Systèmes d'inférences

Prolog

Systèmes Experts

Inférences non standard

Cohérence

Inférences non standard

L'exemple précédent nous entraîne vers les bases de connaissances inconsistantes.

Les connaissances n'ont cependant pas besoin de devenir floues pour devenir inconsistantes. Il arrive que de nouvelles connaissances contradictoires avec ce qui est connu apparaissent.

Au contaire de la logique classique où l'inférence (|-) est monotone, le raisonnement par défaut aborde des ensembles de croyances non monotones.

Raisonnement par défaut

- Introduction
  - On dispose d'un ensemble A de connaissances, on en apprend de nouvelles $A \cup B$, alors la monotonie indique que $Th(A) \subseteq Th(A \cup B)$.
  - Les croyances humaines ne fonctionnent pas de cette façon : $Cr(A) \nsubseteq Cr(A \cup B)$.
  - Pour caractériser ces croyances on emploie l'opérateur d'inférence ($|\sim_P$) tel que :

    $A \mid\sim_{P(A,\varphi)} \varphi$ ssi $A \vdash \varphi$ et $P(A,\varphi)$

    (A et φ vérifient une certaine propriété P)

Raisonnement par défaut

Exemple:

{ autruche(X) => oiseau(X) /\ ~vole(X) ,

oiseau(X) => vole(X) ,

autruche(titi) ,

oiseau(toto) } |- vole(toto) /\ vole(titi) /\ ~vole(titi)

n'est pas acceptable car contradictoire

{ autruche(X) => oiseau(X) /\ ~vole(X) ,

oiseau(X) /\ ~autruche(X) => vole(X) ,

autruche(titi) ,

oiseau(toto) } |- oiseau(titi) /\ ~vole(titi)

mais on ne sait plus rien de toto.

Raisonnement par défaut

Comment conclure à vole(toto)

en l'absence de autruche(toto) ?

En tout cas pas en ajoutant

~autruche(toto) => vole(toto)

équivalent à

autruche(toto) \/ vole(toto)

Car

1. on n'obtient rien de plus,
2. ça ne serait pas acceptable

   (car il y a d'autres exceptions)

Raisonnement par défaut

– Dans ces conditions, en général :

$A \mid\!\sim_{P(A,\varphi)} \varphi \not\Rightarrow A \cup B \mid\!\sim_{P(A \cup B,\varphi)} \varphi$

– La propriété P détermine le genre de logique non monotone dont il est question.

- Logique des défauts
  – Définition 1 : une théorie des défauts est la donnée d'un couple $\Delta = (W, D)$ composé d'un ensemble de connaissances W (fbf du 1er ordre) et d'un ensemble de défauts D (vues comme des règles d'inférences)

Raisonnement par défaut

– <u>Définition 2</u> : Les défauts ($d \in$ D) sont de la forme $d = \frac{\alpha : \beta}{\omega}$ où α est le prérequis de d, $\beta = \bigwedge_{i \in [1,n]} \beta_i$ est la justification de d et ω le conséquent de d.

Par extension,

– <u>Définition 3</u> :

Prereq(D) = $\bigwedge_{d \in D} \{\alpha \,/\, d = \frac{\alpha : \beta}{\omega}\}$

Just(D) = $\{\beta_i \,/\, d = \frac{\alpha : \beta}{\omega},\ \beta = \bigwedge_{i \in [1,n]} \beta_i,\ d \in D\}$

Conseq(D) = $\{\omega \,/\, d = \frac{\alpha : \beta}{\omega},\ d \in D\}$

Raisonnement par défaut

– Définition 4 : Soit la fonction Γ telle que pour tout ensemble S de formules, $\Gamma(S)$ est le plus petit ensemble de formules vérifiant :

- $W \subseteq \Gamma(S)$
- $Th(\Gamma(S)) = \Gamma(S)$
- Pour tout $d = \dfrac{\alpha : \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n}{\omega} \in D$:

  $(\alpha \in \Gamma(S)$ et $\forall i \in [1,n]\ \neg\beta_i \notin S) \Rightarrow (\omega \in \Gamma(S))$

– Concrètement $\Gamma(S)$ représente $Cr_\Delta(S)$: le plus petit ensemble de croyances issues de S relatives à Δ.

