ELEMENTS DE LOGIQUE

I - LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS (CALCUL DE PREDICATS)

1. INTRODUCTION

Dans la logique des propositions nous nous intéressons à des phrases déclaratives qui peuvent être vraies ou fausse mais pas les deux à la fois.

Exemple : la neige est blanche,
Le sucre est un hydrocarbure.

Convention : les lettres ou les caractères en MAJUSCULES seront utilisées pour désigner les propositions.

Ainsi on notera :

P : La neige est blanche,
Q : Le sucre est un hydrocarbure.
R : l'eau pure est incolore

P, Q, R sont appelés formules atomiques ou atomes.
on utilisera les connecteurs logiques □ (ET) □ (OU) □ (implique si … alors) ↔ (si et seulement si) □ (NON) pour construire des formules complexes (propositions complexes).

2. . INTERPRETATION DE FORMULES

Définition : On appelle formules bien formées (fbf) ou formules tout court, les formules récursivement définies comme suit :

1. Un atome est une formule bien formée
2. Si G est une fbf alors □(négation de) G est une fbf
3. Si G et H sont des fbf alors (G □ H), (G □ H), (G □ H) et (G ↔H) sont des fbf
4. Toutes les formules bien formées sont générées par application des règles ci- dessus.

Remarque : lorsqu'il n'y a pas de confusion, des parenthèses seront omises. Les rangs décroissants des connecteurs à prendre en compte est le suivant : ↔, □, □, □, □. On suppose que les connecteurs de rangs plus élevés sont atteints les derniers.

Ainsi :

P □ Q □ R équivaut à (P □ (Q □ R))
P □ Q □ □R □ S équivaut à (P □ (Q □ ((□R) □ S)))

Définition : Soit G une fbf supposons que $A_1, A_2, \ldots A_n$ soient les atomes apparaissant dans la formule G.Alors une interprétation de G est une affectation de valeurs de vérités à $A_1, A_2, \ldots A_n$ où chaque A_i est affecté soit de la valeur V soit de la valeur F et non les deux à la fois.

Tables de vérité

G	H	$\neg G$	$(G \wedge H)$	$(G \vee H)$	$(G \rightarrow H)$	$(G \leftrightarrow H)$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Définition : Une formule bien formulée est dite vraie dans une interprétation si et seulement si G est évaluée à V dans l'interprétation ; sinon. G est dite fausse dans l'interprétation.
S' il y a n atomes différents dans une formule, alors il y aura 2^n interprétation différentes de cette formule.

Il est souvent commode de présenter une interprétation par un ensemble $\{m_1, \ldots, m_n\}$ où m_i est soit A_i soit $\neg A_i$ par exemple $(P, \neg Q, \neg R, S)$ représente l'interprétation dans laquelle P, Q, R et S sont respectivement affectés des valeurs V, F, F, et V.

3. VALIDITE ET INCONSISTANCE DANS LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

Dans cette section on considérera les formules qui sont toujours vraies sous toutes leurs interprétations possibles et aux formules fausses sous toutes leurs interprétations possibles.

Exemple : Soit G : $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q)$

2 atomes composent G donc il y a $2^2 = 4$ interprétations

Table de vérité de G

P	Q	$(P \rightarrow Q)$	$(P \rightarrow Q) \wedge P$	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

G est vraie sous chacune de ses interprétations. Cette formule sera appelée : **Formule valide ou tautologie.**

Exemple 2 :
Soit G : $(P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$(P \rightarrow Q)$	$(P \wedge \neg Q)$	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$
V	V	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F

F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Dans cet exemple G est fausse sous toutes ses interprétations : et sera appelée ici **formule inconsistante ou contradiction.**

Définition

Une formule est dite valide si et seulement elle est vraie sous toutes ses interprétations. Une formule est dite invalide si et seulement si elle n'est pas valide.

Définition

Une formule est dite inconsistante si et seulement si elle est fausse sous toutes ses interprétations. Une formule est dite consistante si et seulement si elle n'est pas inconsistante.

Remarques :

1. Une formule est valide si et seulement si sa négation est inconsistante ;
2. Une formule est inconsistante si et seulement si sa négation est valide ;
3. Une formule est invalide si et seulement si il y a au moins une interprétation dans laquelle elle est fausse ;
4. Une formule est consistante si et seulement si il y a au moins une interprétation dans laquelle elle est vraie ;
5. Si une formule est valide, alors elle est consistante, mais la réciproque est fausse ;
6. Si une formule est inconsistante, alors elle est invalide mais la réciproque est fausse.

