Logiques modales

1.Introduction

En logique classique, l'énoncé suivant :

"Si Brest est face à la mer alors la France est un hexagone"

est vrai puisque chaque élément qui la compose est vrai.

Mais en logique "naturelle", ce principe est rejeté

parce qu'il n'y a aucun lien entre l'antécédent et le conséquent.

De plus certains théorèmes de la logique classique conduisent à des

paradoxes de l'implication.

Logiques modales

"les élèves sont sages et non déraisonnables implique les élèves sont sages"

$$(p \wedge \neg q) \Rightarrow p$$

Ici, le sens de implique est conforme au langage courant (pas de paradoxe).

"le vent souffle implique que si la terre ne tourne pas cela implique que le vent souffle"

$$p \Rightarrow (\neg q \Rightarrow p)$$

Ici, il n'existe pas de lien clair entre l'antécédent et le conséquent (plutôt paradoxal).

"le vent souffle implique que si le vent ne souffle pas cela implique la terre tourne"

$$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$$

Ici aussi le lien entre p et le conséquent n'est pas clair (assez paradoxal).

Pourtant toutes ces formules sont équivalentes à $(\neg p \vee q \vee p)$ en logique classique.
On se rappelle que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Logiques modales

On rappelle que $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$

A partir de là Lewis définit une implication stricte "→" en ajoutant

- un opérateur modal de possibilité (noté ◇) ou
- un opérateur de nécessité (noté □)

définis comme suit :

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg\Diamond(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \Box(p \Rightarrow q)$$

p implique strictement q

signifie

il est impossible "d'avoir" p sans "avoir" q

Cette tentative pour résoudre les paradoxes s'est soldée par un échec puisqu'il existe aussi de tels paradoxes en logique modale.

Logiques modales

Cependant, les logiques modales permettent d'exprimer des énoncés dont la sémantique n'est pas compositionnelle.

Les opérateurs modaux ne sont pas des opérateurs "vérifonctionnels", i.e.:

la valeur de vérité d'une expression n'est pas uniquement déterminée par les valeurs de vérité des formules atomiques qui la composent.

Exemple :

"Marie croit que la terre est bleue comme une orange"

La valeur de vérité la proposition ne dépend pas uniquement du fait que la terre est bleue comme une orange,

mais elle dépend du contexte formé par les convictions de Marie.

Logiques modales

Les formules de tels systèmes ne sont plus des formules vraies dans l'absolu, mais vraies dans un contexte ou une situation ou à un instant ou pour un agent donné.

2.Logiques aléthiques en termes de sémantiques des mondes possibles de Kripke.

On y dégage quatre modalités :

- La nécessité : ne peut pas ne pas être vrai.
- L'impossibilité : ce qui ne peut pas ne pas être faux.
- La contingence : ce qui peut être vrai ou faux.
- La possibilité : tout ce qui peut être, sauf impossible.

Ces 4 modalités sont liées, il suffit d'une pour définir les trois autres.

Logiques modales

L'interprétation intuitive (non partagée par toute la communauté philosophico - logicienne) est la suivante :

- nécessaire ≡ impossible pas $\Box p \Leftrightarrow \neg(\Diamond(\neg p))$
- contingent ≡ non nécessaire ≡ possible pas $\neg(\Box p) \Leftrightarrow \Diamond(\neg p)$
- possible ≡ non impossible $\Diamond p \Leftrightarrow \neg(\neg(\Diamond p))$

On distingue donc deux connecteurs unaires duaux l'un de l'autre :

- le nécessaire $\Box$
- et le possible $\Diamond$

liés par les relations :

$$\Diamond p \Leftrightarrow \neg\Box\neg p$$

$$\Box p \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$$

Logiques modales

Ces équivalences sont proches de celles des quantificateurs de la logique des prédicats.

$$(\exists x \ \ p) \Longleftrightarrow \neg(\forall x \ \neg p)$$

$$(\forall x \ \ p) \Longleftrightarrow \neg(\exists x \ \neg p)$$

$\Box$p signifie que p est assurément vrai
tandis que
$\Diamond$p signifie que p est possiblement vrai,
c'est à dire compatible avec les connaissances actuelles.

