Preuves :
Les logiques modales

Les axiomes du système K forment un système déductif correct et complet vis-à-vis de ces règles de valuation.

Preuve de la correction :

Il suffit de prouver que les axiomes (A1) (A2) (A3) (A6) sont des tautologies, et que les règles (R1), (R2) et (R6) appliquées à des tautologies fournissent des tautologies.

Les trois premiers axiomes sont des tautologies de la logique propositionnelle, donc également de la logique modale d'après la propriété ci-dessus.

Supposons que (A6) prenne la valeur faux en un monde w. Suivant la règle, cela signifierait que $\Box(a \supset b)$ est vrai en w et $(\Box a \supset \Box b)$ est faux en w; ce qui implique à son tour $\Box a$ est vrai en w et $\Box b$ est faux en w. Ce dernier point implique qu'il existe un monde w' accessible depuis w où b est faux. Comme $\Box a$ est vrai en w, a est vrai en w', donc $a \supset b$ est faux en w', donc $\Box(a \supset b)$ ne peut être vrai en w : contradiction.

Les règles (R1) et (R2) ont été prouvées correctes pour la logique propositionnelle : en chaque monde, si elles sont appliquées à des tautologies, elles fournissent des formules ayant la valeur vrai . Donc elles sont également correctes pour la logique modale.

(R6) [nécessitation] : si x est une formule, R6(x) est l'ensemble contenant l'unique élément $\Box x$. (R6) appliquée à une tautologie t fournit la formule $\Box t$ qui ne prend la valeur vrai en un monde w que si t est vrai dans tous les mondes w' accessibles depuis w. Or t est une tautologie, donc elle a la valeur vrai en tout monde, et en particulier dans ceux accessibles depuis w, donc $\Box t$ est vrai en w, quel que soit w, ce qui démontre que $\Box t$ est une tautologie. ■

B- La preuve de la complétude est difficile (Chellas 1980).

Les axiomes des autres systèmes ne sont pas corrects vis-à-vis de ces règles. Ils le deviennent si on apporte des restrictions à la définition d'un modèle, et plus précisément à la relation R.

A- (A7) est une tautologie ssi la relation R est réflexive.

Preuve:

Si R est réflexive, pour tout monde w, w fait partie des mondes accessibles depuis lui-même, donc si $\Box a$ est vrai en w, a y est également vrai, donc $(\Box a \supset a)$ est vrai en tout monde de tout modèle où R est réflexive.

Réciproquement, supposons $(\Box a \supset a)$ vrai en tout monde de tout modèle, et R non réflexive ; il existe donc un monde w qui n'est pas accessible à partir de lui-même. Considérons la fonction v telle que: $v(a) = W - \{w\}$; on a $\Box a$ vrai en w et a faux en w, donc $(\Box a \supset a)$ est faux : contradiction■

B- (A8) est une tautologie ssi la relation R est transitive.

Preuve:

supposons R transitive, et soit w' un monde accessible depuis w ; si $\Box a$ est vrai en w, a est vrai en w'; tous les mondes w'' accessibles depuis w' sont, par transitivité, également accessibles depuis w, donc a y est également vrai ; donc est $\Box a$ vrai en w' ; cette propriété étant vraie en tout monde w' accessible depuis w, □□a est vrai en w ; donc □a⊃□□a est vrai en tout monde de tout modèle où R est transitive.

Réciproquement, supposons □a⊃□□a vrai en tout monde de tout modèle, et R non transitive; il existe donc trois mondes w, w' et w'' tels que wRw',w'Rw'', ¬wRw''. Considérons la fonction v telle que v(a)=W-{w''} ; on a □a vrai en w (car w'', le seul monde où a est faux, n'est pas accessible depuis w) et □a faux en w' (car w'' est accessible depuis w'), donc □□a faux en w (car w', où □a est faux, est accessible depuis w), donc □a⊃□□a est faux en w : contradiction ■

C- (A9) est une tautologie ssi la relation R est euclidienne .

Une relation binaire R sur un ensemble E est euclidienne ssi pour tout triplet d'éléments e, f, g de E si on a eRf et eRg alors on a aussi fRg

Preuve :

supposons R euclidienne ; si ◊a est vrai en un monde w, il existe un monde w' accessible depuis w où a est vrai ; tous les mondes w'' accessibles depuis w ont, par euclidianité, accès à w' où a est vrai ; donc ◊a est vrai en tous ces mondes ; donc □◊a est vrai en w et (◊a⊃□◊a) est vrai en tout monde w de tout modèle où R est euclidienne.

Réciproquement, supposons (◊*a*⊃□◊*a*) vrai en tout monde de tout modèle, et R non euclidienne ;

il existe donc trois mondes w, w' et w'' tels que wRw', wRw'' et ¬w'Rw''. Considérons la fonction v telle que v(*a*) = {w''} ; on a ◊*a* vrai en w (car w'' est accessible depuis w et *a* y est vrai) : ◊*a* est faux en w' (car w'', le seul monde où *a* soit vrai, est inaccessible depuis w'), donc □◊*a* faux en w (car w', où ◊*a* est faux, est accessible depuis w), donc (◊*a*⊃□◊*a*) est faux en w : contradiction■

<u>**En conséquence,**</u>

un modèle de S5 est un modèle où tout monde appartient à une <u>clique</u> (ce terme de la théorie des graphes désigne un sous-graphe où chaque sommet est relié à tous les autres).

Preuve :

En effet, S5 vérifie (A7) et (A9), donc dans tout modèle de S5, R est réflexive et euclidienne ; si on a wRw', comme par réflexivité, on a aussi wRw, on conclut par euclidianité w'Rw ; si de plus, w'Rw'', l'euclidianité donne wRw'' et w''Rw. Donc tout monde connecté à w est accessible depuis w et accède à w, ce qui prouve que le sous-graphe est une clique■

D- (A10) est une tautologie ssi R est serielle.

Une relation binaire R sur un ensemble E est sérielle ssi pour tout élément e de E, il existe au moins un élément f de E tel que eRf .

Preuve :

si □a est vrai en un monde w et si R est sérielle, il existe un monde w' accessible depuis w ; a est vrai en w' ; donc ◊a est vrai en w ; donc □a ⊃ ◊a est vrai en tout monde w de tout modèle où R est sérielle.

Réciproquement, supposons □a ⊃ ◊a vrai en tout monde de tout modèle, et R non sérielle ; il existe donc un monde w d'où nul monde n'est accessible. Par définition, □a y est vrai (car chaque monde accessible depuis w, c-à-d aucun, vérifie a); ◊a est faux en w (car il n'est pas vrai qu'il existe un monde accessible depuis w où a est vrai), donc □a ⊃ ◊a est faux en w : contradiction. ■