Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

0.1 Диффеоморфизмы

Определение. *Областью* называют открытое связное множество.

Определение. Топологические пространства X, Y *гомеоморфны*, если существует обратимое и в обе стороны непрерывное $f: X \to Y$. f называют *гомеоморфизмом*.

Определение. *Диффеоморфизмом* гладких многообразий M, N называется обратимое и в обе стороны гладкое отображение $f: M \to N$.

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$. Тогда отображение $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ называется *диффеоморфизмом*, если оно обратимо и в обе стороны дифференцируемо.

Лемма 0.1.1. (О почти локальной инъективности)
Пусть $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, f дифференцируемо в $\mathbf{x}_0$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists c, \delta > 0$ такие, что $\forall \mathbf{h}\colon\ \|\mathbf{h}\| < \delta\ \ \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$

Доказательство.

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \left\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\right\| \geqslant \left\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\right\| - \|\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\| \geqslant \frac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|$$

Последнее неравенство выполнено по следующим причинам:

- $\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$, так как $f'(\mathbf{x}_0)$ обратим
- $\|\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\| \leqslant \frac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|$ при достаточно малых $\mathbf{h}$, так как $\alpha(\mathbf{h})$ — бесконечно малое.

■

Теорема 0.1.2. (О сохранении области)
Пусть $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \det f'(\mathbf{x}) \neq 0$, тогда f открыто.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{O}$ открыто. Тогда нужно показать, что $f(\mathcal{O})$ открыто. Зафиксируем $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ и $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in f(\mathcal{O})$. По лемме о почти локальной инъективности имеем $c, \delta > 0$ такие, что

$$\forall \mathbf{h} \in \overline{B(0,\delta)}\ \ \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$$

Положим

$$r = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\mathbf{y}_0, f(S(\mathbf{x}_0, \delta)))$$

Поскольку f непрерывно, а сфера — компакт, имеем, что $f(S(\mathbf{x}_0, \delta))$ — компакт. В свою очередь, ρ является метрикой, то есть непрерывно. Тогда ρ достигает минимума, то есть r реализуется, а значит, не равно нулю (см. оценку выше). Раз $r > 0$, то $B(\mathbf{y}_0, r)$ — полноправный шар, проверим, что он входит в образ f целиком, что и закончит доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$. Положим $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$ на $\overline{B(\mathbf{x}_0, \delta)}$; g непрерывно, поэтому достигает минимума. Попробуем этот минимум найти:

- Рассмотрим поведение $g(\mathbf{x})$ на $S(\mathbf{x}_0, \delta)$:

$$g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| \geqslant \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| - \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| \geqslant 2r - r = r$$

- $g(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| < r$, так как $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$

Тогда понятно, что минимум достигается не на границе. Раз так, он достигается во внутренности. Отображение $l\colon \mathbf{x} \mapsto g^2(\mathbf{x})$ достигает минимума в той же точке, что и g, при этом $l'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$. Из невырожденности производного оператора следует, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, что и требовалось. ∎

