ネットワーク設計論レポート3

27019679 グレゴリウスブライアン

December 28, 2021

演習１２問題２＆３（負荷分散重み決定問題）

Figure 1のe^*で示される辺のメトリックを決定したい。同じ色の頂点対に対しSはソースノード、Tはシンクノードとする。 Figure 2とFigure 3では$e^* = \infty$と$e^* = 0$の時の各ソースとシンクの最短路を表す。ただし、青の部分が両方の路が走っていて、輻輳している。l_x^yを $x = 1$なら黄色対、$x = 2$ならオレンジ色の頂点対の$e^* = y$の時の最短路であるとき、

$$l_1^\infty = 11, l_1^0 = 4$$

$$l_2^\infty = 9, l_2^0 = 6$$

$$l_1 = l_1^\infty - l_1^0 = 7$$

$$l_2 = l_2^\infty - l_2^0 = 3$$

以上により$3 \le e^* \le 7$の時、それぞれの最短路はFigure 4となり、輻輳を回避できる。

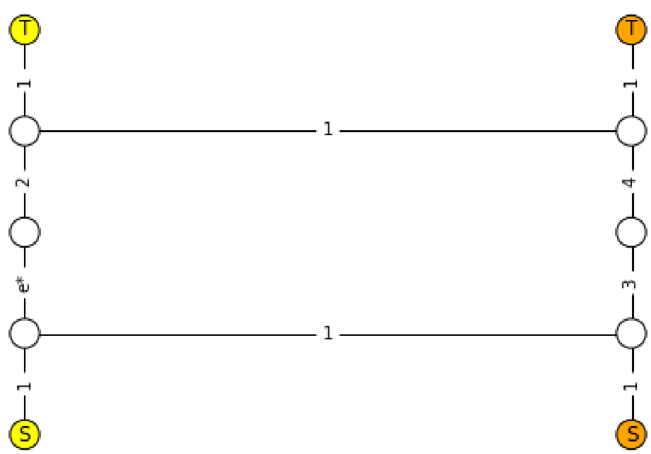

Figure 1: 負荷分散ベースグラフ

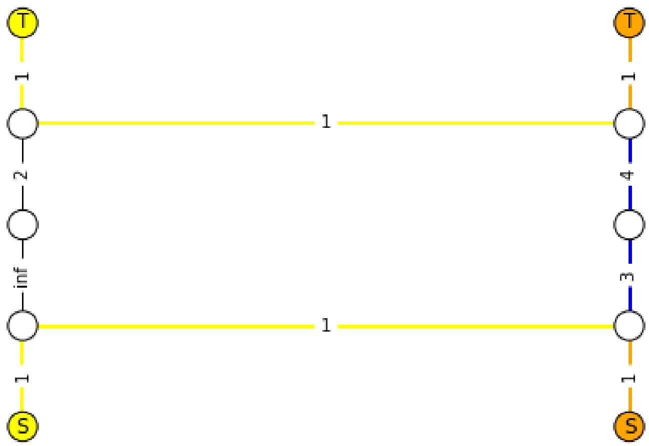

Figure 2: $e^* = \infty$のとき

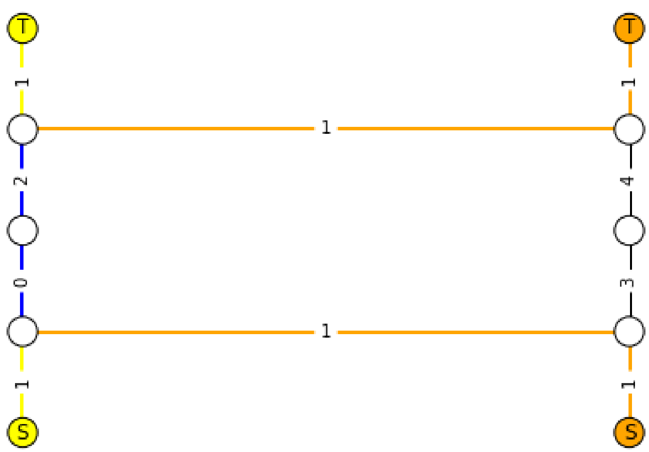

Figure 3: $e^* = 0$のとき

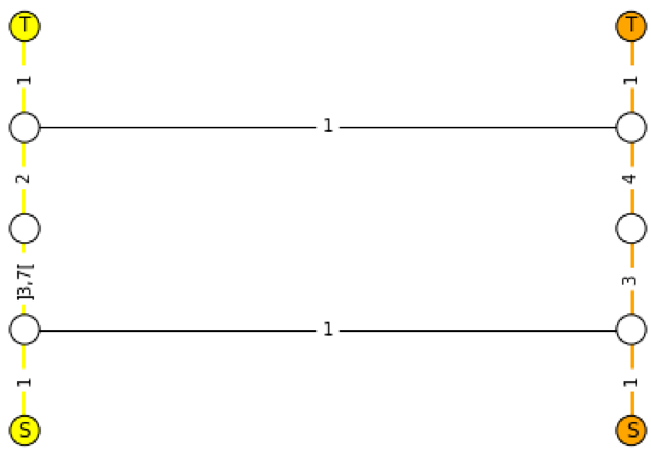

Figure 4: $3 \leq e^* \leq 7$のとき

演習１３問題１（イプシロン劣シノプシスを用いたストリームアルゴリズム）

TeXの横幅（紙の幅）に上限があるため、Nが大きすぎると書ききれなくなる。 今回扱うデータは次通りである。$N = 50$で各データは独立にガウス分布「$\mathcal{N}(\mu = 1000, \sigma^2 = 3)$」にしたがって生成される。 $\gamma = 0.3, \epsilon = 0.2$と設定する。$\epsilon = 0.2$のため、各バケットに入る要素数は5である。 到着系列は次通りである。
[1005, 998, 1003, 999, 1001, 1003, 997, 999, 998, 998, 1000, 1003, 1004, 1003, 1003, 999, 998, 1001, 995, 1002, 1004, 996, 1003, 1003, 1001, 998, 1000, 998, 1000, 1000, 1001, 999, 999, 997, 994, 999, 999, 1000, 1003, 999, 1007, 1000, 999, 1001, 996, 1006, 1000, 997, 1001, 1003]
各バケット終了時の消去したものと残りのDは次通りである
バケット1終了時消去：

