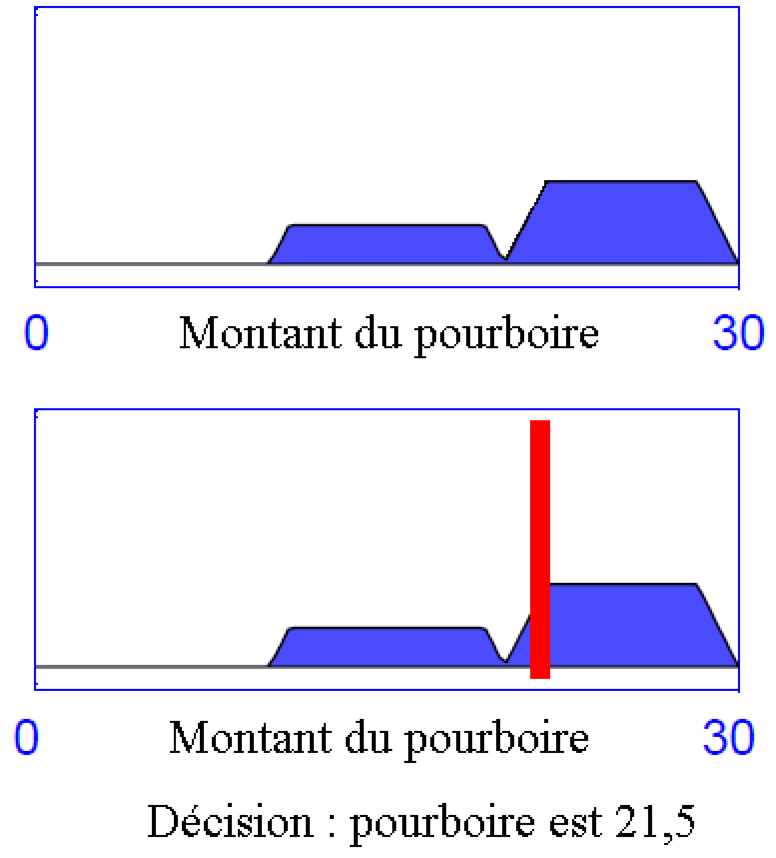
Synthèse d'un prise de décision par logique floue.



Synthèse d'un prise de décision par logique floue.



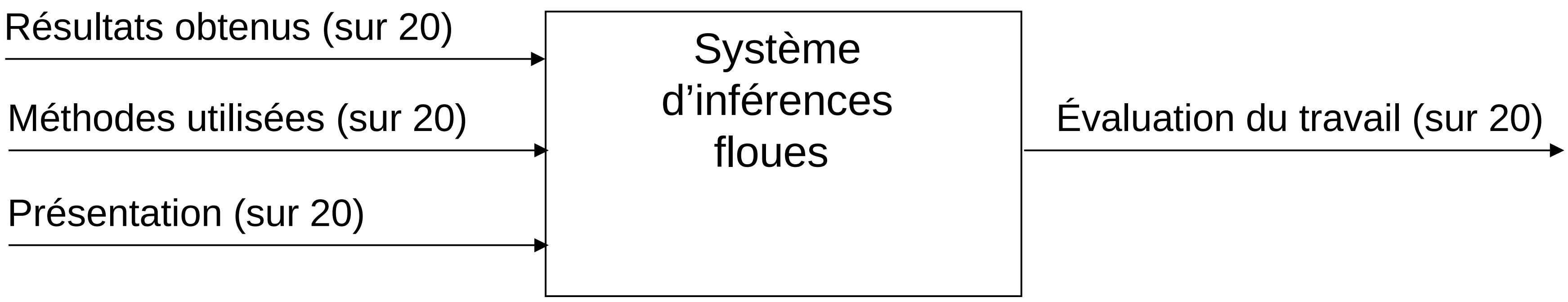
Defuzzification avec la methode moyenne des maxima (MM)



Defuzzification avec la méthode centre de gravité (COG)

Exemple : Système de notation floue

On choisit :



Mise en place du système d'inférences floues (1)