Exemples

Utilisent la table de vérité a établit que :
$(P \wedge \neg P)$ est inconsistant, donc est aussi invalide ;

$(P \vee \neg P)$ est valide, donc est aussi consistante ;

$(P \rightarrow \neg P)$ est invalide, cependant elle est consistante.

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$	$P \vee \neg P$	$P \rightarrow \neg P$
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V

Si une formule P est vraie dans une interprétation I on dit que I satisfait P ou que P est satisfaite par I.

Si une formule P est fausse dans une interprétation I on dit que I falsifie P ou que P est falsifiée par I.

Exemple :

La formule (P (Q)) est satisfaite dans l'interprétation { P, Q} mais est falsifiée dans l'interprétation {P, Q}.

Lorsqu'une interprétation satisfait une formule P elle est aussi appelée un Modèle de P.

4. FORMES NORMALES DANS LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

Définition : Deux formules F et G sont dites équivalentes (ou F est équivalent à G), noté F = G, si et seulement si les valeurs de vérités de F et G sont les mêmes ans n'importe quelle interprétation de et G.

Dans la logique de propositions,
Supposons que ▨ désigne la formule qui est toujours vraie et supposons que □ désigne la formule qui est toujours fausse.
Soient F, G et H des formules biens formulées, le tableau suivant donne des paires utiles de formules équivalentes :

F ↔ G = (F G) (G F)

F G = F G

F G = G F

(F G) H = F (G H)

F (G H) = (F G) (F H)

F □ (vrai)= F

F ▨(faux) = ▨

F F = ▨

 (F) = F

 (F G) = F G

F G = G F

(F G) H = F (G H)

F (G H) = (F G) (F H)

F ▨ = F
F □ = □
F F = □
 (F G) = F G

Définition : Un littéral est un atome ou la négation d'un atome.

Définition : Une formule F est dite en forme normale conjonctive si et seulement si F est de la forme F_1 F_2 … F_n n 1; où chaque F_i est une disjonction de littéraux.

Définition : Une formule F est dite en forme normale disjonctive si seulement si F est de la forme : F_1 F_2 … F_n n 1 où chaque F_i est une conjonction de littéraux.

<u>Exemples</u> :

Soient P, Q et R 3 atomes

F : (P □ Q) □ (P □ □Q □□R) est une formule en forme normale disjonctive.

P □ □Q □□R est une forme normale conjonctive.

Pour la transformation d'une formule en forme normale, on utilise les lois données dans le tableau ci-dessus.

Exemples :

1) Donner une forme normale disjonctive de la formule (P □ □Q) □ R

(P □ □Q) □ R = □ (P Ú □Q) Ú R
= (□P □ □ (□Q)) □ R
= (□P □ Q) □ R
= (□P □ R) □ (Q □ R)

2) Donner la forme normale conjonctive de la formule (P □ (Q □ R)) □ S.

(P □ (Q □ R)) □ S.
= □ (P □ (□Q □ R)) □ S
= (□P □ □ (□Q □ R)) □ S = (□P □ (□ (□Q) □ □R)) □ S
= (□P □ (Q □ □R)) □ S
= ((□P □ Q) □ (□P □ □R)) □ S
= S □ ((□P □ Q) □ (□P □ □R))
= (S □ (□P □ Q) □ (S □ (□P □ □R))
= (S □ □P □ Q) □ (S □ □P □ □R)

5. CONSEQUENCES LOGIQUES

Supposons les propositions suivantes :

(1) P □ S
(2) S □ M
(3) P
(4) M

Montrons que (4) est vraie toutefois que (1) $\wedge$ (2) $\wedge$ (3) est vraie.

