

潮汐初窥

刘鹏飞 2000011067

February 2023

1 潮汐

1.1 潮汐现象

海水受到月球和太阳引潮力的作用产生规律性的上升下降运动，这种海面的升降现象叫做海洋潮汐；

海洋潮汐的周期大多为半天或一天，还具有半月、月、年、18.61 年等长周期变化

1.2 潮汐类型

1.2.1 按照成因分类

1. 引力潮：由引潮力引起的潮汐称为引力潮；
2. 太阳辐射潮：太阳热辐射的周期性变化引起气象周期性变化，从而间接引起海面的周期性升降运动，称为太阳辐射潮；
3. 固体潮：引潮力的周期性变化能引起地面倾斜、重力及地球应力的潮汐变化，分别被称为倾斜潮汐、重力潮汐和应变潮汐，总称固体潮

1.2.2 按照高、低潮变化分类

1. 正规半日潮：在一个太阴日（24h50min）内有两次高潮和两次低潮，潮汐日不等现象不明显，且相邻两个高潮（低潮）的时间间隔（周期）约为12h25min；
2. 不正规半日混合潮：在一太阴日有两次高潮和两次低潮，但相邻的两高潮（低潮）高度不相等，且涨潮与落潮时间也不相等，不等现象每日变化；

3. 不正规日潮混合潮：在一月之间的部分日子里，每天出现一次高潮、一次低潮的现象；

4. 正规日潮：在一个月的多数日子里，一天只有一次高潮和一次低潮，少数日子里有两次高潮和两次低潮

1.3 潮汐变化

1.3.1 大潮和小潮

在一个朔望月（29.5306 天）中，

当朔或望时，月球和太阳的引潮力方向一致，半日潮海区产生的潮差最大，称为大潮；

上、下弦月时，月、日引潮力的方向相反，产生的潮差最小，称为小潮

1.3.2 回归潮和分点潮

回归潮是指月球在一个交点月内有两次分别达到南北赤纬最大的位置，在一个太阴日内，相继两个高潮不等，涨潮时和落潮时也不等，形成潮汐周日不等现象；当月球赤纬最大时，周日不等现象最为显著，这时的潮汐称为“回归潮”；在一个交点月内，可出现两次回归潮。

分点潮是指当月球位于赤道面，春分点和秋分点也在赤道面的时候，所发生的潮汐；在一个交点月内，当月球前后两次穿越天球赤道时，不出现潮汐的周日不等现象，这就是“分点潮”。

2 引潮力

2.1 引潮力的产生

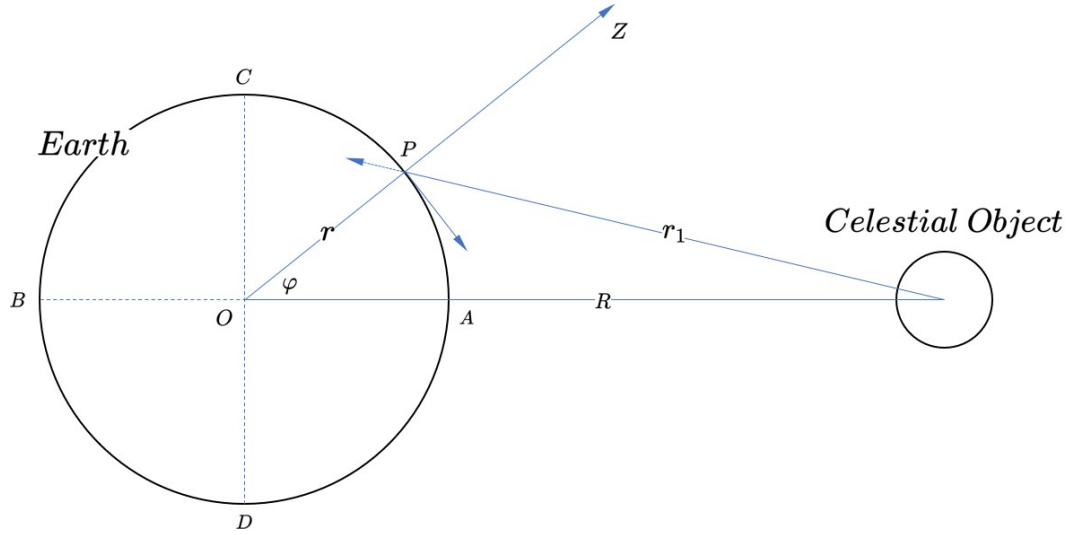


图 1: 引潮力的产生

取地球表面任一点质量微元 m ，受到来自地球和月球的引力作用：

$$\vec{F}_m = -\frac{GmM_E}{r^2}\vec{e}_r - \frac{GmM_m}{r_1^2}\vec{e}_{r_1} = m\vec{r}_m$$

