On rappelle que :

Si π est une mesure de possibilité de D dans [0,1] décrivant on objet alors la possibilité et la nécessité que cet objet, décrit par π, vérifie la propriété floue P décrite par sa fonction d'appartenance floue μ_P sont définies par :

$$\Pi(P) = \text{Sup}\{ \min(\mu_P(x), \pi(x)) \mid x \in D \}$$

$$N(P) = \text{Inf}\{ \max(\mu_P(x), 1 - \pi(x)) \mid x \in D \}$$

Exemple :

on suppose que π signifie que l'objet x a une taille comprise entre 1m60 et 1m70, on suppose que P est la propriété être grand décrite par μ_{grand}.
on suppose la règle "si X est grand alors X est coupable", on se demande avec quel degré de possibilité / nécessité on peut considérer que l'objet x est coupable.

Modus Ponens avec une minoration des degrés de nécessité

$$\frac{[P\ ,\ N(P) \geq a]\ ,\ [P \Rightarrow Q\ ,\ N(P \Rightarrow Q) \geq b]}{[Q\ ,\ N(Q) \geq \min(a,b)]}$$

Il est possible de faire des inférences (ex : modus ponens)

$$\frac{N(p \to q) \geq a\ ,\ N(p) \geq b}{N(q) \geq \min(a,b)}$$

$$\frac{N(p \to q) \geq a\ ,\ \Pi(p) \geq b}{\Pi(q) \geq b \cdot v(a+b>1)}$$

$$\frac{\Pi(p \to q) \geq a\ ,\ N(p) \geq b}{\Pi(q) \geq a \cdot v(a+b>1)}$$

avec

$v(a+b>1) = 1$ si $a+b>1$

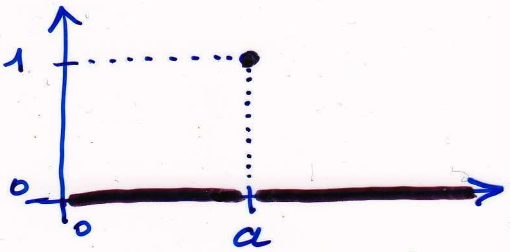
$v(a+b>1) = 0$ sinon

Exemple

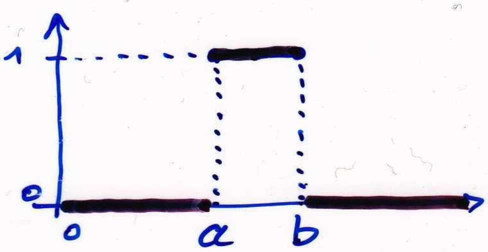
Un problème d'élection :
on cherche à modéliser des intentions de vote (en pourcentage) sachant que ces intentions sont parfois vagues et imprécises et de toute façon entâchées d'incertitude.

Précis / Imprécis, Vague, Incertain

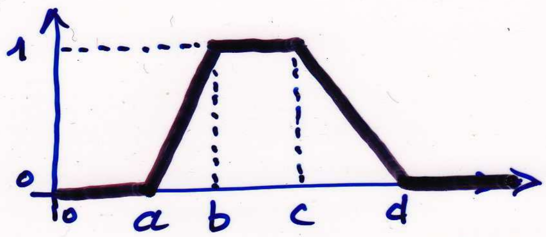
différentes distributions de possibilités