On a :

$$
\begin{aligned}
(1) \wedge (2) \wedge (3) &= ((P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow M) \wedge P) \\
&= ((\neg P \vee S) \wedge (\neg S \vee M) \wedge P) \\
&= (P \wedge (\neg P \vee S) \wedge (\neg S \vee M)) \\
&= (((P \wedge \neg P) \vee (P \wedge S)) \wedge (\neg S \vee M)) \\
&= ((\square \vee (P \wedge S) \wedge (\neg S \vee M)) \\
&= (P \wedge S) \wedge (\neg S \vee M) \\
&= (P \wedge S \wedge \neg S) \vee (P \wedge S \wedge M) \\
&= (P \wedge \square) \vee (P \wedge S \wedge M) \\
&= \square \vee (P \wedge S \wedge M) \\
&= P \wedge S \wedge M
\end{aligned}
$$

Donc Si $((P \rightarrow S) \wedge (S \rightarrow M) \wedge P)$ est vraie , alors $P \wedge S \wedge M$ est vraie mais comme $P \wedge S \wedge M$ est vraie si P, S et M sont vraies à la fois, on en déduit que M est vraie. On dit que M est une Conséquence Logique de
$(P \rightarrow S)$ et $(S \rightarrow M)$ et P.

Définition : soient F_1, F_2 …, F_n des formules et G une autre formule, G est dite une conséquence logique de F_1, F_2 …, F_n si et seulement si pour n'importe quelle interprétation dans laquelle $F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n$ est vraie, G est aussi vraie. F_1, F_2 …, F_n sont appelés axiomes (ou postules, prémisses) de G.

Théorème 1 : Soient les formules F_1, F_2 …, F_n et G.
G est une conséquence logique de F_1, F_2 …, F_n si et seulement si
$((F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n) \rightarrow G)$ est valide.

Preuve
($\Rightarrow$) supposons que G est une conséquence logique de F_1 …, F_n.
Si I est une interprétation quelconque dans laquelle F_1 …, F_n sont vraies alors par définition de la conséquence logique G est vraie dans I.
Si par contre si F_1 …, F_n sont fausses dans I, alors $((F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G)$ est vraie dans n'importe quelle interprétation. Elle est donc valide.

($\Leftarrow$) Réciproquement supposons $((F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G)$ valide.
Pour une interprétation quelconque I, si $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n$ est vraie dans I, G doit être vraie.
Donc G est conséquence logique de F_1 …, F_n.

Théorème 2 : Soient les formules F_1 …, F_n et G. G est une conséquence logique de F_1 …, F_n si et seulement $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G)$ est inconsistante.

Preuve : Le théorème 1 montre que G est une conséquence logique de F_1 …, F_n si et seulement si $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \rightarrow G)$ est valide. Donc G une est conséquence logique de F_1 …, F_n si et seulement si La négation de $(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \rightarrow G)$ est inconsistante.

En effet :

$\neg((F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n) \rightarrow G) = \neg(\neg(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n) \vee G)$

$= \neg(\neg(F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n)) \wedge \neg G$

$= F_1 \wedge F_2 \ldots \wedge F_n \wedge \neg G$

Si G est conséquence logique de F_1, F_2 …, F_n alors $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \rightarrow G)$ est appelé un théorème et G est appelé conclusion du théorème.

Exemple : soient les formules

$F_1 : P \rightarrow Q$
$F_2 : \neg Q$
$G : \neg P$

Montrer que G est une conséquence logique de F_1 et F_2

Méthode 1 : usage d'une table de vérité pour montrer que G est vraie dans chacun des modèles de $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$\neg P$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Ainsi G est vraie dans l'interprétation dans laquelle $P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$ est vraie i.e. G est une conséquence logique de $(P \rightarrow Q)$ et $\neg Q$.

Méthode 2 :

Utilisation du théorème 1 pour montrer que $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow G$ est valide i.e. pour montrer que G est une conséquence logique de $(P \rightarrow Q)$ et $\neg Q$.
La colonne relative à cette formule montre qu'elle est valide. Donc $\neg P$ est une conséquence logique $(P \rightarrow Q)$ et $\neg Q$ *(Règle du Modus Tollens)***.**

Méthode 3 :
Transformation de $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P)$ en forme normale conjonctive pour montrer qu'elle est valide et donc que $\neg P$ est une conséquence logique de $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$
On a :

$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow \neg P) = \neg((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P$

$= \neg((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q) \vee \neg P$

$= \neg((\neg P \wedge \neg Q) \vee \square) \vee \neg P$

$= \neg(\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg P$

$= (P \vee Q) \vee \neg P$

$= (Q \vee P) \vee \neg P$

$= Q \vee (P \vee \neg P)$

= $Q \vee$ ▨

= ▨

Ainsi $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$ est valide.