1. <u>Choix des entrées/sorties</u>

3 entrées: Résultats; Méthodes, Présentation.
1 sortie: Évaluation

2. <u>Univers des discours</u>

[0..20] pour chacune des E/S

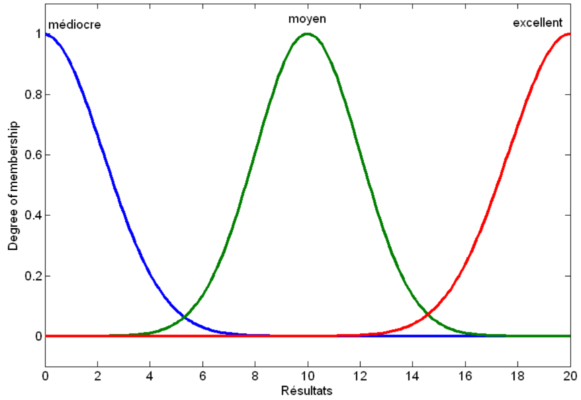
3. <u>Classes d'appartenances:</u>

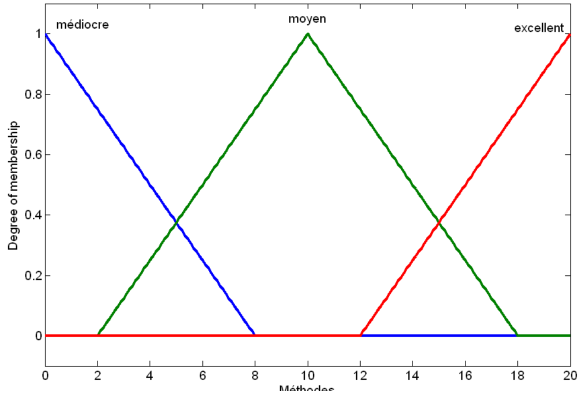
$$\text{Résultats} \in \{\text{Médiocre; Moyen; Excellent}\}$$
$$\text{Méthodes} \in \{\text{Médiocre; Moyen; Excellent}\}$$
$$\text{Evaluation} \in \{\text{Médiocre; Mauvais; Moyen; Bon; Excellent}\}$$

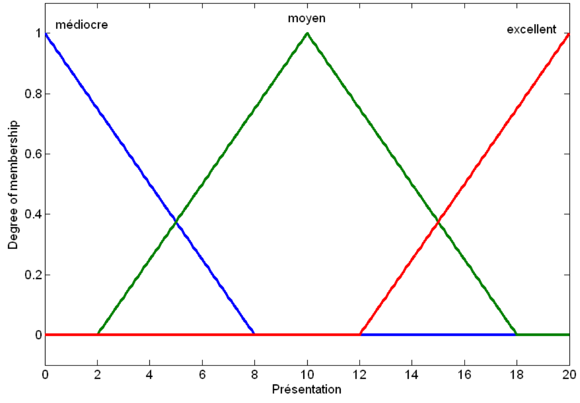
Mise en place du système d'inférences floues (2)

4. <u>Choix des fonctions d'appartenances</u>

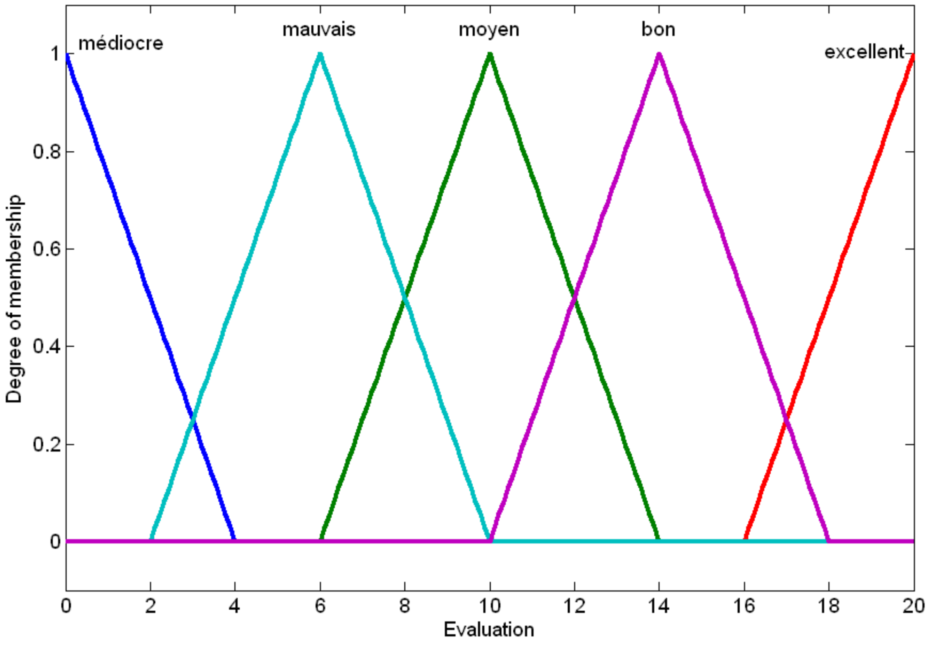
Entrées :