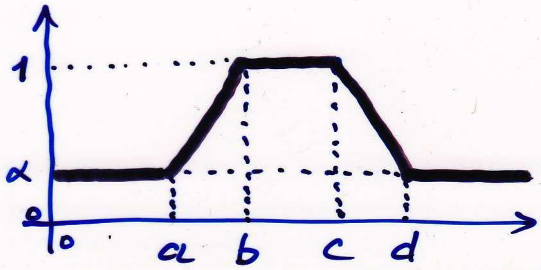
précis et certain



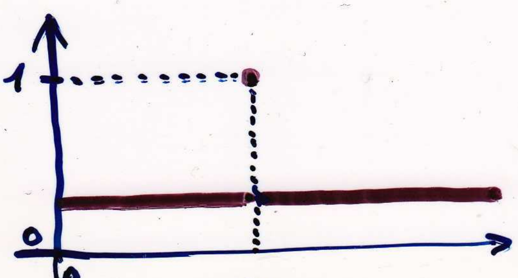
imprécis mais certain



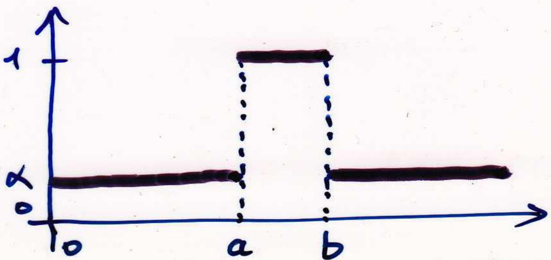
vague et certain



vague et incertain

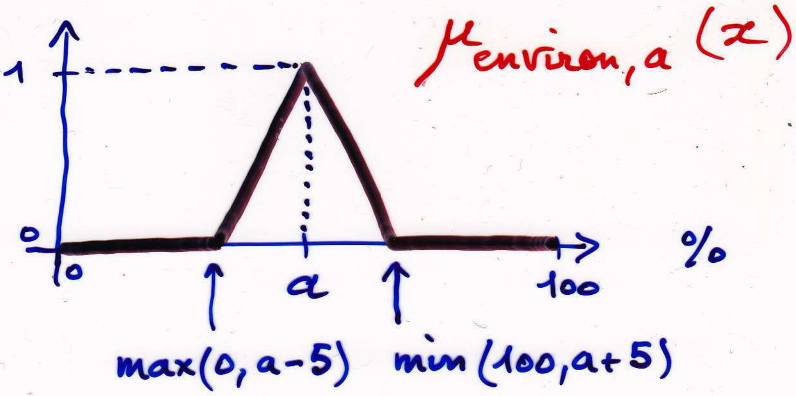


précis mais incertain

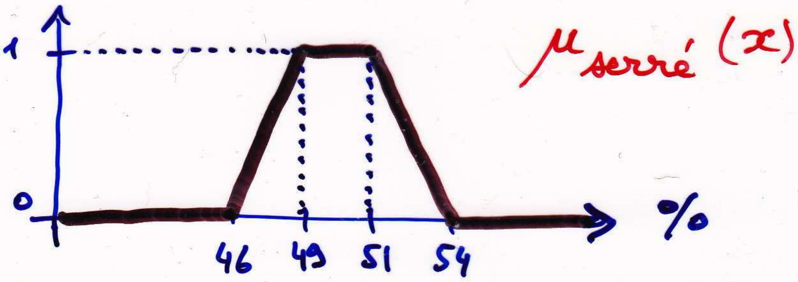


imprécis et incertain

Soit la distribution de possibilité associée à l'expression " environ " relative à une valeur " a " :



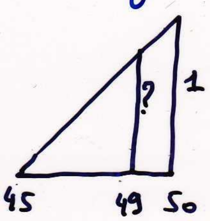
Soit la distribution associée à " serré ".



Remarques:

Un score de 49% est considéré comme "environ 50%" avec un degré de confiance calculé comme suit :

$\mu_{environ\ 50\%}(49) = 0.8$ car



N'importe quel score entre 49 et 51% est considéré comme serré avec le degré 1, pour un score entre 46 et 49% le degré se calcule comme précédemment.

