

Математический анализ I

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

0.1	Введение	2
0.2	Мощность множеств	5
1	Основы топологии	9
1.1	Метрическое пространство	9
1.2	Топологическое пространство	12

0.1 Введение

Определение. *Отображением* из множества X в множество Y называется отношение $F \subseteq X \times Y$, для которого

$$\forall x \in X \exists! y \in Y: (x, y) \in F$$

Обозначается $F: X \rightarrow Y$ или $X \xrightarrow{F} Y$. Сам факт того, что $(x, y) \in F$ обозначается $f(x) = y$. X называют *областью определения*, а Y — *областью значений* f .

Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *инъективным*, если для него выполняется

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Иначе говорят, что f — *1-1 отображение*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{1-1} Y$.

Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *сюръективным*, если для него выполняется

$$\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$$

Такие отображения называют *отображениями на*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$.

Определение. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называют *биекцией*, если оно одновременно сюръективно и инъективно, иначе говоря

$$\forall y \in Y \exists! x \in X: f(x) = y$$

Такие отображения, по аналогии с предыдущими определениями, называют *1-1 на отображениями*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow[на]{1-1} Y$.

Определение. *Образом* множества $A \subseteq X$ при отображении $f: X \rightarrow Y$ называют множество

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in A\}$$

Определение. *Прообразом* множества $B \subseteq Y$ при отображении $f: X \rightarrow Y$ называют множество

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Определение. *Обратимым* называется отображение $f: X \rightarrow Y$, для которого существует обратное относительно композиции отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$, для которого выполняется

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

Теорема 0.1.1 (Свойства прообраза). Пусть $f: X \rightarrow Y$, $A, B \subseteq X$. Тогда справедливо

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Доказательство. Без доказательства (очевидно). ■

Теорема 0.1.2. f биективно $\iff f$ обратимо

Доказательство. Без доказательства (тривиально). ■

Определение. *Поле* называется тройка $\langle X, +: X \times X \rightarrow X, \cdot: X \times X \rightarrow X \rangle$, где X — множество, удовлетворяющая аксиомам поля:

$$+G1 \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$+G2 \quad \exists 0 \in X: \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

$$+G3 \quad \exists -\alpha: \alpha + -\alpha = 0$$

$$+G4 \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\cdot G1 \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

$$\cdot G2 \quad \exists 1 \in X: 1\alpha = \alpha 1 = \alpha$$

$$\cdot G3 \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1}: \alpha\alpha^{-1} = 1$$

$$\cdot G4 \quad \alpha\beta = \beta\alpha$$

$$D \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

Для любых $\alpha, \beta, \gamma \in X$. Аксиомы +G1-4 задают на X структуры абелевой группы по $+$, аксиомы $\cdot G1-4$ задают на $X \setminus \{0\}$ структуру абелевой группы по \cdot , аксиома дистрибутивности D связывает $+$ и \cdot .

Примеры.

1. \mathbb{R} — поле. В дальнейшем можно под произвольным полем понимать \mathbb{R} , общность от этого сильно не пострадает.

2. \mathbb{Z}_p тогда и только тогда поле, когда p — простое.

Определение. *Векторным (линейным) пространством над полем K* называют тройку $\langle V, +_V: V \times V \rightarrow V, \cdot_V: V \times K \rightarrow V \rangle$, где V — множество, удовлетворяющую аксиомам:

$$+_VG1 \quad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$$

$$+_VG2 \quad \exists \mathbf{0} \in V: \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$+_VG3 \quad \exists -\mathbf{x}: \mathbf{x} + -\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$+_VG4 \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

$$V1 \quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$$

$$V2 \quad (\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$$

$$V3 \quad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$$

$$V4 \quad 1_K\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Для любых $\alpha, \beta \in K, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Пример. $K^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{K \oplus K \oplus \dots \oplus K}_n$ — векторное пространство, которому изоморфны все векторные пространства над полем K размерности n . Мы ограничимся рассмотрением \mathbb{R}^n .

Теорема 0.1.3. (Закон Де-Моргана) Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство множеств, и Y — множество. Тогда справедливо

$$Y \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha)$$

Доказательство. Докажем, что z принадлежит левой части $\iff z$ принадлежит правой части:

$$\begin{aligned} z \in Y \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) &\iff z \in Y \wedge z \notin \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \iff z \in Y \wedge \forall \alpha \in A \, z \notin X_\alpha \iff \\ &\iff \forall \alpha \in A \, z \in Y \wedge z \notin X_\alpha \iff z \in \bigcap_{\alpha \in A} (Y \setminus X_\alpha) \end{aligned}$$

■

Теорема 0.1.4. (Неравенство Бернулли) $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство.

