La Logique des déf auts [Reiter 80]

Le raisonnement par défaut sôanalyse :

Si A est déductible à partir dôune certaine description du monde, et si rien nôindique que lôon est dans une situation exceptionnelle B, alors conclure C

Å **Caractéristique de non-monotonie ?**

En absence dôinformation sur B, on conclut C, mais si on acquiert lôinformation supplémentaire que B est vrai, la formule C nôest plus déductible.

Définition : On se place dans un langage du premier ordre et on ne considère que des formules sans variables libres. Un défaut est un ensemble de n+2 formules qui sôécrit:

A : B1,é , Bn

(1) **---------------**

C

A : prérequis du défaut

Bi : sa justification

C : son conséquent

La formule (1) se lit : si A est une conséquence de la théorie et si aucun des Bi n’est nié par la théorie, alors C est aussi une conséquence de la théorie.

Une théorie Δ est formée dôun ensemble W de formule du langage et dôun ensemble D de défauts :

$$\Delta = <W,D>$$

Soit E un ensemble de formules de L.

On dit que E est déductivement clos Ssi $E = Th(E)$.

On note $\Gamma_{\Delta}(E)$ le plus petit ensemble de formules du langage :

Å Contenant W,

Å Déductivement clos,

Å Tel que pour tout défaut appartenant à D pour lequel $A \in \Gamma(E)$, et pour lequel $\forall i \in [1,n]$, $Bi \notin E$, on ait $C \in \Gamma(E)$.

Exemple:

$\Delta = < W, D>$, $W = \{p\}$, $D = p :q/r$, alors $\Gamma(\emptyset)=Th(\{p,r\})$

E est une extension de Δ ssi E = Γ(E)

Cette contrainte est dite contrainte de **point fixe**

Exemple:

Δ = $<W,D>$ où W = {A} et D = {A : B / C, A : $\neg$C / $\neg$B}

Cette théorie a deux extentions

1. E = Th ({A,C}); Γ(E) inclut W, donc A; la négation de la justification du premier défaut de D $\notin$ E, donc son conséquent C $\in$ Γ (E); en revanche la négation de la justification du second défaut appartient à E donc nous ne sommes pas contraints dœajouter $\neg$B à Γ(E); par clôture déductive et minimalité, Γ(E) = Th({A, C}) = E, donc E est une extension.
2. E' = Th({A, $\neg$B}); Γ(E) inclut W, donc A; la négation de la justification du 1^{ier} défaut de D$\in$E', mais non celle du second, donc le conséquent de ce défaut, $\neg$B $\in$ Γ(E') par clôture déductive et minimalité Γ(E') = Th({A, $\neg$B}) = E', donc E' est aussi une extension.

Cette manière de raisonner :

Å Conduit à accepter plusieurs solutions (Pluri-extensionalité), ceci permet dœxpliquer certains phénomènes dœambiguïté

Å Nécessite une hiérarchie sur les formules f :

1. $f \in W$
2. $f \notin W$ mais f appartient à toutes les extensions
3. f appartient à certaines extensions
4. f nœappartient à aucune

Il existe deux attitudes : sceptique (1-2) ou crédule (1,2,3).

Evaluation :

Cette logique est-elle décidable? Etant donné une théorie Δ, existe-t-il un algorithme qui, pour toute formule, donne son statut (f $\in$ à toute extension/ à une extension/ à aucune extension)

La logique du raisonnement par défaut est indécidable.

Défauts générateurs d’une extension

Soit E une extension de $\Delta = <W,D>$; le défaut : $d = A : B1, \ldots, Bn/C \in D$ est dit générateur de l’extension E Ssi son pre-requis A appartient à E et si aucune négation de ses justifications $\neg Bi$ n’appartient à E.

<u>Théorème</u> : *Si DG désigne l’ensemble des conséquents des défauts générateurs d’une extension E, alors* $E = Th(W \cup DG)$.

Ce théorème ne nous apporte pas de procédé de construction des extensions d’une théorie $<W, D>$, car il faut deviner a priori quels défauts sont générateurs; Il délimite cependant le champ des possibilités : une extension est caractérisée de façon unique par un sous ensemble de D (mais évidemment, tout sous-ensemble de D ne détermine pas une extension). La pluri-extensionalité est, d’une certaine façon, liée à l’ordre dans lequel on considère les défauts.

Nous nous intéressons à une forme particulière de théories, celle dont tous les défauts ont une seule justification, et où celle-ci est équivalente au conséquent.

Ces théories sont appelées **normales**, les défauts de la forme A:B/C tels que B = C étant appelés **défauts normaux**.

On dira quôune théorie <W, D> est semi-monotone si pour tout ensemble Dô de défauts normaux, toute extension de <W,D> est sous-ensemble dôune extension de <W, D ∪ Dô>.

Théorème : toute théorie normale est semi-monotone.

Preuve : cf. [Reiter,80] ou Besnard, 89]

Corollaire : *Toute théorie normale possède au moins une extension.*

Qu'est-ce que la semi-monotonie?

Si l'on parvient à établir qu'une formule appartient à une extension d'une théorie normale Δ, elle appartient également à une extension de toute théorie construite en rajoutant des défauts normaux à Δ.

La même propriété peut également s'exprimer ainsi :

si on a réussi à prouver une formule sans utiliser tous les défauts d'une théorie normale Δ, cette preuve suffit pour établir l'appartenance de la formule à une extension de Δ.

