Systèmes d'inférences

Prolog

Systèmes Experts

Inférences non standard

Cohérence

Inférences non standard

Les SE sont amenés à traiter des données seulement probables ou vagues d'où la nécessité de savoir traiter des degrés de vraisemblance.

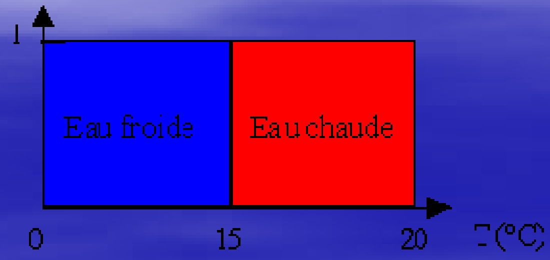
Ils ne doivent pas rester bloqués en l'abscence de données mais faire des hypothèses et être prêts à remettre en question les raisonnements tenus.

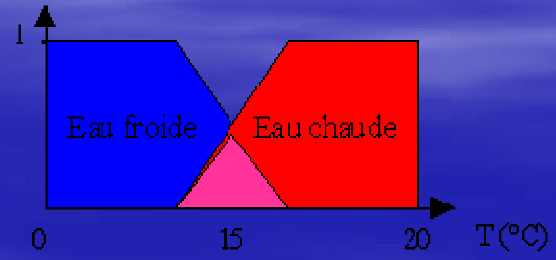
On fera appel à la logique possibiliste d'une part et d'autre part au raisonnement par défaut.

Raisonnement flou

- Introduction
  - Les catégories manipulées par le langage sont rarement tout ou rien. =>
  - Leur représentation par des ensembles classiques est souvent mal adaptée. =>
  - <u>Idée de Zadeh</u>

    Remplacer l’appartenance à un sous-ensemble classique par un degré d’appartenance pouvant prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et 1.





Raisonnement flou

- **Ainsi en logique classique jusqu'à 15°C, l’eau appartient à la classe de l’eau froide, alors que, en logique floue, à partir de 10°C l’eau n’appartient plus que partiellement à l’eau froide.**
- **<u>Définition</u>**
- **Fonction d’appartenance classique à un ensemble A,**

$$1_A(x) = 1 \text{ si } x \in A$$
$$= 0 \text{ si } x \notin A$$

- **Fonction d’appartenance à un ensemble flou A,**

$\mu_A(x)$ peut prendre toutes les valeurs entre 0 et 1.

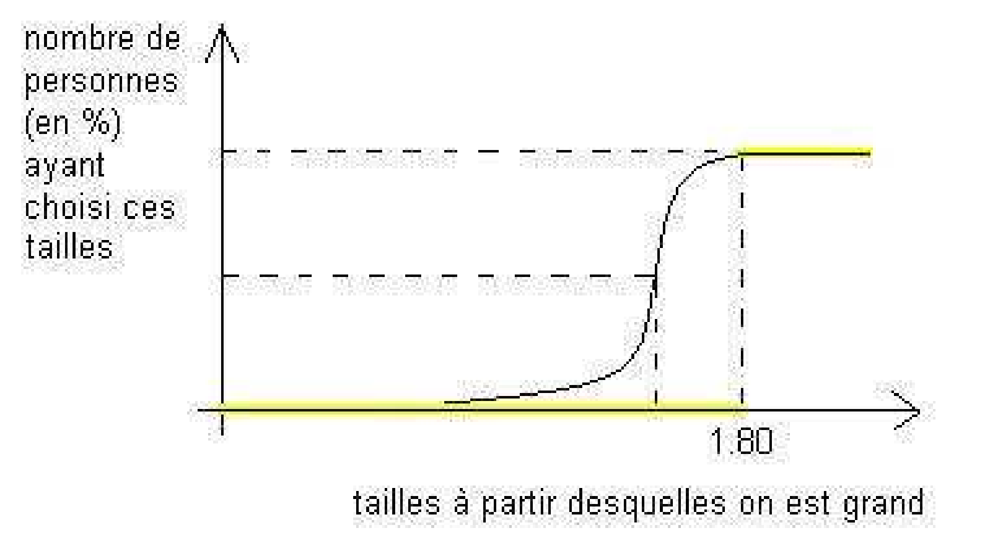
- **On définit un sous-ensemble flou A de U par :**

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \,/\, x \in U\} \text{ avec } \mu_A(x): U \rightarrow [0,1]$$

Raisonnement flou

A partir de quelle taille dit-on que quelqu'un est grand ?