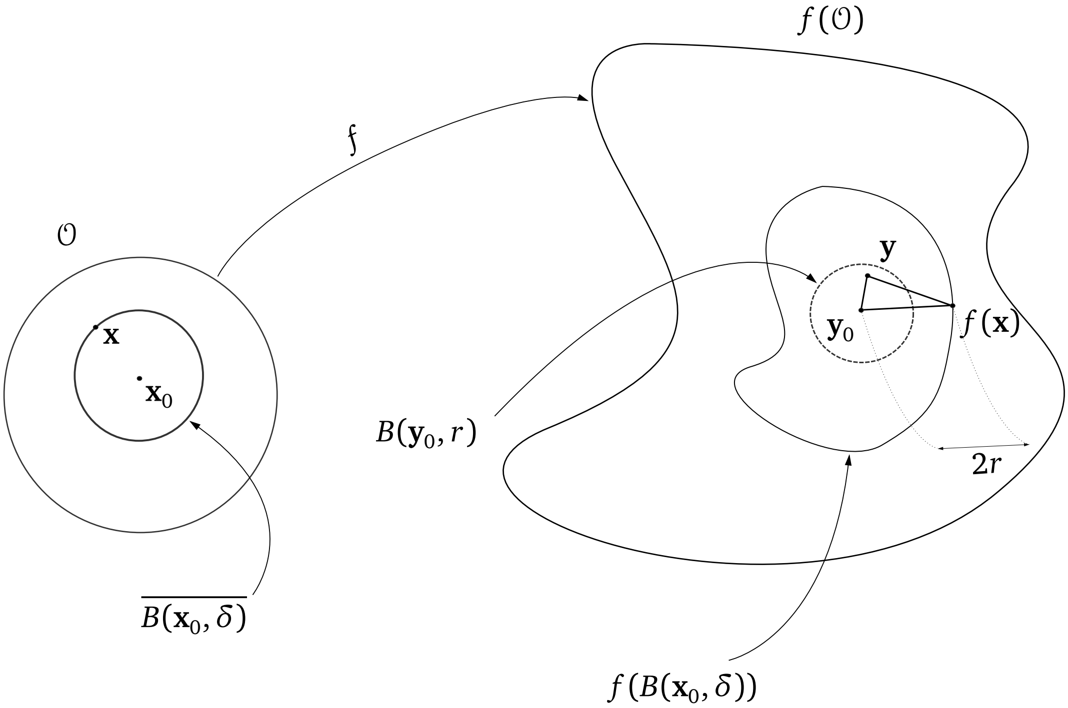

Рис. 1: Теорема о сохранении области

Следствие 0.1.3. Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{l \leqslant m}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \operatorname{rank} f'(\mathbf{x}) = l$, тогда f открыто.

Доказательство. Построим оторбражение $\tilde{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\tilde{f}_i = f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l$$
$$\tilde{f}_i = x_i,\ \text{иначе}$$

Производный оператор тогда будет выглядеть так:

$$\tilde{f}' = \begin{pmatrix} & & f' & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Где первая сверху единица стоит на $l+1$-м месте. Тогда отображение $\tilde{f}$ тоже дифференцируемо, и его производный оператор невырожден. Применяя предыдущую теорему, получаем, что $\tilde{f}(A)$ открыто, если множество A открыто. Тогда $f(A)$ тоже открыто. ■

Теорема 0.1.4. (О гладкости обратного отображения)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, $T \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}$ $\det T'(\mathbf{x}) \neq 0$,
T обратимо, тогда $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(\mathbf{y}_0) = (T'(\mathbf{x}_0))^{-1}$, при $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$.

Доказательство. Докажем теорему по индукции. В качестве базы рассмотрим случай $r = 1$. Обозначим $S = T^{-1}$, $S\colon T(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно, так как по теореме о сохранении области T открыто. Зафиксируем $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$ и проверим дифференцируемость S в точке $\mathbf{y}_0$.

- По теореме о почти локальной инъективности имеем
$$\exists c, \delta > 0\colon\ \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)\ \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$
- Воспользуемся дифференцируемостью T:
$$T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$
Здесь $A = T'(\mathbf{x}_0)$. Положим $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$:
$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = A(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) + \alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$
Перепишем это равенство в виде, похожем на определение дифференцируемости S:
$$S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$
Если мы поймем, что $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$ — бесконечно малое при $\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0$, то мы получим определение дифференцируемости S в точке $\mathbf{y}_0$. Проверим это:
$$\begin{aligned}\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) &\leqslant \left\|A^{-1}\right\|\,\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &\leqslant \left\|A^{-1}\right\|\,\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c}\,\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \\ &= \left\|A^{-1}\right\|\,\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c}\,\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|\end{aligned}$$
S непрерывно, поэтому $\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \xrightarrow[\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0]{} 0$, тогда $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \xrightarrow[\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0]{} 0$.

Теперь нужно доказать непрерывность S'. Из доказанного уже известно, что $S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1}$:
$$\mathbf{y} \mapsto S(\mathbf{y}) = T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \mapsto T'(\mathbf{x}) \mapsto (T'(\mathbf{x}))^{-1} = S'(\mathbf{y})$$
Эту схему можно переписать в привычном виде:
$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$
Таким образом получаем, что S' — композиция непрерывных отображений, то есть непрерывно (в частности, отображение $GL(\mathbb{R}^m) \ni A \mapsto A^{-1}$ непрерывно). Таким образом, база доказана.

