

Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

1	Многомерный анализ	2
1.1	Сведения из линейной алгебры	2
1.2	Дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных	6
2	Функциональные последовательности и ряды	10
2.1	Поточечная и равномерная сходимости последовательностей функций	10

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются операторами

Определение. Нормой на множестве X называется отображение $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Определение. Нормированным пространством называется пара $\langle X, \| \cdot \| \rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(x, y) = \|x - y\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)

Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ — нормы на V . Тогда

$$\exists c, C > 0: c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$.

i) $\| \cdot \|$ — норма.

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \geq 0$ — очевидно

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha c_i)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ — очевидно

$$\cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ — неравенство Минковского}$$

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\|\cdot\|$.

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_1 \leq_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|_1^2} = c \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

тогда

$$|\|\mathbf{x}\|_1 - \|\mathbf{y}\|_1| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 \leq c \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Поэтому $\|\cdot\|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathbf{x}\|_1$$

$$c_2 := \max_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathbf{x}\|_1$$

Ни c_1 , ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_1 &= \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\|_1 \|\mathbf{x}\| \geq c_1 \|\mathbf{x}\| \\ \|\mathbf{x}\|_1 &= \left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\|_1 \|\mathbf{x}\| \leq c_2 \|\mathbf{x}\| \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы. ■

Определение. Нормой оператора называется отображение $\|\cdot\| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{A}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{x} \in S^m} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \mathcal{A}\mathbf{x} = \sup_{\|\mathbf{x}\| \leq 1} \mathcal{A}\mathbf{x}$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)
 $\|\cdot\| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|\mathcal{A}e_i\| \leq_{\text{КБШ}} \|\mathbf{x}\| \sum_{i=1}^n \|\mathcal{A}e_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|\mathcal{A}\| = 0 \iff \forall \mathbf{x} \in S^n \mathcal{A}\mathbf{x} = 0 \iff \mathcal{A} = 0$. Неотрицательность очевидна.

$$\text{ii) } \|\alpha \mathcal{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\alpha \mathcal{A} \mathbf{x}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} |\alpha| \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| = \alpha \|\mathcal{A}\|$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{x}\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| + \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B} \mathbf{x}\|$$

■

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \implies \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x} - \mathcal{A} \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \left\| \mathcal{A} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \right\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{B}\| \|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B}(\mathcal{A} \mathbf{x})\| \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left(\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \|\mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right)\| \right) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left\| \mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right) \right\| \\ &\leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на \mathbb{R}^m

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\text{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра.

■

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\iff \exists c > 0 \forall \mathbf{x} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\|$, причем $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство. $\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \text{Ker}(\mathcal{A}) = 0 \iff \mathcal{A}$ обратим.

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \|\mathbf{y}\| \geq c \|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{y}\| \iff \|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{y}\| \leq \frac{1}{c} \|\mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)

$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

$$\text{ii) } \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|}$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geq \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| \geq \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \right) \|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\|$$

Далее по лемме получаем обратимость \mathcal{B} и оценку на его норму.

iii)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} &= \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathcal{B}^{-1} \\ \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| &\leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq_{\text{i)} } \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■

Следствие 1.1.8. Множество Ω_m открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\| \rangle$

1.2 Дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных

Определение. Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение. Отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω — область в \mathbb{R}^m называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\alpha: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — бесконечно малое в точке \mathbf{x} , такие что

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|, \mathbf{h} \rightarrow 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Замечание. Функция α из определения дифференцируемости зависит не только от \mathbf{h} , но и от \mathbf{x} .

Определение. Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом f в точке \mathbf{x}* и обозначать $d_{\mathbf{x}}f = \mathcal{A}$.

Замечание. Отображение $\mathbf{x} \mapsto d_{\mathbf{x}}f$, действующее из \mathbb{R}^m в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом f* .

Определение. Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения f в точке \mathbf{x}* .

Теорема 1.2.1. (Единственность производной)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируема в \mathbf{x} , тогда существует единственный производный оператор f в точке \mathbf{x} .