在地球上观察潮汐现象，故选择地球为参考系，地球为一非惯性系统，故引入惯性力，即考察质量微元 m 相对于地球运动的加速度；

地球受到月球的引力作用，产生加速度 \vec{r}_E ：

$$M_E\vec{r}_E = -\frac{GM_mM_E}{R^2}\vec{e}_R$$

得到质量微元 m 相对于地球参考系的相对加速度 \vec{r} ：

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_m - \vec{r}_E \\ &= -\frac{GM_E}{r^2}\vec{e}_r - \frac{GM_m}{r_1^2}\vec{e}_{r_1} + \frac{GM_m}{R^2}\vec{e}_R\end{aligned}$$

定义引潮加速度 a_T :

$$\vec{a}_T = -GM_m \left(\frac{\vec{e}_{r_1}}{r_1^2} - \frac{\vec{e}_R}{R^2} \right)$$

综上所述：地球上单位质量物体，受到的地球月球引力和地球绕质心运动的惯性离心力的向量和，就是该物体受到的月球引潮力

2.2 直角坐标系下引潮力的分量

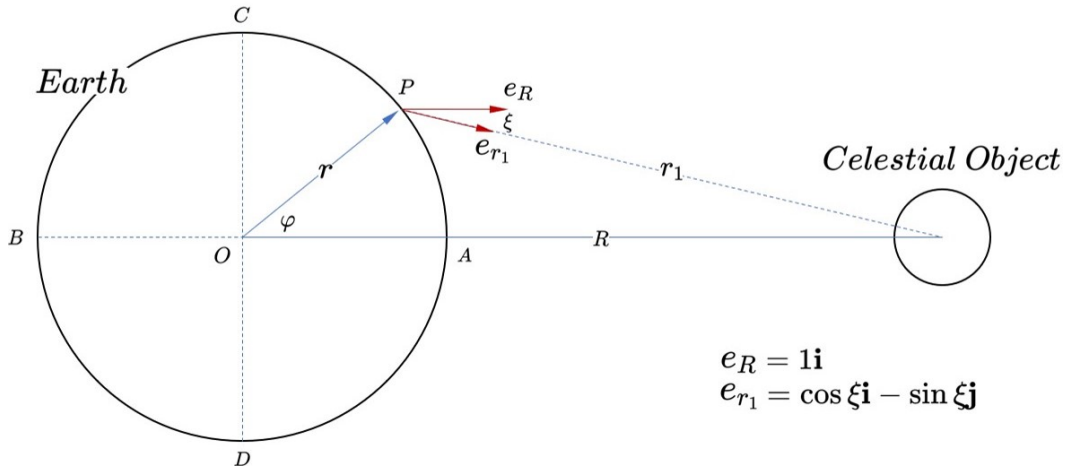


图 2: 直角坐标系下引潮力的分量

$$\begin{aligned} \cos \xi &= \frac{R - x}{\sqrt{y^2 + (R - x)^2}} = \frac{R - x}{r_1} \\ \sin \xi &= \frac{y}{\sqrt{y^2 + (R - x)^2}} = \frac{y}{r_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{T,x} &= GM_m \left(\frac{R - x}{r_1^3} - \frac{1}{R^2} \right) \\ &= \frac{GM_m}{R^2} \left(\frac{R - x}{r_1 \left(\frac{r_1}{R} \right)^2} - 1 \right) \\ &= \frac{GM_m}{R^2} \left(\frac{1 - \frac{x}{R}}{\left(\frac{r_1}{R} \right)^3} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{GM_m}{R^2} \left(\frac{1 - \frac{x}{R}}{\left[\left(\frac{y}{R} \right)^2 + \left(\frac{R-x}{R} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - 1 \right) \\
&= \frac{GM_m}{R^2} \left(\frac{1 - \frac{x}{R}}{\left[1 - \frac{2x}{R} + \left(\frac{x}{R} \right)^2 + \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - 1 \right) \\
&\approx \frac{GM_m}{R^2} \left(\frac{1 - \frac{x}{R}}{\left[1 - \frac{2x}{R} \right]^{\frac{3}{2}}} - 1 \right) \\
&\approx \frac{GM_m}{R^2} \left[\left(1 - \frac{x}{R} \right) \left(1 + \frac{3x}{R} \right) - 1 \right] \\
&\approx \frac{GM_m}{R^2} \left[1 - \frac{x}{R} + \frac{3x}{R} - 1 \right] \\
&= \frac{2GM_mx}{R^3}
\end{aligned}$$