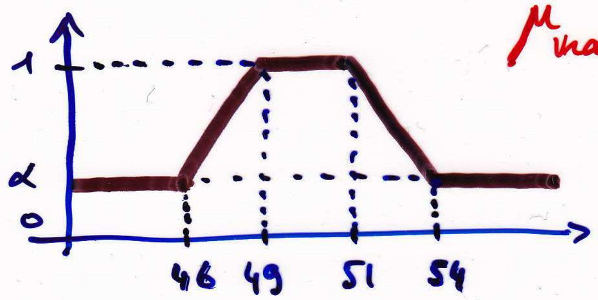
Tentons de représenter les expressions suivantes :

a: "vraisemblablement, mais pas certainement, serré"

b: "exactement entre 47 et 49 %"

c: "aux alentours de 47 à 49 %"

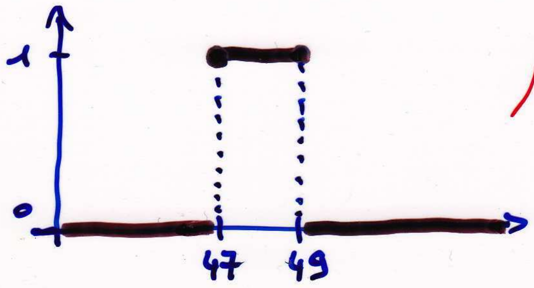
a) est vague et incertain



$\mu_{\text{vraisemblablement serré}}(x)$

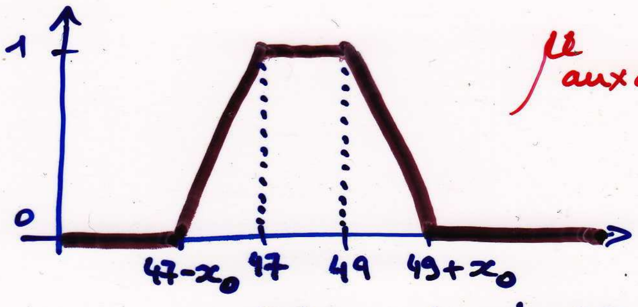
dans la pratique on prend $\alpha = 0.1$ ou 0.2, il traduit le degré d'incertitude.

b) est imprécis mais certain



$\mu_{\text{exactement entre 47 et 49}}(x)$

c) peut être considéré comme seulement vague



$\mu_{\text{aux alentours de 47 à 49}, x_0}(x)$

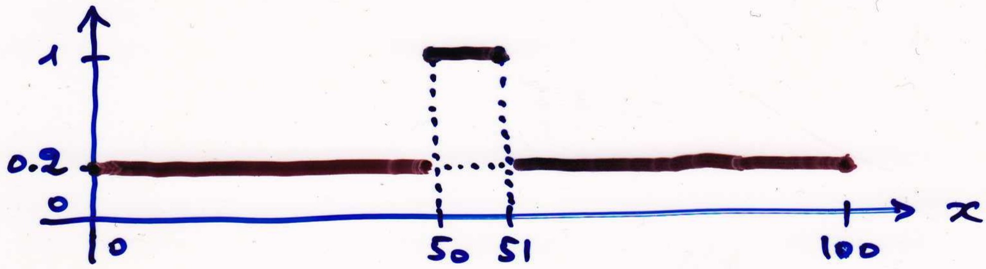
x_0 est un paramètre ajustable définissant la proximité acceptable à 47 - 49 %.

Problème

Pierre et Jean sont deux candidats à une élection. Deux sondages S_1 et S_2 donnent pour Pierre les prévisions suivantes :

S_1 : $\pi_1(x) = \mu_{\text{environ } 52\%}(x)$

S_2 : $\pi_2(x)$ défini par



On remarque que :

$\forall x \in [0, 100]$, $\pi_2(x) \geqslant 0.2$

Cela signifie :

D'après S_2 Pierre aura vraisemblablement ($\alpha = 0.2$) entre 50 et 51 %

Si l'on ramenait ce seuil α à zéro (pour avoir une courbe "certaine") on ne serait certain qu'à 0.8 que le score de Pierre serait entre 50 et 51%

