

# **Математический анализ I**

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

# Оглавление

0.1	Введение . . . . .	2
0.2	Мощность множеств . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Основы топологии</b>	<b>9</b>
1.1	Метрическое пространство . . . . .	9
1.2	Топологическое пространство . . . . .	12
1.3	Внутренность и замыкание . . . . .	13

## 0.1 Введение

**Определение.** *Отображением* из множества  $X$  в множество  $Y$  называется отношение  $F \subseteq X \times Y$ , для которого

$$\forall x \in X \exists! y \in Y: (x, y) \in F$$

Обозначается  $F: X \rightarrow Y$  или  $X \xrightarrow{F} Y$ . Сам факт того, что  $(x, y) \in F$  обозначается  $f(x) = y$ .  $X$  называют *областью определения*, а  $Y$  — *областью значений*  $f$ .

**Определение.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *инъективным*, если для него выполняется

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Иначе говорят, что  $f$  — *1-1 отображение*, и часто обозначают  $f: X \xrightarrow{1-1} Y$ .

**Определение.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *сюръективным*, если для него выполняется

$$\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$$

Такие отображения называют *отображениями на*, и часто обозначают  $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ .

**Определение.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называют *биекцией*, если оно одновременно сюръективно и инъективно, иначе говоря

$$\forall y \in Y \exists! x \in X: f(x) = y$$

Такие отображения, по аналогии с предыдущими определениями, называют *1-1 на отображениями*, и часто обозначают  $f: X \xrightarrow[на]{1-1} Y$ .

**Определение.** *Образом* множества  $A \subseteq X$  при отображении  $f: X \rightarrow Y$  называют множество

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in A\}$$

**Определение.** *Прообразом* множества  $B \subseteq Y$  при отображении  $f: X \rightarrow Y$  называют множество

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

**Определение.** *Обратимым* называется отображение  $f: X \rightarrow Y$ , для которого существует обратное относительно композиции отображение  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , для которого выполняется

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

**Теорема 0.1.1** (Свойства прообраза). Пусть  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A, B \subseteq X$ . Тогда справедливо

$$\text{i) } f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$$

$$\text{ii) } f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$$

*Доказательство.* Без доказательства (очевидно). ■

**Теорема 0.1.2.**  $f$  биективно  $\iff f$  обратимо

*Доказательство.* Без доказательства (тривиально). ■

**Определение.** *Поле* называется тройка  $\langle X, +: X \times X \rightarrow X, \cdot: X \times X \rightarrow X \rangle$ , где  $X$  — множество, удовлетворяющая аксиомам поля:

$$+G1 \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$+G2 \quad \exists 0 \in X: \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

$$+G3 \quad \exists -\alpha: \alpha + -\alpha = 0$$

$$+G4 \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\cdot G1 \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

$$\cdot G2 \quad \exists 1 \in X: 1\alpha = \alpha 1 = \alpha$$

$$\cdot G3 \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1}: \alpha\alpha^{-1} = 1$$

$$\cdot G4 \quad \alpha\beta = \beta\alpha$$

$$D \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

Для любых  $\alpha, \beta, \gamma \in X$ . Аксиомы +G1-4 задают на  $X$  структуры абелевой группы по  $+$ , аксиомы  $\cdot G1-4$  задают на  $X \setminus \{0\}$  структуру абелевой группы по  $\cdot$ , аксиома дистрибутивности  $D$  связывает  $+$  и  $\cdot$ .

### Примеры.

i)  $\mathbb{R}$  — поле. В дальнейшем можно под произвольным полем понимать  $\mathbb{R}$ , общность от этого сильно не пострадает.

ii)  $\mathbb{Z}_p$  тогда и только тогда поле, когда  $p$  — простое.

**Определение.** *Векторным (линейным) пространством над полем  $K$*  называют тройку  $\langle V, +_V: V \times V \rightarrow V, \cdot_V: V \times K \rightarrow V \rangle$ , где  $V$  — множество, удовлетворяющую аксиомам:

$$+_VG1 \quad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$$

$$+_VG2 \quad \exists \mathbf{0} \in V: \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$+_VG3 \quad \exists -\mathbf{x}: \mathbf{x} + -\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$+_VG4 \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

$$V1 \quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$$

$$V2 \quad (\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$$

$$V3 \quad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$$

$$V4 \quad 1_K\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Для любых  $\alpha, \beta \in K, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .

