Redução de *Cobertura por Vértices* para *Conjunto Dominante Mínimo*

Selton Miranda Rolim, GRR20235688

Comentários

Esse relatório contém o roteiro da apresentação em sala incluindo a prova formal e a transformação do problema de decisão do Conjunto Dominante para um problema de otimização.

Definições dos problemas

Cobertura por vértices (*Vertex Cover*)

Instância: Um grafo não direcionado $G = (V, E)$ e um inteiro $k > 0$.
Pergunta: Existe um subconjunto $C \subseteq V$ com $|C| \leq k$ tal que toda aresta de E é incidente a pelo menos um vértice de C?

Conjunto dominante (*Dominating Set*)

Instância: Um grafo não direcionado $G = (V, E)$ e um inteiro $k > 0$.
Pergunta: Existe um subconjunto $D \subseteq V$ com $|D| \leq k$ tal que todo vértice $v \in V \setminus D$ é adjacente a algum vértice em D?

Ideia da redução

Podemos pensar em adicionar um vértice para cada aresta do grafo G, pois o problema de *Cobertura por vértices* trata de cobrir arestas, enquanto o de *Conjunto Dominante* trata de dominar vértices. Estamos, portanto, lidando com entidades diferentes.

Ao adicionar um vértice para cada aresta de G, traduzimos o problema de "cobrir arestas" para um problema de "dominar vértices". Como essas noções não são equivalentes, reformulamos o problema de forma que a noção de domínio capture a de cobertura.

Queremos mostrar que:

$$\text{Cobertura por vértices} \leq_p \text{Conjunto Dominante}$$

ou seja, transformar uma instância (G, k) de *Cobertura por vértices* em uma instância (G', k') de *Conjunto Dominante* em tempo polinomial, tal que:

$$\exists\, C \subseteq V \text{ que é } \textit{Vertex Cover} \text{ em } G \text{ com } |C| \leq k \iff$$
$$\exists\, D \subseteq V' \text{ que é } \textit{Dominating Set} \text{ em } G' \text{ com } |D| \leq k.$$

Redução de Cobertura por Vértices para Conjunto Dominante

Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado e $k \in \mathbb{N}$. Definimos a transformação polinomial f que produz a instância (G', k') de Conjunto Dominante, onde:

$$V' = V \cup \{ w_{uv} : (u, v) \in E \},$$

$$E' = E \cup \{ (u, w_{uv}), (v, w_{uv}) : (u, v) \in E \},$$

$$k' = k.$$

Intuitivamente, para cada aresta $(u, v) \in E$, adicionamos ao grafo um novo vértice w_{uv} adjacente exatamente a u e v.

Corretude da Redução

(⇒) Se G possui um vertex cover de tamanho $\leq k$, então G' possui um dominating set de tamanho $\leq k'$

Suponha que exista um conjunto $C \subseteq V$ tal que $|C| \leq k$ e C seja uma cobertura por vértices de G. Mostraremos que o mesmo conjunto C é um conjunto dominante de G'.

Considere um vértice novo $w_{uv} \in V'$. Como C é uma cobertura, a aresta $(u, v) \in E$ é coberta por C, ou seja, pelo menos um dos vértices u ou v pertence a C. Como w_{uv} é adjacente exatamente a u e v, esse vértice está dominado por C.

Os vértices originais V estão dominados por C simplesmente porque qualquer vértice $x \in C$ domina a si mesmo, e vértices fora de C não são relevantes para a dominância dos novos vértices.

Logo, todos os vértices de V' estão dominados por C, de forma que C é um conjunto dominante de G' com $|C| \leq k' = k$.

($\Leftarrow$) Se G' possui um conjunto dominante de tamanho $\leq k'$, então G possui uma cobertura por vértices de tamanho $\leq k$

Seja $D \subseteq V'$ um conjunto dominante de G' com $|D| \leq k'$. Transformaremos D em um conjunto $D' \subseteq V$ e mostraremos que D' é uma cobertura por vértices de G.

Primeiro, cada vez que $w_{uv} \in D$, substituímos w_{uv} por um de seus vizinhos u ou v. Essa substituição não aumenta o tamanho do conjunto, pois se algum deles já está em D, nada é adicionado. Após substituir todos tais vértices, obtemos um conjunto $D' \subseteq V$ com $|D'| \leq |D|$.