On peut par ailleurs douter que

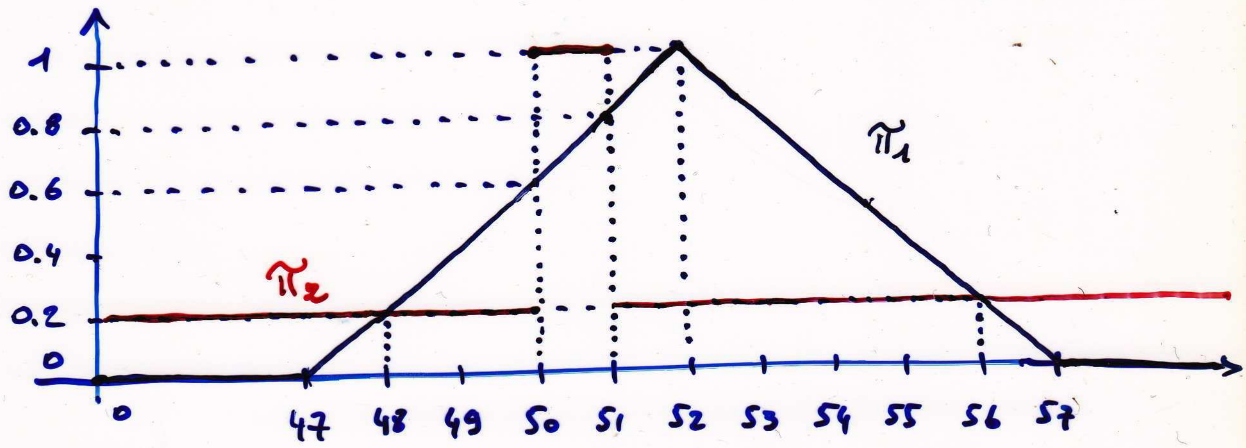
$\pi_2(\# 0) = 0.2$ ou $\pi_2(\# 100) = 0.2$

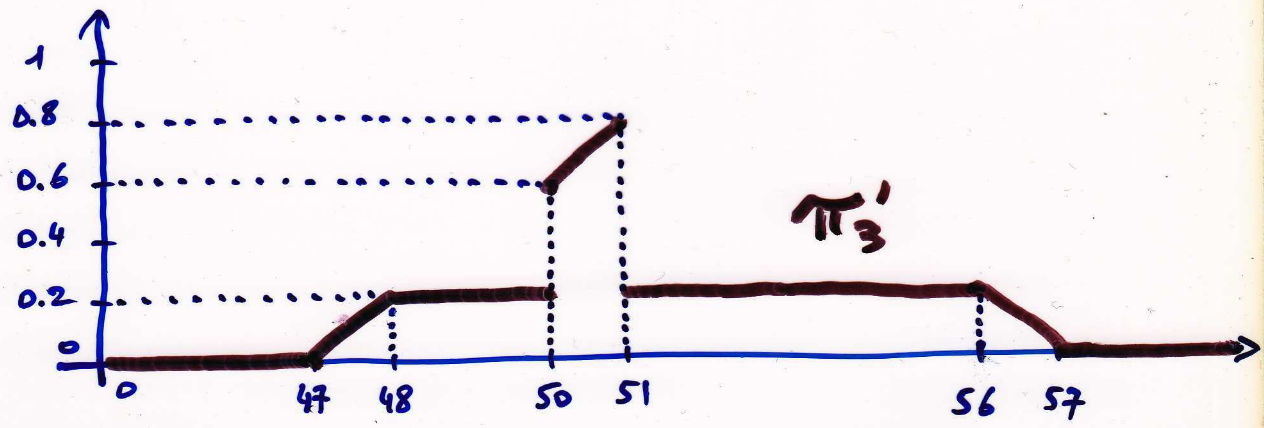
On va chercher à combiner ces deux sondages.

