

空间引潮势浅析

刘鹏飞 2000011067

June 2023

1 数学基础

1.1 勒让德函数的引入

将 Laplace 方程在球坐标下分离变量：

$$\nabla u^2 = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

令 $u(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$, 分离变量可得 Legendre 方程：

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + \lambda \Theta = 0$$

作变换 $x = \cos \theta, y(x) = \Theta(\theta)$, 可改写为：

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) \frac{dy}{dx}] + \lambda y = 0$$

记 $\lambda = \nu(\nu+1)$, 在 $x=1$ 点邻域内有两个线性无关解：

$$\begin{aligned} P_\nu(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \\ Q_\nu(x) &= \frac{1}{2} P_\nu(x) \left[\ln \frac{x+1}{x-1} - 2\gamma - 2\psi(\nu+1) \right] \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \frac{\Gamma(\nu+n+1)}{\Gamma(\nu-n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{x-1}{2} \right)^n \end{aligned}$$

其中 $P_\nu(x)$ 在 $x=1$ 收敛, $Q_\nu(x)$ 在 $x=1$ 对数发散

所以对于:

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + \lambda y = 0$$

当 $y(\pm 1)$ 有界, $\lambda = l(l+1)$ 时, 得到 Legendre 方程的解:

$$P_l(x) = \sum_{n=0}^l \frac{1}{(n!)^2} \frac{(l+n)!}{(l-n)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

$P_l(x)$ 是一个 l 次多项式, 称为 l 次 Legendre 多项式

1.2 勒让德多项式

勒让德多项式为满足边界条件时拉普拉斯方程在球坐标下的解, 而引力场问题实则即是球坐标系下的空间拉普拉斯方程问题求解。因此可以引入勒让德多项式展开引潮势问题。

首先研究较简单的情况, 具有球对称性的拉普拉斯问题:

因为球对称性, 方程的求解与 ϕ 无关, 仅由 r 、 θ 确定

我们首先在极坐标系中求解引潮力和引潮势问题, 再引入球坐标系中分析

1.2.1 勒让德多项式的微分表示

由罗德里格斯公式 (Rodrigues):

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

证明:

$$\begin{aligned} (x^2 - 1)^l &= (x-1)^l [2 + (x-1)]^l \\ &= \sum_{n=0}^l \frac{l!}{n!(l-n)!} 2^{l-n} (x-1)^{l+n} \\ \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l &= \frac{d^l}{dx^l} \sum_{n=0}^l \frac{1}{n!(l-n)!} 2^{-n} (x-1)^{l+n} \\ &= \sum_{n=0}^l \frac{1}{n!(l-n)!} \frac{(l+n)!}{n!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

1.2.2 勒让德多项式的正交性

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x)dx = 0 \quad k \neq l$$

1.2.3 勒让德多项式的生成函数

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l, |t| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|$$

即得勒让德多项式的生成函数

证明:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-2t+t^2-2(x-1)t}} \\ &= \frac{1}{1-t} \left[1 - \frac{2(x-1)t}{(1-t)^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{1-t} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-k\right) \left[-\frac{2(x-1)t}{(1-t)^2}\right]^k \right\} \\ &= \frac{1}{1-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{k!} (x-1)^k t^k (1-t)^{-(2k+1)} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{k!} (x-1)^k t^k \frac{1}{(2k)!} \frac{d^{2k}}{dt^{2k}} \frac{1}{1-t} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{k!} (x-1)^k t^k \frac{1}{(2k)!} \sum_{m=2k}^{\infty} \frac{m!}{(m-2k)!} t^{m-2k} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{k!} (x-1)^k t^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k+n)!}{n!(2k)!} t^n \\ n &= l-k \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} t^l + \sum_{l=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^l \frac{(l+k)!}{k!k!(l-k)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \right] t^l \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^l \frac{(l+k)!}{k!k!(l-k)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^k \right] t^l \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l \end{aligned}$$

1.3 连带勒让德多项式与球谐函数

1.3.1 连带勒让德多项式

连带勒让德方程来源于在球坐标系中使用分离变量法解球坐标拉普拉斯方程

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d}{dx} P_l^m(x) \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P_l^m(x) = 0$$