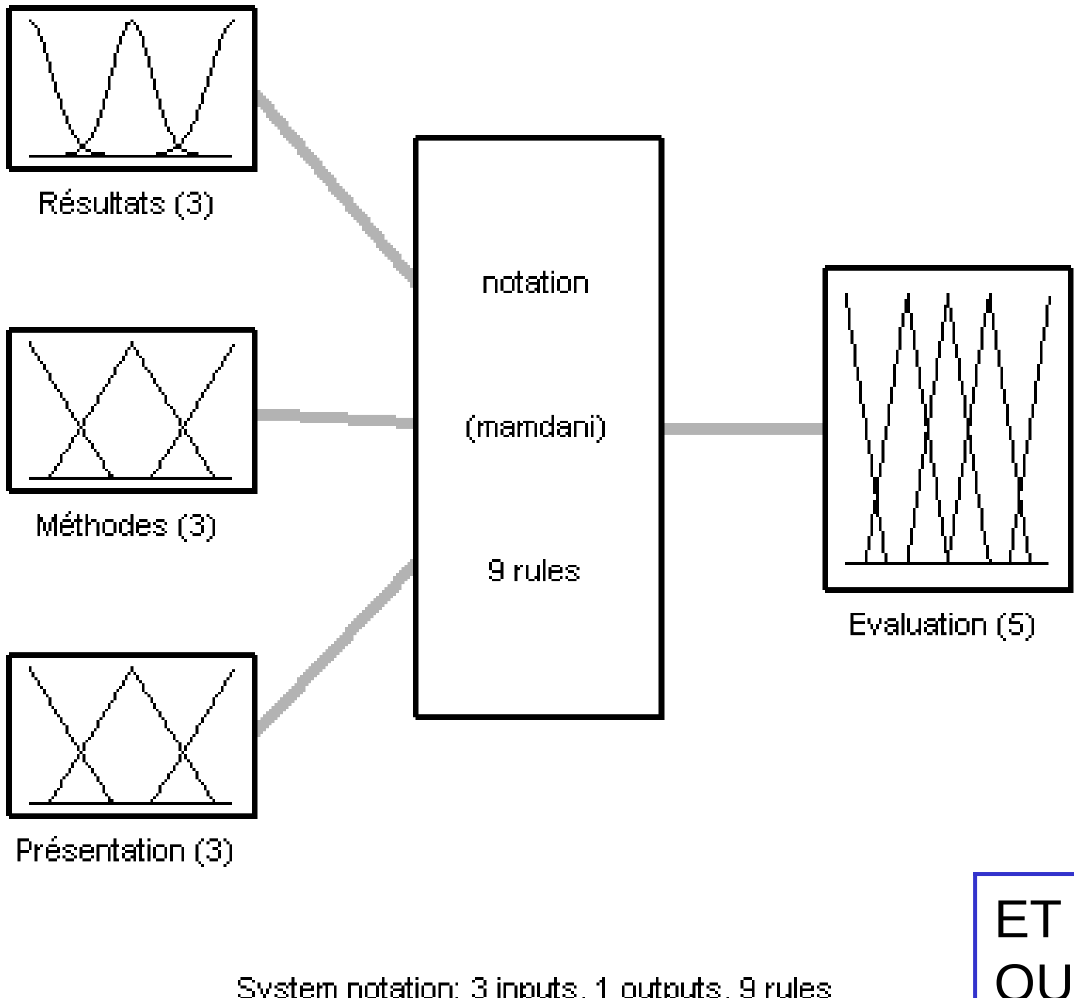
Sortie :