Une preuve dôune formule f dans une théorie normale $\Delta= <W,D>$ est une suite finie D0, é , Dn telle que :

Å Chaque Di ($0 \leq i \leq n$) est un sous-ensemble de D ; on note Pr(Di) lôensemble des pré-requis des défauts du sous-ensemble Di, Cn(Di) lôensemble de leurs conséquents;

Å f est démontrable en logique ordinaire à partir de W et des conséquents de D0 [en dôautres termes, $f \in Th(W \cup Cn(D0))$];

Å Les prérequis de Di-1 sont démontrables en logique ordinaire à partir de W et des conséquents de Di

[pour $1 \leq i \leq n$, $f \in Pr(Di\text{-}1) \supset f \in Th(W \cup Cn(Di))$];

Å Dn = Ø

Å Lôensemble des conséquents des défauts utilisés est cohérent avec le monde [$f \notin Th(W \cup_{i=0,n} Cn(Di))$]

Remarque : Sans la dernière de ces conditions, la notion de preuve ainsi définie déterminerait une logique monotone : en effet, lôajout de nouvelle formules à W ne remet en cause aucune des autres conditions, mais elle peut apporter une incohérence à lôensemble des conséquents des défauts utilisés.

Exemple :

Reprenons lœxemple zoologique déjà traité : les nautiles sont des céphalopodes; les céphalopodes sont des mollusques ; les mollusques ont généralement une coquille ; les céphalopodes généralement nœn ont pas ; les nautiles en ont une. La théorie $\Delta = < W, D >$ suivante semble convenir :

$W = \{ (\forall x) (N(x) \supset \text{Cé}(x))$, [les nautiles sont des céphalopodes]

$(\forall x) (\text{Cé}(x) \supset M(x))$, [les céphalopodes sont des mollusques]

$(\forall x) (N(x) \supset Co(x)) \}$ [les nautiles ont une coquille]

$D = \{ M(x) : Co(x) / Co(x)$, [les mollusques ont généralement une coquille]

$\text{Cé}(x) : \neg Co(x) / \neg Co(x)$ [les céphalopodes nœnt généralement pas de coquille]$\}$

* On rappelle que les formules de D représentent en fait lœnsemble des défauts obtenus en remplaçant x par les différentes constantes du langage.

a est un nautile, b un céphalopode, c un mollusque, que peut on conclure?

Ou bien quelles sont les extensions de

< W {N(a), Cé(b), M(c)}, D>

On remarque que cette traduction est imparfaite : la connaissance selon laquelle les céphalopodes nôont généralement pas de coquille devrait, dans le cas de lôindividu b, être prioritaire sur celle qui affirme que les mollusques (et b en est un) ont généralement une coquille.

Dans [Froidevaux &Kayser 88] il a été proposé la traduction suivante :

$W = \{(\forall x)\,(N(x) \supset Cé(x)),\ (\forall x)\,(Cé(x) \supset M(x)),\ (\forall x)\,(N(x) \supset Co(x))\ \}$

Comme ci-dessus

$(\forall x)\,(Cé(x) \supset \neg R1(x))$, [la règle R1 (ci-dessous) ne sôapplique pas aux céphalopodes]

$(\forall x)\,(N(x) \supset \neg R2(x))\}$, [la règle R2 ne sôapplique pas aux nautiles]

D = { $M(x) : R1(x) \wedge Co(x) / Co(x)$ [les mollusques auxquels sôapplique la règle R1 ont en généralement une coquille]

$Cé(x) : R2(x) \wedge \neg Co(x) / \neg Co(x)$ [les céphalopodes auxquels sôapplique la règle R2 nôen ont généralement pas]

Montrons que la théorie $<W \cup \{N(a), Cé(b)\ M(c)\}, D>$ possède une seule extension : Appelons d1a (premier défaut instancié par x=a), é d2c les 6 défauts de D. Toute extension de la théorie contient

$Th(W \cup \{N(a), Cé(b), M(c)\})$, ce qui inclut notamment cé(a), M(a), Co(a), $\neg$R1(a), $\neg$R2(a), M(b) , $\neg$R1(b). La présence de

$\neg$R1(a), $\neg$R2(a), $\neg$R1(b) empêche d1a, d2a et d1b dôêtre générateurs. Co(b) ne pourrait être obtenu que par d1b, donc le fait quôil ne soit pas générateur empêche cette formule dôappartenir à une extension. $\neg$R2(b) nôest pas démontrable, donc aucune extension ne peut contenir la négation de la justification de d2b ; ce défaut est générateur.

De même, Cé(c) nôest pas démontrable, donc d2c ne peut être générateur. Or $\neg$Co(c) nôaurait pu être obtenu que par ce défaut, donc $\neg$Co(c) nôappartient à aucune extension.

$\neg$R1(c) nôest pas démontrable, donc aucune extension ne peut contenir la négation de la justification de d1c; ce défaut est générateur. Le statut de chaque défaut est déterminé, donc il nôy a quôune extension.

E = Th(W $\cup$ {N(a), Cé(b), M(c), $\neg$Co(b), Co(c)})

Cette extension unique contient les formules intuitivement souhaitées.

Nous avons été conduits à utiliser des défauts non normaux, mais ayant la particularité dôavoir pour justification la conjonction de leur conséquent et dôune autre formule. De tels défauts ont été baptisés semi-normaux par Reiter, et une théorie ne comportant que des défauts semi-normaux est dite semi-normale.