Для доказательства индукционного перехода нужно показать только гладкость S. Пусть $T \in C^n$, $S \in C^n$, покажем, что тогда если вдруг $T \in C^{n+1}$, то и $S \in C^{n+1}$. Для этого достаточно, чтобы $S' \in C^n$:

$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$

$S \in C^n$ по предположению индукции, $T' \in C^n$ потому, что $T \in C^{n+1}$, обращение матрицы — вообще класса C^∞, то есть переход доказан. ■

Лемма 0.1.5. (О приближении оботражения его линеаризацией)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, тогда $\forall \mathbf{h}$

$$\left\| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| \leqslant M \left\| \mathbf{h} \right\|$$

где

$$M = \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\|$$

Доказательство. Положим $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x})$, тогда $F'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)$. Применим теорему Лагранжа к F:

$$\begin{aligned}\left\| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| = \left\| F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0) \right\| &\leqslant \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| F'(\mathbf{z}) \right\| \cdot \left\| \mathbf{h} \right\| \\ &= \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\| \cdot \left\| \mathbf{h} \right\|\end{aligned}$$

■

Теорема 0.1.6. (О локальной обратимости)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists U(\mathbf{x}_0)$ такая, что $f\big|_U$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Если мы докажем, что f обратимо в некоторой окрестности $U(\mathbf{x}_0)$, то по теореме о гладкости обратного отображения мы получим требуемое (невырожденность определителя в окрестности $\mathbf{x}_0$ следует из его непрерывности и того, что $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$). Для начала заметим. что из невырожденности оператора в точке $\mathbf{x}_0$ следует, что

$$\exists c > 0 \colon \ \left\| f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| \geqslant c \left\| \mathbf{h} \right\|$$

Попробуем построить окрестность. Пусть она будет содержать точки такие, что одновременно выполнены условия:

- $\left\| f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\| \leqslant \dfrac{c}{4}$. Эти точки есть вблизи $\mathbf{x}_0$ по теореме о непрерывно дифференцируемых отображениях.
- $\det f'(\mathbf{x}) \neq 0$. Такие точки есть из непрерывности det.

Проверим, что в этой окрестности f не склеивает точки, что и будет означать его обратимость; пусть $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$, тогда:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{y} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}) + (f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0))\mathbf{h} + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$$

$$\|f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})\| \geqslant \underbrace{\left\|f'(\mathbf{x}_0)\right\| \|\mathbf{h}\|}_{\geqslant c\|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\left\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x})\mathbf{h}\right\|}_{\leqslant M\|\mathbf{h}\|\leqslant \frac{c}{2}\|h\|} - \underbrace{\left\|f'(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x}_0)\right\| \cdot \|\mathbf{h}\|}_{\leqslant \frac{c}{4}\|\mathbf{h}\|}$$
$$\geqslant \frac{c}{4}\|\mathbf{h}\|$$

Где $M\|\mathbf{h}\| \leqslant \frac{c}{2}\|\mathbf{h}\|$ потому, что:

$$M\|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\| \sup \left\|f'(\mathbf{z})-f'(\mathbf{x})\right\| \leqslant \sup\Big(\underbrace{\left\|f'(\mathbf{z})-f'(\mathbf{x}_0)\right\|}_{\leqslant \frac{c}{4}} + \underbrace{\|f(\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x})\|}_{\leqslant \frac{c}{4}}\Big) \leqslant \frac{c}{2}$$

■

Теорема 0.1.7. (О неявном отображении)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \underset{f}{\mapsto} f(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $f \in C^r$,
$(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathcal{O}:\ f(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $\det f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \neq 0$, тогда

- $\exists U(\mathbf{a})$, $\exists U(\mathbf{b})$, $\exists! \varphi : U(\mathbf{a}) \to U(\mathbf{b}) \in C^r$ такое, что $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a})\ f(\mathbf{x},\varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$
- $\varphi'(\mathbf{x}) = -(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x},\varphi(\mathbf{x})))^{-1} \cdot f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\varphi(\mathbf{x}))$

Доказательство.