只讨论 l 为非负整数, m 为绝对值不大于 l 的整数, 且 $x \in [-1, 1]$ 的情况时:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

1.3.2 球谐函数

定义球面调和函数:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \frac{2l+1}{4\pi}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

$$A_{l,m} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$$

$$Y_{l,m}(\theta, \phi) = A_{l,m} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

球谐函数在球面 S 具有正交性, 同时也具有完备性:

$$\int_S Y_l^m(\theta, \varphi) Y_k^n(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{mn} \delta_{lk}$$

因此, 对于球面上的函数 $f(\theta, \phi)$, 可以利用球谐函数对其进行级数展开,

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} [A_l^m \sin m\varphi + B_l^m \cos m\varphi] P_l^m(\cos \theta)$$

球谐函数构成了一组正交完备基底, 其恰当的线性组合可以无限逼近某个函数, 类似于傅里叶级数展开。

2 极坐标系潮汐分析

2.1 极坐标系中的引潮势

保守力场中，力矢 \vec{F} 和势 V 之间的关系为：

$$\vec{F} = -\nabla V$$

其中， $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$ 为梯度算子

月球对地球表面各点吸引力 F 和它相应的引力势 V 之间的关系：

$$F = -\frac{\partial V}{\partial L}$$

对该式积分，且由无穷远处引力势能为 0，得：

$$V = \frac{\mu_0 M}{L}$$

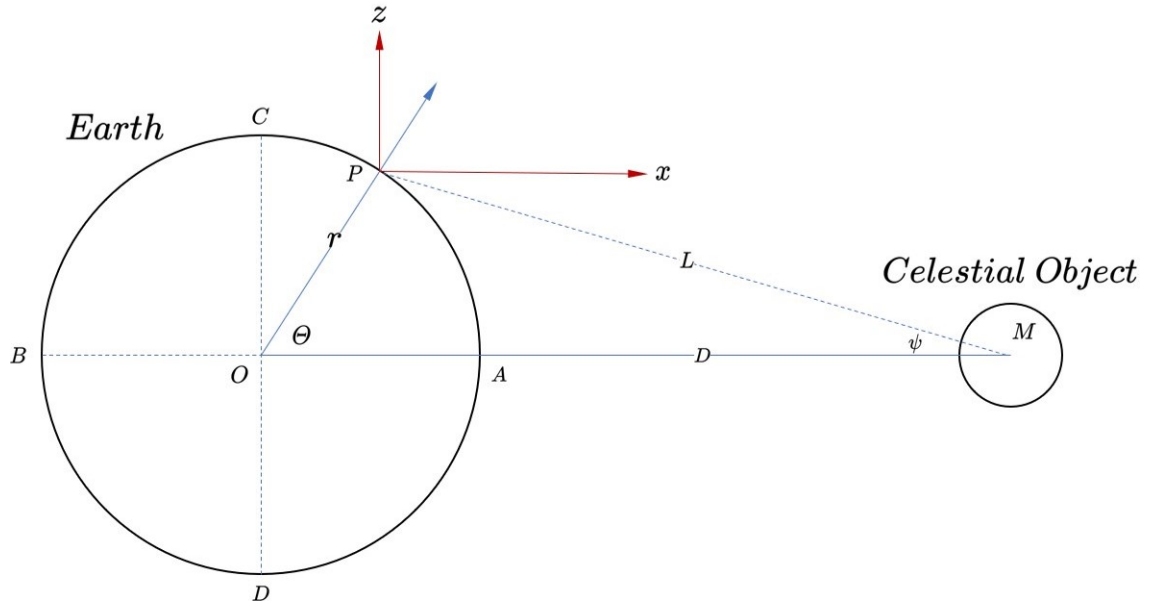


图 1: 引潮势的计算

由于：

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D}\right)^n P_n(\cos \Theta)$$

代入得月球的引力势：

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu_0 M}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D}\right)^n P_n(\cos \Theta) \\ &= V_0 + V_1 + V_2 + \dots \end{aligned}$$

