

Epreuve de Rattrapage : Algorithmique avancée et Complexité

Exercice 1 : (08 pts)

Considérer la structure d'un arbre binaire de recherche. C'est un arbre binaire particulier qui satisfait la relation d'ordre suivant : chaque nœud a une valeur inférieure à celle de son fils droit et supérieure à celle de son fils gauche. En d'autres termes, un nœud quelconque doit être supérieur aux valeurs stockées dans son sous arbre gauche, et inférieur aux valeurs stockées dans son sous arbre droit. Un arbre binaire de recherche peut être implémenté au moyen d'un tableau s'il est équilibré, de la manière suivante qu'un tas (Les nœuds de l'arbre seront énumérés niveau par niveau dans le tableau, la racine en premier, puis ses fils et ainsi de suite. Un nœud se trouvant au niveau i trouvera ces fils (s'ils existent) aux positions $2*i$ et $(2*i)+1$, et son père à la position $i/2$). La seule différence par rapport au tas classique c'est la relation d'ordre à respecter lors de la création.

1. Rappeler les étapes de construction d'un tas
2. En vous basant sur le processus de construction d'un tas dans un tableau d'entiers, proposer un algorithme permettant l'implémentation d'un arbre binaire équilibré dans un tableau
3. Calculer la complexité de l'algorithme proposé

Exercice 2 : (12 pts)

Considérer le problème de couverture par ensembles qui se définit comme suit : étant donnée un ensemble E est une famille S de sous ensemble de E . Le problème consiste à couvrir tous les éléments de E avec une sous-famille de S , la plus petite possible. Un élément e est dit couvert par un sous ensemble A si e appartient à A . Le sous ensemble A est construit tel que la somme de éléments qu'ils couvrent soit égale à 0 et deux valeurs qui s'annulent mutuellement ne peuvent appartenir au même sous ensemble (Exemple : 2, -2). En d'autres termes, le problème consiste à construire un nombre minimal de sous ensemble dans S à partir de E , telle que :

$$\sum \text{Des éléments couverts par un sous ensemble} = 0; \bigcup \text{des sous ensemble de } S = E, \\ \text{et } \bigcap \text{sous ensemble de } S = \emptyset$$

Instance : étant donnée un ensemble fini d'entiers E , un entier k

Question : Existe-il une famille de sous ensemble de taille inférieur ou égale à k , tel que l'union des éléments des sous ensemble soit égale à E et l'intersection des sous-ensembles est vide, et tel que la somme des éléments couvert par le même sous ensemble est égale à 0

Exemple : $E = \{5, -2, 6, 3, -4, 7, -1, -8, 2, -9, -12\}$ et $k = 3$

1. Illustrer sur l'exemple les étapes de construction d'une solution en spécifiant la modélisation la plus adéquate (4 pts)
2. Estimer approximativement la taille de l'arbre de résolution et en déduire l'ordre de complexité de l'algorithme de résolution (2 pts)
3. Quelles sont les critères que doit satisfaire une solution donnée S' pour être valide (1 pt)
4. Proposer un algorithme de validation d'une solution donnée S' et calculer sa complexité. (4 pts)
5. En déduire la classification associée au problème étudié. Justifier votre réponse (1 pt)

Bon Courage !