Exemples :

- $\neg\Box$ trav : il n'est pas nécessaire que les élèves travaillent
- $\neg\Diamond$ trav : il n'est pas possible que les élèves travaillent
- $\Box\neg$ trav : il est nécessaire que les élèves ne travaillent pas
- $\Diamond\neg$ trav : il est possible que les élèves ne travaillent pas

Logiques modales

Soient P et Q deux formules bien formées, les opérateurs modaux peuvent affecter des propositions complexes :

$\Box(P \vee Q)$, $(\Box P \wedge \Diamond Q)$, $\Box\Diamond(P \vee \Box Q)$, etc.

3.Le système modal propositionnel K

1. Le langage symbolique

L'alphabet A se compose de :

- symboles de propositions: lettres p, q, r, ... affectés d'indice ou non,
- connecteurs ou opérateurs : $\vee$, $\wedge$, $\urcorner$, =>, <=>, $\Box$ et $\Diamond$ appelés conjonction, disjonction, négation, implication, équivalence, nécessaire et possible,
- parenthèses (et) utilisées comme en algèbre.

Logiques modales

Les formules bien formées sont les suivantes :

p, q, r, ... sont des formules atomiques ou atomes (p, q, r $\in$ F)

Soient P et Q des formules, les expressions suivantes sont des formules bien formées :

$$(P \vee Q),\ (P \wedge Q),\ \urcorner P,\ (P \Rightarrow Q),\ (P \Leftrightarrow Q),\ \Diamond P,\ \Box P.$$

2. Théorie des modèles standards

Un modèle standard est une structure M = <W, R, m> dans laquelle

- W est un ensemble de mondes possibles,
- m représente l'attribution d'ensembles de mondes possibles à des formules atomiques,
- R est une relation entre mondes possibles.

Logiques modales

Définition : M= <W, R, m> est un modèle standard si et seulement si :

- W est un ensemble non vide ;
- R est une relation binaire sur W (i.e. R $\in$ W x W) ;
- m est une fonction de l'ensemble F des formules atomiques vers l'ensemble 2^W (ensemble des fonctions de W vers {0,1}, ou encore, ensemble des parties de W), c'est-à-dire m $\in$ $(2^W)^F$.

R est une relation d'accessibilité entre mondes, on écrit (w R w') lorsque le monde w' est accessible du monde w.

La formule atomique p est satisfaite dans w$\in$W si et seulement si w$\in$m(p) et p ne l'est pas dans W si et seulement si w $\notin$ m(p).

A partir de m, on peut définir une fonction V d'évaluation de la vérité de toute formule bien formée.

Logiques modales

On écrit

$$\models_w^M P \text{ ou encore } (M,w) \models P$$

pour dire que P est satisfaite pour le monde possible w dans le modèle standard M.

On écrit aussi

$$V(P,w) = 1 \quad \text{si et seulement si} \quad \models_w^M P$$

et

$$V(P,w) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \not\models_w^M P$$

On définit maintenant la fonction d'évaluation V de toute formule bien formée de sorte que :

Logiques modales

Pour tout P $\in$ F

$V(P, w) = \mathbf{1}_{m(P)}(w)$ (i.e.: fonction caractéristique de m(P)) (*)

Pour toutes formules bien formées P et Q

$V(\neg P, w) = 1 - V(P, w)$

$V(P \vee Q, w) = \max\{V(P, w), V(Q, w)\}.$

$V(P \wedge Q, w) = \min\{V(P, w), V(Q, w)\}.$

$V(P \Longrightarrow Q, w) = V(\neg P \vee Q, w) = \max\{1 - V(P, w), V(Q, w)\}.$

$V(P \Longleftrightarrow Q, w) = 1 - |V(P, w) - V(Q, w)|$

$V(\Diamond P, w) = 1$ ssi $\exists w' \in W$ $(w\, R\, w')$ et $V(P, w') = 1.$

$V(\Box P, w) = 1$ ssi $\forall w' \in W$ si $(w\, R\, w')$ alors $V(P, w') = 1.$

(*) On rappelle que $\mathbf{1}_E(x) = 1$ ssi $x \in E$ et $\mathbf{1}_E(x) = 0$ ssi $x \notin E$

Logiques modales

Si P vérifie V(P, w) = 1 alors

on dit que P est satisfaite en w, ou encore, w satisfait P.