**Пример.**  $K^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{K \oplus K \oplus \dots \oplus K}_n$  — векторное пространство, которому изоморфны все векторные пространства над полем  $K$  размерности  $n$ . Мы ограничимся рассмотрением  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема 0.1.3.** (Закон Де-Моргана) Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — семейство множеств, и  $Y$  — множество. Тогда справедливо

$$Y \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$$

*Доказательство.* Докажем, что  $z$  принадлежит левой части  $\iff z$  принадлежит правой части:

$$\begin{aligned} z \in Y \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) &\iff z \in Y \wedge z \notin \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \iff z \in Y \wedge \forall \alpha \in A \, z \notin X_\alpha \iff \\ &\iff \forall \alpha \in A \, z \in Y \wedge z \notin X_\alpha \iff z \in \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \end{aligned}$$

■

**Теорема 0.1.4.** (Неравенство Бернулли)  $(1+x)^n \geq 1+nx$  при  $x \geq -1$ ,  $n \in \mathbb{N}$

*Доказательство.*

- i) База индукции при  $n = 1$ :  $1+x \geq 1+x$
- ii) Индукционный переход:

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= (1+x)(1+x)^{n-1} \geq (1+x)(1+(n-1)x) = \\ &= 1+x+(n-1)x+(n-1)x^2 = 1+nx+(n-1)x^2 \geq 1+nx \end{aligned}$$

■

**Теорема 0.1.5.** (Неравенство КБШ)

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_k b_k) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) + \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) - 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \end{aligned}$$

■

## 0.2 Мощность множеств

**Определение.** *Мощностью конечного множества* называют количество его различных элементов.

**Определение.** Множества  $A$  и  $B$  *равномощны*, если существует  $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$  — биекция

**Лемма 0.2.1.** Равномощность — отношение эквивалентности

*Доказательство.*

- $A \sim B \implies \exists f : A \xrightarrow[на]{1-1} B \implies f^{-1} : B \xrightarrow[на]{1-1} A \implies B \sim A$
- $A \sim B \wedge B \sim C \implies \exists f : A \xrightarrow[на]{1-1} B, g : B \xrightarrow[на]{1-1} C \implies f \circ g : A \xrightarrow[на]{1-1} C \implies A \sim C$
- $id_A : A \xrightarrow[на]{1-1} A \implies A \sim A$

■

**Определение.** *Булеаном* множества  $A$  называют множество всех подмножеств  $A$ . Обозначают  $\mathcal{P}(A)$  или  $2^A$

**Лемма 0.2.2.**  $\mathcal{P}(A) \not\sim A$

*Доказательство.* Предположим обратное. Пусть  $f : A \xrightarrow[на]{1-1} \mathcal{P}(A)$ . Рассмотрим

$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \subseteq A$$

Тогда существует  $x \in A$ :  $f(x) = X$ . Но тогда

$$x \in X \iff x \notin f(x) \iff x \notin X$$

Противоречие.

■

**Определение.** Будем говорить, что множество  $A$  по *мощности не превосходит* множество  $B$ , если  $A$  равномощно некоторому подмножеству  $B$ . Обозначается  $A \preccurlyeq B$

**Определение.** Будем говорить, что множество  $A$  по *мощности не превосходит* множество  $B$ , если существует инъекция  $f : A \xrightarrow{1-1} B$

**Замечание.** Эти два определения эквивалентны.

**Теорема 0.2.3.** Для произвольных  $A, B$  выполнено

- i)  $A \sim B \implies A \preccurlyeq B$
- ii)  $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \implies A \sim B$

*Доказательство.* Без доказательства (тривиально).

■

**Теорема 0.2.4.** (Кантор-Бернштейн)  $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \iff A \sim B$

Доказательство.

$\Leftarrow$  Предыдущая теорема.