- i) База индукции при $n = 1$: $1+x \geq 1+x$
- ii) Индукционный переход:

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= (1+x)(1+x)^{n-1} \geq (1+x)(1+(n-1)x) = \\ &= 1+x+(n-1)x+(n-1)x^2 = 1+nx+(n-1)x^2 \geq 1+nx \end{aligned}$$

■

Теорема 0.1.5. (Неравенство КБШ)

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_k b_k) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) \right] = \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \end{aligned}$$

■

0.2 Мощность множеств

Определение. *Мощностью конечного множества* называют количество его различных элементов.

Определение. Множества A и B *равномощны*, если существует $f : A \xrightarrow[на]{1-1} B$ — биекция

Лемма 0.2.1. Равномощность — отношение эквивалентности

Доказательство.

$$\text{i) } A \sim B \implies \exists f : A \xrightarrow[на]{1-1} B \implies f^{-1} : B \xrightarrow[на]{1-1} A \implies B \sim A$$

$$\text{ii) } A \sim B \wedge B \sim C \implies \exists f : A \xrightarrow[на]{1-1} B, g : B \xrightarrow[на]{1-1} C \implies f \circ g : A \xrightarrow[на]{1-1} C \implies A \sim C$$

$$\text{iii) } id_A : A \xrightarrow[на]{1-1} A \implies A \sim A$$

■

Определение. *Булеаном* множества A называют множество всех подмножеств A . Обозначают $\mathcal{P}(A)$ или 2^A

Лемма 0.2.2. $\mathcal{P}(A) \not\sim A$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $f : A \xrightarrow[на]{1-1} \mathcal{P}(A)$. Рассмотрим

$$X = \{a \in A \mid a \notin f(a)\} \subseteq A$$

Тогда существует $x \in A$: $f(x) = X$. Но тогда

$$x \in X \iff x \notin f(x) \iff x \notin X$$

Противоречие.

■

Определение. Будем говорить, что множество A по *мощности не превосходит* множество B , если A равномощно некоторому подмножеству B . Обозначается $A \preccurlyeq B$

Определение. Будем говорить, что множество A по *мощности не превосходит* множество B , если существует инъекция $f : A \xrightarrow{1-1} B$

Замечание. Эти два определения эквивалентны.

Теорема 0.2.3. Для произвольных A, B выполнено

$$\text{i) } A \sim B \implies A \preccurlyeq B$$

$$\text{ii) } A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq C \implies A \preccurlyeq C$$

Доказательство. Без доказательства (тривиально).

■

Теорема 0.2.4. (Кантор-Бернштейн) $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \iff A \sim B$

Доказательство.

\Leftarrow Предыдущая теорема.

\Rightarrow Положим $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} f(A)$ и $g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} g(B)$. Тогда $f \circ g : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} g(f(A))$
Обозначим

$$\begin{aligned} A_0 &:= A \\ A'_0 &:= g(B) \\ A_1 &:= g(f(A_0)) \end{aligned}$$

Тогда по построению $A_0 \supseteq A'_0 \supseteq A_1$. Кроме того, посредством $f \circ g$ получаем $A_0 \sim A_1$, и по условию $B \sim A'_0$ Тогда по транзитивности достаточно показать, что $A_0 \sim A'_0$.

$$A'_1 := g(f(A'_0)) \sim A'_0$$

Потому что $A'_0 \subseteq A$ и $f \circ g$ — биекция (получается своего рода двустороннее сужение $f \circ g$, которое сохраняет его биективность). В том же духе продолжим

$$\begin{aligned} A_{n+1} &:= g(f(A_n)) \sim A_n \\ A'_{n+1} &:= g(f(A'_n)) \sim A'_n \end{aligned}$$

причём для всех n выполнено (аналогично первому шагу)

$$A_n \supseteq A'_n \supseteq A_{n+1}$$

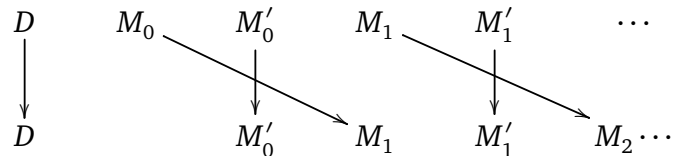
Обозначим

$$\begin{aligned} D &:= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ M_n &:= A_n \setminus A'_n \\ M'_n &:= A'_n \setminus A_{n+1} \end{aligned}$$

Все эти множества попарно не пересекаются. При этом

$$\begin{aligned} A_0 &= D \sqcup M_0 \sqcup M'_0 \sqcup M_1 \sqcup \dots \\ A'_0 &= D \sqcup M'_0 \sqcup M_1 \sqcup \dots \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что $g(f(M_n)) = M_{n+1}$ и $g(f(M'_n)) = M'_{n+1}$. Тогда построим искомое соответствие следующим образом:



Где все стрелки — сужения $f \circ g$.