Si P vérifie $\forall w \in W$, P est satisfaite en w alors

on dit que P est vraie dans le modèle standard M.

Si P vérifie $\forall M \in C$, P est vraie en M alors

on dit que P est valide dans la classe C des modèles standards.

On a définit un langage modal ainsi que la sémantique de ce langage.

On va chercher maintenant à produire des formules satisfaisables, vraies, valides par des règles de réécriture indépendantes de la valeur de vérité des formules manipulées.

Logiques modales

4. Axiomatique

1. Dérivation ou inférence

Si la sémantique a fait usage du signe $\models$, l'axiomatique quant à elle va faire usage du signe $\vdash$ pour représenter cette règle dérivation.

Sa forme générale est $H \vdash P$, où H est un ensemble de formules bien formées ainsi que P.

$H \vdash P$ dit qu'on peut dériver P à partir des formules de H.

Quand $H = \varnothing$ on écrit simplement $\vdash P$

$\vdash P$ dit que P est un théorème (ou thèse).

Logiques modales

Le théorème de la déduction en logique classique s'exprime aussi bien sous forme d'une règle de dérivation :

$$\text{Si } H \cup \{P\} \vdash Q \text{ Alors } H \vdash (P \Rightarrow Q),$$

que sous forme de conséquence logique :

$$\text{Si } H \cup \{P\} \models Q \text{ Alors } H \models (P \Rightarrow Q).$$

Le théorème de la déduction ne s'applique généralement pas en logique modale.

En logique classique le signe $\models$ matérialise la conséquence logique.

$H \models P$ signifie que toute interprétation qui satisfait simultanément toutes les formules de H satisfait aussi P.

Logiques modales

La logique classique propositionnelle est correcte, complète et décidable pour les axiomes et les règles d'inférences qui la caractérisent.

Correct :

$$\text{Si } \vdash P \text{ alors } \models P$$

Complet :

$$\text{Si } \models P \text{ alors } \vdash P$$

Décidable :

Pour toute formule bien formée P il existe une procédure qui détermine si P est vraie ou fausse.

Logiques modales

5. Systèmes axiomatiques

1. Le système K

On prend l'axiomatique du calcul propositionnel :

Pour toutes formules bien formées P, Q, R :

$\vdash P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ (Ax1)

$\vdash (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$ (Ax2)

$\vdash (\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow ((\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow P)$ (Ax3)

Les formules à droite du signe $\vdash$ sont considérées comme des thèses.

Logiques modales

On ajoute la règle de dérivation du modus-ponens :

Pour toutes formules bien formées P, Q :

$\{P, P \Rightarrow Q\} \vdash Q$

qui se lit :

si P et (P ⇒ Q) sont des thèses alors Q aussi.

On ajoute la règle de nécessitation :

Pour toute formule bien formée P :

$\{P\} \vdash \Box P$

qui se lit :

si P est une thèse alors □P aussi.

Logiques modales

Enfin on complète l'axiomatique par l'axiome (K) de distribution :

Pour toutes formules bien formées P, Q :

$$\vdash \Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q) \qquad \text{(K)}$$

équivalent à

$$\vdash (\Box(P \Rightarrow Q) \wedge \Box P) \Rightarrow \Box Q$$

La règle de nécessitation ne se confond pas avec la formule:

$$P \Rightarrow \Box P$$

qui n'est pas une thèse du système K. Cela vient du fait que la règle

$$\text{Si } \{P\} \vdash \Box P \text{ Alors } \vdash (P \Rightarrow \Box P)$$

ne pourrait s'appliquer que si le théorème de la déduction était applicable.

Logiques modales

2. Le système KT

C'est le système K auquel on ajoute la thèse appelée T :

$$\vdash \Box P \Rightarrow P \qquad \text{(T)}$$

Proposition : Le système KT ≡ T est correct, complet et décidable. (*)

(*) Pour les axiomes et les règles d'inférences qui le définissent.

