Université Paris 7
31U4MI36

TROUVER LA FORME NORMALE DISJONCTIVE CANONIQUE de F

puis LA FORME NORMALE CONJONCTIVE CANONIQUE de F

à partir du Tableau de Vérité de F

I. TROUVER LA FORME NORMALE DISJONCTIVE CANONIQUE de F

0. Notation :

Soit ϵ élément de $\{0,1\}$ et F une formule propositionnelle. Alors :

- $\epsilon\, F$ désigne la formule $\neg F$, si $\epsilon = 0$,
- $\epsilon\, F$ désigne la formule F, si $\epsilon = 1$.

1. Construction de la LA FORME NORMALE DISJONCTIVE CANONIQUE de F - FNDC

p_1	p_2	$\cdots$	p_n	F
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
ϵ_1	ϵ_1	$\cdots$	ϵ_n	1
$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$

Etape 1 : On scrute le tableau de vérité de F. Pour chaque ligne contenant 1 comme valeur de vérité pour F, on y considère la distribution des valeurs de vérité $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ sur $(p_1, \ldots, p_n)$ et on fabrique la formule $(\epsilon_1\, p_1 \wedge \epsilon_2\, p_2 \wedge \ldots \wedge \epsilon_n\, p_n)$.
Etape 2 : La FNDC de F est la disjonction de toutes les formules construites à l'étape 1.

Exemple :

$$F = ((r \Longrightarrow (\neg p \wedge q)) \Longrightarrow (r \wedge p))$$

	p	q	r	$(\neg p \wedge q)$	$(r \Longrightarrow (\neg p \wedge q))$	$(r \wedge p)$	F	
	0	0	0	0	1	0	0	
L_2	0	0	1	0	0	0	1	$\leftarrow$
	0	1	0	1	1	0	0	
	0	1	1	1	1	0	0	
	1	0	0	0	1	0	0	
L_6	1	0	1	0	0	1	1	$\leftarrow$
	1	1	0	0	1	0	0	
L_8	1	1	1	0	0	1	1	$\leftarrow$

Les distributions des valeurs de vérité sur $\{p,q,r\}$ des lignes L_2, L_6 et L_8 donnent à F la valeur 1.

Etape 1 :

- Les valeurs de vérité attribués à (p,q,r) dans la ligne L_2 : $(0,0,1)$. D'où la conjonction à construire : $(0p \wedge 0q \wedge 1r)$ c'est-à-dire :

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$$

- Les valeurs de vérité attribués à (p,q,r) dans la ligne L_6 : $(1,0,1)$. D'où la conjonction à construire : $(1p \wedge 0q \wedge 1r)$ c'est-à-dire :

$$(p \wedge \neg q \wedge r)$$

- Les valeurs de vérité attribués à (p,q,r) dans la ligne L_8 : $(1,1,1)$. D'où la conjonction à construire : $(1p \wedge 1q \wedge 1r)$ c'est-à-dire :

$$(p \wedge q \wedge r)$$

Etape 2 : La FNDC de F est la disjonction de toutes les formules construites à l'étape 1.

La FNDC de F :

$$\boxed{((\neg p \wedge \neg q \wedge r) \bigvee (p \wedge \neg q \wedge r) \bigvee (p \wedge q \wedge r))}$$

II. TROUVER LA FORME NORMALE CONJONCTIVE CANONIQUE de F - FNCC

0. Notation : La relation d'équivalence F logiquement équivalente à G (c-à-d $F \Leftrightarrow G$ est une tautologie) est noté $F \sim G$.

1. Règle de Morgan :

$$\neg\neg p \sim p \quad , \neg(p \wedge q) \sim (\neg p \vee \neg q) \quad , \neg(p \vee q) \sim (\neg p \wedge \neg q)$$

LA FORME NORMALE CONJONCTIVE CANONIQUE DE F S'OBTIENT A PARTIR DE LA FORME NORMALE DISJONCTIVE CANONIQUE de $\neg F$

Procédure : En remplaçant dans la FNDC de $\neg F$, toute disjonction par une conjonction, toute conjonction par une disjonction, toute sous-formule $\neg p$ par p et toute sous-formule p, non précédée par une négation, par $\neg p$, alors on obtient la FNCC de F

3. Procédure pour trouver la FNCC de F

Le procédé utilisant le tableau de vérité de F pour trouver la FNCC de F :

- Etape 1 : Etablir le tableau de F,
- Etape 2 : rajouter une colonne $\neg F$, d'où le tableau de $\neg F$,
- Etape 3 : on en déduit la FNDC de $\neg F$, (Méthode expliquée dans $I.1$)
- Etape 4 : enfin, remplacer dans la FNDC de $\neg F$, toute disjonction par une conjonction, toute conjonction par une disjonction, toute sous-formule $\neg p$ par p et toute sous-formule p, non précédée par une négation, par $\neg p$

La formule ainsi obtenue est la FNCC de F

Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus. $F = ((r \Longrightarrow (\neg p \wedge q)) \Longrightarrow (r \wedge p)))$.

Cherchons la forme normale conjonctive canonique (FNCC) de F.

Etape 1 : On commence par établir le tableau de F, ce qui est déjà fait.
Etape 2 : On rajoute une colonne $\neg F$. D'où le tableau de $\neg F$:

$F = ((r \Longrightarrow (\neg p \wedge q)) \Longrightarrow (r \wedge p))$

p	q	r	$(\neg p \wedge q)$	$(r \Longrightarrow (\neg p \wedge q))$	$(r \wedge p)$	F	$\neg F$	
0	0	0	0	1	0	0	1	$\longleftarrow$
0	0	1	0	0	0	1	0	
0	1	0	1	1	0	0	1	$\longleftarrow$
0	1	1	1	1	0	0	1	$\longleftarrow$
1	0	0	0	1	0	0	1	$\longleftarrow$
1	0	1	0	0	1	1	0	
1	1	0	0	1	0	0	1	$\longleftarrow$
1	1	1	0	0	1	1	0	

Etape 3 : On construit la FNDC de $\neg F$. Pour celà on utilise la méthode expliquée au **I.1** appliquée à $\neg F$.

En considérant les lignes du tableau ci-dessus qui contiennent 1 comme valeur de vérité pour $\neg F$, alors :

la FNDC de $\neg F$:

$$((\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \bigvee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \bigvee (\neg p \wedge q \wedge r) \bigvee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \bigvee (p \wedge q \wedge \neg r)).$$

Etape 4 : Enfin, en remplaçant dans cette dernière formule (la FNDC de $\neg F$) toute disjonction par une conjonction, toute conjonction par une disjonction, toute sous-formule $\neg p$ par p et toute sous-formule p, non précédée par une négation, par $\neg p$, on obtient

la FNCC de F :

$$\boxed{((p \vee q \vee r) \bigwedge (p \vee \neg q \vee r) \bigwedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \bigwedge (\neg p \vee q \vee r) \bigwedge (\neg p \vee \neg q \vee r)).}$$