La conjonction de deux distributions va se faire par l'opérateur "min"

$$\pi_3(x) = \min(\pi_1(x), \pi_2(x))$$

(la version pessimiste de ces 2 sondages)



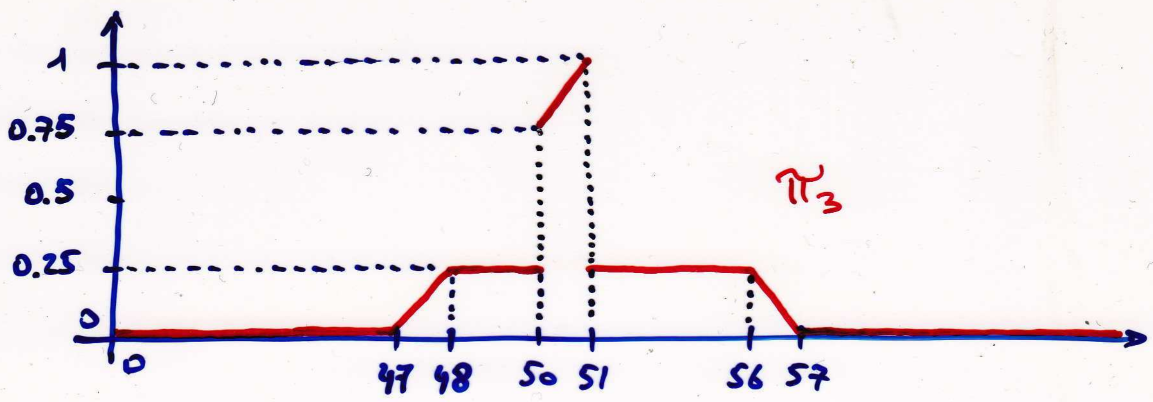


On remarque que cette distibution n'est pas normalisée : $\neg(\exists x, \pi(x) = 1)$

Pour ce faire on définit π par

$$\pi(x) = \frac{\pi'(x)}{\pi'(x_0)} \quad \text{où} \quad \forall x \neq x_0 \quad \pi'(x) \leq \pi'(x_0)$$

On obtient ainsi π_3



On suppose que le score de Pierre donné par le sondage "S_i", noté $score_i$(Pierre), est défini par π_i :

le score de Pierre est un ensemble flou de pourcentages (c.à.d.: $\{(x, \pi_i(x)) \,/\, x \in [0, 100]\}$)

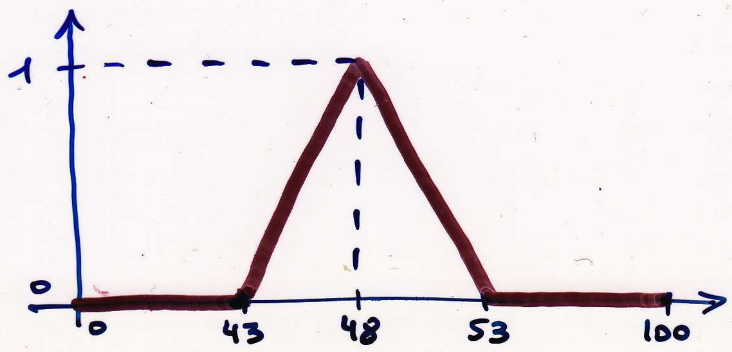
On suppose aussi que :

$score_i(\text{Jean}) + score_i(\text{Pierre}) = 100$

(ceci s'interprète à degré de confiance constant :

ex: (45%, 1, Jean) et (55%, 1, Pierre).)

Calculons le score de Jean selon le sondage "S1"



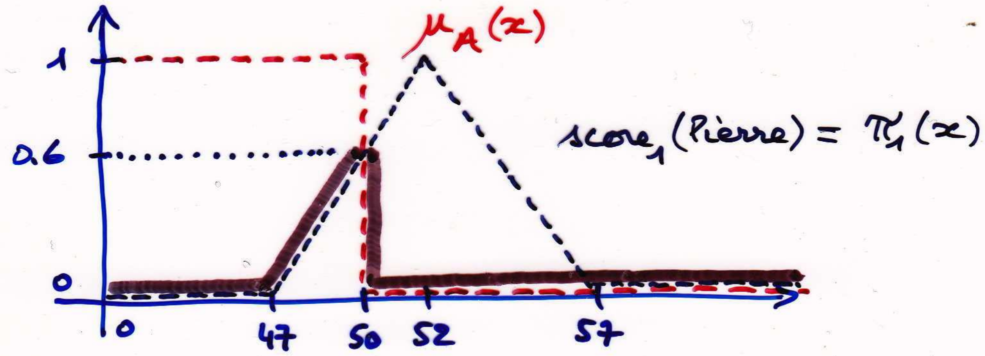
On note $\Pi(X,S)$, $N(X,S)$ la possibilité et la nécessité de l'évènement X selon le sondage S