Si l'on demande à une personne, il va répondre1.80m (courbe en jaune), si l'on demande ensuite à 999… autres personnes, on obtient un histogramme. On peut prendre cet histogramme comme définition floue de ce qui est grand et interpréter le pourcentage associé à chaque taille comme un degré de crédibilité que cette taille soit considérée comme grande.



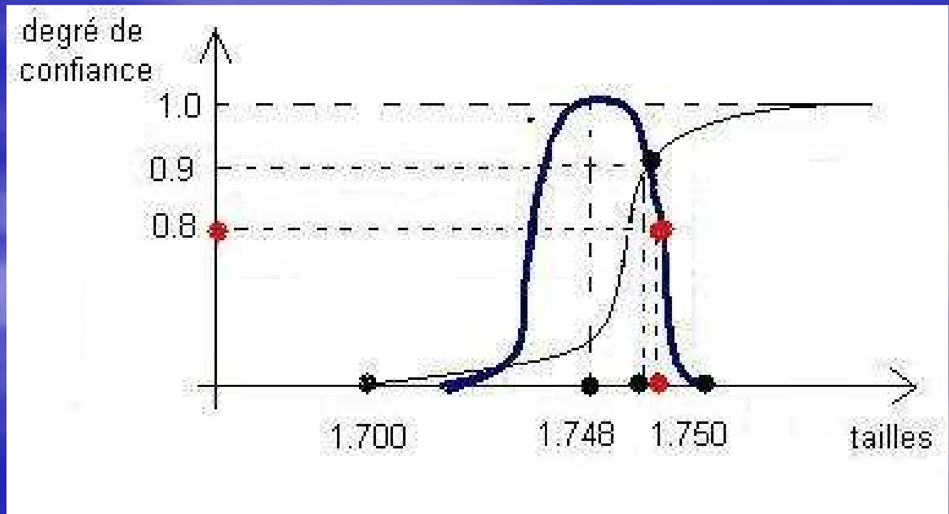
Raisonnement flou

Cette définition nous permet alors, connaissant une mesure de taille (ex: 1.75m), d'avoir un certain degré de confiance dans le fait qu'elle soit considérée comme grande (point rouge).

Mais si l'on mesure cette personne à plusieurs reprises, compte tenu des imprécisions, on obtient un autre histogramme (courbe bleue).

Il faut donc être capable de comparer un résultat de mesure à une propriété donnée, c-à-d:

un ensemble flou à un autre



Raisonnement flou

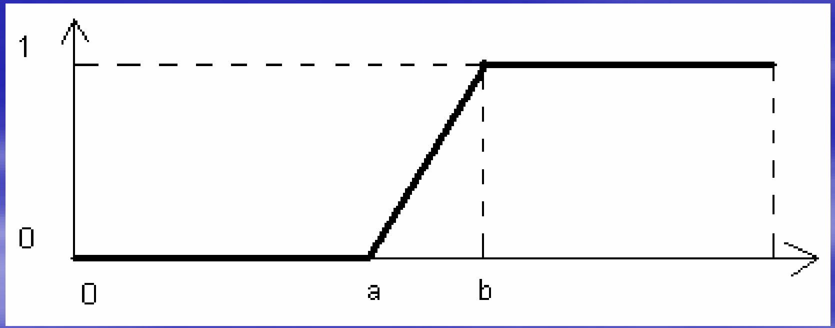
– Un prédicat flou g est tel qu'on ne peut pas dire si un élément x_0 appartient ou non à son extension ||g|| (c-à-d: si ce prédicat s'applique à x_0 ou non).

– Le fait que la formule "x_0 c'est g" soit vraie ou fausse devient une question de degré

– Ex: Si x_0=1.72m alors comment évaluer "x_0 c'est grand" ?

On se demande où commencent et où finissent les grandes tailles ?

