Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — *пространство линейных отображений* из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются *операторами*

Определение. *Нормой* на множестве X называется отображение $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = 0$

ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$

iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Определение. *Нормированным пространством* называется пара $\langle X, \| \ \| \rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)
Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ — нормы на V. Тогда

$$\exists c, C > 0\colon \ c\,\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant C\,\|\mathbf{x}\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n\| \stackrel{def}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$.

i) $\| \ \|$ — норма.

- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2} \geqslant 0$ — очевидно
- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha c_i)^2} = \alpha \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$ — очевидно

- $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(c_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}c_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$ — неравенство Минковского

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\|\ \|$.

$$\|x_1e_1 + \ldots + x_ne_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|x_ie_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|e_i\|_1 \leqslant_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|_1^2} = c\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

тогда

$$|\,\|\mathbf{x}\|_1 - \|\mathbf{y}\|_1\,| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 \leqslant c\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

Поэтому $\|\ \|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$
$$c_2 := \max_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$

Ни c_1, ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1 \|\mathbf{x}\| \geqslant c_1\,\|\mathbf{x}\|$$
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1 \|\mathbf{x}\| \leqslant c_2\,\|\mathbf{x}\|$$

что и доказывает утверждение теоремы.

■

Определение. *Нормой оператора* называется отображение $\|\ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{A}\| \stackrel{def}{=} \sup_{\mathbf{x}\in S^m}\|\mathcal{A}x\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup\limits_{\|x\|=1}\mathcal{A}\mathbf{x} = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\mathcal{A}\mathbf{x}$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)
$\|\ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{x}|\,\|\mathcal{A}e_i\| \leqslant_{\text{КБШ}} \|\mathbf{x}\|\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{A}e_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|\mathcal{A}\| = 0 \iff \forall\mathbf{x}\in S^n\ \mathcal{A}\mathbf{x} = 0 \iff \mathcal{A} = 0$. Неотрицательность очевидна.

ii) $\|\alpha\mathcal{A}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \|\alpha\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} |\alpha| \, \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \alpha \, \|\mathcal{A}\|$

iii) $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x} \leqslant \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\mathbf{x}$

■

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных опрераторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{A}\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| = \left\| \mathcal{A}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right) \right\| \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leqslant \|\mathcal{B}\| \, \|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x}) \\
&= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \left(\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right)\right) \\
&\leqslant \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right) \\
&\leqslant \|A\| \, \|B\|
\end{aligned}$$

■

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на $\mathbb{R}^m$

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра. ■

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\Longleftrightarrow \exists c > 0 \ \forall \mathbf{x} \ \ \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathbf{x}\|$, причем $\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}$

Доказательство. $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c\,\|\mathbf{x}\| \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ обратим.
$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c\,\|\mathbf{x}\| \Longleftrightarrow \|\mathbf{y}\| \geqslant c\left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \Longleftrightarrow \left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}\|\mathbf{y}\|$ ■

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)
$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| < \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

ii) $\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|}$

iii) $\left\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|} \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A}-\mathcal{B})\mathbf{x}\| \geqslant \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|\right)\|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \left\|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\|$$

Далее по лемме получаем обратимость $\mathcal{B}$ и оценку на его норму.

iii)

$$\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathcal{B}^{-1}$$

$$\left\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \|\mathcal{B}-\mathcal{A}\| \left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant_{\text{i)}} \frac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|} \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|$$

■

Следствие 1.1.8. Множество Ω_m открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \| \ \| \rangle$

1.2 Дифференцируемость и дифференциал отображений

Определение. Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω — область в $\mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $r : \Omega \to \mathbb{R}^n$, такие что

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

Где $r(\mathbf{h})$ удовлетворяет уловию

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

или, что то же самое

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|$$

Где $\alpha(\mathbf{h})$ бесконечно малое, то есть

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \alpha(\mathbf{h}) = 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Замечание. Функции α, r из определения дифференцируемости зависят не только от $\mathbf{h}$, но и от $\mathbf{x}$.

Определение. Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом f в точке* $\mathbf{x}$ и обозначать $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \mathcal{A}$.