$\Rightarrow$  Положим  $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} f(A)$  и  $g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} g(B)$ . Тогда  $f \circ g : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} g(f(A))$   
Обозначим

$$\begin{aligned} A_0 &:= A \\ A'_0 &:= g(B) \\ A_1 &:= g(f(A_0)) \end{aligned}$$

Тогда по построению  $A_0 \supseteq A'_0 \supseteq A_1$ . Кроме того, посредством  $f \circ g$  получаем  $A_0 \sim A_1$ , и по условию  $B \sim A'_0$ . Тогда по транзитивности достаточно показать, что  $A_0 \sim A'_0$ .

$$A'_1 := g(f(A'_0)) \sim A'_0$$

Потому что  $A'_0 \subseteq A$  и  $f \circ g$  — биекция (получается своего рода двустороннее сужение  $f \circ g$ , которое сохраняет его биективность). В том же духе продолжим

$$\begin{aligned} A_{n+1} &:= g(f(A_n)) \sim A_n \\ A'_{n+1} &:= g(f(A'_n)) \sim A'_n \end{aligned}$$

причём для всех  $n$  выполнено (аналогично первому шагу)

$$A_n \supseteq A'_n \supseteq A_{n+1}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} D &:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ M_n &:= A_n \setminus A'_n \\ M'_n &:= A'_n \setminus A_{n+1} \end{aligned}$$

Все эти множества попарно не пересекаются. При этом

$$\begin{aligned} A_0 &= D \sqcup M_0 \sqcup M'_0 \sqcup M_1 \sqcup \dots \\ A'_0 &= D \sqcup M'_0 \sqcup M_1 \sqcup \dots \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что  $g(f(M_n)) = M_{n+1}$  и  $g(f(M'_n)) = M'_{n+1}$ . Тогда построим искомое соответствие следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} D & M_0 & M'_0 & M_1 & M'_1 & \dots & \\ \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \downarrow & \searrow & \\ D & & M'_0 & M_1 & M'_1 & M_2 & \dots \end{array}$$

Где все диагональные стрелки — сужения  $f \circ g$ , а вертикальные — тождественные отображения.

■

**Определение.** Множествами счетной мощности называют множества, лежащие в одном классе эквивалентности по  $\sim$  с  $\mathbb{N}$ .

**Теорема 0.2.5.** (Свойства счетных множеств)

- i) Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество
- ii) Объединение двух счетных множеств счетно
- iii)  $A$  — бесконечно,  $B \sim \mathbb{N} \implies A \cup B \sim A$

*Доказательство.*

- i) Пусть  $A$  бесконечно. Тогда оно не пусто, то есть  $\exists a \in A$ . Рассмотрим  $A \setminus \{a\}$ . Если оно пусто, то множество  $A$  не было бесконечным. Продолжим этот процесс и получим счетное подмножество  $A$ :  $\{a_1, a_2, \dots\}$ .
- ii) Пусть  $A$  и  $B$  — счетные. Получим биекции этих множеств с  $\mathbb{N}$ :  $A = \{a_1, \dots\}$  и  $B = \{b_1, \dots\}$ . Построим биекцию  $(A \cup B)^* \rightarrow \mathbb{N}$ :  $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, \dots\}$ , считая совпадающие элементы из разных множеств разными. Тогда выполнено  $\mathbb{N} \sim A \preceq A \cup B \preceq \mathbb{N}$ , то есть  $A \cup B \sim \mathbb{N}$  (теорема Кантора-Бернштейна).
- iii) В  $A$  найдется счетное подмножество  $C \subseteq A$ .

$$\begin{aligned} A &= A' \cup C \\ A \cup B &= A' \cup (C \cup B) \end{aligned}$$

Причем  $C \cup B$  счетно, то есть  $C \cup B \sim C$ . Тогда построим соответствие:

$$\begin{array}{ccc} A' & & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & & (C \cup B) \end{array}$$

■

**Теорема 0.2.6.** (Счетность множества рациональных чисел)  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

*Доказательство.*  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$

■

**Определение.**  $\text{Bin}$  — множество всех последовательностей из нулей и единиц.

**Теорема 0.2.7.**  $\text{Bin} \sim [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

*Доказательство.* Для доказательства теоремы разобьем  $\text{Bin} = \text{Bin}^\infty \sqcup \text{Bin}^0$  — множества последовательностей бесконечной и конечной длиной (конечной в том смысле, что с конечного места в последовательности идут только нули) соответственно.

- i)  $\text{Bin}^0 = \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$ , где  $B_k$  — множество последовательностей длины  $k$  — счетное объединение конечных множеств. Поэтому  $\text{Bin}^0$  счетно.