式中：

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{\mu_0 M}{D} \\ V_1 &= \frac{\mu_0 M}{D} \left(\frac{r}{D}\right) \cos \theta \\ V_2 &= \frac{\mu_0 M}{D} \left(\frac{r}{D}\right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \Theta - 1) \\ V_3 &= \frac{\mu_0 M}{D} \left(\frac{r}{D}\right)^3 \frac{1}{2} (5 \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta) \end{aligned}$$

逐项讨论：

V_0 为常数项，不考虑；

V_1 ：

选择 P 为坐标原点，至圆心的距离为 r

$$r \cos \Theta = -x$$

$$r \sin \Theta = -z$$

那么 $V_1 = -\frac{\mu_0 M}{D^2} x$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\nabla V_1 \\ &= -\left(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(-\frac{\mu_0 M}{D^2} x\right) \\ F_1 &= \frac{\mu_0 M}{D^2} \end{aligned}$$

此力平行于地月连线指向 x 正向，与引潮力中的惯性离心力大小相等方向相反；

即：在月球引力势中， V_1 与引潮力中惯性离心势相抵消，因此得到地球表面各点月球引潮势：

$$V_M = \frac{\mu_0 M}{D} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{D}\right)^n P_n(\cos \Theta)$$

3 球坐标系潮汐分析

3.1 球坐标中的引潮势

由地球表面各点引力势函数：

$$\begin{aligned} V_{tot} &= \frac{GM_{ext}}{\rho} \\ &= \frac{GM_{ext}}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{R}\right)^2 - 2\frac{a}{R} \cos \alpha}} \end{aligned}$$

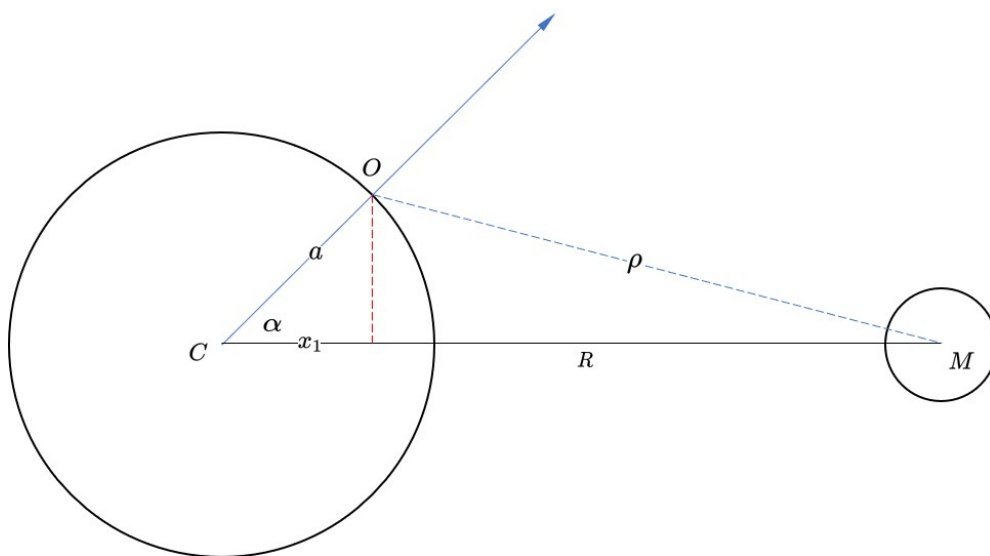


图 2: 球坐标中的引潮势

由前文勒让德多项式的生成函数，得：

$$V_{tot} = \frac{GM_{ext}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{R}\right)^n P_n(\cos \alpha)$$

勒让德多项式前几项：

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

n=0 对应的势能为常数，求导后对应的潮汐力为 0，为势能零点选择导致的，可忽略；

n=1 时，

$$\begin{aligned} V_{n=1} &= \frac{GM_{ext}}{R^2} a \cos \alpha \\ &= \frac{GM_{ext}}{R^2} x_1 \end{aligned}$$