Si g = "grand"

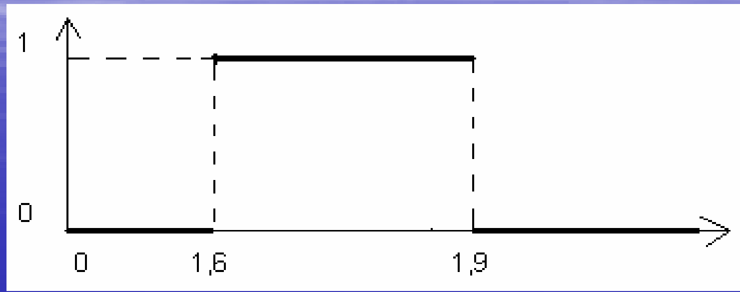


$\mu_{||grand||}$

Si a=1.6, b=1.8 alors $\mu_{||grand||}(1.6)=0$, $\mu_{||grand||}(1.8)=1$ et $\mu_{||grand||}(1.72)=0.6$

Raisonnement flou

– Que dire de "x_0 c'est grand" si ce qu'on sait de x_0 est imprécis: "x_0 c'est p" où p = "une taille comprise entre 1.6m et 1.9m" ?
Il faut comparer $\mu_{||grand||}$ et $\mu_{||entre\_1.6\_1.9||}$



$\mu_{||entre\_1.6\_1.9||}$

- Degré de vérité et mesure d'incertain
  – On suppose que les formules g(u) et p(u) renvoient à un même ensemble U (ici l'univers des tailles u d'individu)
  – Soit v(g|p) = degré de vérité de g étant donné p et $\mu_{||p||} \in [0,1]^U$ la fonction caractéristique floue des tailles dites p.

Raisonnement flou

– Comme x_0 est mal localisée dès lors que "x_0 est p" (entre 1.6 et 1.9), la **valeur de vérité** de "x_0 est g étant donné que x_0 est p" ne peut qu'être floue et vaut :

(R)	$\mu_{v(g\|p)}(v) = \sup_{u\in U}\{\mu_{\|\|p\|\|}(u) \,/\, \mu_{\|\|g\|\|}(u)=v\}$ $= 0$ si $\mu_{\|\|g\|\|}^{-1}(v)=\emptyset$

– Exemple1: valeur de vérité v = 1

$\mu_{v(g|p)}(1) = \sup_{u\in U}\{\mu_{||p||}(u) \,/\, \mu_{||g||}(u) = 1\}$

$\mu_{||g||}(u) = 1$ signifie $u \geq b$ et $\mu_{v(g|p)}(1) = \sup_{u\geq b}\{\mu_{||p||}(u)\}$

$\mu_{v(g|p)}(1)$ dépend de la place de b par rapport à [1.6, 1.9]

Supposons que $1.6 < b < 1.9$ alors $\mu_{v(g|p)}(1) = 1.0$

– Exemple2: valeur de vérité v = 1/2

$\mu_{v(g|p)}(1/2) = \sup_{u\in U}\{\mu_{||p||}(u) \,/\, \mu_{||g||}(u) = 1/2\}$

Raisonnement flou

$\mu_{||g||}(u) = 1/2$ signifie $u = (a+b)/2$ et

$\mu_{\mathcal{v}(g|p)}(1/2) = \mu_{||p||}((a+b)/2\ )$

$\mu_{\mathcal{v}(g|p)}(1/2)$ dépend de la place de $(a+b)/2$ par rapport à $[1.6,1.9]$

Supposons que $1.6 < (a+b)/2 < 1.9$ alors $\mu_{\mathcal{v}(g|p)}(1/2) = 1.0$

– Exemple3: valeur de vérité $v = 0$

$\mu_{\mathcal{v}(g|p)}(0) = \sup_{u\in U}\{\mu_{||p||}(u)\ /\ \mu_{||g||}(u) = 0\}$

$\mu_{||g||}(u) = 0$ signifie $u \leq a$ et $\mu_{\mathcal{v}(g|p)}(0) = \sup_{u\leq a}\{\mu_{||p||}(u)\}$

$\mu_{\mathcal{v}(g|p)}(0)$ dépend de la place de a par rapport à $[1.6, 1.9]$

Supposons que $a \leq 1.6$ alors $\mu_{\mathcal{v}(g|p)}(0) = 0.0$

– Ainsi de suite pour toute valeur de vérité v. Au final on peut dire que $\mathcal{v}(g|p)$ est la valeur de vérité floue :