Remarque1 :

Dans ce cas on peut utiliser le théorème 2 pour prouver que
(P Q) Q) ((P)) = (P Q) Q P est inconsistante.

Table de vérité

P	Q	P Q	Q	(P Q) Q P
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	F

Ainsi (P Q) Q P est inconsistante. Donc P est une conséquence logique de (P Q) et Q.

2) On peut aussi prouver l'inconsistance de la formule (P Q) Q P en la transformant en forme normale disjonctive.

(P Q) Q P = (P Q) Q P
= (P Q P) (Q Q P)
= (P P Q) (□ P)
= (□ Q) □
= □ □
= □

Ainsi (P Q) Q P est inconsistante.

II - LOGIQUE DES PREDICATS DU 1er ORDRE

1. INTRODUCTION

Dans la logique des propositions les éléments de base sont les atomes. De ces atomes sont construites les formules. Dans cette simple logique un atome représente une assertion pouvant être vraie ou fausse et non les deux à la fois.

Un atome est traité comme une simple unité inadaptée à la traduction de plusieurs idées comme suit :

Chaque homme est mortel.

Puisque Conficus est un homme, il est mortel.

Soit

P : chaque homme est mortel
Q : Conficus est un homme
R : Conficus est mortel.

R n'est pas une conséquence logique de P et Q dans le cadre de la logique des propositions bien que le raisonnement ci-dessus soit intuitivement correct. La raison est que les structures de P, Q et R ne sont pas utilisées dans la logique des propositions.

Dans cette section nous introduisons la logique des prédicats du 1er ordre qui fait usage de notions nouvelles : termes, prédicats et quantificateurs.

Supposons que l'on veuille représenter

- x est plus grand que 3, on défini un prédicat PGQ (x, y)
  Ainsi PGQ (x, y) : x est plus grand que 3

- x aime y par le prédicat : AIME (x, y)
  Ainsi AIME (Jean, Marie) : Jean aime Marie

On peut utiliser des symboles de fonctions
Plus (x, y) : x + y
Père (x) : Père de x.

- Ainsi x + 1 est plus grand que x s'écrit PGQ (plus (x,1), x)
- Le père de Jean aime Jean s'écrit AIME (Père (Jean), Jean)

Dans les exemples ci-dessus, PGQ (x, 3), AIME (Jean, Marie),
PGQ(plus (x, 1), x) et AIME (Père (Jean), Jean) sont tous des atomes dans la logique des prédicats du 1er Ordre. Où :
PGQ et AIME sont des symboles de prédicats ;
x est une variable ;
3, Jean et Marie sont des constantes ;
Père, plus sont des symboles de fonctions.

En général on utilise les 4 types de symboles suivants pour construire un atome.

(i) les constantes : ce sont les noms d'objets tels que Jean, 3…
(ii) Les variables : lettres minuscules x, y, z …
(iii) Symboles de fonctions : lettres minuscules telle que f, g, h ou des chaînes de caractères écrites en minuscules père, plus …
(iv) Symboles de prédicats : lettres Majuscules telles que P, Q, R … ou des chaînes de caractères en Majuscules telles que PGQ, AIME …

Une fonction à n ($n \geq 1$) arguments est dite d'arité n ;

Une constante peut être considérée comme une fonction d'arité 0 ;
De même un prédicat à n arguments ($n \geq 1$) est dite d'arité n.

Définition

Les termes sont récursivement définis comme suit :

(i) Une constante est terme ;
(ii) Une variable est un terme ;
(iii) Si f est une fonction d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors f ($t_1, \ldots, t_n$) est un terme ;
(iv) Tous les termes sont générés par application des règles ci-dessus.

Exemples :

plus (x,1), x, 1 sont des termes
plus (plus (x, 1), x) sont des termes
père (père (jean) sont des termes. (ici grand-père de Jean).

Remarque

- Une fonction applique une liste de constantes à une constante ;
- Un prédicat applique une liste de constantes à la valeur de vérité V ou F.

Exemples :

père (père (père (Jean)) : grand-père de Jean.
PGQ (5,3) $\rightarrow$ T
PGQ (2, 5) $\rightarrow$ F

Définition : Si P est un prédicat d'arité n et $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes, alors P ($t_1, \ldots, t_n$) est un atome.