Bases de règles

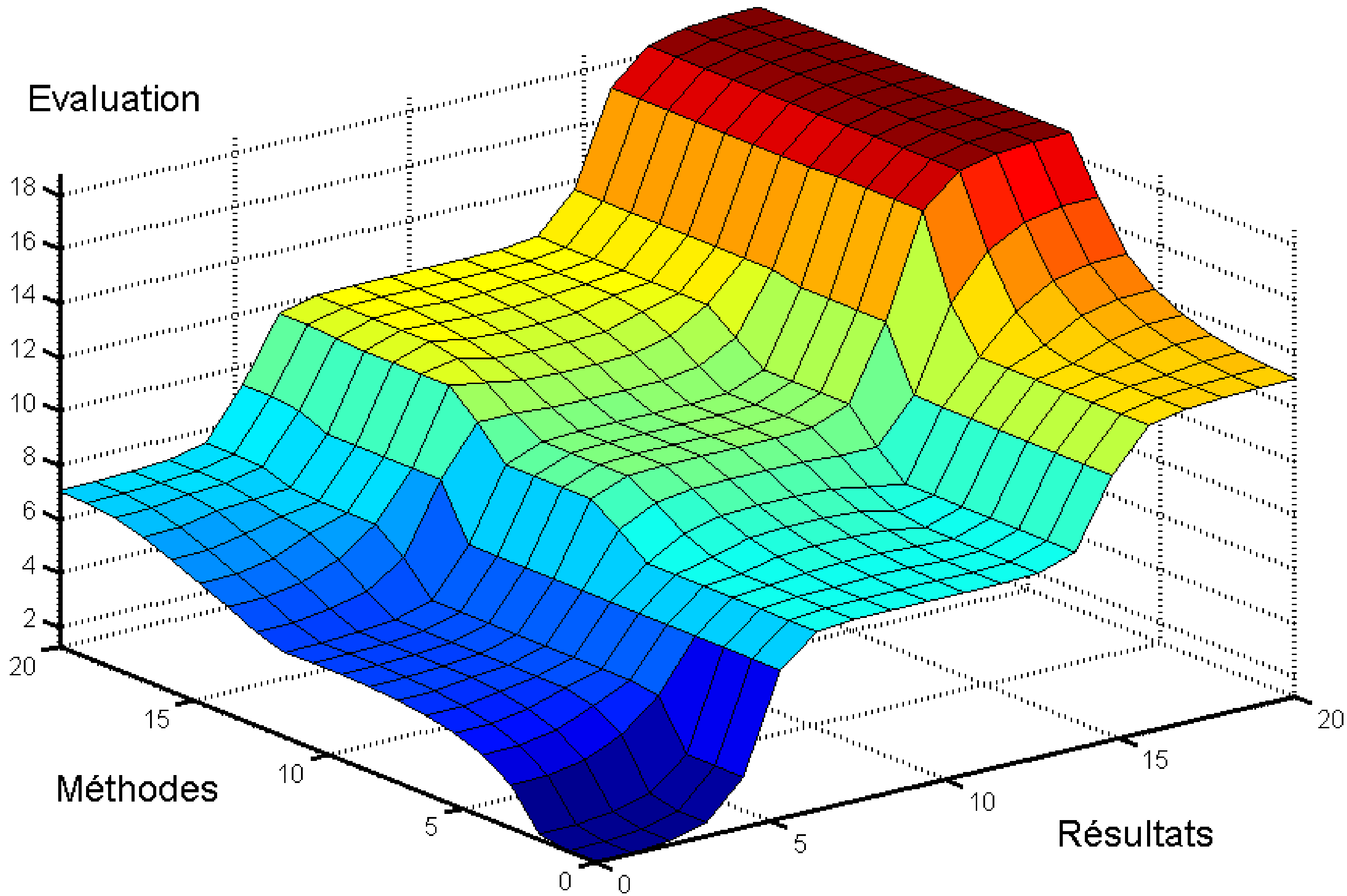
1. If (Résultats is excellent) then (Evaluation is excellent)
2. If (Résultats is moyen) then (Evaluation is moyen)
3. If (Résultats is médiocre) then (Evaluation is médiocre)
4. If (Résultats is moyen) and (Méthodes is médiocre) then (Evaluation is mauvais)
5. If (Résultats is moyen) and (Méthodes is excellent) then (Evaluation is bon)
6. If (Résultats is médiocre) and (Méthodes is moyen) then (Evaluation is mauvais)
7. If (Résultats is excellent) and (Méthodes is excellent) and (Présentation is excellent) then (Evaluation is excellent)
8. If (Résultats is médiocre) and (Méthodes is excellent) then (Evaluation is moyen)
9. If (Résultats is excellent) and (Méthodes is médiocre) then (Evaluation is moyen)