$$a_{T,y} = -\frac{GM_my}{R^3}$$

2.3 极坐标系下引潮力的分量

引潮力的垂直分量和水平分量：

$$\begin{aligned}
F_V &= \frac{GM}{L^2} \cos(\Theta + \psi) - \frac{GM}{D^2} \cos \Theta \\
F_H &= \frac{GM}{L^2} \sin(\Theta + \psi) - \frac{GM}{D^2} \sin \Theta
\end{aligned}$$

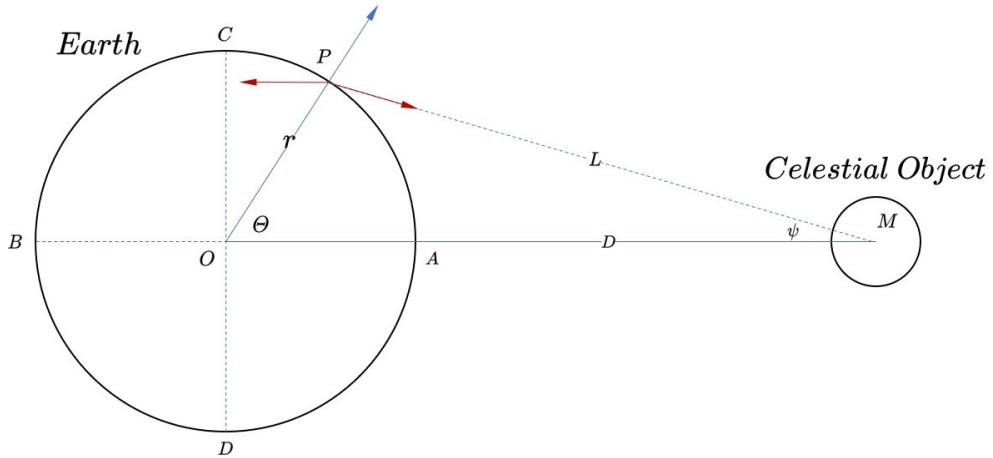


图 3: 极坐标系下引潮力的分量

$$\begin{aligned}\cos(\Theta + \psi) &= \frac{D \cos \Theta - r}{L} \\ \sin(\Theta + \psi) &= \frac{D \sin \Theta}{L}\end{aligned}$$

则引潮力的两个分量可表述为:

$$\begin{aligned}F_V &= \frac{GM}{D^2} \left[\frac{D^3}{L^3} \left(\cos \Theta - \frac{r}{D} \right) - \cos \Theta \right] \\ F_H &= \frac{GM}{D^2} \left[\frac{D^3}{L^3} \sin \Theta - \sin \Theta \right]\end{aligned}$$

在 $\triangle MOP$ 中, 由余弦定理可得:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{D} \left[1 - 2 \left(\frac{r}{D} \right) \cos \Theta + \left(\frac{r}{D} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

因为 $r \ll D$, 可作二项式展开, 得:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L} &= \frac{1}{D} \left[1 + \left(\frac{r}{D} \right) \cos \Theta + \left(\frac{r}{D} \right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \Theta - 1) + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{D} \right)^3 (5 \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D} \right)^n P_n(\cos \Theta) \\ \frac{1}{L^3} &= \frac{1}{D^3} \left[1 + 3 \left(\frac{r}{D} \right) \cos \Theta + \frac{3}{2} \left(\frac{r}{D} \right)^2 (3 \cos^2 \Theta - 1) + 3 \left(\frac{r}{D} \right)^2 \cos^2 \Theta + \dots \right]\end{aligned}$$

其中, 勒让德多项式 $P_n(\cos \Theta)$:

$$\begin{aligned}P_0(\cos \Theta) &= 1 \\ P_1(\cos \Theta) &= \cos \Theta \\ P_2(\cos \Theta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \Theta - 1) \\ P_3(\cos \Theta) &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta)\end{aligned}$$