Raisonnement par défaut

On appelle ensemble de croyances acceptables, issues de S relatives à Δ, tout ensemble S point fixe de Γ.

– Définition 5 : On appelle extension de la théorie Δ tout ensemble E solution de : $\Gamma(E) = E$.

– Exemples :

- $\Delta = (\varnothing, \{d = \frac{T : \neg A}{A}\})$ n'a pas d'extension E

Raisonnement par défaut

Δ = (Ø,{ $d = \frac{T : \neg A}{A}$ }) n'a pas d'extension E

si <u>$A \in E$</u> alors la condition de justification $\neg\neg A \notin E$ n'est pas vérifiée car $\neg\neg A \equiv A$ or $A \in E$ donc d ne permet pas de conclure au conséquent A donc <u>$A \notin E$</u>

si <u>$A \notin E$</u> alors la condition de justification $\neg\neg A \notin E$ est vérifiée et comme le prérequis $T \in E$ alors d conclut au conséquent <u>$A \in E$</u>

Exemple: $d = \frac{T : \neg \text{Raser}(X, X)}{\text{Raser}(\text{barbier}, X)}$ Est-ce que Raser(barbier,barbier) ?

Raisonnement par défaut

- Δ = ({A},{$d_1 = \frac{A:B}{B}, d_2 = \frac{B:C}{C}$}) a 1 extension E = Th({A,B,C})
- Δ = (Ø,{$d_1 = \frac{T:C}{\neg B}, d_2 = \frac{T:B}{\neg C}$}) a 2 extensions

  E_1= Th({¬B}), E_2 = Th({¬C})

– <u>Propriété 1</u> : E est une extension de Δ ssi

- $E_0 = W$
- $\forall i \geq 0\ E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{\omega \,/\, \frac{\alpha : \beta}{\omega} \in D\ ,\ \alpha \in E_i, \neg\beta \notin E\}$
- $E = \lim_{n \to \infty} \bigcup_{i \in [1,n]} E_i$

Raisonnement par défaut

– Exemple :

- $\Delta = (\{A\},\{ d_1 = \frac{A:B}{B}, d_2 = \frac{B:C}{C} \})$
- $E_0 = \{A\}$
- $E_1 = Th(E_0) \cup \{\omega / \frac{\alpha : \beta}{\omega} \in D\ ,\ \alpha \in E_0, \neg\beta \notin E\}$

  $= Th(E_0) \cup \{B\} = \{A,B\}$ si $\neg B \notin E$
- $E_2 = Th(E_1) \cup \{\omega / \frac{\alpha : \beta}{\omega} \in D, \alpha \in E_1, \neg\beta \notin E\}$

  $= Th(E_1) \cup \{C\} = \{A,B,C\}$ si $\neg B, \neg C \notin E$
- $E_3 = Th(E_2) \cup \{\omega / \frac{\alpha : \beta}{\omega} \in D, \alpha \in E_2, \neg\beta \notin E\}$

  $= Th(E_2) = \ldots = Th(\{A,B,C\}) = \{A,B,C\} = E$ si $\neg B, \neg C \notin E$

Raisonnement par défaut

– Définition 6 : On appelle défaut normal un défaut de la forme $\dfrac{\alpha : \beta}{\beta}$

Exemple: $$\mathrm{d} = \frac{\mathrm{oiseau(X)} : \mathrm{v}ole(X)}{\mathrm{vole(X)}}$$

– Propriété 2 : Une théorie Δ de défauts normaux admet au moins une extension.

Raisonnement par défaut

– Propriété 2 : Une théorie Δ de défauts normaux admet au moins une extension.

– Propriété 3 : L'appartenance d'une formule à une théorie Δ de défauts normaux n'est pas semi - décidable.

Autrement dit : la réunion des extensions d'une théorie de défauts normaux est non récursivement énumérable.

Raisonnement par défaut

– Définition 7 : On appelle défaut semi-normal un défaut de la forme $\dfrac{\alpha : \omega \wedge \beta}{\omega}$

– Propriété 4 : Une théorie Δ de défauts semi-normaux admet au moins une extension.