- ii) Отождествим элементы  $\text{Bin}^\infty$  с числами полуинтервала  $(0, 1]$  как их двоичную запись. Поскольку любой элемент  $(0, 1]$  представим в двоичной записи бесконечной длины (тривиально), получаем, что  $\text{Bin}^\infty \sim (0, 1]$ .
- iii) Теперь  $\text{Bin} = \text{Bin}^0 \sqcup \text{Bin}^\infty \sim \text{Bin}^\infty \sim (0, 1] \sim [0, 1]$ .

■

**Теорема 0.2.8.** Все промежутки вида  $\langle a, b \rangle$ ,  $a \neq b$  в  $\mathbb{R}$  равномощны.

*Доказательство.* Ограничимся рассмотрением открытых интервалов. Добавление граничной точки не меняет мощность множества.

Докажем, что  $\forall a \neq b, c \neq d \ (a, b) \sim (c, d)$ . Для этого построим биекцию между этими двумя множествами:

$$f: (a, b) \rightarrow (c, d)$$

$$x \mapsto \frac{(d-c)(x-a)}{b-a}$$

■

**Теорема 0.2.9.**  $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$

*Доказательство.* Построим биекцию между  $\mathbb{R}^n$  и  $\text{Bin}$ , что и докажет утверждение. Пусть  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Bin}$  — функция, сопоставляющая числу его двоичную запись. Тогда

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Bin}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\psi(x_1)_1, \psi(x_2)_1, \dots, \psi(x_1)_2, \psi(x_2)_2, \dots)$$

осуществляет требуемое соответствие.

■

**Теорема 0.2.10.**  $\mathbb{R}^n$  несчетно

*Доказательство.*  $\mathbb{R}^n \sim \text{Bin} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \not\sim \mathbb{N}$

■

**Теорема 0.2.11.** Множеством мощности континуум называют множество, равномощное  $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

# Глава 1

## ОСНОВЫ ТОПОЛОГИИ

### 1.1 Метрическое пространство

**Определение.** Метрикой на множестве  $X$  называют  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющую аксиомам метрики:

- i)  $\rho(x) \geq 0$
- ii)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- iii)  $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

**Определение.** Пару  $\langle X, \rho \rangle$ , где  $\rho$  — метрика на  $X$ , называют метрическим пространством

**Примеры.**

- i) Стандартная метрика на  $\mathbb{R}^n$ :  $\rho(x, y) = |x, y|_2$ , где  $d_k(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x, y|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^k}$
- ii)  $|\cdot, \cdot|_k$  является метрикой на  $\mathbb{R}$  при любых  $k \geq 1$
- iii)  $|x, y|_\infty = \max_{i=1}^n (x_i - y_i)$  — метрика на  $\mathbb{R}$
- iv)  $\rho(x, y) = 1$  при  $x \neq y$  и  $\rho(x, y) = 0$  иначе — метрика, порождающая дискретное пространство.

Далее, если не указано, речь идет о метрическом пространстве  $X$

**Определение.** Шаром радиуса  $r$  с центром в точке  $x$  называется

$$B_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

**Определение.** Замкнутым шаром радиуса  $r$  с центром в точке  $x$  называется

$$\overline{B}_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$$

**Определение.** Расстоянием от точки  $x$  до множества  $A$  называется

$$\rho(x, A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

**Определение.** Диаметр множества  $A$  называется

$$\text{diam}(A) = \sup \{ \rho(x, y) \mid x, y \in A \}$$

**Определение.** В метрическом пространстве *открытыми* называют множества  $A$  такие, что

$$\forall x \in A \exists B_r(x) \subset A$$

Иначе говоря, любая точка открытого множества входит в него с некоторым шаром.

**Определение.** *Окрестностью* точки  $x$  называют любое открытое множество, содержащее  $x$

**Определение.** Точка  $x$  называется *внутренней* для множества  $A$ , если она входит в него с некоторой окрестностью:

$$\exists U(x): U(x) \subset A$$

**Определение.** Точка  $x$  называется *граничной* точкой множества  $A$ , если любая окрестность точки  $x$  имеет непустое пересечение как с  $A$ , так и с его дополнением:

$$\forall U(x) \quad A \cap U(x) \neq \emptyset \wedge (X \setminus A) \cap U(x) \neq \emptyset$$