从 $n=4$ 开始的勒让德多项式为:

$$P_{j+1}(\cos \Theta) = \frac{2j+1}{j+1} \cos \Theta P_j(\cos \Theta) - \frac{j}{j+1} P_{j-1}(\cos \Theta)$$

代入得到:

垂直引潮力

$$F_V = \frac{GM}{D^2} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D} \right)^n P_n(\cos \Theta) \right]^3 \left[P_1(\cos \Theta) - \frac{r}{D} \right] - P_1(\cos \Theta) \right\}$$

水平引潮力

$$F_H = \frac{GM}{D^2} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D} \right)^n P_n(\cos \Theta) \right]^3 \sin \Theta - \sin \Theta \right\}$$

取到 $n = 2$, 并消除掉 $(\frac{r}{D})^2$ 及更高次项, 得到:

$$\begin{aligned} F_V &= \frac{GM}{D^2} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D} \right)^n P_n(\cos \Theta) \right]^3 \left[P_1(\cos \Theta) - \frac{r}{D} \right] - P_1(\cos \Theta) \right\} \\ &= \frac{GM}{D^2} \left[\left(1 + \frac{r}{D} \cos \Theta \right)^3 \left(\cos \Theta - \frac{r}{D} \right) - \cos \Theta \right] \\ &= \frac{GM r}{D^3} (3 \cos^2 \Theta - 1) \\ F_H &= \frac{GM}{D^2} \left\{ \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D} \right)^n P_n(\cos \Theta) \right]^3 \sin \Theta - \sin \Theta \right\} \\ &= \frac{GM}{D^2} \left[\left(1 + \frac{r}{D} \cos \Theta \right)^3 \sin \Theta - \sin \Theta \right] \\ &= \frac{3}{2} \frac{GM r}{D^3} \sin 2\Theta \end{aligned}$$

即得月球引潮力主要项

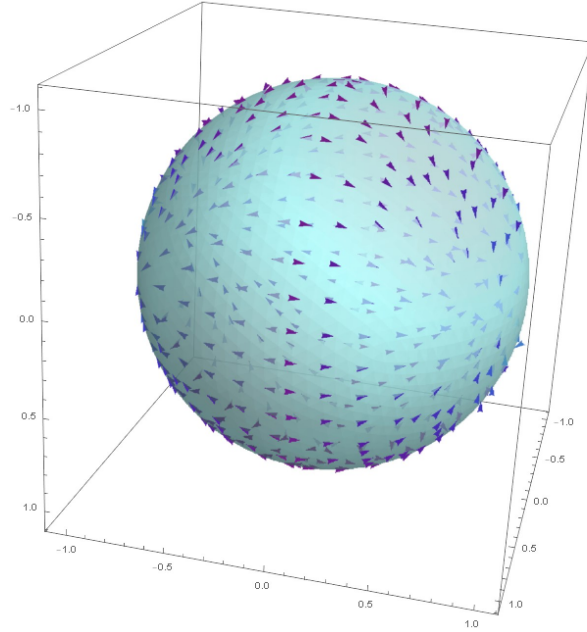


图 4: 地球表面引潮力示意

2.4 引潮力的拉格朗日表述

拉格朗日量：

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r) \\ \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \mu r\dot{\theta}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} - \mu\ddot{r} = 0 \\ \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= -\frac{\partial U}{\partial r} = F(r) \end{aligned}$$

作代换 $u = \frac{1}{r}$, 得到：

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\theta} &= -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{\mu}{l}\dot{r} \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{\mu}{l}\dot{r}\right) = \frac{dt}{d\theta}\frac{d}{dt}\left(-\frac{\mu}{l}\dot{r}\right) = -\frac{\mu}{l\dot{\theta}}\ddot{r} \end{aligned}$$

联立两式得到：

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{\mu^2}{l^2}r^2\ddot{r}$$

可得 $r\dot{\theta}^2$ 和 \ddot{r} ：

$$\begin{aligned} r\dot{\theta}^2 &= r\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{\mu^2 r^3} = \frac{l^2 u^3}{\mu^2} \\ \ddot{r} &= -\frac{l^2}{\mu^2 r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\frac{l^2 u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} \end{aligned}$$

代回运动方程可得：

$$\begin{aligned} \mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F(r) \\ \mu\left(-\frac{l^2 u^2}{\mu^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{l^2 u^3}{\mu^2}\right) &= F\left(\frac{1}{u}\right) \\ \frac{d^2u}{d\theta^2} + u &= -\frac{\mu}{l^2}\frac{1}{u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \end{aligned}$$