Choix des opérateurs flous



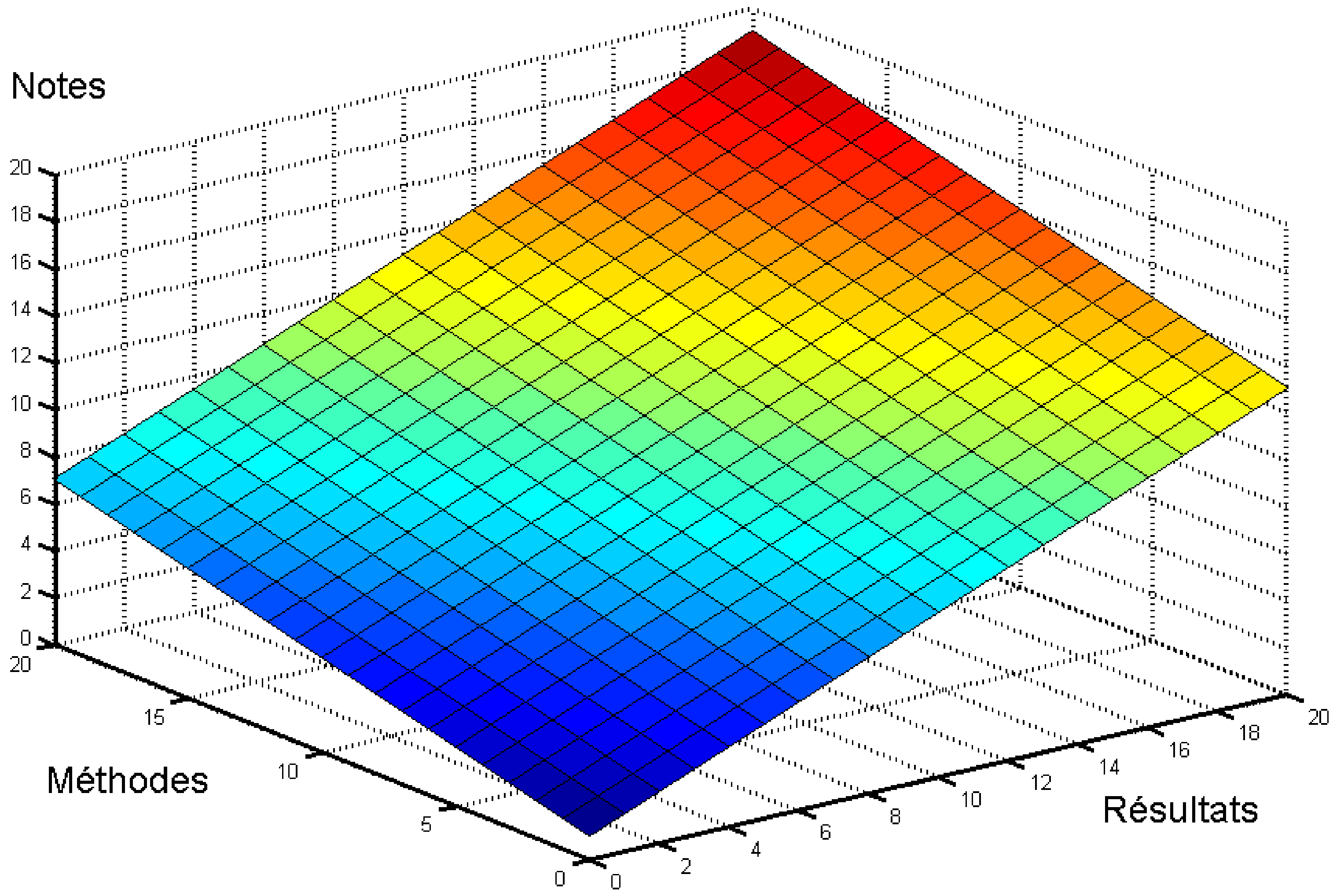
ET flou	: MIN
OU flou	: MAX
Implication floue	: MIN
Agrégation des règles	: MAX
Défuzzyfication	: COG

Surface de décision floue



(Obtenue pour une évaluation de la présentation de 10/20).