– Propriété 5 : Une théorie Δ = (W,D) de défauts admet une extension inconsistante ssi W est inconsistant.

Raisonnement par défaut

- Preuve par défaut
  - <u>Définition 8</u> : On appelle preuve par défaut d'une formule fermée γ, relativement à une théorie

    $\Delta = (W,D)$ de défauts normaux fermés, une suite $D_0,\ldots,D_k$ de sous-ensembles finis de D telle que :

    1) $W \cup \text{Conseq}(D_0) \mid\!- \gamma$
    2) $\forall i \; 1 \leq i \leq k,\; W \cup \text{Conseq}(D_i) \mid\!- \text{Prereq}(D_{i-1})$
    3) $D_k = \emptyset$
    4) $W \cup \bigcup_{i \in [0,k]} \text{Conseq}(D_i)$ est consistant

Raisonnement par défaut

– Procédure descendante de preuve

```
preuve(γ)
    si W |- γ alors return(succès trivial)
    sinon  i := 0, ld := Ø,
           si (∃D_i ⊆ D tel que W ∪ Conseq(D_i) |- γ)
               alors  ld := ld ∪ {D_i},
                      répéter
                          i := i+1,
                          si (∃D_i ⊆ D tel que W ∪ Conseq(D_i) |- Prereq(D_{i-1}))
                              alors ld := ld ∪ {D_i} sinon return(échec)
                      jusqu'à (D_i = Ø),
                      return(ld)
           sinon return(échec)
```

Raisonnement par défaut

– La suite fournie par la preuve précédente n'est pas pour autant acceptable, en effet il faut que :

$$W \cup \bigcup_{i \in [0,k]} \mathrm{Conseq}(D_i) \text{ soit consistant}$$

– Autrement dit la procédure précédente n'est applicable que sur une suite concrète $D_0,\ldots,D_k$ choisie à l'avance.

– Comment déterminer les D_i ? Va-t-on devoir tester tous les $D_i \subseteq D$ et toutes les suites de D_i ?

– Solution : Chaque démonstration (|-), soit de γ soit de Prereq(D_{i-1}), doit fournir le D_i utilisé.

Raisonnement par défaut

- Solution : On va utiliser pour cela une méthode de démonstration par réfutation s'appuyant sur une stratégie linéaire appliquée à des clauses indexées.
- Définition 9 : On appelle index d'une clause un ensemble de défauts liés à cette clause :
  - chaque élément de W est considéré comme une clause qui sera indexée par Ø
  - chaque β_i de la justification $\beta = \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_n$ d'un défaut d est considéré comme une clause qui sera indexée par l'ensemble $\{d\}$, ainsi
  - $Cl(\Delta) = \{(\beta_i,\{d\}) \ / \ d \in D\} \cup \{(w,\emptyset) \ / \ w \in W\}$

Raisonnement par défaut

– Principe de résolution

- Il s'agit de généraliser le calcul des résolvants aux clauses indexées, ainsi

$$\boxed{(\ Res(c_1,c_2) = c\ ) \Rightarrow (\ Resindex((c_1,\mathcal{D}_1),(c_2,\mathcal{D}_2)) = (c,\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2)\ )}$$

Avec ce nouveau principe de résolution toute démonstration, comme

$W \vdash \gamma$, $W \cup Conseq(D_i) \vdash \gamma$ ou $W \cup Conseq(D_i) \vdash Prereq(D_{i-1})$)

fera l'objet d'une preuve linéaire PI qui fournira une clause vide indexée ($\square$,$\mathcal{D}$) où $\mathcal{D}$ sera la réunion des défauts utilisés pour obtenir cette clause vide.

