U.S.T.H.B - 18-01-2011
Département Informatique
N. Bensaou - C. Ighilaza

Complexité
Master M1- MIL

Examen final - durée 1h30 mn

Exercice 1.- *Mesures asymptotiques*

a- Classer les fonctions suivantes par ordre croissant de leur valeur asymptotique: $log(n^3), 2^{n^2}, n^3logn, \sqrt(n!), 2^{\sqrt{n}}$

b- Prouver que $\sum_{k=0}^{k=n} 3^k$ est en $O(3^n)$.

c- Montrer que $t(n) = log(2 * n + \alpha) = \Theta(logn)$

Exercice 2.- *Equations de récurrence*

a- Résoudre l'équation suivante par la méthode itérative: $t(n) = t(n-a) + t(a), a >= 1$.

b- Résoudre l'équation: $t(n) = 4 * t(n/2) + n$ et $t(0) = O(1)$.

Exercice 3.- Soit N un entier donné, écrire une fonction itérative qui calcule la suite des N premiers nombres de la suite de Fibonacci définie par les relations suivantes:

$$\begin{array}{ll} U_n = 1 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1 \\ U_n = U_{n-1} + U_{n-2} & \text{si } n > 1 \end{array}$$

Prouver la validité de la fonction et donnez sa complexité.

Exercice 4.- *Décomposition en facteurs premiers*

Soit a un entier positif, a peut s'écrire sous forme de produit de facteurs premiers p_i ordonnés ($p_i < p_j$ si $i < j$), dont les puissances e_i sont strictement positives:

$$a = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * p_3^{e_3} * \cdots * p_k^{e_k} \qquad p_i \text{ nombre premier } (i = 1, \ldots, k)$$

Exemple: $a = 3500 = 2^2 * 5^3 * 7^1$

On représente un tel nombre dans un tableau de structure `T` de taille k tel que: `T[i].prem` est le nombre premier p_i et `T[i].expo` est son exposant e_i

Soient a et b deux entiers positifs sous forme de produit de facteurs premiers représentés dans deux tableaux $T1$ et $T2$ de taille respective $n1$ et $n2$:

$a = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * p_3^{e_3} * \cdots * p_{n_1}^{e_{n_1}}$ et $b = p_1^{f_1} * p_2^{f_2} * p_3^{f_3} * \cdots * p_{n_2}^{f_{n_2}}$

Exemple:

Si $a = 3500 = 2^2 * 5^3 * 7^1$ et $b = 392 = 2^3 * 7^2$ alors $PGCD(a, b) = 2^2 * 7^1$. ([1])

a) Écrire une fonction itérative `PGCD (T1, T2: tableau; n1, n2: entier): entier` qui retourne le PGCD des entiers contenus dans $T1$ et $T2$.

b) Définir l'invariant de boucle de l'algorithme. Indication: si on note T le tableau contenant un entier $a = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * p_3^{e_3} * \cdots * p_k^{e_k}$, on note $T^j (j <= k)$ le sous tableau qui représente l'entier $p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * p_3^{e_3} * \cdots * p_j^{e_j}$

c) Prouver la validité de l'algorithme.

d) Donnez la complexité du cas pire de l'algorithme.

[1] On prend les facteurs premiers en commun avec les minimums des exposants.