Les connecteurs logiques utilisés dans la construction des formules dans la logique des propositions opèrent de la même manière ici. En plus il est fait usage des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ à cause des variables introduites.

Exemples :

Formaliser les énoncés suivantes :

a) Tout nombre rationnel est un nombre réel
b) Il existe au moins un nombre premier
c) Pour tout nombre x, il existe un nombre y tel que x < y.

Notons par :

P(x) : « x est une nombre premier »
Q(x) : « x est un nombre rationnel »
R(x) : « x est un nombre réel »
PPQ : « x est plus petit que y »
Alors on peut écrire les formules correspondantes comme suit :

a) (□x) (Q(x) □ R(x))
b) (□x) P(x)
c) (□x) (□y) PPQ (x, y)

Le « portée» d'un quantificateur apparaissant dans une formule est défini comme étant la formule à laquelle cet quantificateur s'applique.

Par exemple :

La portée des quantificateurs □ et □ dans la formule
(□x) (□y)   PPQ (x, y) est PPQ(x, y)
la portée de (□x) (Q(x) □ R(x)) est (Q(x) □ R(x))

<u>Définition</u> : Une occurrence d'une variable dans une formule est liée si et seulement si l'occurrence est dans la portée d'un quantificateur qui utilise la variable.

Une occurrence d'une variable dans une formule est libre cette occurrence de la variable n'est pas liée.

<u>Définition</u> : Une variable est libre dans une formule si au moins une de ses occurrences est libre dans la formule.
Une variable est liée dans une formule si au moins une de ses occurrences est liée.

Exemples :

Dans la formule (□x) P(x, y) x est liée et y est libre
Dans la formule (□x) P(x, y) □ (□y) Q(x) x est liée et y est à la fois liée et libre.

Remarque : une formule peut à la fois être liée et libre.

<u>Définition</u> : Les formules bien formulées (fbf), ou formules tout court, dans la logique des prédicats du 1^er^ ordre sont récursivement définies comme suit :

(i) un atome est une formule (atome = formule atomique)

(ii) si F et G sont des formules, alors

□(F), (F □ G), (F □ G), (F □ G) et (F □ G) sont des formules

(iii) si F est une formule et x est une variable libre dans F, alors (□x) F et (□x) F sont des formules

(iv) les formules sont générées seulement par un nombre fini d'applications de (i), (ii) et (iii).

L'omission des parenthèses se fait comme dans le cas de la logique des propositions. On étend ces conventions en attribuant le plus petit rang aux quantificateurs.

Exemples :

1) ((((□x) A) □ (B)) ≡ (□x) A □ B
2) Traduire de façon formelle
   « tout homme est mortel. Conficus est un homme. Donc, Conficus est mortel »

Notons par

Homme(x) « x est un homme »
Mortel(x) « x est mortel »

Alors (□x) (HOMME (x) □ MORTEL (x)) : tout homme est mortel
HOMME (Conficus) : Conficus est mortel.
L'énoncé complet peut être formalisé par :
(□x) (HOMME (x) □ MORTEL (x)) □ HOMME (Conficus) □ MORTEL (Conficus)

3) A_1 : Pour tout nombre entier naturel, il existe un et un seul successeur immédiat.
   A_2 : Il n'existe pas de nombre entier naturel pour lequel 0 est successeur immédiat.
   A_3 : Pour tout nombre entier naturel non nul, il existe un et un seul prédécesseur immédiat.

Supposons que f(x) et g(x) représentent respectivement le successeur immédiat et le prédécesseur immédiat de x. E(x, y) : x égal à y.

Alors on a les formules correspondantes :

A_1 :(□x)(□y) (E(y, f(x)) □ (□z) (E(z,f(x)) □ E(y, z)))
A_2 : □((□x) E(0, f(x)))
A_3 : (□x)(□E(x, 0) □ (□y)(E(y, g(x)) □ (□z)(E(z, g(x)) □ E(y, z)))))

2. INTERPRETATION DE FORMULES DANS LA LOGIQUE DES PREDICATS DE 1ER ORDRE.

Dans la logique des propositions une interprétation consiste à assigner les valeurs de vérité V ou F à des atomes. Ici il conviendra de spécifier : le domaine et des assignations aux constantes, symboles de fonctions et de prédicats apparaissant dans une formule.