$$[(1005, 1, 0), (998, 1, 0), (1003, 1, 0), (999, 1, 0), (1001, 1, 0)]$$

バケット1終了時のD：

$$[]$$

バケット2終了時消去：

$$[(1003, 1, 1), (997, 1, 1), (999, 1, 1)]$$

バケット2終了時のD：

$$[(998, 2, 1)]$$

バケット3終了時消去：

$$[(998, 2, 1), (1000, 1, 2), (1004, 1, 2)]$$

バケット3終了時のD：

$$[(1003, 3, 2)]$$

バケット4終了時消去：

$$[(999, 1, 3), (998, 1, 3), (1001, 1, 3), (995, 1, 3), (1002, 1, 3)]$$

バケット4終了時のD：

$$[(1003, 3, 2)]$$

バケット5終了時消去：

$$[(1004, 1, 4), (996, 1, 4), (1001, 1, 4)]$$

バケット5終了時のD：

$$[(1003, 5, 2)]$$

バケット6終了時消去：

$$[]$$

バケット6終了時のD：

$$[(1003, 5, 2), (998, 2, 5), (1000, 3, 5)]$$

バケット7終了時消去：

$$[(1003, 5, 2), (998, 2, 5), (1001, 1, 6), (997, 1, 6), (994, 1, 6)]$$

バケット7終了時のD：

$$[(1000, 3, 5), (999, 2, 6)]$$

バケット8終了時消去：

$$[(1003, 1, 7)]$$

バケット8終了時のD：

$$[(1000, 4, 5), (999, 5, 6)]$$

バケット9終了時消去：

$$[(1007, 1, 8), (1001, 1, 8), (996, 1, 8)]$$

バケット9終了時のD：

$$[(1000, 5, 5), (999, 6, 6)]$$

最終消去：

$$[(1006, 1, 9), (997, 1, 9), (1001, 1, 9), (1003, 1, 9)]$$

最終のD：

$$[(1000, 6, 5), (999, 6, 6)]$$

最終的に、$(\gamma - \epsilon)N$は5であり、要素1000と要素999はのfは両方ともこれを超えている。 そのため、要素1000と999はこの基準において頻出と言える

添付問題(待ち行列理論)

大問 1

1. サーバーが同時に処理できるPCが１つのみとすると、窓口が１個、待ち行列の上限の長さが２であるため、系内人数は最大3である。到着間隔分布が指数分布に従う場合、このシステムは$M/M/1(3)$で表記できる

2. Figure 5が状態遷移図である。各状態に書かれている数字は系内人数である。

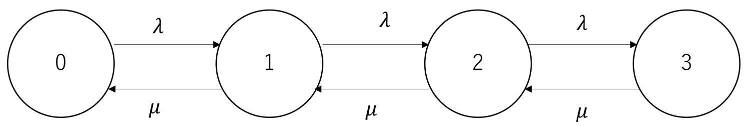

Figure 5: M/M/1 (3)状態遷移図

3.