■

Определение. Множествами счетной мощности называют множества, лежащие в одном классе эквивалентности по \sim с \mathbb{N} .

Теорема 0.2.5. (Свойства счетных множеств)

- i) Любое бесконечное множество содержит счетное подмножество
- ii) Объединение двух счетных множеств счетно
- iii) A — бесконечно, $B \sim \mathbb{N} \implies A \cup B \sim A$

Доказательство.

- i) Пусть A бесконечно. Тогда оно не пусто, то есть $\exists a \in A$. Рассмотрим $A \setminus \{a\}$. Если оно пусто, то множество A не было бесконечным. Продолжим этот процесс и получим счетное подмножество A : $\{a_1, a_2, \dots\}$.
- ii) Пусть A и B — счетные. Получим биекции этих множеств с \mathbb{N} : $A = \{a_1, \dots\}$ и $B = \{b_1, \dots\}$. Построим биекцию $(A \cup B)^* \rightarrow \mathbb{N}$: $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, \dots\}$, считая совпадающие элементы из разных множеств разными. Тогда выполнено $\mathbb{N} \sim A \preceq A \cup B \preceq \mathbb{N}$, то есть $A \cup B \sim \mathbb{N}$ (теорема Кантора-Бернштейна).
- iii) В A найдется счетное подмножество $C \subseteq A$.

$$\begin{aligned} A &= A' \cup C \\ A \cup B &= A' \cup (C \cup B) \end{aligned}$$

Причем $C \cup B$ счетно, то есть $C \cup B \sim C$. Тогда построим соответствие:

$$\begin{array}{ccc} A' & & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & & (C \cup B) \end{array}$$

■

Теорема 0.2.6. (Счетность множества рациональных чисел) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

Доказательство. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$

■

Определение. Bin — множество всех последовательностей из нулей и единиц.

Теорема 0.2.7. $\text{Bin} \sim [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

Доказательство. Для доказательства теоремы разобьем $\text{Bin} = \text{Bin}^\infty \sqcup \text{Bin}^0$ — множества последовательностей бесконечной и конечной длиной (конечной в том смысле, что с конечного места в последовательности идут только нули) соответственно.

- i) $\text{Bin}^0 = \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$, где B_k — множество последовательностей длины k — счетное объединение конечных множеств. Поэтому Bin^0 счетно.

- ii) Отождествим элементы Bin^∞ с числами полуинтервала $(0, 1]$ как их двоичную запись. Поскольку любой элемент $(0, 1]$ представим в двоичной записи бесконечной длины (тривиально), получаем, что $\text{Bin}^\infty \sim (0, 1]$.
- iii) Теперь $\text{Bin} = \text{Bin}^0 \sqcup \text{Bin}^\infty \sim \text{Bin}^\infty \sim (0, 1] \sim [0, 1]$.

■

Теорема 0.2.8. Все промежутки вида $\langle a, b \rangle$, $a \neq b$ в \mathbb{R} равномощны.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением открытых интервалов. Добавление граничной точки не меняет мощность множества.

Докажем, что $\forall a \neq b, c \neq d \ (a, b) \sim (c, d)$. Для этого построим биекцию между этими двумя множествами:

$$f: (a, b) \rightarrow (c, d)$$

$$x \mapsto \frac{(d-c)(x-a)}{b-a}$$

■

Теорема 0.2.9. $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$

Доказательство. Построим биекцию между \mathbb{R}^n и Bin , что и докажет утверждение. Пусть $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \text{Bin}$ — функция, сопоставляющая числу его двоичную запись. Тогда

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Bin}$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\psi(x_1)_1, \psi(x_2)_1, \dots, \psi(x_1)_2, \psi(x_2)_2, \dots)$$

осуществляет требуемое соответствие.

■

Теорема 0.2.10. \mathbb{R}^n несчетно

Доказательство. $\mathbb{R}^n \sim \text{Bin} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \not\sim \mathbb{N}$

■

Теорема 0.2.11. Множеством мощности континуум называют множество, равномощное $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$

Глава 1

ОСНОВЫ ТОПОЛОГИИ

1.1 Метрическое пространство

Определение. Метрикой на множестве X называют $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам метрики:

- i) $\rho(x) \geq 0$
- ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- iii) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

Определение. Пару $\langle X, \rho \rangle$, где ρ — метрика на X , называют метрическим пространством

Примеры.