重新代入 r , 得：

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{\mu r^2}{l^2}F(r)$$

若知道 $r(\theta)$, 即可得到 $F(r)$

2.5 引潮力分析

2.5.1 引潮力效果分析

由 §2.3 中计算结果:

$$F_V = \frac{GMr}{D^3} (3 \cos^2 \Theta - 1)$$

$$F_H = \frac{3}{2} \frac{GMr}{D^3} \sin 2\Theta$$

在 $\Theta = 0^\circ$ (向月点) 和 $\Theta = 180^\circ$ (背月点) 处, 垂直引潮力 F_V 的正值最大且相等, 方向背离地心;

在 $\Theta = 90^\circ$ 和 $\Theta = 270^\circ$ 处, 垂直引潮力 F_V 的负值最大且相等, 方向指向地心;

在 $\Theta = 54.7^\circ$ 125.3° 234.7° 305.3° 处, 垂直引潮力 F_V 为零;

在 $\Theta = 0^\circ$ 90° 180° 270° 处, 水平引潮力 F_H 为零;

在 $\Theta = 45^\circ$ 135° 225° 315° 处, 水平引潮力 F_H 的绝对值最大, 在 $\Theta = 45^\circ$ 225° 处为正值, 在 $\Theta = 135^\circ$ 315° 处为负值