**Определение.** Точка  $x$  называется *предельной* точкой множества  $A$ , если любая окрестность точки  $x$  имеет непустое пересечение с  $A$ :

$$\forall U(x) \quad A \cap U(x) \neq \emptyset$$

**Определение.** Множество  $A$  называют *ограниченным*, если  $\text{diam}(A) < +\infty$

**Теорема 1.1.1.** Множество  $A$  ограничено  $\iff$  его можно вписать в шар

*Доказательство.*

$\implies$   $m := \text{diam}(A)$ . Покажем, что  $A$  можно вписать в шар радиуса  $m + 1$ . Возьмем произвольную точку  $x \in A$ . Тогда  $\forall y \in A \rho(x, y) \leq m < m + 1 \implies y \in B_{m+1}(x)$

$\impliedby$  Пусть  $y, z \in A$  и  $A$  можно вписать в шар  $B_r(x)$ . Тогда  $2r > \rho(x, y) + \rho(x, z) \geq \rho(y, z) \implies \rho(y, z) < 2r \implies A$  ограничено.

■

**Теорема 1.1.2.**

- i) Произвольное объединение открытых множеств открыто
- ii) Пересечение двух (а значит, и произвольного конечного числа) открытых множеств открыто.

*Доказательство.*

i) Пусть  $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — семейство открытых множеств. Тогда

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \implies x \in G_\alpha \implies \exists U(x) \subset G_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

ii) Пусть  $A$  и  $B$  — открытые множества. Тогда

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\implies x \in A \wedge x \in B \implies \\ &\exists B_{r_1}(x) \subset A \wedge B_{r_2}(x) \subset B \implies \\ &x \in B_{\min(r_1, r_2)}(x) \subset A \cap B \end{aligned}$$

■

**Определение.** Липшицево эквивалентными называют отображения  $f$  и  $g$  в  $\mathbb{R}$ , такие, что  $\exists c_1, c_2: c_1 f \leq g \leq c_2 f$

**Пример.** В  $\mathbb{R}^n$  метрики  $d_1$  и  $d_2$  липшицево эквивалентны

## 1.2 Топологическое пространство

**Определение.** Топологией на множестве  $X$  называют  $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ , удовлетворяющее следующим свойствам:

- i)  $\emptyset, X \in \Omega$
- ii)  $A, B \in \Omega \implies A \cap B \in \Omega$
- iii)  $\{X_\alpha \in \Omega\}_{\alpha \in A} \implies \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \in \Omega$

Иными словами, топология замкнута относительно конечных пересечений и произвольных объединений её элементов.

**Определение.** Пара  $\langle X, \Omega \rangle$ , где  $\Omega$  — топология на  $X$ , называется *топологическим пространством*.

**Определение.** Элементы топологии называются *открытыми множествами*. Дополнения открытых множеств называются *замкнутыми множествами*.

**Примеры.**

- i)  $\Omega = \mathcal{P}(X)$  — дискретная топология
- ii)  $\Omega = \{\emptyset, X\}$  — антидискретная топология
- iii) Все метрические пространства являются топологическими пространствами, порожденными метрикой.
- iv)  $\Omega = \emptyset \cup \{\text{все дополнения конечных множеств}\}$

**Определение.** Метризуемым называется топологическое пространство, топология которого может быть порождена метрикой.

**Примеры.**

- i) Дискретная топология метризуема
- ii) Антидискретная топология не метризуема

**Теорема 1.2.1.**

- i)  $\emptyset, X$  замкнуты
- ii)  $A, B$  замкнуты  $\implies A \cup B$  замкнуто
- iii) если  $C_\alpha$  замкнуты, то  $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$  замкнуто

*Доказательство.*

- i)  $X = X \setminus \emptyset$  — замкнуто по определению. Аналогично  $\emptyset = X \setminus X$
- ii)  $A \cup B$  замкнуто  $\iff X \setminus (A \cup B)$  открыто  $\iff (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$  открыто  $\iff (X \setminus A), (X \setminus B)$  открыты  $\iff A, B$  замкнуты.

iii) Аналогично ii

■

**Теорема 1.2.2.**  $A$  открыто,  $B$  замкнуто. Тогда

i)  $A \setminus B$  открыто

ii)  $B \setminus A$  замкнуто

*Доказательство.*

i)  $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$  — открыто

ii)  $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$  — замкнуто

■

### 1.3 Внутренность и замыкание

**Определение.** *Внутренностью* множества  $A$  называют наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в  $A$ , иначе говоря:

$$\text{Int}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ \text{open}_X(U)}} U$$