Logique modale

6. Implantation d'une logique modale propositionnelle

1. Modèle

Un modèle M est un triplet < W, R, µ > tel que :

- W est l'ensemble des mondes possibles,
- R est une relation d'accessibilité entre les mondes,
- µ est une valuation qui associe à chaque monde w l'ensemble µ(w) des propositions satisfaites dans w. donc $\mu \in (2^F)^W$

Cette définition est similaire à celle du §3.2 où m a été remplacée par µ. (*)

"A est vrai dans le monde w du modèle M" est noté : M,w |= A

(*) $\mu \in (2^F)^W$ tandis que $m \in (2^W)^F$

Logique modale

2. Sémantique

$M,w \models A$ ssi A atomique et $A \in \mu(w)$

$M,w \models \neg A$ ssi A formule et non $M,w \models A$ (noté $M,w \not\models A$)

$M,w \models A \Rightarrow B$ ssi si $M,w \models A$ alors $M,w \models B$

$M,w \models \Box A$ ssi $\forall w' \in W$ si $(w\ R\ w')$ alors $M,w' \models A$

(définir les autres connecteurs: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$)

Relation entre $\Diamond$ et $\Box$

$\Diamond A \equiv_{def} \neg \Box \neg A$

Propriété

$M,w \models \Diamond A$ ssi $\exists w' \in W$ $(w\ R\ w')$ et $M,w' \models A$

(à démontrer)

Logique modale

3. Programmation en Prolog

Généralement l'ensemble des propositions est considéré comme infini. On se limitera à un infini dénombrable de propriétés $p_1, \dots, p_n$ où $n \in \mathbb{N}$.

Exemple:

- soient 3 propriétés {p,q,r} qui peuvent être vraies ou fausses.

L'ensemble des mondes possibles W contient 2^3 mondes différents au maximum : { {} , {p}, {q} , {r}, {p,q} , {p,r}, {q,r} , {p,q,r} }.

μ(w0,[ ]).

μ(w1,[p]).

etc. …

μ(w7,[p,q,r]).

Logique modale

- on suppose que chaque monde est relié à tous les autres.

```
rel(_,_).
```

M,w |= A ssi A atomique et $A \in \mu(w)$

```
satisfait(W, A):-
    atom(A),
    monde(W),
    µ(W, L),
    member(A, L).
```

Logique modale

M,w |= ⌉F   ssi   F formule telle que M,w |≠ F

```
satisfait(W, ~F):-
    list_w_satisfont(F, U),
    monde(W),
    not(member(W, U)).
```

et non pas :

```
satisfait(W, ~P) :-
    not(satisfait(W, P)).
```

(pourquoi ?)

list_w_satisfont(F,U) forme la liste U de tous les w tels que w |= F

Logique modale

M,w |= P /\ Q   ssi   M,w |= P et M,w |= Q

```
satisfait(W, P /\ Q):-
    monde(W),
    satisfait(W, P),
    satisfait(W, Q).
```

M,w |= P \/ Q   ssi   M,w |= P ou M,w |= Q

```
satisfait(W, P \/ Q):-
    monde(W),
    (satisfait(W, P);
    satisfait(W, Q),
    not(satisfait(W, P))).
```

et non pas

```
    satisfait(W, P \/ Q) :- satisfait(W,P) ; satisfait(W,Q).
```

(pourquoi ?)

Logique modale

M,w |= P => Q   ssi   si M,w |= P alors M,w |= Q

```
satisfait(W, P => Q):-
    monde(W),
    satisfait(W, ~P \/ Q).
```

M,w |= P <=> Q   ssi   M,w |= P => Q et M,w |= Q => P

```
satisfait(W, P <=> Q) :-
    monde(W),
    satisfait(W, P => Q),
    satisfait(W, Q => P).
```

et non pas

```
    satisfait(W, P => Q) :- satisfait(W, P) -> satisfait(W, Q).
```

(pourquoi ?)