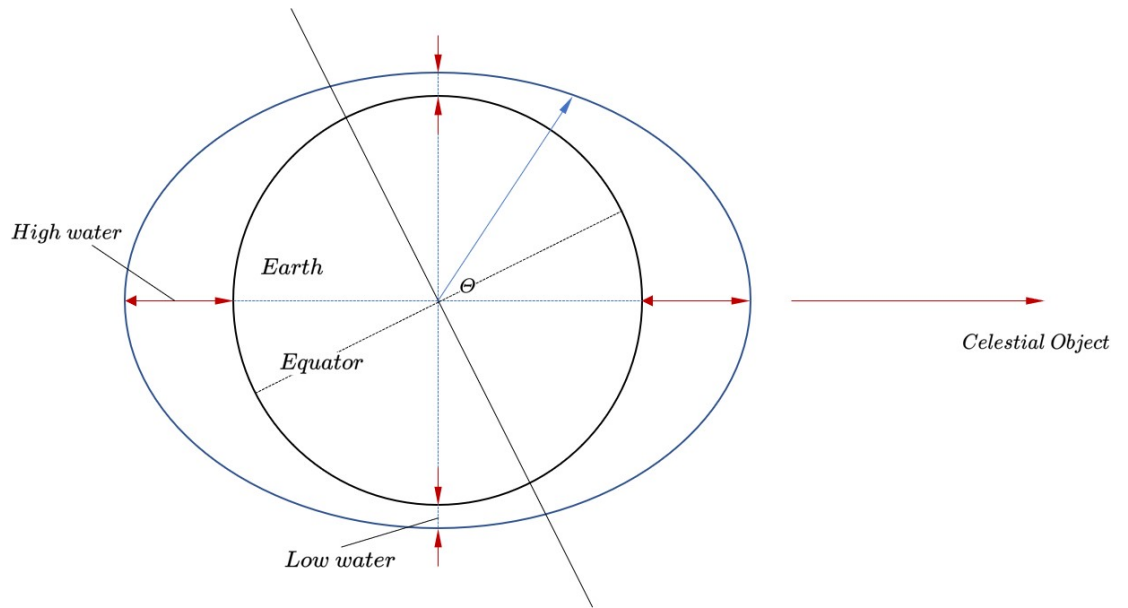


图 5: 引潮力效果分析

在背月点和向月点, 潮汐被拉伸背离地心, 在 $\Theta = 90^\circ$ 和 $\Theta = 270^\circ$ 处,

潮汐被挤压，故洋面大致呈现椭球型

2.5.2 月球、太阳引潮力

由 §2.3 中结果同理可得，太阳引潮力分量：

$$F'_V = \frac{GM_S r}{D_S^3} (3 \cos^2 \Theta_S - 1)$$

$$F'_H = \frac{3}{2} \frac{GM_S r}{D_S^3} \sin 2\Theta_S$$

引潮力与天体质量成正比，与距离的三次方成反比，因而太阳引潮力约为月亮引潮力的 0.46 倍；

引潮力的量值很小，月球引潮力约为重力的千分之 0.56 到 1.12，太阳引潮力约为重力的千分之 0.26 到 0.52

2.5.3 引潮力周期变化

引潮力的周期变化受到地球自转、地球和月球相对运动和地球、月球相对太阳运动的影响；

月球一恒星月（27.32 平太阳日）绕地球一周，故其每天在轨道上约运动 13.3° ，故月球引潮力在一天中变化不大；同理，太阳引潮力在一天中变化不大；

由于地球自转，月球、太阳引潮力在一天中出现两个变化周期；此外，由于地、月、日的相对运动，引潮力场出现半月、一月、半年、一年和多年的变化

3 引潮势

3.1 引潮势的计算

保守力场中，力矢 \vec{F} 和势 V 之间的关系为：

$$\vec{F} = -\nabla V$$

其中， $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ 为梯度算子

月球对地球表面各点吸引力 F 和它相应的引力势 V 之间的关系：

$$F = -\frac{\partial V}{\partial L}$$

对该式积分，且由无穷远处引力势能为 0，得：

$$V = \frac{\mu_0 M}{L}$$

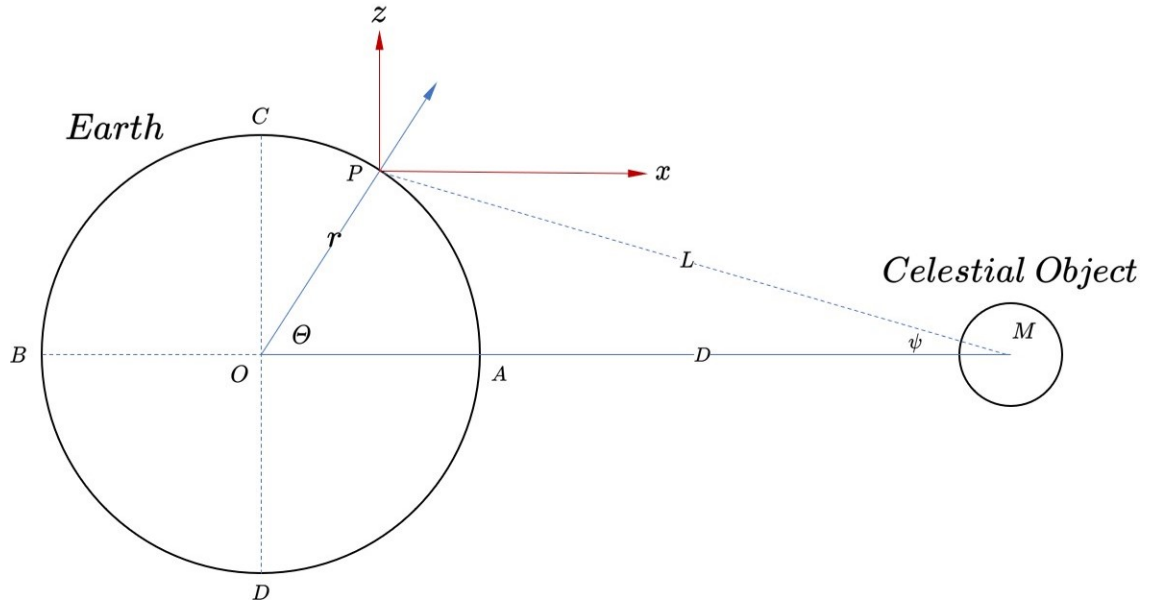


图 6: 引潮势的计算

由于：

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D}\right)^n P_n(\cos \Theta)$$

代入得月球的引力势：

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu_0 M}{D} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{D}\right)^n P_n(\cos \Theta) \\ &= V_0 + V_1 + V_2 + \dots \end{aligned}$$

式中：

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{\mu_0 M}{D} \\ V_1 &= \frac{\mu_0 M}{D} \left(\frac{r}{D}\right) \cos \theta \end{aligned}$$

$$V_2 = \frac{\mu_0 M}{D} \left(\frac{r}{D}\right)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \Theta - 1)$$

$$V_3 = \frac{\mu_0 M}{D} \left(\frac{r}{D}\right)^3 \frac{1}{2} (5 \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta)$$