Soient les évènements :

$A =$ "Pierre a un score inférieur ou égal à 50%"

$B =$ "Pierre a un score supérieur à 50%"

Calculons $\Pi(A,S1)$, $N(A,S1)$, $\Pi(B,S1)$, $N(B,S1)$



A est considéré comme certain, d'où $\mu_A(x)$

score$_1$(Pierre) est donné par $\pi_1(x)$

$\Pi(A,S1)$ est la confrontation de ces deux courbes :

$$\Pi(A,S1) = \operatorname{Sup}\left\{\min(\mu_A(x), \pi_1(x)) \mid x \in [0,100]\right\}$$
$$= 0.6$$

A est non vague donc si $\Pi(A,S1) < 1$ alors $N(A,S1) = 0$

$$N(A,S1) = 0$$

Comme $B = \neg A$ et $\Pi(B,S1) = 1 - N(A,S1)$

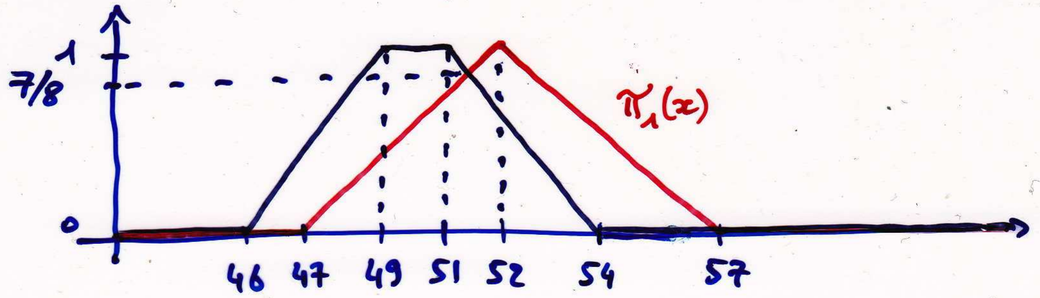
$$\Pi(B,S1) = 1$$

Comme $N(B,S1) = 1 - \Pi(A,S1)$

$$N(B,S1) = 0.4$$

On peut calculer, toujours selon S1, si le score de Pierre est serré

$\Pi(\text{serré}, S1) = \operatorname{Sup}\{\min(\mu_{\text{serré}}(x), \pi_1(x)) \mid x \in [0, 100]\}$



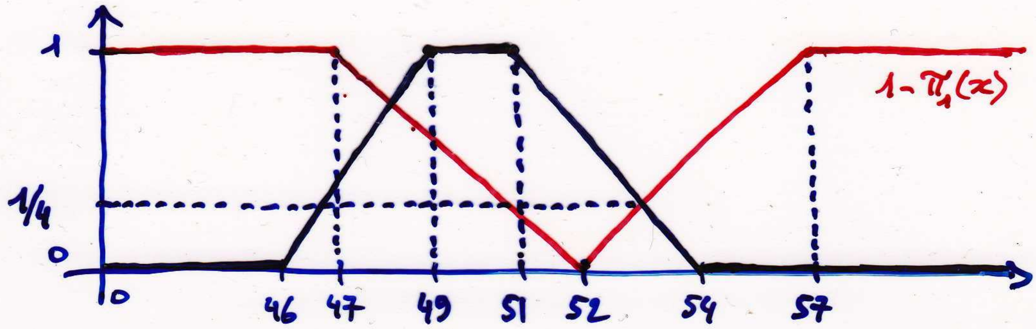
$\Pi(\text{serré}, S1) = 7/8$

Remarque : on a appliqué

$$\Pi(X) = \sup\{\pi(x) \mid x \in X\} \quad \text{avec}$$

$$\forall x, \ \pi_{\text{score(Pierre) est serré}}(x) = \min(\mu_{\text{serré}}(x), \pi_1(x))$$