$\{(1, 1.0), \ldots , (1/2, 1.0), \ldots , (0, 0.0)\}$

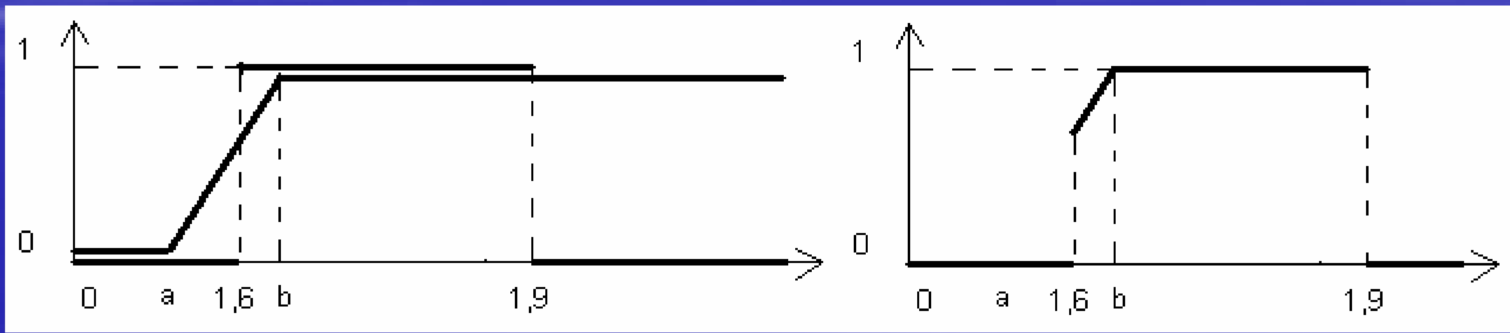
Raisonnement flou

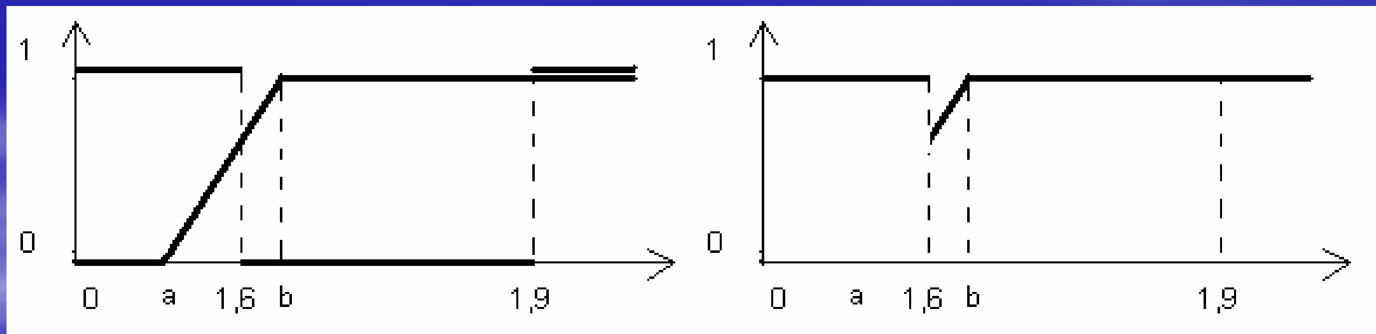
- $\mu_{\mathcal{v}(g|p)}(v)$ est le degré de possibilité que v soit la valeur de vérité de g étant donné p.
- Dans l'exemple précédent, il est possible avec le degré $\mu_{\mathcal{v}(g|p)} = 1.0$ que v = 1 soit la valeur de vérité de "x_0 c'est grand étant donné que x_0 c'est entre 1.6 et 1.9"
- $\mathcal{v}(g|p)$ représente l'ensemble flou des valeurs de vérité +/- possibles de l'appartenance $x_0 \in ||g||$ (c-à-d: "x_0 c'est g") étant donné que $x_0 \in ||p||$ (c-à-d: "x_0 c'est p").
- On approche cet ensemble par 2 nombres : $\Pi(g)$, N(g).

  qui s'obtiennent grâce à (R).