逐项讨论：

V_0 为常数项，不考虑；

V_1 ：

选择 P 为坐标原点，至圆心的距离为 r

$$r \cos \Theta = -x$$

$$r \sin \Theta = -z$$

那么 $V_1 = -\frac{\mu_0 M}{D^2} x$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\nabla V_1 \\ &= -(\vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}) \left(-\frac{\mu_0 M}{D^2} x\right) \\ F_1 &= \frac{\mu_0 M}{D^2} \end{aligned}$$

此力平行于地月连线指向 x 正向，与引潮力中的惯性离心力大小相等方向相反；

即：在月球引力势中， V_1 与引潮力中惯性离心势相抵消，因此得到地球表面各点月球引潮势：

$$V_M = \frac{\mu_0 M}{D} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{D}\right)^n P_n(\cos \Theta)$$

3.2 地球表面固定地理坐标处引潮势的计算

有时我们关注地球上某处 P 的潮汐现象，其纬度为 ϕ ，月球在赤道以北的维度为 δ ，月球的时角为 τ ， $\angle POM$ 的值为 φ

由球面三角形角的余弦公式，有：

$$\cos \varphi = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \tau$$

将其代入 $V_M(n=2)$ ，得到：

$$V_M = -\frac{GM r^2}{2R^3} (3 \cos^2 \varphi - 1)$$

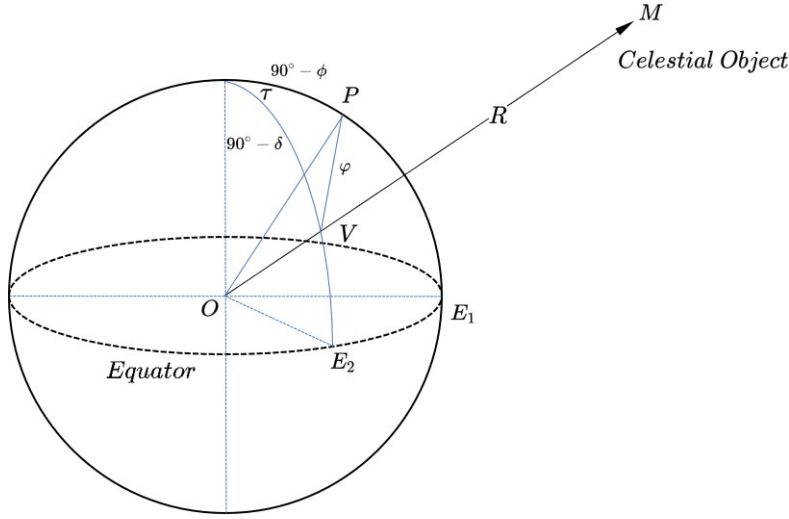


图 7: 地球表面固定地理坐标处引潮势的计算

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3GM r^2}{2R^3} \left(\cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \\
&= -\frac{3GM r^2}{2R^3} \left[(\sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \tau)^2 - \frac{1}{3} \right] \\
&= -\frac{3GM r^2}{2R^3} \left[(\sin^2 \phi \sin^2 \delta + \frac{1}{2} \cos^2 \phi + \cos^2 \delta + \frac{1}{2} \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2\tau + \frac{1}{2} \sin 2\phi \sin 2\delta \cos \tau) - \frac{1}{3} \right] \\
&= -\frac{3GM r^2}{4R^3} \left[(2 \sin^2 \phi \sin^2 \delta + \cos^2 \phi \cos^2 \delta + \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2\tau + \sin 2\phi \sin 2\delta \cos \tau) - \frac{2}{3} \right] \\
&= -\frac{3GM r^2}{4R^3} \left[(2 \sin^2 \phi \sin^2 \delta + (1 - \sin^2 \phi)(1 - \sin^2 \delta) + \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2\tau + \sin 2\phi \sin 2\delta \cos \tau) - \frac{2}{3} \right] \\
&= -\frac{3GM r^2}{4R^3} \left[(3 \sin^2 \phi \sin^2 \delta + 1 - \sin^2 \phi - \sin^2 \delta + \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2\tau + \sin 2\phi \sin 2\delta \cos \tau) - \frac{2}{3} \right] \\
&= -\frac{3GM r^2}{4R^3} \left[\frac{(3 \sin^2 \phi - 1)(3 \sin^2 \delta - 1)}{3} + \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2\tau + \sin 2\phi \sin 2\delta \cos \tau \right] \\
&= -\frac{GM r^2}{4R^3} \left[\frac{(3 \sin^2 \phi)(3 \sin^2 \delta - 1)}{3} + \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos^2 \tau + \sin^2 \phi \sin^2 \delta \cos \tau \right]
\end{aligned}$$