Замечание. Отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f$, действующее из $\mathbb{R}^m$ в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом f*.

Определение. Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения f в точке* $\mathbf{x}$.

Теорема 1.2.1. (Единственность производной)
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируема в $\mathbf{x}$, тогда существует единственный производный оператор f в точке $\mathbf{x}$.

Доказательство. Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(t\mathbf{z})\,\|t\mathbf{z}\|,\ t\mathbf{z} \to 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t),\ t \to 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t),\ t \to 0 \Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t}$$

■

Утверждение 1.2.2. (Производный оператор линейного отображения)
Пусть $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда $\mathcal{A}$ дифференцируемо в каждой точке и $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\mathcal{A} = \mathcal{A}$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

Утверждение 1.2.3. (Линейность производного оператора)
Пусть $f,\ g : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в $\mathbf{x}$. Тогда отображение $\alpha f + \beta g$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f + \beta \mathrm{d}_{\mathbf{x}} g$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) \\
&= [(\alpha f)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\alpha f)(\mathbf{x})] + [(\beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\beta g)(\mathbf{x})] \\
&= [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f + o] + [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} g + o] = \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f + \mathrm{d}_{\mathbf{x}} g + o
\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.4. (Дифференцируемость композиции)
Пусть $f : \Omega \to \Omega_1$, $g : \Omega_1 \to \mathbb{R}^k$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в $\mathbf{x}$, тогда $F = g \circ f$ дифференцируема в $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} F = \mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g \cdot \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
g(f(\mathbf{x}+\mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{x}) + [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h})) \\
&= \{\mathbf{v} = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h})\} \\
&= g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x})) + [\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]\mathbf{v} + \widetilde{r}(\mathbf{v}) \\
&= g(f(\mathbf{x})) + [\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g][\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} + [\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g] r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Осталось показать, что $[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g] r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{h}\|)$.

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g] r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v})\right\| \leqslant \left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g] \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|} \|r(\mathbf{h})\|\right\| + \widetilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|)\,\|\mathbf{v}\|$$

Обозначим $\mathbf{w} = \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$, причем $\|\mathbf{w}\| = 1$. Из определения нормы оператора получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]\mathbf{w}\right\| \leqslant \left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g\right\|$$

Кроме того, $\|\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\|\,\mathbf{h} + \alpha(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$. Окончательно получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g] r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v})\right\| \leqslant \left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g\right\| \|r(\mathbf{h})\| + \widetilde{\alpha}(\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \cdot \|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{v}\| \leqslant \beta(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой $\beta(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. ■

Определение. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$, тогда отображения

$$f_i(x) \overset{def}{=} \langle f(x), \mathbf{u}_i \rangle$$

где $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, называются *координатными функциями*.

Теорема 1.2.5. (Дифференцируемость координатных функций)
Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$f \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x} \iff \forall i \ f_i \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x}$$

причем

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$\Longleftarrow$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} g_i(f_i(\mathbf{x}))$$

где $g_i(t) = t\mathbf{u}_i$ — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда f дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

$\Longrightarrow$ f_i дифференцируемы как композиции f и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$ — область, тогда *производной по направлению* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}$ называется

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \lim_{\substack{t \to 0 \\ \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует.

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^m$, тогда *частной производной f по k-й переменной* называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} f'_k \overset{def}{=} D_k f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

Утверждение 1.2.6. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\exists D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u}$$

Доказательство. Для любых $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} &= \frac{[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f](t\mathbf{u}) + r(t\mathbf{u})}{t} \\ &= [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} + \frac{r(t\mathbf{u})}{t} \leqslant [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} + \frac{\alpha(\mathbf{u})\,\|t\mathbf{u}\|}{t} = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u})\,\|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.7. (Вид матрицы Якоби) Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_1 f_n(\mathbf{x}) & D_2 f_n(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{e}_i)$ — базис $\mathbb{R}^m$, $(\tilde{\mathbf{e}}_i)$ — базис $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\begin{aligned}[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]_{i,j} = \langle [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = \left\langle \frac{[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f](t\mathbf{e}_i)}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle \\ = \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-f_j(\mathbf{x})}{t} = D_i f_j(\mathbf{x})\end{aligned}$$