- Подготовим несколько объектов, полезных для доказательства. Положим
$$T : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{m+n}$$
$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x},\mathbf{y}))$$
Производный оператор этого отображения в блочном виде выглядит следующим образом:
$$T' = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$
Он обратим, так как $\det T' = 1 \cdot \det f'_y \neq 0$. Тогда по теореме о локальной обратимости $\exists U(\mathbf{a},\mathbf{b})\colon T\big|_U$ — диффеоморфизм. Без ограничения общности будем считать, что $U = \tilde{P} \times Q$, где $\tilde{P} \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ открыты и $\mathbf{a} \in \tilde{P}$, $\mathbf{b} \in Q$. Будем обозначать $S = T^{-1}$ и $V = T(U)$ — открыто в $\mathbb{R}^{m+n}$ так как T — диффеоморфизм. Заметим, что T не меняет первую координату, то есть S тоже её не меняет, а значит, имеет вид $S(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, H(\mathbf{x},\mathbf{y}))$, где $H(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in C^r$, так как $S \in C^r$.

- Пусть $P = (\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}_n) \cap V$ — открытое в $\mathbb{R}^m$ множество (само множество из $\mathbb{R}^{m+n}$, но нулевые координаты отбросим, см. рисунок). Предъявим требуемое отображение:
$$\varphi(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x},\mathbf{0})$$

- Проверим, что φ подходит: $f \in C^r$, так как $H \in C^r$. Проверим $f(\mathbf{x},\varphi(\mathbf{x})) = 0$ и единственность:
$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x},\varphi(\mathbf{x}))) = T(\mathbf{x},\varphi(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x},H(\mathbf{x},\mathbf{0})) = T(S(\mathbf{x},\mathbf{0})) = (\mathbf{x},\mathbf{0})$$
С другой стороны, если $f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, то:
$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) = S(T(\mathbf{x},\mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, f(\mathbf{x},\mathbf{y})) = S(\mathbf{x},\mathbf{0}) = H(\mathbf{x},\mathbf{0})$$
То есть $\mathbf{y} = H(\mathbf{x},\mathbf{0})$, из чего следует, что φ единственно.

- Проверим второй пункт теоремы, вычислив производный оператор φ:

$$f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \varphi' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

  Откуда получаем:

$$f'_x + f'_y \cdot \varphi' = \mathbf{0} \Longrightarrow \varphi' = -(f'_y)^{-1} f'_x$$

■

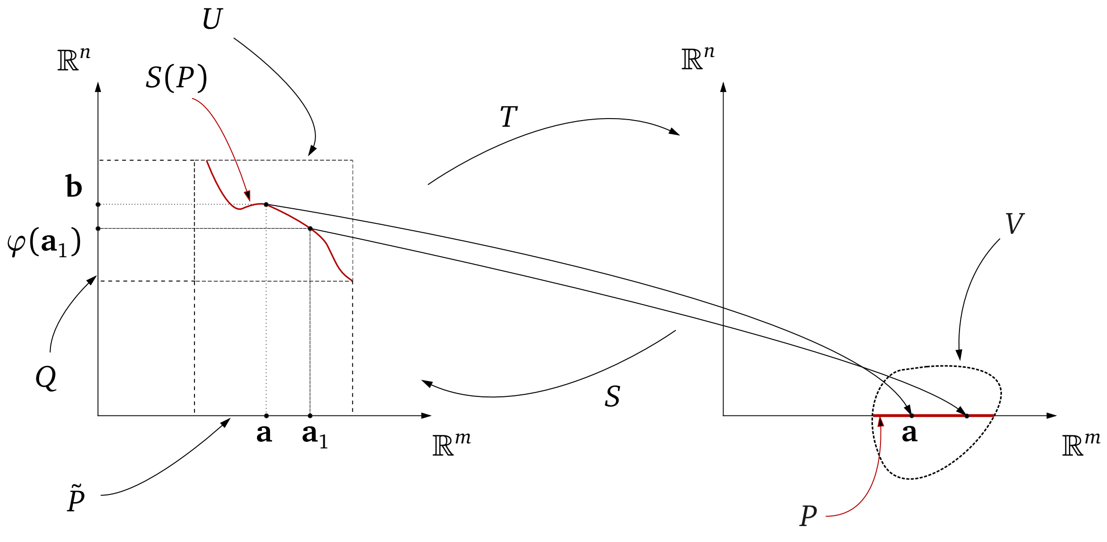

Рис. 2: Теорема о неявном отображении

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *k-мерным многообразием* в $\mathbb{R}^m$, если оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, $\forall \mathbf{x} \in M\ \exists U(\mathbf{x})\ \exists \varphi$ — гомеоморфизм: $U(\mathbf{x}) \underset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}^k$.