$N(\text{serré}, S1) = \operatorname{Inf}\{\max(\mu_{\text{serré}}(x), 1 - \pi_1(x)) \mid x \in [0, 100]\}$



$N(\text{serré}, S1) = 1/4$

Remarque : on a appliqué

$$N(X) = 1 - \Pi(\neg X) = 1 - \sup\{\pi(x) \mid x \notin X\}$$

$$= \operatorname{Inf}\{1 - \pi(x) \mid x \notin X\}$$

$$= \operatorname{Inf}\{\max(\mu_{\text{serré}}(x), 1 - \pi_1(x)) \mid x \in [0, 100]\}$$

Soit maintenant la base de connaissances :

C_1 : $Elu(Jean) \vee Elu(Pierre)$ (1)
C_2 : $\neg Elu(Jean) \vee \neg Elu(Pierre)$ (1)
C_3 : $\neg Maire\text{-}sortant(x) \vee Elu(x)$ (0.5)
C_4 : $Maire\text{-}sortant(Pierre)$ (1)
C_5 : $\neg Soutient(Marie, Pierre) \vee Elu(Pierre)$ (0.6)
C_6 : $Soutient(Marie, Pierre)$ (0.8)
C_7 : $\neg Objet\text{-}de\text{-}scandale(x) \vee \neg Elu(x)$ (0.7)

$\Big\}$ B

de la forme $C_i : \varphi_i\ (n_i)$ signifiant que la clause C_i est telle que $N(\varphi_i) \geq n_i$.

Que peut on dire de $N(Elu(Pierre))$, $N(Elu(Jean))$?

$B_1 = B \cup \{\neg Elu(Pierre)\ (1)\}$

$\neg Elu(Pierre) : (1)$ $C3 : (0.5)$

$\neg Maire\text{-}sortant(Pierre) : (0.5)$ $C4 : (1)$

$\square : (0.5)$

$\neg Elu(Pierre) : (1)$ $C5 : (0.6)$

$\neg Soutient(Marie, Pierre) : (0.6)$ $C6 : (0.8)$

$\square : (0.6)$ $\leq N(Elu(Pierre))$

On a appliqué le modus ponens :

$$\frac{N(p \rightarrow q) \geq a,\quad N(p) \geq b}{N(q) \geq \min(a, b)}$$

$B_2 = B \cup \{\neg Elu(Jean)\ (1)\}$ $\Longrightarrow$ pas de réfutation

On apprend maintenant :

C8 : Objet-de-scandale(Pierre) (1)

On remarque que $B \cup \{C8\}$ est inconsistante

C7 : (0.7) C5 : (0.6) C6 : (0.8)

C8 : (1) —— ¬Elu(Pierre) : (0.7) —— ¬Soutient(Marie, Pierre) : (0.6) —— □ : (0.6)

On va prouver Elu(Jean) et ¬Elu(Jean)

¬Elu(Jean) (1) C1 (1)

Elu(Pierre) (1) C7 (0.7)

¬Objet-de-scandale(Pierre) (0.7)

C8 (1)

□ (0.7)

Elu(Jean) (1) C2 (1)

¬Elu(Pierre) (1) C5 (0.6)

¬Soutient(Marie, Pierre) (0.6)

C6 (0.8)

□ (0.6)

que faut il en conclure ?

la meilleure réfutation est celle de Elu(Jean) avec $N(\text{Elu(Jean)}) \geq 0.7$