Доказательство. Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(\|t\mathbf{z}\|) \|t\mathbf{z}\|, t\mathbf{z} \rightarrow 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t), t \rightarrow 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{z} &= \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t), t \rightarrow 0 \iff \\ \mathcal{A}\mathbf{z} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t} \end{aligned}$$

■

Утверждение 1.2.2. (Производный оператор линейного отображения)

Пусть $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда \mathcal{A} дифференцируемо в каждой точке и $d_{\mathbf{x}}\mathcal{A} = \mathcal{A}$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

Утверждение 1.2.3. (Линейность производного оператора)

Пусть $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в \mathbf{x} . Тогда отображение $\alpha f + \beta g$ дифференцируемо в точке \mathbf{x} , причем $d_{\mathbf{x}}(\alpha f + \beta g) = \alpha d_{\mathbf{x}}f + \beta d_{\mathbf{x}}g$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) \\ &= [(\alpha f)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f)(\mathbf{x})] + [(\beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\beta g)(\mathbf{x})] \\ &= [d_{\mathbf{x}}f + o] + [d_{\mathbf{x}}g + o] = d_{\mathbf{x}}f + d_{\mathbf{x}}g + o \end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.4. (Дифференцируемость композиции)

Пусть $f: \Omega \rightarrow \Omega_1$, $g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в \mathbf{x} , тогда $F = g \circ f$ дифференцируема в \mathbf{x} , причем $d_{\mathbf{x}}F = d_{f(\mathbf{x})}g \cdot d_{\mathbf{x}}f$

Доказательство.

$$\begin{aligned} g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{x}) + [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h})) \\ &= \{ \mathbf{v} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h}) \} \\ &= g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{v} + \tilde{r}(\mathbf{v}) \\ &= g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g][d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + [d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Осталось показать, что $[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{h}\|)$.

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \left\| [d_{f(\mathbf{x})}g] \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|} \|r(\mathbf{h})\| \right\| + \tilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|) \|\mathbf{v}\|$$

Обозначим $\mathbf{w} = \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$, причем $\|\mathbf{w}\| = 1$. Из определения нормы оператора получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{w}\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\|$$

Кроме того, $\|\mathbf{v}\| \leq \|d_{\mathbf{x}}f\| \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$. Окончательно получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\| \|r(\mathbf{h})\| + \tilde{\alpha}(\|d_{\mathbf{x}}f\| \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{v}\| \leq \beta(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой $\beta(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

■

Определение. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис \mathbb{R}^n , тогда отображения

$$f_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(x), \mathbf{u}_i \rangle$$

где $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, называются *координатными функциями*.

Теорема 1.2.5. (Дифференцируемость координатных функций)

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$f \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x} \iff \forall i \ f_i \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x}$$

Доказательство.

\Leftarrow

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(\mathbf{x}))$$

где $g_i(t) = t \mathbf{u}_i$ — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда f дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

\Rightarrow f_i дифференцируемы как композиции f и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

Определение. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область, тогда *производной по направлению* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ в точке \mathbf{x} называется

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует.

Определение. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис \mathbb{R}^n , тогда *частной производной f по k -й переменной* называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f'_k \stackrel{\text{def}}{=} D_k f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

Утверждение 1.2.6. (Необходимое условие дифференцируемости)

Если f дифференцируема в \mathbf{x} , то все f_i дифференцируемы в \mathbf{x} , причем матрица Якоби f в точке \mathbf{x} совпадает с матрицей, составленной из матриц Якоби f_i в точке \mathbf{x} :

$$d_{\mathbf{x}}f = (d_{\mathbf{x}}f_1, \dots, d_{\mathbf{x}}f_n)$$

Доказательство. Подставим в определение дифференцируемости $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) &= f(\mathbf{x}) + [d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{e}_k) + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\| \\ &= f(\mathbf{x}) + t[d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_k + \alpha\|\mathbf{h}\| \|\mathbf{h}\| (*) \end{aligned}$$

Отсюда по определению частной производной получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_k$$

■

Теорема 1.2.7. (Достаточное условие дифференцируемости)

Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $B(\mathbf{a}) \subseteq \Omega$, в $B(\mathbf{a})$ существуют все частные производные, причем они непрерывны в точке \mathbf{a} . Тогда f дифференцируема в точке \mathbf{a} .