Определение. k-мерное многообразие $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *простым*, если оно гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, в предыдущем определении можно выбрать $U(\mathbf{x}) = M$.

Определение. Пара $\langle U(\mathbf{x}), \varphi \rangle$ из определения называется *картой*, или *параметризацией* многообразия в точке $\mathbf{x}$. Набор карт, который покрывает все M, называется *атласом*.

Определение. Простое k-мерное многобразие M называют *C^r-гладким*, если $\varphi \in C^r$ — параметризация M и $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \operatorname{rank} \varphi'(\mathbf{x}) = k$.

Теорема 0.1.8. (О задании гладкого многообразия системой уравнений)
Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant k < m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, тогда $\forall \mathbf{p} \in M$ эквивалентны утверждения:

- $\exists U(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap U$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие.

- $\exists \tilde{U}(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap \tilde{U}$ можно задать системой C^r-гладких уравнений, иначе говоря: $\exists f_1, \dots, f_{m-k} \colon \tilde{U} \to \mathbb{R} \in C^r$ такие, что $\mathbf{x} \in M \cap \tilde{U} \iff \forall i \ f_i(\mathbf{x}) = 0$, причем $\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независим.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть имеется параметризация $\varphi \colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \in C^r$, которая задает $M \cap U(\mathbf{p})$. Зафиксируем точку $t_0 = \varphi(\mathbf{p})$. Параметризация C^r гладкая, поэтому $\operatorname{rank} \varphi' = k$. Будем считать, что ранг реализуется на первых k строках. Рассмотрим проекцию $L \colon \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$. Из того, что первые k столбцов φ' линейно независимы, имеем невырожденность производного оператора отображения $L \circ \varphi$. Тогда по теореме о локальной обратимости $\exists W(t_0) \colon (L \circ \varphi)\big|_W$ — диффеоморфизм. Обозначим $V = (L \circ \varphi)(W)$. Тогда (см. рисунок) удобно интерпретировать $\varphi(W)$ как график отображения, заданного на V; $H \colon V \to \mathbb{R}^{m-k}$. Положим $\psi = (L \circ \varphi)^{-1}$, $\psi \in C^r$ по теореме о гладкости обратного отображения. Тогда вернемся к интерпретации графиком и посмотрим на точку $\mathbf{x} \in V$:

$$(\mathbf{x}, H(\mathbf{x})) = \varphi(\psi(\mathbf{x}))$$

Тогда $H \in C^r$ как композиция C^r-гладких отображений. φ гомеоморфизм, поэтому $\varphi(W)$ открыто в M. Тогда $\exists \tilde{U}$ открытое в $\mathbb{R}^m$ такое, что $\varphi(W) = M \cap \tilde{U}$. Рассмотрим теперь набор функций:

$$\begin{gathered} f_i \colon \tilde{U} \to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} \mapsto H_i(L(\mathbf{x})) - x_{k+i} \end{gathered}$$

для $i = 1 \dots m-k$. Тогда

$$\forall i = 1 \dots m{-}k \ \ f_i(\mathbf{x}) = 0 \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})){-}\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \in M \cap \tilde{U}$$

Осталось показать, что $\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независим. Для этого просто выпишем этот набор:

$$\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \dfrac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_k} & 0 & \cdots & -1_{k+i} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, он линейно независим.

$\Longleftarrow$ Пусть теперь имеется система уравнений f_i. Составим из f_i отображение $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-k}$. Поскольку набор градиентов линейно независим (будем считать, что ранг реализуется на последних $m-k$ столбцах), можно применить теорему о неявном отображении: $\exists P(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k), Q(\mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_m)$ и $\exists H \colon P \to Q$ такое, что

$$\forall (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \in P \ \ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)) \text{ — решение уравнения } f = \mathbf{0}$$

Построим теперь искомую параметризацию:

$$\begin{gathered} \varphi \colon P \to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, H(\mathbf{u})) \end{gathered}$$