对应的势能求导后潮汐力为沿 C-M 连线的常力，即为地月间引力；

因此引潮势为引力势排除 n=0 与 n=1 两项得到：

$$V_{tid} = \frac{GM_{ext}}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{R}\right)^n P_n(\cos \alpha)$$

3.2 地理坐标中的引潮势

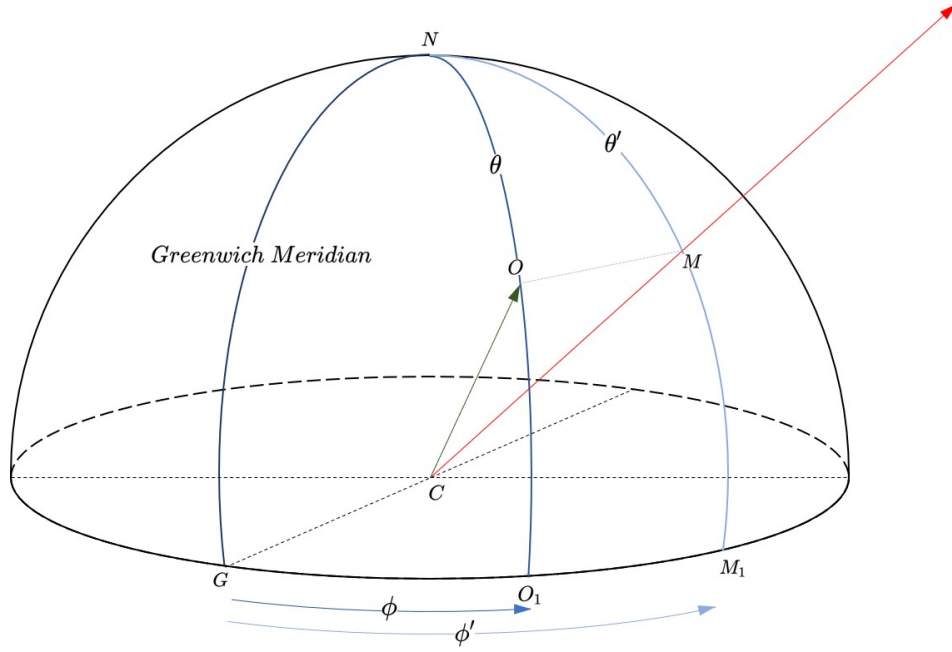


图 3: 地理坐标中的引潮势

O: 观测点

M: 月球

\widehat{NG} : 格林威治子午线

$\theta = \widehat{NO}$: 观测点余纬

$\phi = \widehat{GO_1}$: 观测点经度

$\theta' = \widehat{NM}$: 月球余纬

$\phi' = \widehat{GM_1}$: 月球经度

为进一步分析引潮势的地理坐标分布，对勒让德多项式做球面调和函数展开：

$$P_n(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{m=-n}^n Y_n^{m*}(\theta', \phi') Y_n^m(\theta, \phi)$$

而对球面调和函数：

$$Y_n^m(\theta, \phi) = N_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$N_n^m = (-1)^m \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

所以得到：

$$Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \left(\frac{2n+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$P_n^m(\cos \theta)$ 为 n 次 m 阶关联勒让德函数

$P_n^m(\cos \theta)$	m=0	m=1	m=2	m=3
n=1	$\cos \theta$	$\sin \theta$		
n=2	$\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}$	$3 \sin \theta \cos \theta$	$3 \sin^2 \theta$	
n=3	$\frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta$	$\frac{3}{2} \sin \theta (5 \cos^2 \theta - 1)$	$15 \sin^2 \theta \cos \theta$	$15 \sin^3 \theta$

对于潮汐势，引入平衡势 g ，即为地球赤道平衡面位置 a_{eq} 上的引力势，得到：

$$\begin{aligned} \frac{V_{tid}}{g} &= a_{eq} \frac{M_{ext}}{M_E} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4\pi}{2n+1} \left(\frac{a_{eq}}{R} \right)^{n+1} \times \sum_{m=-n}^n Y_n^{m*}(\theta', \phi') Y_n^m(\theta, \phi) \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} K_n \frac{4\pi}{2n+1} \xi^{n+1} \times \sum_{m=-n}^n Y_n^{m*}(\theta', \phi') Y_n^m(\theta, \phi) \\ K_n &= a_{eq} \frac{M_{ext}}{M_E} \left(\frac{a_{eq}}{R} \right)^{n+1} \end{aligned}$$