■

Утверждение 1.2.8. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{u} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

■

Утверждение 1.2.9. (Необходимое условие дифференцируемости)
Если f дифференцируемо в $\mathbf{x}$, то существуют все частные производные в точке $\mathbf{x}$, причем матрица Якоби f в точке $\mathbf{x}$ совпадает с матрицей, составленной из матриц якоби f_i в точке $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}(\mathbf{x}) \right)$$

Доказательство. Подставим в определение дифференцируемости $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) &= f(\mathbf{x}) + [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f](t\mathbf{e}_k) + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\| \\ &= f(\mathbf{x}) + t[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{e}_k + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

Отсюда по определению частной производной получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k)-f(\mathbf{x})}{t} = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{e}_k$$

■

Теорема 1.2.10. (Достаточное условие дифференцируемости)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $B(\mathbf{a}) \subseteq \Omega$, В $B(\mathbf{a})$ существуют все частные производные, причем они непрерывны в точке $\mathbf{a}$. Тогда f дифференцируемо в точке $\mathbf{a}$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $m = 2$. Схема, примененная в доказательстве тривиально обобщается на произвольные m.

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= (f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2)) + (f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)) \\
&\overset{\text{Лагранж}}{=} f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&+ \left[\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2) - f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\to 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} + \underbrace{(f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) - f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\to 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|
\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.11. Пусть $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, f, g, λ дифференцируемы в $\mathbf{a}$. Тогда λf, $\langle f, g \rangle$ дифференцируемы в $\mathbf{a}$, причем

- $[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}(\lambda f)]\mathbf{h} = [\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\lambda]\mathbf{h} \cdot f(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f]\mathbf{h}$
- $[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\langle f, g\rangle]\mathbf{h} = \langle [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a})\rangle + \langle f(\mathbf{a}), [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} g]\mathbf{h}\rangle$

Доказательство.

- Докажем покоординатно:

$$\begin{aligned}
&(\lambda f_i)(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \cdot f_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= (\lambda(\mathbf{a}) + \mathrm{d}_{\mathbf{a}}\lambda\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) \cdot (f_i(\mathbf{a}) + \mathrm{d}_{\mathbf{a}} f_i \mathbf{h} + \beta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= [\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\lambda] \cdot f_i(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f_i]\mathbf{h} + o(\mathbf{h})
\end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned}
[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\langle f, g\rangle]\mathbf{h} &= \mathrm{d}_{\mathbf{a}}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i\right]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_{\mathbf{a}}[f_i \cdot g_i]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} ([\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a}) + f_i(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} g_i]\mathbf{h}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} ([\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a})) + \sum_{i=1}^{n} (f_i(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} g_i]\mathbf{h}) = \langle [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a})\rangle + \langle f(\mathbf{a}), [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} g_i]\mathbf{h}\rangle
\end{aligned}$$

■

Определение. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Тогда *градиентом* φ в точке $\mathbf{x}$ называется вектор

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Теорема 1.2.12. (Экстремальное свойство градиента)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируемо в $\mathbf{x}$, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq 0$ Тогда

$$\mathbf{l} = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$$

— направление наибольшего возрастания f, то есть

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{h}\| = 1 \Longrightarrow D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) \leqslant D_{\mathbf{l}} f(\mathbf{x})$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{h} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \leqslant \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \, \|\mathbf{h}\| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|$$

∎

1.3 Теоремы Лагранжа для отображений

Теорема 1.3.1. (Лагранжа для векторнозначных функций)
Пусть $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$, дифференцируемо на (a,b). Тогда

$$\exists c \in (a,b):\ \ \|f(b)-f(a)\| \leqslant \left\|f'(c)\right\| |b-a|$$

Доказательство. При $f(a)=f(b)$ утверждение тривиально. Положим $\varphi(x) = \langle f(b)-f(a), f(t)-f(a)\rangle$. Тогда

$$\varphi(a)=0, \varphi(b) = \langle f(b)-f(a), f(b)-f(a)\rangle = \|f(b)-f(a)\|^2$$