$$\begin{cases} p_0\lambda = p_1\mu & (1) \\ (\lambda+\mu)p_n = p_{n+1}\mu + p_{n-1}\lambda \qquad n = 1, 2 & (2) \\ p_3\mu = p_2\lambda & (3) \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{3} p_n = 1 \tag{4}$$

4. 式(1)をp_1について解くと次になる。

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \tag{5}$$

次に(2)の式の左側のp_nをp_1とすると(5)を用いて、p_2について解く：

$$(\lambda+\mu)p_1 = p_2\mu + p_0\lambda$$

$$p_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0 \tag{6}$$

同様に、(3)と(6)より、

$$p_3 = \frac{\lambda^3}{\mu^3} p_0 \tag{7}$$

式(3)を変形し、既知の関係式を代入すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{3} \frac{\lambda^n}{\mu^n}} \tag{8}$$

$\rho = \lambda/\mu$を用いると

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{3}\rho^n} \tag{9}$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1+\sum_{n=1}^{3}\rho^n} \tag{10}$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{1+\sum_{n=1}^{3}\rho^n} \tag{11}$$

$$p_3 = \frac{\rho^3}{1+\sum_{n=1}^{3}\rho^n} \tag{12}$$

5.

$$\lambda = 45/3600 = 1/80 \tag{13}$$

$$\mu = 1/75 \tag{14}$$

$$\rho = 75/80 \tag{15}$$

6. 呼損率は系内人数が最大である確率である。式(8)を用いて$p_0 \approx 0.275$であることがわかるので呼損率$p_3 \approx 0.226$である。

7. 呼損率が１％以下に抑えたいなら、系内人数を99人以上にする必要がある。つまり待ち行列長を98以上にする必要がある。 なぜなら、アクセス頻度増加により、$\mu = \lambda$になり$\rho = 1$になる。このとき、式(10)から(13)により、すべての状態の確率がp_0と等しくなる。状態の数Nは系内人数K+1である。 各状態の確率は等しいかつすべての状態確率の和が1のため、各状態の確率は$1/N$である。呼損率は系内人数が最大の状態であるため、呼損率を１％以下にするために、$1/N \leq 0.01$を満たす必要がある。Nについて解けば$N \geq 100$がわかる。 よって、$N = 100$が最低限の状態の数である。$N = 100$のときの系内人数は$K = 99$である。このとき、待ち行列長が98である。

大問２

1. $M/M/2(2)$

2. Figure 6

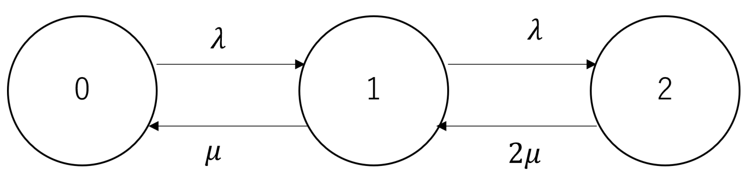

Figure 6: M/M/2(2)状態遷移図

3.

$$\begin{cases} p_0\lambda = p_1\mu & (16) \\ \lambda p_0 + 2\mu p_2 = (\mu+\lambda)p_1 & (17) \\ 2\mu p_2 = \lambda p_1 & (18) \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{2} p_n = 1 \tag{19}$$

4. $\rho = \lambda/\mu$を用いて(16)より

$$p_1 = \rho p_0 \tag{20}$$

(18),(19)より、

$$2\mu p_2 = \lambda\rho p_0$$

$$p_2 = \frac{\rho^2 p_0}{2} \tag{21}$$

(19)(20)(21)より、

$$p_0(1+\rho+\frac{\rho^2}{2}) = 1$$

$$p_0 = \frac{2}{2+2\rho+\rho^2} \tag{22}$$

$$p_1 = \frac{2\rho}{2+2\rho+\rho^2} \tag{23}$$

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2+2\rho+\rho^2} \tag{24}$$

5.

$$\lambda = \frac{10}{60} = \frac{1}{6} \tag{25}$$

$$\mu = \frac{1}{10} \tag{26}$$

$$\rho = \frac{10}{6} \tag{27}$$

6. 呼損率

$$p_2 = \frac{\rho^2}{2+2\rho+\rho^2}$$

$$p_2 \approx 0.342 \tag{28}$$

添付問題(ネットワーク構造設計)