Logique modale

$M,w \models \Box P$ ssi $\forall w'$ si $(w\ R\ w')$ alors $M,w' \models P$

```
satisfait(W, #P):-
    monde(W),
    (aveugle(W) ; tous_rel_satisfont(W, P)).
```

$M,w \models \Diamond P$ ssi $\exists w'$ $(w\ R\ w')$ et $M,w' \models P$

```
satisfait(W, <>P) :-
    monde(W),
    un_rel_satisfait(W, P).
```

aveugle(W) renvoie vrai si il n'existe pas w' tel que rel(w,w')

tous_rel_satisfont(W,P) vérifie que tous les w' tels que rel(w,w') sont tels que w' |= P

un_rel_satisfait(W,P) vérifie qu'il existe au moins un w' tel que rel(w,w') et w' |= P

Logique modale

Formules vraies relatives à un modèle M (de W fini)

$$M \models P \quad \text{ssi} \quad \forall w \ \ M,w \models P$$

vraie(P):-
list_w_satisfont(P,U),
inclus([w0,w1, … , w7],U).

Implication stricte

La logique précédente permet de définir une implication nouvelle, plus forte que l'implication matérielle classique (=>).

$$P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$$

mais

$$P \rightarrow Q \equiv_{def} \neg\Diamond(P \wedge \neg Q)$$

Logique modale

Propriétés

$$P \rightarrow Q \equiv \Box(P \Rightarrow Q) \equiv \neg\Diamond(P \wedge \neg Q)$$

$M,w \models P \rightarrow Q$ ssi $\forall w' \in W$ si $(w\ R\ w')$ alors $M,w' \models P \Rightarrow Q$

(à démontrer)

Programmation

```
satisfait(W, P -->> Q):-
        satisfait(W, #(P => Q)).
```

ou bien

```
satisfait(W, P -->> Q):-
        satisfait(W, ~ <>(P /\ ~Q)).
```

Logiques modales

7.Quelques systèmes modaux

A partir du système KT

(K): $\Box(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\Box P \Rightarrow \Box Q)$

(T): $\Box P \Rightarrow P$

on peut exiger que certaines formules soient des théorèmes.

Grâce aux expérimentations pouvant être faites à partir d'une programmation telle que celle définie au §6.3,

on s'aperçoit que les théorèmes que l'on obtient dépendent des propriétés de la relation d'accessibilité R du modèle M étudié.

Logiques modales

Propriété :

L'axiome (T) est valide dès lors que la relation d'accessibilité est réflexive.

Il faut prouver que (M,w) |= □P => P.

On va faire l'hypothèse que (M,w) |= □P et on va démontrer que si R est réflexive alors (M,w) |= P.

(M,w) |= □P signifie

∀w' si (w R w') alors (M,w') |= P.

Mais ∀w (w R w) puisque R est réflexive

(w' = w est un monde relié à w).

Donc ∀w si (M,w) |= □P alors (M,w) |= P.

Logiques modales

Quelles propriétés pour la relation d'accessibilité ?

Sérialité

$\forall w \in W\ \exists w' \in W$ tel que $w\ R\ w'$

(un monde n'est jamais aveugle)

La sérialité de R entraine la validité de l'axiome

(D): $\Box P \Rightarrow \Diamond P$

Formule raisonnable car elle dit que si une formule P est nécessaire il faut qu'elle soit possible.

KD est la logique déontique où $\Box$ s'interprète comme "obligatoire" et $\Diamond$ comme "permis".

□

Logiques modales

Réflexivité

$\forall w \in W \; w \, R \, w$

(tout monde se voit lui-même)

La réflexivité de R entraine (T)

(T): $\Box P \Rightarrow P$

Si $\Box$ s'interprète comme une "obligation" alors T dit que tout ce qui est obligatoire est réalisé (: un peu trop fort!).

Si $\Box$ s'interprète comme "savoir" alors T dit que si je sais P alors P est vraie (: raisonnable).

Si $\Box$ s'interprète comme "croire" alors T dit que si je crois P alors P est vraie (: pas très raisonnable).

Logiques modales

Symétrie

$\forall w \in W \ \forall w' \in W$ si $w \ R \ w'$ alors $w' \ R \ w$

(si un monde en voit un autre alors ils se voient mutuellement)

La symétrie de R entraine la validité de (B)

(B): $P \Rightarrow \Box\Diamond P$

~peine-mort => ~possible obligatoire peine-mort

Ca se lit: si P est réalisée alors il est nécessaire que P soit (au moins) possible.