采用 Cartwright and Tayler (1971) 的分解方式，固定观测点坐标 (θ, ϕ) ，将月球坐标 (θ', ϕ') 用时间函数替代：

$$\begin{aligned} \frac{V_{tid}}{g} &= \sum_{n=2}^{\infty} K_n \xi^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \times \\ &[Y_n^{0*}(\theta', \phi') Y_n^0(\theta, \phi) + \sum_{m=1}^n Y_n^{-m*}(\theta', \phi') Y_n^{-m}(\theta, \phi) + \sum_{m=1}^n Y_n^{m*}(\theta', \phi') Y_n^m(\theta, \phi)] \end{aligned}$$

又因为：

$$Y_n^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_n^{m*}(\theta, \phi)$$

所以上式：

$$\frac{V_{tid}}{g} = \sum_{n=2}^{\infty} K_n \xi^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} \times \\ [Y_n^{0*}(\theta', \phi') Y_n^0(\theta, \phi) + \sum_{m=1}^n 2\Re[Y_n^{m*}(\theta', \phi') Y_n^m(\theta, \phi)]]$$

其中 \Re 为取实部操作；

对于球函数：

$$Y_n^m(\theta, \phi) = U_n^m(\theta, \phi) + iV_n^m(\theta, \phi) \\ Y_n^m(\theta', \phi') = U_n^m(\theta', \phi') + iV_n^m(\theta', \phi')$$

代入上式得到：

$$\frac{V_{tid}}{g} = \sum_{n=2}^{\infty} K_n \xi^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} [U_n^0(\theta', \phi') U_n^0(\theta, \phi) + 2 \sum_{m=1}^n [U_n^m(\theta', \phi') U_n^m(\theta, \phi) + V_n^m(\theta', \phi') V_n^m(\theta, \phi)]] \\ = \sum_{n=2}^{\infty} K_n \xi^{n+1} \frac{4\pi}{2n+1} A \sum_{m=0}^n [U_n^m(\theta', \phi') U_n^m(\theta, \phi) + V_n^m(\theta', \phi') V_n^m(\theta, \phi)]$$

其中：

$$m = 0, A = 1$$

$$m \neq 0, A = 2$$

由球函数展开：

$$Y_n^m(\theta', \phi') = (-1)^m \left(\frac{2n+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_n^m(\cos \theta') e^{im\phi'} \\ = N_n^m P_n^m(\cos \theta') e^{im\phi'}$$

分离实虚部：

$$U_n^m(\theta', \phi') = N_n^m P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi' \\ V_n^m(\theta', \phi') = N_n^m P_n^m(\cos \theta') \sin m\phi'$$

引入 $T_n^m(t) = a_n^m(t) + ib_n^m(t)$ 替代月球坐标月球坐标 (θ', ϕ') ：

$$\frac{V_{tid}}{g} = \Re \left[\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n T_n^{m*}(t) Y_n^m(\theta, \phi) \right] \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n N_n^m P_n^m(\cos \theta) [a_n^m(t) \cos m\phi + b_n^m(t) \sin m\phi]$$

得到：

$$a_n^m(t) = (-1)^m A \frac{4\pi}{2n+1} K_n N_n^m P_n^m(\cos \theta') \cos m\phi'$$
$$b_n^m(t) = (-1)^m A \frac{4\pi}{2n+1} K_n N_n^m P_n^m(\cos \theta') \sin m\phi'$$

$$m = 0, A = 1$$

$$m \neq 0, A = 2$$

可以由此确定随时间变化的空间参数 $a_n^m(t)$ 、 $b_n^m(t)$ ，以便计算地球的潮汐响应

参考文献

- [1] Agnew, Duncan Carr. “3.06 –Earth Tides.” (2007).
- [2] 黄祖珂，黄磊. 潮汐原理与计算. 中国海洋大学出版社, 2005.