大問1

1. k辺連結成分とはVの直和分割$\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$で、各$V_i (1 \leq i \leq p)$に対して次を満たす
   (a) $x, y \in V_i (x \neq y)$の任意のxとyに対して、局所辺連結度はk以上である
   (b) $x \in V_i, y \in V_j \ (i \neq j)$の任意の$x$と$y$に対して、局所辺連結度は$k$未満である
2. Figure 7。同じ色同氏は同じグループにある。

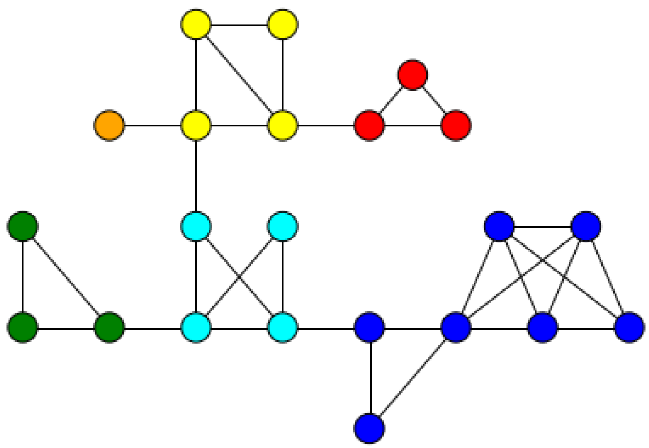

Figure 7: Gの２辺連結成分分解

3. Figure 7のオレンジ、赤、緑、青成分
4. どの一本のリンクが切れても接続可能の配置は2-NA辺連結になるように領域を決めると等しい。そうするためには、(3.)で答えた不足成分内のそれぞれ１頂点を領域にすればいい。

大問2

1. 原則任意の頂点対の局所辺連結度がk以上であるが、元々のグラフで局所辺連結度がk未満である頂点対にたいし、現状維持する。
2. (a) Figure 8
   (b) Figure 9

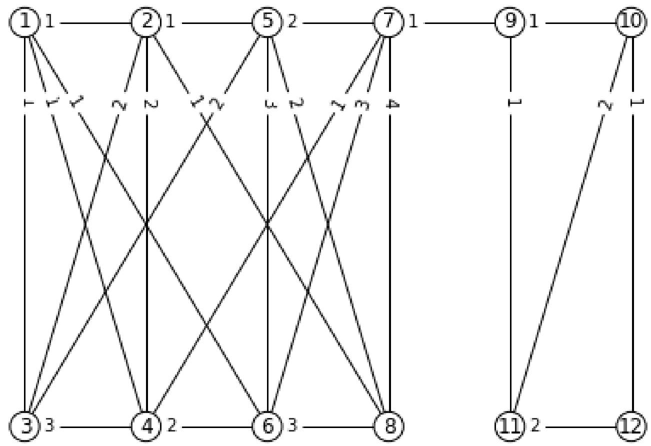

Figure 8: Gの２辺連結成分分解

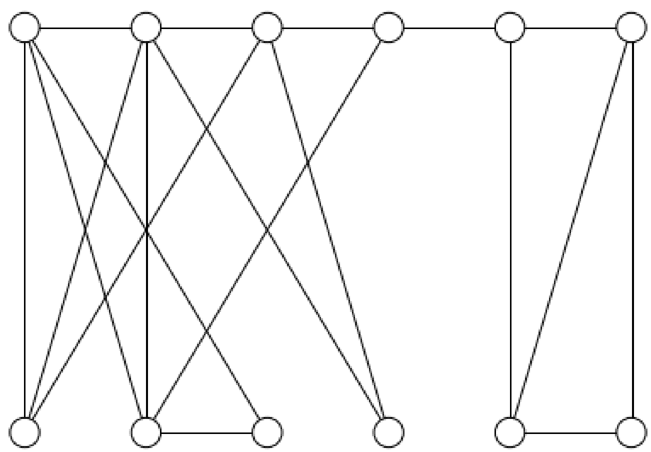

Figure 9: G_2(Gの２辺連結性保存)

3. $G_k = F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k$で求められ、各$F_i (1 \leq i \leq k)$は森であるため、$F_i$の辺の数は$|V| - 1$以下である。$G_k$はそういう$F_i$を$k$をユニオンしたグラフであるため$G_k$の変数は$k(|V| - 1)$である。

4. k辺連結性を保存する最小変数の全域部分グラフは最低でも$k|V|/2$個の辺の持つ。この２倍は$k|V|$であり、 3.からこのアルゴリズムは変数$k(|V| - 1)$個以下の辺を持つ全域部分グラフを生成する。$k(|V| - 1) < k|V|$であるため、 このアルゴリズムは最適解の高々２倍近似であることがわかる。