Définition : Une interprétation d'une formule F dans la logique des prédicats du 1er ordre consiste en un domaine non vide D, et d'une assignation de valeurs à chaque constante, symbole de fonction et symbole de prédicat apparaissant dans F comme suit :

1. A chaque constante, on assigne un élément de D
2. A chaque fonction d'arité n, on assigne une application de D^n dans D où $D^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\ (x_1, \ldots, x_n \in D\}$
3. A chaque prédicat d'arité n, on assigne une application de D^n dans {V, F}.

On notera les règles suivantes :

1. $(\forall x)$ G est évaluée à V si la valeur de vérité de G est évaluée à V pour tout $d \in D$, sinon elle est évaluée à F.
2. $(\exists x)$ G est évaluée à V si la vérité de G est V pour au moins un $d \in D$, sinon elle est évaluée à F.
3. Si les valeurs de vérités des formules G et H sont évaluées, alors les valeurs de vérité des f ormules $\neg G$, $(G \wedge H)$, $(G \vee H)$, $(G \rightarrow H)$, $(G \leftrightarrow H)$ s'obtiennent comme dans le cas de la logique des propositions.

En outre, toute formule contenant des variables libres ne peut être évaluée.
Dans la suite les formules seront supposées ne pas contenir de variables libres ou que les variables libres seront traitées comme des constantes.

Exemple

1) Soient $(\forall x)$ P(x) et $(\exists x)$ $\neg$P(x) deux formules supposons l'interprétation suivante :

Domaine : D = {1, 2}

Assignation pour P

P(1)	P(2)
V	F

Ici $(\forall x)$ P(x) est F car P(x) n'est pas vraie pour les 2 éléments de D. Par contre dans l'interprétation donnée, $(\exists x)\neg$P(x) est vraie.

2) Soit la formule $(\forall x)$ $(\exists y)$ P(x, y) et l'interprétation

D = {1, 2}

P(1, 1)	P(1, 2)	P(2, 1)	P(2, 2)
V	F	F	V

dans cette interprétation

((x) (y) P(x, y) est V car $\begin{cases} \text{pour } x = 1 \ \square\ y = 1, P(x, y) = V \\ \text{pour } x = 2 \ \square\ y = 2, P(x, y) = V \end{cases}$

3) Soit la formule G : (x)(P(x) Q(f(x),a))
interprétation I D = {1, 2} domaine

a	assignation pour a	1

f(1)	f(2)	assignation pour f
2	1	

P(1)	P(2)	Q(1, 1)	Q(1, 2)	Q(2, 1)	Q(2, 2)
F	V	V	V	F	V

Si x = 1, alors

P(x) Q(f(x), a) = P(1) Q(f(1), a)
= P(1) Q(2, 1)
= F F = T

Si x = 2, alors

P(x) Q(f(x), a) = P(2) Q (f(2), a)
= P(2) Q (1, 1)
= V V = V

Puisque P(x) Q(f(x),a) est V pour tout x D, la formule
(x) P(x) Q(f(x), a) est vraie dans l'interprétation I.

<u>Exercice</u>
donner les valeurs de vérité de formules suivantes dans l'interprétation I précédente :

a) (x) (P(f(x)) Q(x, f(a)))
b) (x) (P(x) Q(x, a)
c) (x) (y) (P(x) Q(x,y))

Les fbf peuvent inclure des fonctions : applications d'éléments du domaine traité
dans d'autres éléments du domaine.

3. FORMES NORMALES PRENEXES DANS LA LOGIQUE DES PREDICATS DU 1ER ORDRE

<u>Définition</u>

Une formule F dans la logique des prédicats du 1er ordre est dite en forme normale prénexe si et seulement si elle est sous la forme :
(Q_1x_1) …..(Q_nx_n) (M) où
(Q_ix_i) i=1,n est soit (□x_i) soit (□x_i) et M est une formule ne contenant pas de quantificateurs.
(Q_1x_1) …..(Q_nx_n) est appelé préfixe et M la matrice M de la formule F

<u>Exemples</u> :
(□x)(□y) (P(x, y) □Q(y))
(□x)(□y) (□P(x, y) □ Q(y))

Considérons une formule F contenant la v   = (x)(y)(H[y] □ F[x])
= (ariable libre x. Pour mettre en relief ce fait, on écrit F[x]. Si G est une autre formule ne contenant pas la variable x alors on a les pairs de formules équivalentes suivantes dans lesquelles Q représente soit □ soit □. Par simplicité on parlera de lois.