Применим теорему Лагранжа для φ:

$$\exists c \in (a,b):\ \ \|f(b)-f(a)\|^2 = \varphi(b)-\varphi(a) \underset{\text{Лагранж}}{=} \varphi'(c)|b-a| = \langle f(b)-f(a), f'(c)\rangle \cdot |b-a|$$
$$\underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \|f(b)-f(a)\| \cdot \left\|f'(c)\right\| |b-a| \Longrightarrow \|f(b)-f(a)\| \leqslant \left\|f'(c)\right\| |b-a|$$

■

Теорема 1.3.2. (Лагранжа для отображений)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, дифференцируемо на Ω, $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subseteq \Omega$, тогда

$$\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f\| \cdot \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$$

Доказательство. $g = f(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))$ для $t \in [0,1]$ — дифференцируемо как композиция дифференцируемых функций. По предыдущей теореме

$$\exists t_0 \in (0,1):\ \ \|g(1)-g(0)\| \leqslant \left\|g'(t_0)\right\| = \left\|f'(\mathbf{a}+t_0(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\right\|$$
$$\leqslant \left\|f'(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\right\| \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f\| \cdot \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$$

■

1.4 Формула Тейлора

Определение. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, Ω — область, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Определим частные производные высшего порядка по индукции:

$$D_{i_1,\dots,i_k} f \stackrel{def}{=} D_{i_k}(D_{i_1,\dots,i_{k-1}} f)$$

Теорема 1.4.1. (О независимости ч.п. от порядка дифференцирования)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω — область, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\exists B((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega$, причем в $B((x_0, y_0), r)$ существуют $D_{12}f$ и $D_{21}f$, непрерывные в точке (x_0, y_0). Тогда $D_{12}f(x_0, y_0) = D_{21}f(x_0, y_0)$

Доказательство.

$$\alpha(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда $\alpha(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) &\underset{\text{Лагранж}}{=} \alpha'(\tilde{h})h = [f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0)]h \\ &\underset{\text{Лагранж}}{=} f''_{xy}(x_0 + \tilde{h}, y_0 + \tilde{k})hk \end{aligned}$$

Аналогично введем $\beta(k)$:

$$\beta(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta(k) = \beta(k) - \beta(0) &\underset{\text{Лагранж}}{=} \beta'(\bar{k})k = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \bar{k}) - f'_y(x_0, y_0 + \bar{k})]k \\ &\underset{\text{Лагранж}}{=} f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk \end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha(h) = \beta(k)$. Осталось перейти к пределу при $(h, k) \to (0, 0)$ и воспользоваться непрерывностью частных производных в точке (x_0, y_0). ■

Следствие 1.4.2. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\exists B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, причем в $B(\mathbf{x}, r)$ для любой перестановки индексов $\pi \in S_k$ существуют и непрерывны в $\mathbf{x}$ частные производные $D_{i_{\pi_1},\dots,i_{\pi_k}} f$. Тогда все они совпадают в точке $\mathbf{x}$.

Доказательство. Доказательство сводится к координатным функциям, поэтому считаем, что $n = 1$. Предыдущая теорема дает возможность менять местами пары индексов. Осталось заметить, что группа перестановок порождается транспозициями. ■

Определение. Множество функций $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, у которых все частные производные порядка не более r существуют и непрерывны на Ω, будем обозначать $C^r(\Omega)$

Определение. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$, тогда набор $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ будем называть *мультииндексом*. Используются обозначения $|k| = k_1 + \ldots + k_m$,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f \stackrel{def}{=} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} f$$

Лемма 1.4.3. (Полиномиальная формула)

$$(a_1 + \ldots + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{m} \ldots \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_r} = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$$

Доказательство. Первое равенство очевидно по правилам раскрытия скобок. Докажем второе равенство индукцией по r.