**Определение.** *Замыканием* множества  $A$  называют наименьшее по включению замкнутое множество, содержащее  $A$ , иначе говоря:

$$\text{Cl}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ \text{cl}_X(C)}} C$$

**Теорема 1.3.1.** (Свойства  $\text{Int}$ )

i)  $\text{Int}(A)$  открыто

ii)  $\text{Int}(A) \subseteq A$

iii)  $\text{open}_X(B), B \subseteq A \implies B \subseteq \text{Int}(A)$

iv)  $\text{Int}(A) = A \iff \text{open}_X(A)$

v)  $\text{Int}(\text{Int}(A)) = A$

vi)  $A \subseteq B \implies \text{Int}(A) \subseteq \text{Int}(B)$

vii)  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$

viii)  $\text{Int}(A \cup B) \supseteq \text{Int}(A) \cup \text{Int}(B)$

*Доказательство.*

- i)  $\text{Int}(A)$  открыто как объединение открытых
- ii) В объединения входят только подмножества  $A$ , поэтому  $\text{Int}(A) \subseteq A$
- iii)  $B$  по определению войдет в объединение
- iv)  $\implies$  по пункту (i).  $\impliedby$  по пункту (iii)
- v) см. пункт (iv)
- vi) Все открытые подмножества  $A$  являются открытыми подмножествами  $B$
- vii)  $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B \implies \text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A), \text{Int}(B) \implies \text{Int}(A \cap B) \subseteq \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$   
 $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A) \subseteq A$ , аналогично  $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq B$ , поэтому  
 $\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq A \cap B \implies \text{Int}(\text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)) = \text{Int}(A \cap B) \implies \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B) \subseteq \text{Int}(A \cap B)$

■

**Теорема 1.3.2.** (Свойства  $\text{Cl}$ )

- i)  $\text{Cl}(A)$  замкнуто
- ii)  $\text{Cl}(A) \supseteq A$
- iii)  $\text{cl}_X(B), B \supseteq A \implies B \supseteq \text{Cl}(A)$
- iv)  $\text{Cl}(A) = A \iff \text{cl}_X(A)$
- v)  $\text{Cl}(\text{Cl}(A)) = A$
- vi)  $A \subseteq B \implies \text{Cl}(A) \subseteq \text{Cl}(B)$
- vii)  $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$
- viii)  $\text{Cl}(A \cap B) \subseteq \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(B)$

*Доказательство.* Можно доказать аналогично предыдущей теореме, а можно доказать, пользуясь ей и переходом к дополнению. ■

**Теорема 1.3.3.** (Связь  $\text{Int}$  и  $\text{Cl}$ )

- i)  $X \setminus \text{Int}(A) = \text{Cl}(X \setminus A)$
- ii)  $X \setminus \text{Cl}(A) = \text{Int}(X \setminus A)$

*Доказательство.*

i)

$$X \setminus \text{Int}(A) \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus \left( \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ \text{open}_X(U)}} U \right) = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \\ \text{open}_X(U)}} X \setminus U \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cl}(X \setminus A)$$

так как множества вида  $X \setminus U$  суть замкнутые множества, содержащие  $A$

ii) Аналогично

■

**Определение.** Границей множества  $A$  называется

$$\text{Fr}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Cl}(A) \setminus \text{Int}(A)$$

**Теорема 1.3.4.** (Свойства  $\text{Fr}$ )

- i)  $\text{Fr}(A)$  замкнуто
- ii)  $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(X \setminus A)$
- iii)  $A$  замкнуто  $\iff \text{Fr}(A) \subseteq A$
- iv)  $A$  открыто  $\iff \text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$

*Доказательство.*

i, ii) Очевидно в свете предыдущих теорем

iii)  $A$  замкнуто  $\iff \text{Cl}(A) = A \iff \text{Cl}(A) \setminus \text{Int}(A) \subseteq A$

iv)  $A$  открыто  $\iff \text{Int}(A) = A \iff \text{Fr}(A) = \text{Cl}(A) \setminus A \iff \text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$

■

**Теорема 1.3.5.** (Характеризация открытых множеств)

*Доказательство.*

■

**Теорема 1.3.6.** (Характеризация замкнутых множеств)

*Доказательство.*

■