Raisonnement par défaut

– <u>Définition 10</u> : Une preuve par défaut descendante de γ relativement à $\Delta = (W,D)$ est une suite de preuves linéaires $Pl_0,\ldots,Pl_k$ telle que :

- Pl_0 est une preuve linéaire de $Cl(\Delta) \vdash \gamma$
- $\forall i\ 0 \leq i \leq k$, Pl_i fournit D_i
- $\forall i\ 1 \leq i \leq k$, Pl_i est une preuve linéaire de $Cl(\Delta) \vdash Prereq(D_{i-1})$
- $D_k = \varnothing$
- $W \cup \bigcup_{i \in [0,k]} Conseq(D_i)$ est consistant

– <u>Propriété 7</u> : Δ a une extension contenant γ ssi il existe une preuve par défaut descendante de γ relativement à Δ

Raisonnement par défaut

- Acquisition de croyances
  - Si l'on déduit par défaut une formule γ relativement à Δ, peut-on augmenter W ($W \leftarrow W \cup \{\gamma\}$) pour en déduire d'autres ?
  - Oui, à conditions qu'elles appartiennent à une seule et même extension, en effet
  - <u>Propriété 8</u> : Soient E_1 et E_2 deux extensions de Δ

$$(E_1 \neq E_2) \Rightarrow (E_1 \cup E_2 \text{ inconsistant})$$

  - Soit $\Delta_0 = (W,D)$ et γ_0 déduite par défaut de Δ_0

    $\Delta_1 = (W \cup \{\gamma_0\}),D)$ et γ_1 déduite par défaut de Δ_1

    etc…

Raisonnement par défaut

– Propriété 9 : Si E est une extension de $\Delta = (W,D)$ alors $\forall B \subseteq E$, E est une extension de $\Delta = (W \cup E,D)$

Autrement dit, pour autant que $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ soient dans la même extension E : W, $W \cup \{\gamma_0\}$, $W \cup \{\gamma_0, \gamma_1\}$, ... ,

$W \cup \{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}, \ldots$ est une approche de E.

A quelle condition la suite $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \ldots$ est elle dans une unique extension E ?

– Définition 11 : On appelle $DS(P_\gamma)$ l'ensemble des défauts servant de support à la preuve par défaut de γ

Raisonnement par défaut

– <u>Propriété 10</u> : Soient $\Delta_0 = (W,D)$, P_{γ_i} une preuve par défaut descendante de γ_i relativement à Δ_i et $\Delta_{i+1} = (W \cup \{\gamma_0,\ldots,\gamma_i\},D)$.

$\forall n \geq 0$ si $W \cup \bigcup_{i \in [0,n]} \mathrm{Conseq}(DS(PI_{\gamma_i}))$ est consistant

alors Δ_0 a une extension E telle que $\{\gamma_0,\ldots,\gamma_n\} \subseteq E$

Cette propriété de consistance assure qu'on peut augmenter l'ensemble des croyances acceptables.

Si cette propriété devait ne plus être vérifiée, il faudrait la retrouver par un procédé de révision des croyances (TMS, JTMS, ATMS: cf. chapitre Cohérence)

Raisonnement par défaut

- Acquisition de connaissances
  - <u>Propriété 11</u> : Soient $\Delta_0 = (W,D)$, E une extension de Δ_0 telle que $\{\gamma_0,\ldots,\gamma_n\} \subseteq E$ conformément à la propriété 10 et F un ensemble de formules.

Si $W \cup F \cup \bigcup_{i\in[0,n]} \mathrm{Conseq}(DS(Pl_{\gamma_i}))$ est consistant alors

$\Delta=(W\cup F,D)$ a une extension E telle que $\{\gamma_0,\ldots,\gamma_n\}\subseteq E$

Cette propriété de consistance assure qu'on peut augmenter l'ensemble W des connaissances.

Et si cette propriété n'est plus assurée ?

Raisonnement par défaut

- Acquisition de défauts
  - <u>Propriété 12</u> :

    Si $\Delta_0 = (W,D)$, E une extension de Δ_0 telle que $\{\gamma_0,\ldots,\gamma_n\} \subseteq E$ conformément à la propriété 10 et D' un ensemble de défauts normaux fermés alors $\Delta=(W,D \cup D')$ a une extension E' telle que $\{\gamma_0,\ldots,\gamma_n\} \subseteq E'$.

    Cette propriété assure que nos croyances perdurent dans une extension commune ($E \subseteq E'$) sans aucune condition.