1. (Qx)F[x] □ G = (Qx)(F[x] □G)
2. (Qx)F[x] □ G = (Qx)(F[x] □ G)

□((□x)F[x]) = (□x) □F[x]

3. □((□x)F[x]) = (□x) □F[x]

Supposons maintenant que F[x] et H[x] soient deux formules contenant x. Alors on a les autres lois :
5. (□x)F[x] □(□x)H[x] = (□x)(F[x] □H[x])
6. (□x)F[x] □ (□x)H[x] = (□x) (F[x] □H[x])

Remarquons que les lois 5 et 6 n'est pas vraie en intervertissant les connecteurs □ et □ .
Mais, puisque chaque variable liée dans une fbf peut être considérée comme muette, celle-ci peut être renommée. Ainsi on a :

(□x)F[x] □ (□x)H[x] = (□x)F[x] □ (□y)H[y]
= (□x)(F[x] □ (□y)H[y])
= (□x)((□y)H[y] □ F[x])
= (□x)((□y)(H[y] □ F[x]))

x)(y)(F[x] □H[y])

De même

(□x)F[x] □ (□x)H[x] = (□x)F[x] □ (□y)H[y]
= (□x)(□y)(F[x] □ H[y])

En général on a :

7. (Q_1x)F[x] □ (Q_2x)H[x] = $(Q_1x)(Q_2y)$(F[x] □ H[y])
8. (Q_3x)F[x] □ (Q_4x)H[x] = $(Q_3x)(Q_4y)$(F[x] □ H[y])

avec Q_1 , Q_2 , Q_3 et Q_4 qui sont soit □ soit □ et y n'apparaissant dans F[x]

En utilisant les formules de 1 à 8 et toutes celles vues précédemment, on peut toujours transformer une fbf en forme normale prénexe (FNP).

<u>Exemples</u> :
Transformer les formules suivantes en FNP

1) (□x)P(x) □ (□x)Q(x)
2) (□x) (□y)((□z)(Px,z) □P(y,z)) □ (□u)Qx,y,u))

4 FORMES STANDARDS DE SKOLEM

Pour montrer qu'une formule est valide, on montrer que sa négation est inconsistante. Pour cela une formule doit être convertie en une forme standard d'une f ormule introduite par Davis et Putnam. Pour réussir cela les idées suivantes furent exploitées par SKOLEM :
SKOLEM :

1. Une formule dans la logique des prédicats du premier ordre peut être transformée en forme normale prénexe.
2. La matrice, puisqu'elle ne contient pas de quantificateurs, peut être transformée en forme normale conjonctive.
3. Sans perdre la propriété d'inconsistance, les quantificateurs existentiels dans le préfixe, peuvent être éliminés par l'utilisation de fonctions de SKOLEM.

Procédé d'élimination des quantificateurs existentiels :

Soit une fbf F = (Q_1x_1) .. (Q_nx_n) M en FNP où M en en forme normale conjonctive.
Supposons que Q_r apparaisse dans le préfixe (Q_1x_1) .. (Q_nx_n) avec 1□r□n.

a) Si aucun quantificateur universel n'apparaît avant Q_r , choisir une nouvelle constante c différentes de toutes celles dans M, remplacer tous les x_r dans M par c et extraire (Q_rx_r) du préfixe.
b) Si Q_{s1} .... Q_{sm} sont tous des quantificateurs universels apparaissant avant Q_r , 1□s1<s2< ..sm□r, choisir un nouveau symbole de fonction f d'arité m, remplacer tous les x_r dans M par f(x_{s1} .. x_{sm}) et extraire (Q_rx_r) du préfixe.

Après application de tout le procédé à tous les quantificateurs existentiels, le formule résultante est une forme standard de SKOLEM (ou forme standard) de la formule F.
Les constantes et les fonctions utilisées pour remplacer les variables existentielles sont appelées fonctions de SKOLEM.

<u>Exemples</u> Donner une forme standard de chacune des fbf suivantes :

a) (□z) (□y) (□z)(□u) (□v)(□w)P(x,y,z,u,v,w)
b) (□x)(□y)(□z)((□P(x,y)□(Q(x,z))□R(x,y,z))

5. NOTION DE CLAUSE