Raisonnement flou

(D)	$\Pi(g) = \sup_{u \in U}\{\min(\mu_{\|\|g\|\|}(u), \mu_{\|\|p\|\|}(u))\}$	d° de possibilité que g soit vrai étant donné p
	$N(g) = \inf_{u \in U}\{\max(\mu_{\|\|g\|\|}(u), 1-\mu_{\|\|p\|\|}(u))\}$	d° d'impossibilité que g soit faux étant donné p

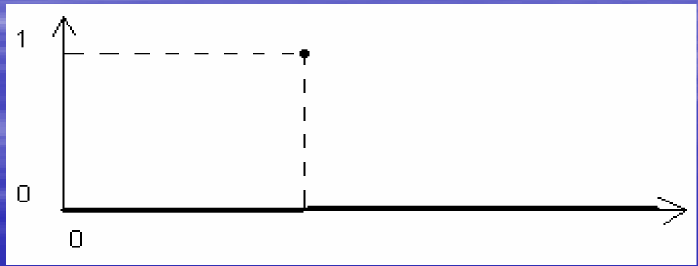




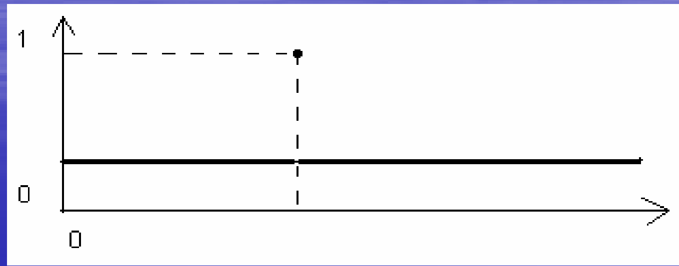
Dans l'exemple précédent $\Pi(g) = 1$ et $N(g) = (1.6 – a)/(b – a)$

Raisonnement possibiliste

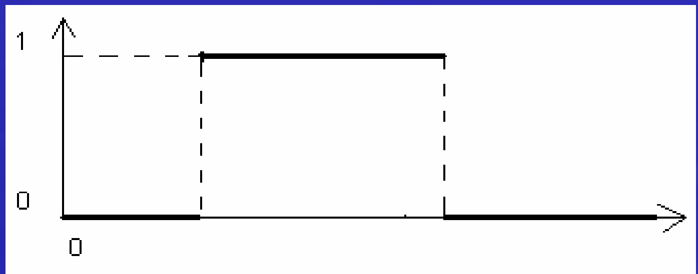
– Exemples de données floues φ



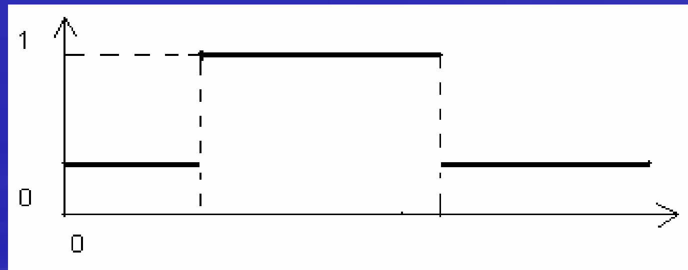
précis et certain



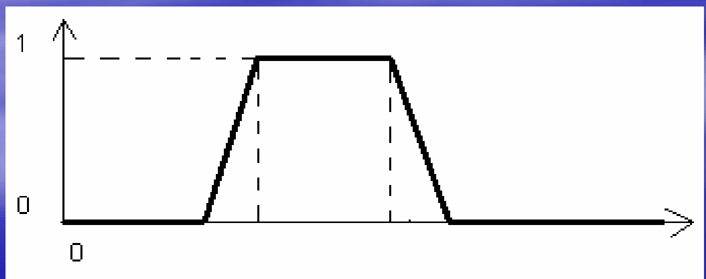
précis et incertain



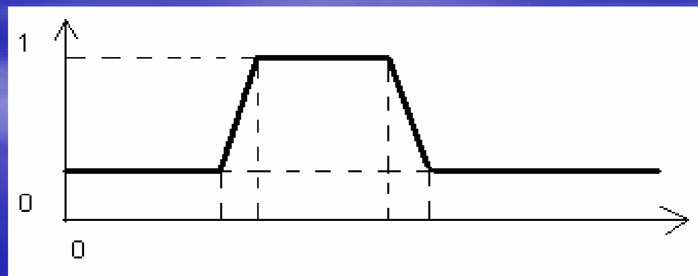
imprécis et certain



imprécis et incertain



vague et certain



vague et incertain

Raisonnement flou

– Soit une donnée φ dont le support et le noyau sont :