Понятно, что φ подходит в качестве параметризации $M \cap (P \times Q)$. ∎

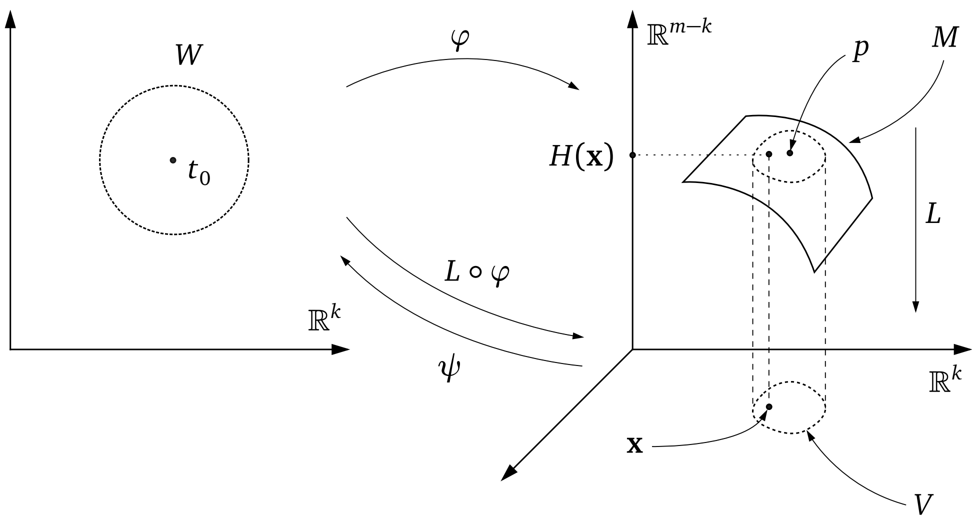

Рис. 3: Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

Следствие 0.1.9. (О двух параметризациях)
Пусть M — k-мерное простое C^r-гладкое многообразие, $\mathbf{p} \in M$, причем $C^r \ni \varphi_1 \colon \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$, $C^r \ni \varphi_2 \colon \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$ — параметризации $U(\mathbf{p}) \cap M$. Тогда φ_1 и φ_2 отличаются на диффеоморфизм, а именно, $\exists \psi \colon \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ — диффеоморфизм, причем $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$.

Доказательство. Будем считать, что невырожденность производных операторов параметризаций реализуется на первых k строках. Пусть L — проекция из доказательства предыдущей теоремы. Тогда, как и в предыдущей теореме, отображения $L \circ \varphi_1$, $L \circ \varphi_2$, и им обратные существуют и гладкие. Тогда заметим, что L обратимо (по крайней мере там, где обратимо $L \circ \varphi_1$). Положим тогда $\psi = (L \circ \varphi_2)^{-1} \circ (L \circ \varphi_1)$. В таком случае нетрудно видеть, что

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (L \circ \varphi_2)^{-1} \circ (L \circ \varphi_1) = \varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ \varphi_1) = \varphi_1$$

ψ обратим, потому что $\psi^{-1} = (L \circ \varphi_1)^{-1} \circ (L \circ \varphi_2)$. Гладкость ψ и ψ^{-1} следует из гладкости составных частей ψ. ■