- Для $r = 1$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + \ldots + a_m)^{r+1} = (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (a_1 + \ldots + a_m)^r \\
&= (a_1 + \ldots + a_m) \cdot \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1+1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m+1} \\
&= [\text{переобозначим } k_i = k_i + 1 \text{ в } i\text{-й сумме}] \\
&= \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_1 \geqslant 1}} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_m \geqslant 1}} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= [\text{добавим все пропущенные слагаемые с } k_i = 0] \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot (k_1 + k_2 \ldots + k_m)}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}
\end{aligned}$$

∎

Лемма 1.4.4. (О дифференцировании сдвига)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, Ω — область, $f \in C^r(\Omega)$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \in [-1, 1]$ $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in \Omega$, тогда для отображения $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ и для $k \leqslant r$ выполнено

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} \mathbf{h}^j \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(\mathbf{a})$$

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно показать, что

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^k \cdot f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

Докажем по индукции:

- Для $k = 0$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(k)}(t) = (\varphi^{(k-1)}(t))' &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\right)' \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})
\end{aligned}$$

■

Теорема 1.4.5. (Формула Тейлора в форме Лагранжа)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists\theta \in (0,1):\ f(\mathbf{x}) = \sum_{|k|\leqslant r} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ для $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Выпишем формулу Тейлора в форме Лагранжа для φ:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}$$

Пользуясь леммой о дифференцировании сдвига, получаем искомое равенство. ■

Теорема 1.4.6. (Формула Тейлора в форме Пеано)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists\theta \in (0,1):\ f(\mathbf{x}) = \sum_{|k|\leqslant r} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Проверим это:

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r} = \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1} \ldots (\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r}$$

$$= \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_1}} \dots \frac{(\mathbf{x}_m-\mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$$

Все дроби вида

$$\frac{(\mathbf{x}_i-\mathbf{a}_i)^{k_i}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_i}}$$

меньше единицы, выражения вида

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}))$$

постоянны. Поэтому

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_1}} \dots \frac{(\mathbf{x}_m-\mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \to 0$$

При $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \to 0$. ■

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Поточечная и равномерная сходимости последовательностей функций

Замечание. *Здесь и далее запись вида $f \to \perp$ будет означать, что f сходится. Знак $\perp$ используется, если не важно (или не известно), к чему сходится f.*

Определение. $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *сходится поточечно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на E, если

$$\forall x_0 \in E \;\; f_n(x_0) \to f(x_0)$$

иными словами, раскрывая определение сходимости последовательности:

$$\forall x_0 \in E \;\; [\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\forall n > N \;\; |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \to f$.

Примеры. TBD

Определение. $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на E, если

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

или, раскрывая описание супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\forall n > N \; [\forall x \in E \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightrightarrows f$.

Замечание. Из равномерной сходимости очевидным образом следует поточечная:

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \to f$$

Про сходимость мы значем очень многое для случая метрических пространств. А нельзя ли переформулировать новые определения так, чтобы они оказались обычной сходимостью, просто в хитром метрическом пространстве?

Предложение. (Метрическое пространство ограниченных функций)
Положим

$$\mathcal{F} \overset{def}{=} \{X \to \mathbb{R} \mid f \text{ограничено}\}$$

На этом множестве тривиально задается структура линейного пространства:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Оказывается, можно ввести **метрику** на $\mathcal{F}$, сходимость по которой есть равномерная сходимость. Для $f, g \in \mathcal{F}$ положим

$$\rho(f,g) \overset{def}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Проверим, что это — метрика на $\mathcal{F}$

i) Неотрицательность очевидна. Равенство нулю может выполнится только для равных функций.

ii) Симметричность очевидна.

iii) Проверим неравенство треугольника. Применим техническое описание супремума для $\rho(f_1, f_2)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \colon \; \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)|$$

Далее

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \; \exists x \colon \; \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)| &\leqslant |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \\ &\leqslant \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_3(y)| + \sup_{y \in X} |f_2(y) - f_3(y)| \\ &= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3) \end{aligned}$$

Получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \rho(f_1, f_2) - \varepsilon \leqslant \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Откуда непосредственно следует

$$\rho(f_1, f_2) \leqslant \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Осталось только понять, что теперь означает сходимость по этой метрике. Пусть (f_n) — последовательность в $\mathcal{F}$, сходящаяся к f по метрике ρ:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \; \forall n > N \;\; \rho(f_n, f) < \varepsilon$$

Раскроем значение ρ:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \colon \; \forall n > N \;\; [\forall x \in X \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

А это — обычное определение равномерной сходимости!