Si on interprète $\Box$ et $\Diamond$ différemment, il n'est pas sûr que cet axiome soit toujours satisfaisant (obligatoire/permis).

Logiques modales

Transitivité

$\forall w \in W \ \forall w' \in W \ \forall w'' \in W$

si w R w' et w' R w'' alors w R w''

La transitivité de R entraine la validité de (4)

(4): $\Box P \Rightarrow \Box\Box P$

Si P est nécessaire alors il est nécessaire que cela le soit.

Si je crois/sais P alors je crois/sais que je crois/sais P.

Logiques modales

Euclidianité

$\forall w \in W\ \forall w' \in W\ \forall w'' \in W$

si w R w' et w' R w'' alors w R w''

L'euclidianité de R entraine la validité de (5)

(5): $\Diamond P \Rightarrow \Box\Diamond P$

Si P est possible alors il est nécessaire que cela le soit. (?)

Si P est permis alors il est obligatoire que P le soit. (!!!)

Logiques modales

Connectivité

$\forall w \in W\ \forall w' \in W\ \forall w'' \in W$

si (w R w' et w R w'') alors (w' R w'' ou w'' R w')

La connectivité de R entraine la validité de (.3)

(.3): $\Box(\Box P \Rightarrow \Box Q) \vee \Box(\Box Q \Rightarrow \Box P)$

Pas de chemin infini

Il n'y a pas de chemin infini w, w', w'', … , $w^{(n)}$, … tel que

$\forall i\ w^{(i)} \in W\ \ w^{(i+1)} \in W\ w^{(i)} \neq w^{(i+1)}$ et $w^{(i)}\ R\ w^{(i+1)}$

Cette propriété de R entraine la validité de (Grz)

(Grz): $\Box(\Box(P \Rightarrow \Box P) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

Logiques modales

Formules caractéristiques de certaines logiques modales

D.	$\Box P \Rightarrow \Diamond P$
T.	$\Box P \Rightarrow P$
4.	$\Box P \Rightarrow \Box\Box P$
E.	$\Diamond P \Rightarrow \Box\Diamond P$
B.	$P \Rightarrow \Box\Diamond P$
Tr.	$\Box P \Leftrightarrow P$
V.	$\Box P$
M.	$\Box\Diamond P \Rightarrow \Diamond\Box P$
G.	$\Diamond\Box P \Rightarrow \Box\Diamond P$
H.	$(\Diamond P \wedge \Diamond Q) \Rightarrow (\Diamond(P \wedge Q) \vee \Diamond(P \wedge \Diamond Q) \vee \Diamond(Q \wedge \Diamond P))$
Grz.	$\Box(\Box(P \Rightarrow \Box P) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
Dum.	$\Box(\Box(P \Rightarrow \Box P) \Rightarrow P) \Rightarrow (\Diamond\Box P \Rightarrow P)$
W.	$\Box(\Box P \Rightarrow P) \Rightarrow \Box P$

Logiques modales

Logiques modales associées à des formules

KT = **T** = the Gödel/Feys/Von Wright system
KT4 = **S4**
KT4B = **KT4E** = **S5**
KD = deontic **T**
KD4 = deontic **S4**
KD4E = deontic **S5**
KTB = the Brouwer system
KT4M = **S4.1**
KT4G = **S4.2**
KT4H = **S4.3**
KT4Dum = **D** = Prior's Diodorean logic
KT4Grz = **KGrz** = Grzegoczyk's system
K4W = **KW** = Löb's system
KTr = **KT4BM** = the trivial system
KV = the *verum* system

Logiques modales

Les logiques proches du raisonnement humain se situent entre S4 et S5.

Définition: Deux modalités M_1 et M_2 sont dites équivalentes si et seulement si $\vdash (M_1P \Leftrightarrow M_2P)$

Soient $\mathscr{M}_{S4} = \{\varepsilon, \Box, \Diamond, \Box\Diamond, \Diamond\Box, \Box\Diamond\Box, \Diamond\Box\Diamond\}$

$\mathscr{M}_{S4.1} = \{\varepsilon, \Box, \Diamond, \Box\Diamond, \Diamond\Box\}$ et $\mathscr{M}_{S5} = \{\varepsilon, \Box, \Diamond\}$

Propositions: Il y a 14 modalités non équivalentes dans S4, il y en a 10 dans S4.1 et il y en a 6 dans S5. Elles appartiennent à $\mathscr{M}_{Sx} \cup \neg\, \mathscr{M}_{Sx}$

8. Les logiques temporelles

Chaque instant est un monde et la relation d'accessibilité est la relation d'ordre "<" entre instants.