- i) Стандартная метрика на \mathbb{R}^n : $\rho(x, y) = |x, y|_2$, где $d_k(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x, y|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^k}$
- ii) $|\cdot, \cdot|_k$ является метрикой на \mathbb{R} при любых $k \geq 1$
- iii) $|x, y|_\infty = \max_{i=1}^n (x_i - y_i)$ — метрика на \mathbb{R}
- iv) $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, y) = 0$ иначе — метрика, порождающая дискретное пространство.

Далее, если не указано, речь идет о метрическом пространстве X

Определение. Шаром радиуса r с центром в точке x называется

$$B_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$$

Определение. Замкнутым шаром радиуса r с центром в точке x называется

$$\overline{B}_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in X \mid \rho(x, y) \leq r\}$$

Определение. Расстоянием от точки x до множества A называется

$$\rho(x, A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

Определение. Диаметр множества A называется

$$\text{diam}(A) = \sup \{ \rho(x, y) \mid x, y \in A \}$$

Определение. В метрическом пространстве *открытыми* называют множества A такие, что

$$\forall x \in A \exists B_r(x) \subset A$$

Иначе говоря, любая точка открытого множества входит в него с некоторым шаром.

Определение. *Окрестностью* точки x называют любое открытое множество, содержащее x

Определение. Точка x называется *внутренней* для множества A , если она входит в него с некоторой окрестностью:

$$\exists U(x): U(x) \subset A$$

Определение. Точка x называется *граничной* точкой множества A , если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение как с A , так и с его дополнением:

$$\forall U(x) \quad A \cap U(x) \neq \emptyset \wedge (X \setminus A) \cap U(x) \neq \emptyset$$

Определение. Точка x называется *предельной* точкой множества A , если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение с A :

$$\forall U(x) \quad A \cap U(x) \neq \emptyset$$

Определение. Множество A называют *ограниченным*, если $\text{diam}(A) < +\infty$

Теорема 1.1.1. Множество A ограничено \iff его можно вписать в шар

Доказательство.

\implies $m := \text{diam}(A)$. Покажем, что A можно вписать в шар радиуса $m + 1$. Возьмем произвольную точку $x \in A$. Тогда $\forall y \in A \rho(x, y) \leq m < m + 1 \implies y \in B_{m+1}(x)$

\impliedby Пусть $y, z \in A$ и A можно вписать в шар $B_r(x)$. Тогда $2r > \rho(x, y) + \rho(x, z) \geq \rho(y, z) \implies \rho(y, z) < 2r \implies A$ ограничено.

■

Теорема 1.1.2.

- i) Произвольное объединение открытых множеств открыто
- ii) Пересечение двух (а значит, и произвольного конечного числа) открытых множеств открыто.

Доказательство.

i) Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых множеств. Тогда

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \implies x \in G_\alpha \implies \exists U(x) \subset G_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

ii) Пусть A и B — открытые множества. Тогда

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\implies x \in A \wedge x \in B \implies \\ &\exists B_{r_1}(x) \subset A \wedge B_{r_2}(x) \subset B \implies \\ &x \in B_{\min(r_1, r_2)}(x) \subset A \cap B \end{aligned}$$

■

Определение. Липшицево эквивалентными называют отображения f и g в \mathbb{R} , такие, что $\exists c_1, c_2: c_1 f \leq g \leq c_2 f$

Пример. В \mathbb{R}^n метрики d_1 и d_2 липшицево эквивалентны

1.2 Топологическое пространство

Определение. Топологией на множестве X называют $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

- i) $\emptyset, X \in \Omega$
- ii) $A, B \in \Omega \implies A \cap B \in \Omega$
- iii) $\{X_\alpha \in \Omega\}_{\alpha \in A} \implies \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \in \Omega$

Иными словами, топология замкнута относительно конечных пересечений и произвольных объединений её элементов.

Определение. Пара $\langle X, \Omega \rangle$, где Ω — топология на X , называется *топологическим пространством*.

Определение. Элементы топологии называются *открытыми множествами*. Дополнения открытых множеств называются *замкнутыми множествами*.

Примеры.

- i) $\Omega = \mathcal{P}(X)$ — дискретная топология
- ii) $\Omega = \{\emptyset, X\}$ — антидискретная топология
- iii) Все метрические пространства являются топологическими пространствами, порожденными метрикой.
- iv) $\Omega = \emptyset \cup \{\text{все дополнения конечных множеств}\}$

Определение. *Метризуемым* называется топологическое пространство, топология которого может быть порождена метрикой.

Примеры.

- i) Дискретная топология метризуема
- ii) Антидискретная топология не метризуема