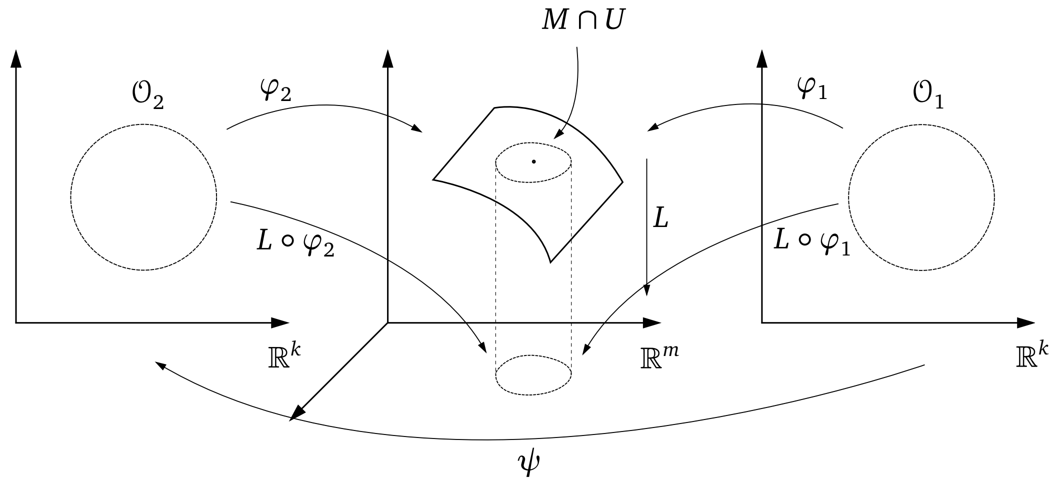

Рис. 4: Теорема о двух параметризациях

Определение. Пусть M — C^r-гладкое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{p} \in M$, $\varphi \colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация окрестности $U(\mathbf{p})$, причем $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$. Тогда *касательным пространством* к M в точке $\mathbf{p}$ называется $T_{\mathbf{p}}(M) = \operatorname{Im} \varphi'(\mathbf{a})$.

Теорема 0.1.10. (О корректности определения касательного пространства)
Касательное пространство не зависит от выбора параметризации.

Доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — две параметризации $U(\mathbf{p})$. В таком случае по теореме о двух параметризациях $\exists C^r \ni \psi \colon \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ такое, что $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$. В таком случае, поскольку ψ — диффеоморфизм, то есть имеет невырожденный производный оператор в $\mathbf{a}$, имеем $\operatorname{Im} \psi'(\mathbf{a}) = \mathbb{R}^k$. Тогда:

$$\operatorname{Im} \varphi_1'(\mathbf{a}) = \operatorname{Im} \varphi_2'(\mathbf{a}) \circ \psi'(\mathbf{a}) = \varphi_2'(\mathbf{a})(\mathbb{R}^k) = \operatorname{Im} \varphi_2'(\mathbf{a})$$

■

Теорема 0.1.11. (О касательном пространстве к гладкому пути)
Пусть M — гладкое многообразие. Тогда $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(M) \iff \exists$ гладкий путь $\gamma \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^m \colon \ \gamma([-1, 1]) \subseteq M$ такой, что $\gamma(0) = \mathbf{p}$ и $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

Доказательство.

- Подготовим среду для доказательства. Зафиксируем $C^r \ni \varphi \colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to M$ — параметризация M в какой-нибуль окрестности (не умаляя общности, во всем M). Вспомним в очередной раз отображение $L \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекцию первых k координат. Копируя рассуждения предыдущих теорем, приходим к выводу, что $L \circ \varphi$ и $\psi = (L \circ \varphi)^{-1}$ лежат в классе C^r.

$\Longrightarrow$ Пусть имеется вектор $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(M)$, построим путь, проходящий через точку $\mathbf{p}$ со скоростью $\mathbf{v}$. Пусть $\mathbf{p} = \varphi(t_0)$, положим $u = (\varphi'(t_0))^{-1}(\mathbf{v})$. По смыслу это та скорость, с которой нужно двигаться в $\mathcal{O}$, чтобы получить скорость $\mathbf{v}$ в $\varphi(\mathcal{O})$ (то есть "*прообраз скорости*"). Построим сам путь:

$$\gamma(s) = \varphi(t_0 + su)$$

Проверим его свойства:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \varphi(t_0) = \mathbf{p} \\ \gamma'(s)\big|_{s=0} &= (\varphi'(t_0+su)\cdot u)\big|_{s=0} \\ &= \varphi'(t_0)\cdot u = (\varphi'(t_0)\cdot(\varphi'(t_0)^{-1})(\mathbf{v})) = \mathbf{v}\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Пусть теперь имеется гладкий путь $\gamma\colon[-1,1]\to M$ такой, что $\gamma(0)=\mathbf{p}$ и $\gamma'(0)=\mathbf{v}$. Поймем, почему вектор $\mathbf{v}$ лежит в $T_{\mathbf{p}}(M)$. Для этого воспользуемся подготовленным арсеналом и пустим путь "*по кругу*":

$$\gamma(s) = \varphi(\psi(L(\gamma(s))))$$

Проще всего понять это соотношение, внимательно посмотрев на картинку. Корректность же следует из свойств используемых отображений, в частности потому, что L обратимо (на том же множестве, где обратимо $L\circ\varphi$). Теперь:

$$\gamma'(0) = \varphi'(\psi(L(\gamma(0)))\cdot(\ldots) = \varphi'(\psi(L(\mathbf{p})))\cdot(\ldots) = \varphi'(t_0)\cdot(\ldots)\in T_{\mathbf{p}}(M)$$