Подобную конструкцию, по всей видимости, не получится ввести для поточечной сходимости. Зато, можно построить хаусдорфово топологическое пространство, в котором сходимость будет означать поточечную сходимость.

Предложение. (Топологическое пространство ограниченных функций)
Введем на $\mathcal{F}$ топологию, порожденную следующими множествами:

$$U_\varepsilon(f)_{x_1,\dots,x_n} \overset{def}{=} \{g : X \to \mathbb{R} \mid \forall i \ \ |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}$$

Поймем теперь, что означает сходимость в этом топологическом пространстве:

$$f_n \to f \iff \forall U_\varepsilon(f)_{x_1,\dots,x_n} \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n > N \ \ f_n \in U_\varepsilon(f)_{x_1,\dots,x_n}$$

Что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n > N \ \ \forall i \ \ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Что как раз и есть поточечная сходимость! Просто запись вида

$$[\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0] \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n > N \ \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

В этом пространстве обретает вид

$$[\forall U_\varepsilon(f)_{x_0}] \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n > N \ \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1. (Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости)

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Обычное свойство всех последовательностей, сходящихся по метрике (если все f_n и f лежат в $\mathcal{F}$). Общее доказательство такое:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longleftarrow$ Зафиксируем x. Тогда $f_n(x)$ — обычная фундаментальная вещественная последовательность. Тогда, так как $\mathbb{R}$ — полное, получаем

$$\forall x \ \exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Посмотрим на фундаментальность f_n:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n, m > N \ \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

и перейдем к пределу $m \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}\colon \ \forall n > N \ \ [\forall x \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Что и есть определение равномерной сходимости.

■

Примеры. TBD

2.2 Теоремы о равномерно сходящихся функциональных последовательностях

Теорема 2.2.1. (Стокс-Зейдель)
Пусть $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, X — топологическое пространство, f_n непрерывны в $c \in E$, и $f_n \rightrightarrows f$ на X. Тогда f непрерывна в c.

Доказательство. Для любых n выполнено

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$$

Воспользуемся равномерной сходимостью: выберем n таким, чтобы

$$|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$$
$$|f_n(y)-f(y)| < \varepsilon$$

Теперь воспользуемся непрерывностью f_n: выберем такую окрестность $U(c)$, чтобы $\forall x, y \in U(c)$

$$|f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon$$

Тогда

$$|f(x)-f(y)| < 3\varepsilon$$

что и означает непрерывность f в точке c. ■

Определение. Будем говорить, что f_n сходится *локально равномерно* к f на X, если

$$\forall x \in X \ \exists U(x): \ f_n \rightrightarrows f \text{ на } U(x)$$

Замечание. Для выполнения условия теоремы Стокса-Зейделя достаточно равномерной сходимости на некоторой окрестности c.

Замечание. Для того, чтобы f было непрерывным на X, достаточно, чтобы f_n локально равномерно на X сходилось к f.

Теорема 2.2.2. (О предельном переходе под знаком интеграла)
Пусть $f_n \in C([a,b])$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd}
f_n \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\int"] & f \arrow[d, "\int"] \\
\int_a^b f_n \arrow[r, dashed, "n\to+\infty"] & \int_a^b f
\end{tikzcd}$$

Доказательство. f непрерывна на $[a,b]$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Тогда

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b-a|$$

Из равномерной сходимости имеем:

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

тогда

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b-a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

■

Теорема 2.2.3. (Правило Лейбница)
$f : [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \to \mathbb{R}$, $\exists f'_y$, f'_y, f непрерывны. Пусть

$$\phi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx$$

Тогда ϕ дифференцируемо на $[y_1, y_2]$ и

$$\phi'(y) = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

Доказательство.