$\text{Support}(\varphi) = \{u \in U \,/\, \mu(u) > 0\}$

$\text{Noyau}(\varphi) = \{u \in U \,/\, \mu(u) = 1\}$

- précis/certain <=> $\text{Noyau}(\varphi) = \text{Support}(\varphi) = \{u_0\}$
- précis/incertain <=> $\text{Noyau}(\varphi)=\{u_0\}$, $\text{Support}(\varphi)=U$, $u \in U \Rightarrow \mu(u) \geq a \neq 0$
- imprécis/certain <=> $\{u_0\} \subsetneq \text{Noyau}(\varphi) = \text{Support}(\varphi)$
- imprécis/incertain <=> $\{u_0\} \subsetneq \text{Noyau}(\varphi)$, $\text{Support}(\varphi)=U$, $u \in U \Rightarrow \mu(u) \geq a \neq 0$
- vague/certain <=> $\varnothing \neq \text{Noyau}(\varphi) \subsetneq \text{Support}(\varphi) \subsetneq U$
- vague/incertain <=> $\varnothing \neq \text{Noyau}(\varphi) \subsetneq \text{Support}(\varphi)=U$, $u \in U \Rightarrow \mu(u) \geq a \neq 0$

Raisonnement flou

- Logique possibiliste
  - On considère ici le cas d'une algèbre booléenne ($\mathcal{P}$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$) de formules propositionnelles ou prédicatives fermées non vagues (précises ou non).
  - Dans ce cas, sont vérifiés les principes du tiers exclu: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ et de non contradiction: $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$.
  - On attribue à chaque formule φ un degré de possibilité $\Pi(\varphi)$ et de nécessité $N(\varphi) = 1 - \Pi(\neg\varphi)$ qui sont des nombres compris entre 0 et 1.

Raisonnement possibiliste

1) Principes de base

– Une mesure de possibilité Π (ou nécessité N) est une application de $\mathcal{P}$ dans [0,1] telle que $N(\varphi) + \Pi(\neg\varphi) = 1$ vérifiant :

  a) $\Pi(\perp) = 0$, $\perp$ représente la formule toujours fausse

  b) $\Pi(T) = 1$, T représente la formule toujours vraie

  c) $\forall \varphi \in \mathcal{P}, \forall \psi \in \mathcal{P}, \Pi(\varphi \vee \psi) = \max(\Pi(\varphi), \Pi(\psi))$

– $N(\varphi) = 1$ signifie que φ est vraie

– $\Pi(\varphi) = 0$ signifie qu'il est impossible que φ soit vraie donc φ est fausse

Raisonnement possibiliste

2) Propriétés

- Dans le cas de la logique classique, on a : $\varphi \vee \neg\varphi \equiv T$, il vient alors que : $\max(\Pi(\varphi), 1-N(\varphi)) = 1$
- Comme $N(\varphi) + \Pi(\neg\varphi) = 1$, il vient que
  - $\Pi(\varphi) = 0$ signifie $N(\neg\varphi) = 1$ c-à-d: $\neg\varphi$ est vraie
  - $\Pi(\varphi) = \Pi(\neg\varphi) = 1$ signifie qu'on ignore tout de φ
- $N(\varphi\wedge\psi)= \min(N(\varphi),N(\psi)) \Leftrightarrow \Pi(\varphi\vee\psi)= \max(\Pi(\varphi),\Pi(\psi))$
- $N(\varphi) \leq \Pi(\varphi)$ signifie que φ est possiblement vraie avant d'être nécessairement vraie
- $N(\varphi) > 0$ entraîne $\Pi(\varphi) = 1$ donc $N(\neg\varphi) = 0$
- $\Pi(\varphi \wedge \psi) \neq \text{fonc}(\Pi(\varphi) , \Pi(\psi))$, en particulier fonc = min
  (il se peut que $\psi=\neg\varphi$ $\Pi(\varphi\wedge\psi) = 0$ sans que $\Pi(\varphi) = 0$ ou $\Pi(\psi) = 0$)