■

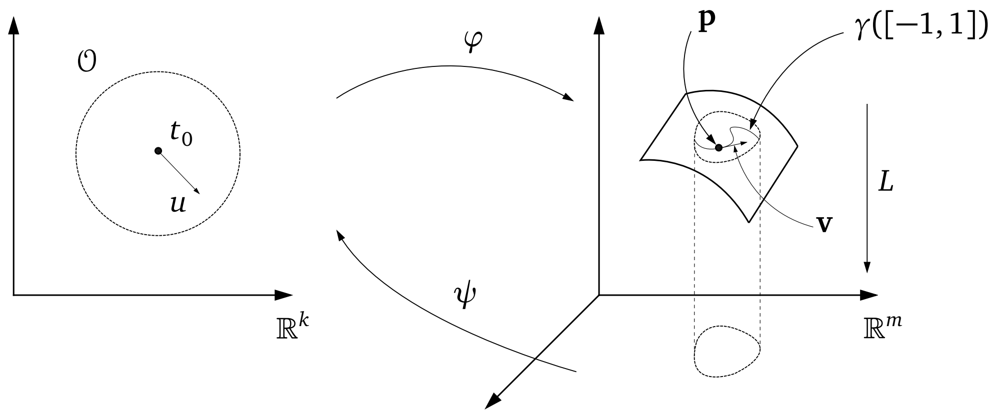

Рис. 5: Теорема о касательном пространстве к гладкому пути

Теорема 0.1.12. (О касательном пространстве к графику функции)
Афинное касательное пространство к графику $C^r \ni f : \mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ в точке $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ задается уравнением

$$y - f(\mathbf{x}_0) = f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}^1-\mathbf{x}_0^1)+\ldots+f'_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}^m-\mathbf{x}_0^m)$$

Доказательство. Для доказательства построим параметризацию:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))\in C^r$$

Далее вычислим образ производного оператора $\varphi'(\mathbf{x}_0)$:

$$\varphi'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ f'_{x_1}(\mathbf{x}_0) & f'_{x_2}(\mathbf{x}_0) & f'_{x_3}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f'_{x_m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы максимален и равен m. Рассмотрим образы стандартных базисных векторов:

$$\varphi'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ f'_{x_k}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Их m штук и они линейно независимы, поэтому составляют базис образа оператора. Тогда нетрудно понять, что касательное пространство задается уравнением

$$y = f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}^1 + \ldots + f'_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}^m$$

Тогда после сдвига на $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ получаем нужное афинное кп. ∎

Теорема 0.1.13. (О касательном пространстве к поверхности уровня)
Афинное касательное пространство к поверхности уровня функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задается уравнением

$$f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(y_0)(y - y_0) + f'_z(z_0)(z - z_0) = 0$$

Доказательство. Поступим аналогично предыдущей теореме. Поверхность уровня задается уравнением:

$$f(x, y, z) = C$$

Предполагая, что $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, применим теорему о неявном отображении и получим $z = z(x, y)$ в некоторой окрестности (x_0, y_0). Тогда рассмотрим параметризацию:

$$\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y))$$

Вычислим проиводный оператор:

$$\varphi'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z'_x(x_0, y_0) & z'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

На базисных векторах оператор принимает значения

$$\varphi'(x_0, y_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\z'_x(x_0, y_0)\end{pmatrix} \quad \varphi'(x_0, y_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\z'_y(x_0, y_0)\end{pmatrix}$$

которые, очевидно, линейно независимы. Эти два вектора удовлетворяют уравнению

$$f'_x \cdot x + f'_y \cdot y + f'_z \cdot z = 0$$

потому, что

$$\begin{aligned} f'_x \cdot 1 + f'_y \cdot 0 + f'_z \cdot z'_x = f(x, y, z(x, y))'_x = C'_x = 0 \\ f'_x \cdot 0 + f'_y \cdot 1 + f'_z \cdot z'_y = f(x, y, z(x, y))'_y = C'_y = 0 \end{aligned}$$

Значит, из соображений размерности, это уравнение и задает касательное пространство. Осталось только сместить его, чтобы получить афинное. ■