On utilise 2 modalités appellées **P** et **F** (à caractère possible).

(M,w) |= **P**p

signifie

p est satisfaite dans au moins un monde passé de w

(M,w) |= **F**p

signifie

p est satisfaite dans au moins un monde futur de w

La relation d'accessibilité est définie

pour **P** par (w R_P w') si w' < w,

pour **F** par (w,R_F w') si w < w'.

Logiques modales

On définit les modalités duales (à caractère nécessaire) :

$$\mathbf{H}p = \neg \mathbf{P} \neg p$$

"il a toujours été le cas que p"

et

$$\mathbf{G}p = \neg \mathbf{F} \neg p$$

"il sera toujours le cas que p"

La logique s'appelle K_t (Logique de Prior).

Axiomatisation

Aux axiomes habituels des logiques standard on ajoute la relation de réciprocité entre le passé et le futur :

"Un monde est dans le passé de tous ses futurs et dans le futur de tous ses passés"

Logiques modales

L'axiome K

$$\vdash (\mathbf{M}(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\mathbf{M}A \Rightarrow \mathbf{M}B))$$

La nécessitation

$$\{A\} \vdash \mathbf{M}A$$

s'appliquent pour $\mathbf{M} \in \{H, G\}$.

On y ajoute :

$$\vdash (A \Rightarrow \mathbf{H}\,\mathbf{F}\,A)$$

et

$$\vdash (A \Rightarrow \mathbf{G}\,\mathbf{P}\,A)$$

Logiques modales

Proposition: K_t est correct et complet pour la classe des modèles dont la relation d'accessibilité R est irréflexive (i.e.: ∀w non(w R w)).

Il n'y a pas de schéma d’axiome caractéristique cette classe.

On peut compléter la logique de Prior par certains schémas :

Propriété	Axiome
Réflexivité	$HA \rightarrow A$ ou $GA \rightarrow A$ (T)
Transitivité	$HA \rightarrow HHA$ ou $GA \rightarrow GGA$ (4)
Linéarité à droite	$(FA \wedge FB) \rightarrow (F(A \wedge FB) \vee F(A \wedge B) \vee F(FA \wedge B))$ $(.3_d)$
Linéarité à gauche	$(PA \wedge PB) \rightarrow (P(A \wedge PB) \vee P(A \wedge B) \vee P(PA \wedge B))$ $(.3_g)$
densité	$PA \rightarrow PPA$ ou $FA \rightarrow FFA$ (den)
Pas d’instant maximal	$GA \rightarrow FA$ (D_d)
Pas d’instant minimal	$HA \rightarrow PA$ (D_g)

9. Les logiques doxastiques, épistémiques

Doxastique = croyance (modalité Believe)

Epistémique = connaissance (modalité Know)

Elles ne sont pas duales l'une de l’autre !

En effet il serait curieux que Know p $\equiv \neg$ Believe $\neg$p

Il serait déjà un peu meilleur de dire :

$$\text{Know } p \equiv p \wedge \text{Believe } p$$

(un savoir est une croyance avérée)

Logiques modales

L’axiomatique généralement acceptée pour la logique doxastique est celle de KD45 avec une relation d’accessibilité d’équivalence.

Believe P => ¬Believe ¬P (D)

Believe P => Believe Believe P (4)

¬Believe ¬P => Believe ¬Believe ¬P (5)

Pour la logique épistémique, on ajoute l’axiome caractéristique T, avec la réflexivité

(système KT5 = KTBD45 = S5) :

Know P => P (T)

Logiques modales

Le problème avec ces logiques viennent de l'axiome K et de la nécessitation :

$$\{A\} \vdash \text{Believe } A \qquad \text{(Nec)}$$

$$\vdash (\text{Believe } (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\text{Believe } A \Rightarrow \text{Believe } B)) \qquad \text{(K)}$$

Il y a plein de choses qui sont "satisfaites / vraies / valides" dans le monde, ce n'est pas pour autant qu'on les croit toutes.