Raisonnement possibiliste

- Logique floue
  - Les algèbres de formules vagues (dont les interprétations sont des ensembles flous) ne sont plus booléennes.
  - Les opérations ensemblistes sont définies par :
    - $\mu_{G \cup H} = \max(\mu_G, \mu_H)$
    - $\mu_{G \cap H} = \min(\mu_G, \mu_H)$
    - $\mu_{G^c} = 1 - \mu_G$
  - Le tiers exclu n'est pas vérifié ($G \cup G^c \neq U$) pas plus que la non contradiction ($G \cap G^c \neq \emptyset$)
  - On conserve les définitions de (D) (avec $G = ||g||, \ldots$)

Raisonnement possibiliste

– Les propriétés (a) (b) (c) demeurent (φ et ψ sont de la forme "X c'est Y")

– Le tiers exclu ne tenant plus la relation

$$\max(\Pi(\varphi), 1-N(\varphi)) = 1 \text{ non plus,}$$

elle doit être remplacée par

$$\max(\Pi(\varphi), 1-N(\varphi)) \geq ½$$

– $N(\varphi) \leq \Pi(\varphi)$ à condition que $\mu_{||p||}$ dans (D) soit normalisée : $\sup_{u\in U}\{\mu_{||p||}(u)\} = 1$

Raisonnement possibiliste

- Principe de résolution possibiliste
  - Dans le cas de formules précises dont la vérité (fausseté) est incertaine, chaque formule est pondérée par un nombre de l'intervalle réel [0,1] représentant la borne inférieure du degré de nécessité qui lui est associée.
  - Une formule possibiliste relative à une mesure de nécessité N est un couple (φ, a) tel que $a \leq N(\varphi)$.
  - Principe de résolution appliqué à des clauses possibilistes :

$$\{(c , a), (c' , b)\} \vdash (Res(c, c'), \min(a, b))$$

Raisonnement possibiliste

– On souhaite prouver que $\mathcal{H}$ |- C, où $\mathcal{H}$ est un ensemble de clauses possibilistes de la forme (H_i,a_i), on calcule la forme clausale $Cl(\neg C) = \{C_1,\ldots,C_n\}$ et l'on prouve l'inconsistance de $\mathcal{H} \cup \{(C_1,1.0),\ldots,(C_n,1.0)\}$

– Toute obtention de $(\Box,c)$ signifie que C est démontré avec $N(C) \geq c$. Plusieurs clauses vides peuvent être atteintes. Leur obtention dépend de la complétude de la stratégie.

– Celle-ci avérée on cherche la valeur optimale ĉ telle que :

$$\hat{c} = \sup\left\{c \mathbin{/} \mathcal{H} \cup \{(C_1,1.0),\ldots,(C_n,1.0)\} \vdash (\Box,c)\right\}$$

– La production heuristique de résolvants de nécessités toujours croissantes sera effectuée par des méthodes de recherche dans les graphes (A*,…).

Raisonnement possibiliste

- Application
  - Soient les faits :
    - Pierre est maire sortant (nécessité au moins égale à 1)
    - Marie soutient Pierre (nécessité au moins égale à 0.8).
    - Pierre est candidat (nécessité au moins égale à 1).
    - Jean est candidat (nécessité au moins égale à 1).
    - Pierre ou Jean est élu (nécessité au moins égale à 1).
      Pierre ou jean n'est pas élu (nécessité au moins égale à 1).
  - Soient les règles :
    - Si un candidat est maire sortant alors il est élu (nécessité au moins égale à 0.5).
    - Si Marie soutient un candidat alors il est élu (nécessité au moins égale à 0.6).

Raisonnement possibiliste

- On veut savoir, avec quelle(s) valeur(s) de R, si
  - elu(p,R).
  - elu(j,R).

  ainsi que
  - nonelu(p,R).
  - nonelu(j,R).
- On ajoute le fait :
  - Pierre fait l'objet d'un scandale (nécessité au moins égale à 1).
- On ajoute la règle :
  - Si un candidat fait l'objet d'un scandale alors il n'est pas élu (nécessité au moins égale à 0.7).

  et on se repose les mêmes questions