$$\frac{\phi(y+\frac{1}{n}) - \phi(y)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\int_{x_1}^{x_2} \left(f\left(x, y+\frac{1}{n}\right) - f(x,y)\right)dx \underset{\text{Лагранж}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f'_y\left(x, y+\frac{\theta}{n}\right)dx$$

Обозначим

$$g_n(x,y) = f'_y\left(x, y+\frac{\theta}{n}\right)$$

f'_y непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывна на нём. Воспользуемся этим:

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall n\colon \frac{1}{n} < \delta\ \forall x\quad \left|f'_y\left(x, y+\frac{1}{n}\right) - f'_y(x,y)\right| < \varepsilon$$

Отсюда получаем по определению

$$g_n(x,y) \rightrightarrows f'_y(x,y) \text{ на } [x_1, x_2]$$

Воспользуемся теоремой о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_1}^{x_2} g_n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

Понятно, что вместо последовательности $\frac{1}{n}$ можно рассматривать любую последовательность h_n, сходящуюся к 0. То есть

$$\phi'(y) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\phi(y+h_n)-\phi(y)}{h_n} = \int_{x_1}^{x_2} f_y'(x,y)dx$$

■

Теорема 2.2.4. (О предельном переходе под знаком производной)
$f_n \in C^1([a,b])$, $f_n \to f$ поточечно на $\langle a,b\rangle$, $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a,b\rangle$. Тогда

- $f \in C^1([a,b])$
- $f' = \varphi$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "n\to+\infty"] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & f \arrow[d, dashed, "\mathrm{d}"] \\ f_n' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \varphi \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle$, тогда $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0,x_1]$. Тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Откуда

$$f(x_1)-f(x_0) \xleftarrow[n\to+\infty]{} f_n(x_1)-f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

То есть

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi = f(x_1)-f(x_0)$$

Тогда f — первообразная φ. φ непрерывна по теореме Стокса-Зейделя. Получаем, что $f \in C^1([a,b])$ и $f' = \varphi$. ■

2.3 Равномерная сходимость функциональных рядов

Определение. Пусть $u_n \colon E \to \mathbb{R}$, тогда *функциональным рядом* будем называть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *сходится поточечно* на E, если $S_N(x) \to S(x)$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно* на E, если $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$.

Замечание. Из равномерной сходимости следует поточечная.

Лемма 2.3.1. (Об остатке функционального ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows 0 \iff R_N(x) \rightrightarrows 0$

Доказательство. $\sup\limits_{x\in E} |R_{N+1}(x)| = \sup\limits_{x\in E} |S(x) - S_N(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ ∎

Лемма 2.3.2. (Необходимое условие равномерной сходимости ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \implies u_n(x) \rightrightarrows 0$

Доказательство.

$$\sup_{x\in E} |u_N(x)| = \sup_{x\in E} |R_N(x) - R_{N+1}(x)| \leqslant \sup_{x\in E} |R_N(x)| + \sup_{x\in E} |R_{N+1}(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

∎

Теорема 2.3.3. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
$u_n \colon E \to \mathbb{R}$, $\exists c_n \colon \forall n, x \quad |u_n(x)| \leqslant c_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n \to \perp$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$.

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \iff R_N(x) \rightrightarrows 0 \iff \sup_{x\in E} |R_N(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$
$$\iff \sup_{x\in E} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x)\right| \leqslant \sup_{x\in E} \left|\sum_{n=N}^{+\infty} c_n\right| = \left|\sum_{n=N}^{+\infty} c_n\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

∎

Теорема 2.3.4. (Критерий Больцано-Коши сходимости функционального ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x) \iff \forall \varepsilon \; \exists N \colon \; \forall m, n > N \quad \sup\limits_{x\in E} |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство. Это обычный критерий Больцано-Коши для $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ ■

Теорема 2.3.5. (Стокс-Зейдель)
$u_n\colon E \to \mathbb{R}$, u_n непрерывны в $x_0 \in E$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$, тогда $S(x)$ непрерывна в x_0.