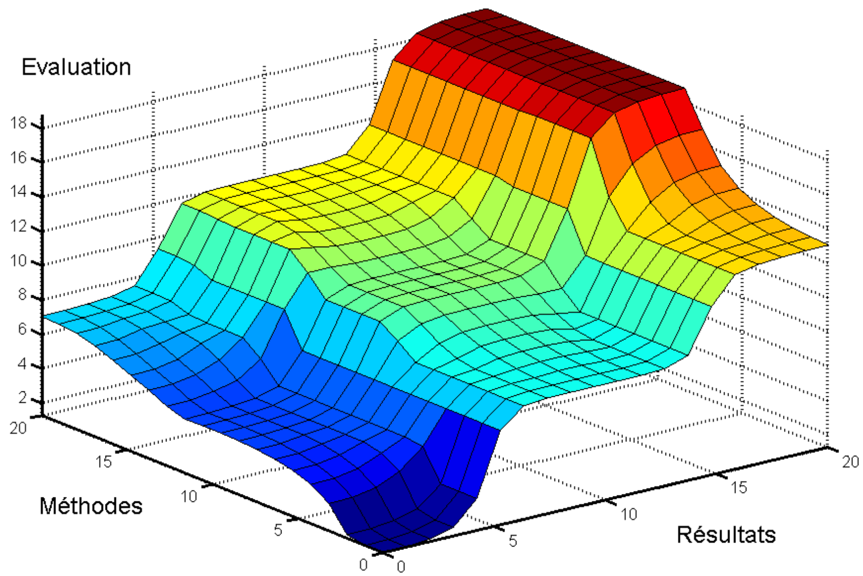
Surface de décision linéaire classique

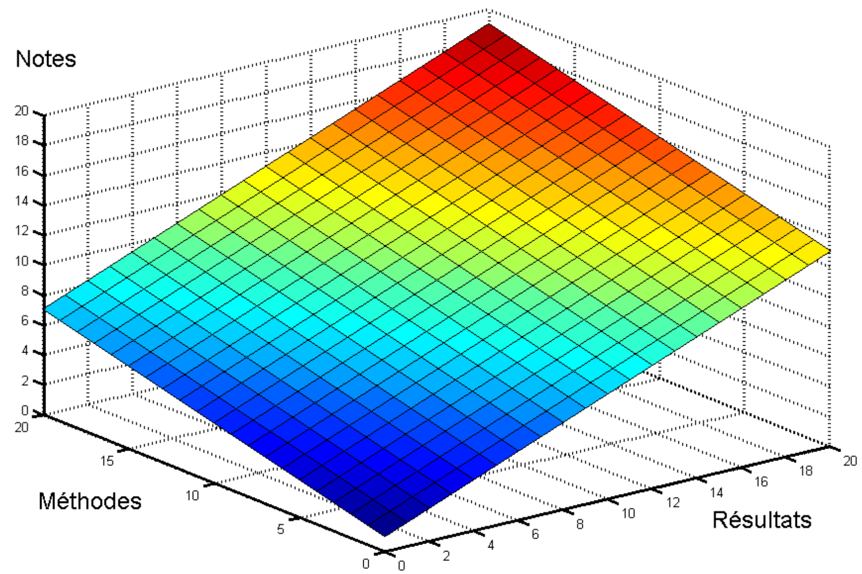


Pondération Résultats: 0,6
Pondération Méthodes: 0,3
Pondération Présentation: 0,1

(Obtenue pour une évaluation de la présentation de 10/20).

Commentaires





Décision selon un système d'inférences floues

Décision selon un modèle mathématiques

$$Note = 0,6 * Résultats + 0,3 * Méthodes + 0,1 * Présentation$$

Non linéaire

Linéaire $\left(\Delta Note / \Delta entrée = Cste \right)$

Plus proche du comportement humain du correcteur…

Mieux accepté par le rédacteur du travail évalué…