A substituição preserva dominância: como w_{uv} era adjacente somente a u e v, qualquer vértice que ele dominava também é dominado por u ou v. Portanto, D' domina todos os vértices novos w_{uv}.

Agora, tome uma aresta arbitrária $(u, v) \in E$. No grafo G' existe o vértice w_{uv} adjacente a u e v. Como D' domina w_{uv}, pelo menos um de seus vizinhos pertence a D'. Logo, pelo menos um de u ou v pertence a D'.

Assim, cada aresta de G tem pelo menos um de seus extremos em D', o que significa que D' é um vertex cover de G. Como $|D'| \leq |D| \leq k' = k$, segue que G possui uma cobertura por vértices de tamanho $\leq k$.

Por que não podemos usar o próprio grafo G?

Se tentássemos usar o mesmo grafo G, poderíamos ter casos em que:

- Um vértice é adjacente a outro, mas nenhuma aresta é coberta corretamente;
- O conjunto dominante de G' não corresponde a uma cobertura por vértices de G.

Ou seja, usar o mesmo grafo G na redução não funciona. Um vértice pode dominar vários outros, mas isso não garante que todas as arestas sejam "dominadas".

Vamos pensar o seguinte: no problema do conjunto dominante mínimo, dominamos vértices, mas queremos também representar as arestas correspondentes a esses vértices dominados. Se tomarmos um exemplo simples, veremos que o conjunto dominante mínimo pode não dominar todas as arestas.

Assim, criamos um novo grafo G' onde as arestas de G passam a existir como vértices em G'.

Dessa forma, cobrir arestas passa a ser equivalente a dominar vértices, e os dois problemas tornam-se comparáveis.

Para cada aresta (u, v) de G:

- adicionamos um novo vértice w_{uv};
- ligamos w_{uv} a u e v.

Agora:

- cada nova aresta de G' conecta um vértice original a uma "representação" de uma aresta antiga;
- se todos os w_{uv} são dominados, então todas as arestas originais estão "cobertas".

Ou seja, "dominar vértices" em G' é equivalente a "cobrir arestas" em G.

Por que a redução é polinomial

A construção percorre todas as arestas de G uma vez. Para cada aresta, adiciona um vértice novo e duas arestas. Assim:

$$|V'| = |V| + |E|, \quad |E'| = 3|E|.$$

O algoritmo tem custo $O(|E|)$, portanto é polinomial.

Verificando que *Conjunto Dominante* $\in$ NP

Dado $G = (V, E)$, um inteiro k e um conjunto $D \subseteq V$ com $|D| \leq k$, podemos verificar em tempo polinomial se D é um conjunto dominante:

Algorithm 1 Verificação se D é um conjunto dominante de G com $|D| \leq k$

Entrada: Grafo $G = (V, E)$, conjunto $D \subseteq V$, inteiro k

Saída: **verdadeiro** se D é um conjunto dominante com $|D| \leq k$, **falso** caso contrário

```
se |D| > k então
    retorne falso
fim se
para cada vértice v ∈ V faça
    dominado ← falso
    se v ∈ D então
        dominado ← verdadeiro
    senão
        para cada vizinho u de v faça
            se u ∈ D então
                dominado ← verdadeiro
                break
            fim se
        fim para
    fim se
    se dominado = falso então
        retorne falso
    fim se
fim para
retorne verdadeiro
```

Complexidade: $O(|V| + |E|)$.

Redução de Turing

O objetivo é transformar o problema de decisão Conjunto Dominante para o problema de otimização Conjunto Dominante Mínimo, ou seja, encontrar o menor K tal que O conjunto dominante é mínimo. O algoritmo abaixo realiza essa conversão.

Algorithm 2 Conversão para problema de otimização

Entrada: Grafo $G = (V, E)$

Saída: Valor k mínimo tal que G possui conjunto dominante de tamanho k

inicio $\leftarrow$ 1
fim $\leftarrow |V|$
while inicio $\leq$ fim **faça**
    meio $\leftarrow \lfloor (inicio + fim)/2 \rfloor$
    se DOMINATING_SET(G, meio) == verdadeiro **então**
        fim $\leftarrow$ meio -1
    senão
        inicio $\leftarrow$ meio $+1$
    fim se
fim while
retorne inicio

Conclusão

O problema *Dominating Set* pertence à classe NP e existe uma redução polinomial de *Cobertura por Vértices* para *Conjunto Dominante*. Portanto, o problema do *Conjunto Dominante* é NP-completo.