Математический анализ I

Конспект основан на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

0.1 Некоторые базовые понятия

Определение. *Отображением* из множества X в множество Y называется отношение $F \subseteq X \times Y$, для которого

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Y:\ (x, y) \in F$$

Обозначается $F: X \to Y$ или $X \xrightarrow{F} Y$. Сам факт того, что $(x, y) \in F$ обозначается $f(x) = y$. X называют *областью определения*, а Y — *областью значений* f.

Определение. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется *инъективным*, если для него выполняется

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Иначе говорят, что f — *1-1 отображение*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{1-1} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным*, если для него выполняется

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения называют отображениями *на*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называют *биекцией*, если оно одновременно сюръективно и инъективно, иначе говоря

$$\forall y \in Y\ \exists! x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения, по аналогии с предыдущими определениями, называют *1-1 на отображениями*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow[\text{на}]{1-1} Y$.

Определение. *Образом* множества $A \subseteq X$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f(A) \stackrel{def}{=} \{ f(x) \mid x \in A \}$$

Определение. *Прообразом* множества $B \subseteq Y$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f^{-1}(B) \stackrel{def}{=} \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$$

Определение. *Обратимым* называется отображение $f: X \to Y$, для которого существует обратное относительно композиции отображение $f^{-1}: Y \to X$, для которого выполняется

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

Теорема 0.1.1 (Свойства прообраза)**.** Пусть $f: X \to Y$, $A, B \subseteq X$. Тогда справедливо

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Доказательство. Без доказательства (очевидно). ■

Теорема 0.1.2. f биективно $\Longleftrightarrow$ f обратимо

Доказательство. Без доказательства (тривиально). ■

Определение. *Полем* называется тройка $\langle X, +: X\times X \to X, \cdot: X\times X\to X\rangle$, где X — множество, удовлетворяющая аксиомам поля:

+G1 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

+G2 $\exists 0\in X:\ \alpha+0=0+\alpha=\alpha$

+G3 $\exists -\alpha:\ \alpha+-\alpha=0$

+G4 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

·G1 $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$

·G2 $\exists 1\in X:\ 1\alpha=\alpha 1=\alpha$

·G3 $\alpha\neq 0\Rightarrow\exists\alpha^{-1}:\ \alpha\alpha^{-1}=1$

·G4 $\alpha\beta=\beta\alpha$

D $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$

Для любых $\alpha,\beta,\gamma\in X$. Аксиомы +G1-4 задают на X структуры абелевой группы по +, аксиомы ·G1-4 задают на $X\setminus\{0\}$ структуру абелевой группы по ·, аксиома дистрибутивности D связывает + и ·.

Примеры.

1. $\mathbb{R}$ — поле. В дальнейшем можно под произвольным полем понимать $\mathbb{R}$, общность от этого сильно не пострадает.

2. $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда поле, когда p — простое.

Определение. *Векторным (линейным) пространством над полем K* называется тройка $\langle V, +_V: V\times V\to V, \cdot_V: V\times K\to V\rangle$, где V — множество, удовлетворяющую аксиомам:

$+_V$G1 $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$

$+_V$G2 $\exists\mathbf{0}\in X:\ \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$

$+_V$G3 $\exists-\mathbf{x}:\ \mathbf{x}+-\mathbf{x}=\mathbf{0}$

$+_V$G4 $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$

V1 $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$

V2 $(\alpha\beta)\mathbf{x}=\alpha(\beta\mathbf{x})$

V3 $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$

V4 $1_K\mathbf{x}=\mathbf{x}$

Для любых $\alpha,\beta\in K$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$.

Пример. $K^n\overset{def}{=}\underbrace{K\oplus K\oplus\ldots\oplus K}_{n}$ — векторное пространство, которому изоморфны все векторные пространства над полем K размерности n. Мы ограничимся рассмотрением $\mathbb{R}^n$.