Доказательство. Докажем теорему для случая $m = 2$. Схема, примененная в доказательстве тривиально обобщается на произвольные m .

$$\begin{aligned}
 f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= (f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2)) + (f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)) \\
 &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
 &= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
 &\quad + \left[\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2) - f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\rightarrow 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} + \underbrace{(f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) - f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\rightarrow 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \\
 &= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|
 \end{aligned}$$

■

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Поточечная и равномерная сходимости последовательностей функций

Замечание. Здесь и далее запись вида $f \rightarrow \perp$ будет означать, что f сходится. Знак \perp используется, если не важно (или не известно), к чему сходится f .

Определение. $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ сходится поточечно к $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ на E , если

$$\forall x_0 \in E \quad f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$$

иными словами, раскрывая определение сходимости последовательности:

$$\forall x_0 \in E \quad [\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightarrow f$.

Примеры. TBD

Определение. $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно к $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ на E , если

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

или, раскрывая описание супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: [\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightrightarrows f$.

Замечание. Из равномерной сходимости очевидным образом следует поточечная:

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \rightarrow f$$

Про сходимость мы знаем очень многое для случая метрических пространств. А нельзя ли переформулировать новые определения так, чтобы они оказались обычной сходимостью, просто в хитром метрическом пространстве?

Предложение. (Метрическое пространство ограниченных функций)

Положим

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ограничено} \}$$

На этом множестве тривиально задается структура линейного пространства:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\end{aligned}$$

Оказывается, можно ввести **метрику** на \mathcal{F} , сходимость по которой есть равномерная сходимость. Для $f, g \in \mathcal{F}$ положим

$$\rho(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Проверим, что это — метрика на \mathcal{F}

- i) Неотрицательность очевидна. Равенство нулю может выполняться только для равных функций.
- ii) Симметричность очевидна.
- iii) Проверим неравенство треугольника. Применим техническое описание супремума для $\rho(f_1, f_2)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x: \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leq |f_1(x) - f_2(x)|$$

Далее

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \exists x: \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon &\leq |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \\ &\leq \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_3(y)| + \sup_{y \in X} |f_2(y) - f_3(y)| \\ &= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)\end{aligned}$$

Получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \rho(f_1, f_2) - \varepsilon \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Откуда непосредственно следует

$$\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Осталось только понять, что теперь означает сходимость по этой метрике. Пусть (f_n) — последовательность в \mathcal{F} , сходящаяся к f по метрике ρ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad \rho(f_n, f) < \varepsilon$$

Раскроем значение ρ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad [\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

А это — обычное определение равномерной сходимости!

Подобную конструкцию, по всей видимости, не получится ввести для поточечной сходимости. Зато, можно построить хаусдорфово топологическое пространство, в котором сходимость будет означать поточечную сходимость.

Предложение. (Топологическое пространство ограниченных функций)

Введем на \mathcal{F} топологию, порожденную следующими множествами:

$$U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n} \stackrel{\text{def}}{=} \{g: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall i \ |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}$$

Поймем теперь, что означает сходимость в этом топологическом пространстве:

$$f_n \rightarrow f \iff \forall U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n} \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ f_n \in U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n}$$

Что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ \forall i \ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Что как раз и есть поточечная сходимость! Просто запись вида

$$[\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0] \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

В этом пространстве обретает вид

$$[\forall U_\varepsilon(f)_{x_0}] \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1. (Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости)

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

Доказательство.

\implies Обычное свойство всех последовательностей, сходящихся по метрике (если все f_n и f лежат в \mathcal{F}). Общее доказательство такое:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

\Leftarrow (Полнота $\langle \mathcal{F}, \rho \rangle$) Зафиксируем x . Тогда $f_n(x)$ — обычная фундаментальная вещественная последовательность. Тогда, так как \mathbb{R} — полное, получаем

$$\forall x \ \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Посмотрим на фундаментальность f_n :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

и перейдем к пределу $m \rightarrow +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Что и есть равномерная сходимость. ■

Примеры. TBD