Доказательство. $\forall N$ $S_N(x)$ непрерывна в x_0 как конечная сумма непрерывных функций. Тогда по теореме Стокса-Зейделя для функциональных последовательностей $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$, $S_N(x)$ непрерывны в $x_0 \Longrightarrow S(x)$ непрерывна в x_0. ■

Теорема 2.3.6. (Интегрирование функциональных рядов)
$u_n \in C([a,b])$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

иначе говоря:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

Доказательство. $S \in C([a,b])$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Применим аналогичную теорему для функциональных последовательностей к $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$:

$$\int_a^b S_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b S(x)\,dx$$

в левой части интеграл и сумму можно переставлять местами (так как сумма конечная). Поэтому

$$\sum_{n=1}^{N} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b S_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b S(x)\,dx$$

Слева стоят частичные суммы обычного числового ряда. Поэтому по определению сходимости чисового ряда имеем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

■

Теорема 2.3.7. (Дифференцирование функциональных рядов)
$u_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \to S(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a,b\rangle$,
тогда $S \in C^1(\langle a,b\rangle)$, причем $S'(x) = \varphi(x)$.

Доказательство. Введем функциональную последовательность: $S_N(x) \to S(x)$. Поскольку $S_N(x)$ — конечные суммы непрерывно дифференцируемых функций, $S_N(x) \in C^1(\langle a,b \rangle)$, причем $S_N'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a,b\rangle$. Тогда по аналогичной теореме для функциональных последовательностей получаем требуемое. ■

Теорема 2.3.8. (О предельном переходе в функциональных рядах)
$u_n \colon E \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E, $\forall n\ \exists a_n = \lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$ на E. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Иначе говоря:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Доказательство. Обозначим $S_N^a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Проверим критерий Больцано-Коши для $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leqslant |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

Поскольку S_{n+p}^a и $S_{n+p}(x)$ просто конечные суммы, в них спокойно можно переставлять предел и сумму. Поэтому найдется такая окрестность точки x_0, что $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \varepsilon$. Аналогично поступим с третьим слагаемым. Из критерия Больцано-Коши получаем такое N, что для $\forall n, m > N$ $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Таким образом имеем:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| < 3\varepsilon$$

Мы доказали сходимость ряда a_n. Проверим второе утверждение теоремы. Положим

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \neq x_0 \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

Все u_n, очевидно, непрерывны в x_0. Если мы проверим, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E \cup \{x_0\}$, то по теореме Стокса-Зейделя $\tilde{S}$ будет непрерывной, что означает

$$\lim_{x\to x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

в левой части x_0 никогда не подставляется в $\tilde{S}$, поэтому

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Осталось проверить, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E\cup\{x_0\}$.

$$\sup_{x\in E\cup\{x_0\}}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}\tilde{u}_n(x)\right| = \sup_{x\in E}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}u_n(x)\right| + \sup_{x\in\{x_0\}}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}a_n\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

Здесь мы воспользовались тем, что супремум объединения множеств равен сумме супремумов. ■

Теорема 2.3.9. (О предельном переходе в функциональных последовательностях) $f_n\colon E\subseteq X\to\mathbb{R}$, X — метрическое пространство, x_0 — предельная точка E, $f_n\rightrightarrows f$, $f_n(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} A_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}A_n = A\in\mathbb{R}$, причем $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} A$. Иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, shift left=0.5ex] \arrow[r, shift right=0.5ex] \arrow[d, "x\to x_0"] & f(x) \arrow[d, dashed, "x\to x_0"] \\
f_n(x_0) \arrow[r, "n\to+\infty"] & f(x_0)
\end{tikzcd}$$

или

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty}f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)$$

Доказательство. Введем обозначения: $u_1=f_1, u_2=f_2-f_1,\ldots, a_k=A_k-A_{k-1}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n}u_k=f_n$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n\rightrightarrows S(x)$ на E, причем $u_k(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} a_k$. Пользуясь аналогичной теоремой для функциональных рядов, получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x) = A = \lim_{n\to+\infty}A_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k = \sum_{k=1}^{+\infty}a_k$$

— сходится. Кроме того имеем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k = \lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x) = \lim_{x\to x_0}f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)$$

■