3.3 引潮势的展开

对于产生引潮势的月球和太阳，分别令：

$$G'_M = -\frac{GM_M r_M^2}{4R_M^3}$$

$$G'_S = -\frac{GM_S r_S^2}{4R_S^3}$$

则，月球和太阳产生的总引潮势为：

$$\begin{aligned} V &= V_M + V_S \\ &= -\frac{(3\sin^2\phi - 1)[3(G'_M \sin^2\delta_M + G'_S \sin^2\delta_S) - (G'_M + G'_S)]}{3} \\ &\quad - \cos^2\phi(G'_M \cos^2\delta_M \cos^2\tau_M + G'_S \cos^2\delta_S \cos^2\tau_S) \\ &\quad - \sin^2\phi(G'_M \sin^2\delta_M \cos^2\tau_M + G'_S \sin^2\delta_S \cos^2\tau_S) \end{aligned}$$

3.4 引潮势分析

由 §3.3 中总引潮势 V ：

$$\begin{aligned} V &= -\frac{(3\sin^2\phi - 1)[3(G'_M \sin^2\delta_M + G'_S \sin^2\delta_S) - (G'_M + G'_S)]}{3} \\ &\quad - \cos^2\phi(G'_M \cos^2\delta_M \cos^2\tau_M + G'_S \cos^2\delta_S \cos^2\tau_S) \\ &\quad - \sin^2\phi(G'_M \sin^2\delta_M \cos^2\tau_M + G'_S \sin^2\delta_S \cos^2\tau_S) \end{aligned}$$

其中，与 $\cos^2\phi$ 有关的项称为半日潮，由 $\sin^2\phi$ 组成的项称为日潮，与 $3\sin^2\phi - 1$ 有关的项称为长周期潮；

对于月球潮汐势，这些周期分别约为 12 小时、24 小时和 14 天。太阳潮汐势分别接近 12 小时、24 小时和 180 天。

4 分潮

引潮力场可以分解为许多分场，每一分场都为一谐和振动，每一分振动（即每一谐和振动），称为一个分潮；分潮的周期，和引潮力各分场的周期一一对应

达尔文从引潮势出发，引入平衡潮概念并给予展开；Schureman 直接将引潮力展开；Doodson 及 Cartwright 从引潮势展开

一般认为，引潮力展开得到其分力；引潮势展开得到其分势；平衡潮展开得到分潮

但从本质而言，引潮势为引潮力对单位质量海水所作元功经积分所得表达式；平衡潮公式又等于引潮势被重力除，故其实质均为引潮力展开

综上所述，无论用什么方法展开的分量均可试做分潮

5 讨论

5.1 潮汐锁定

在两子星的自转运动过程中, 如果子星的自转较快, 由于潮汐力的作用, 使得子星的自转越来越慢, 最终会与公转同步, 成为潮汐锁定

5.2 洛希极限

指流体卫星保持稳定平衡时与行星的最小距离, 由法国天文学家洛希于 1849 年首先提出

卫星的形状与其主行星的引力作用有关, 若把卫星看作流体, 由于主行星的吸引, 卫星自转平衡时的形状为一个细长的、长轴方向指向行星的椭球体; 当卫星与行星的距离接近一个极限值时, 这个椭球就会在引力作用下解体, 这个距离的极限称为洛希极限, 其值为:

$$2.45539\left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^{\frac{1}{3}}R$$

式中 σ 和 σ' 分别为行星和卫星的密度, R 为行星的半径, 系数 2.45539 是在假设卫星的质量与行星的质量的比值 $\mu = 0$ 的情况下确定的, $\mu \neq 0$, 系数的值略有变化

参考文献

- [1] 黄祖珂. 黄磊. 潮汐原理与计算 [M]. 中国海洋大学出版社, 2005.
- [2] 陈宗镛. 潮汐学 [M]. 科学出版社, 1980.
- [3] Rahman, M. Mizanur et al. “A Study on Tidal Potential and Tide Generating Force.” (2018).
- [4] 邓绶林主编; 刘文彰副主编. 地学辞典. 石家庄: 河北教育出版社.1992. 第 233-234 页
- [5] 邵丽婷. 斜压转动恒星的引力昏暗效应研究 [D]. 贵州大学,2016.
- [6] 《数学辞海》编辑委员会编. 数学辞海第五卷. 北京: 中国科学技术出版社.2002