Mais admettons …. (bien que ce soit peu admissible) !

On sait que (K) est équivalent à

$$\vdash (\text{Believe } (A \Rightarrow B) \wedge \text{Believe } A) \Rightarrow \text{Believe } B$$

Donc dès lors que A est satisfaite / vraie / valide on croit en A et si on croit que A => B alors on croit à la conséquence B.

Logiques modales

Donc on se met à croire en toutes les conséquences de nos croyances.

Un tel agent serait un "raisonneur" parfait. Il serait dit omniscient car conscient (puisqu'il y croit) de toutes les conséquences de ses croyances (ceci est vrai pour Believe mais aussi pour Know qui, l'une comme l'autre, sont des modalités régies par Nec et K).

On ne peut pas admettre cela non plus.

Logiques modales

10. Les logiques auto - épistémiques

On se place dans le cadre des logiques modales propositionnelles.

Konolige donne les conditions d'équivalence entre la logique des défauts de Reiter et la logique auto - épistémique qui est une logique modale (modalité **K**).

Un défaut est de la forme $\alpha : \beta / \gamma$

la formule modale correspondante est $(\mathbf{K}\alpha \wedge \neg\mathbf{K}\neg\beta) \Rightarrow \gamma$

Kp s'interprète comme "p est dérivable, cru/crédible"

$\neg\mathbf{K}\neg$p s'interprète comme "$\neg$p n'est pas dérivable"

Logiques modales

Autrement dit :

Si α est dérivable et $\neg\beta$ ne l'est pas alors γ est vraie.

La notion de dérivabilité s'assimile à l'appartenance à un ensemble de théorèmes (une extension en logique des défauts).

Kp peut signifier qu'on détient une preuve de p (pour une stratégie complète de résolution: on a réussi à démontrer p).

(**K**p est vrai) ≡ (p $\in \mathcal{T}$) ($\mathcal{T}$ est la théorie)

V(**K**p) = 1 ssi p $\in \mathcal{T}$

Logiques modales

Proposition: Si Th(A) désigne la théorie engendrée par les axiomes de A dans le calcul des propositions alors

$$\mathcal{T} \subseteq \mathrm{Th}(A \cup \{\mathbf{K}p \,/\, p \in \mathcal{T}\} \cup \{\neg\mathbf{K}p \,/\, p \notin \mathcal{T}\})$$

$\mathcal{T}$ est dit «basée» ou «fondée» sur les axiomes A.

Proposition: Toute interprétation satisfaisant les formules de A (un modèle de A) est aussi un modèle des formules de $\mathcal{T}$.

Proposition: $\mathcal{T}$ est correcte et complète.

$$\mathcal{T} = \mathrm{Th}(\mathcal{T}) \text{ et } (p \in \mathcal{T} \Rightarrow \mathbf{K}p \in \mathcal{T}) \text{ et } (p \notin \mathcal{T} \Rightarrow \neg\mathbf{K}p \in \mathcal{T})$$

(ie: $\mathcal{T}$ point fixe stable de Th).

Attention: Comme en logique des défauts il peut y avoir plusieurs théories $\mathcal{T}$ possibles (appelées expansions).

Logiques modales

Quelques carrés modaux

		Aléthique	
Nécessaire	Possible	Impossible	Contingent
		Déontique	
Obligatoire	Permis	Interdit	Facultatif
		Epistémique	
Connu	Plausible	Exclu	Contestable
		Temporel	
Toujours	Parfois	Jamais	Rarement
		Flou	
Certain	Probable	Improbable	Incertain

Logiques modales

Références bibliographiques :

- Handbook of philosophical logic, D.M.Gabbay & E.Guenthner, Kluwer Academic Publishers
- Logiques non monotones et IA, E.Grégoire, Hermes
- Modèles logiques et systèmes d'IA, L.Iturrioz & A.Dussauchoy, Hermes
- Handbook of logic in AI & logic programming, D.M.Gabbay & C.J.Hogger & J.A.Robinson, Oxford Science Publications