Математический анализ I

Конспект основан на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

0.1 Некоторые базовые понятия

Определение. *Отображением* из множества X в множество Y называется отношение $F \subseteq X \times Y$, для которого

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Y:\ (x, y) \in F$$

Обозначается $F: X \to Y$ или $X \xrightarrow{F} Y$. Сам факт того, что $(x, y) \in F$ обозначается $f(x) = y$. X называют *областью определения*, а Y — *областью значений* f.

Определение. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется *инъективным*, если для него выполняется

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Иначе говорят, что f — *1-1 отображение*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{1-1} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным*, если для него выполняется

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения называют отображениями *на*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называют *биекцией*, если оно одновременно сюръективно и инъективно, иначе говоря

$$\forall y \in Y\ \exists! x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения, по аналогии с предыдущими определениями, называют *1-1 на отображениями*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow[\text{на}]{1-1} Y$.

Определение. *Образом* множества $A \subseteq X$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f(A) \stackrel{def}{=} \{f(x) \mid x \in A\}$$

Определение. *Прообразом* множества $B \subseteq Y$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f^{-1}(B) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Определение. *Обратимым* называется отображение $f: X \to Y$, для которого существует обратное относительно композиции отображение $f^{-1}: Y \to X$, для которого выполняется

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

Теорема 0.1.1 (Свойства прообраза). Пусть $f: X \to Y$, $A, B \subseteq X$. Тогда справедливо

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Доказательство. Без доказательства (очевидно). ■

Теорема 0.1.2. f биективно $\Longleftrightarrow$ f обратимо

Доказательство. Без доказательства (тривиально). ■

Определение. *Полем* называется тройка $\langle X, + : X \times X \to X, \cdot : X \times X \to X \rangle$, где X — множество, удовлетворяющая аксиомам поля:

+G1 $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

+G2 $\exists 0 \in X: \ \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

+G3 $\exists -\alpha: \ \alpha + -\alpha = 0$

+G4 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

·G1 $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

·G2 $\exists 1 \in X: \ 1\alpha = \alpha 1 = \alpha$

·G3 $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1}: \ \alpha\alpha^{-1} = 1$

·G4 $\alpha\beta = \beta\alpha$

D $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

Для любых $\alpha, \beta, \gamma \in X$. Аксиомы +G1-4 задают на X структуры абелевой группы по +, аксиомы ·G1-4 задают на $X \setminus \{0\}$ структуру абелевой группы по ·, аксиома дистрибутивности D связывает + и ·.

Примеры.

1. $\mathbb{R}$ — поле. В дальнейшем можно под произвольным полем понимать $\mathbb{R}$, общность от этого сильно не пострадает.

2. $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда поле, когда p — простое.

Определение. *Векторным (линейным) пространством над полем K* называют тройку $\langle V, +_V : V \times V \to V, \cdot_V : V \times K \to V \rangle$, где V — множество, удовлетворяющюю аксиомам:

$+_V$G1 $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

$+_V$G2 $\exists \mathbf{0} \in X: \ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$

$+_V$G3 $\exists -\mathbf{x}: \ \mathbf{x} + -\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$+_V$G4 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$

V1 $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

V2 $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$

V3 $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

V4 $1_K\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Для любых $\alpha, \beta \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Пример. $K^n \overset{def}{=} \underbrace{K \oplus K \oplus \ldots \oplus K}_{n}$ — векторное пространство, которому изоморфны все векторные пространства над полем K размерности n. Мы ограничимся рассмотрением $\mathbb{R}^n$.

Теорема 0.1.3. (Закон Де-Моргана) Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство множеств, и Y — множество. Тогда справедливо

$$Y \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha \in A} \big(Y \setminus X_\alpha\big)$$

Доказательство. Докажем, что z принадлежит левой части $\iff$ z принадлежит правой части:

$$z \in Y \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\Big) \iff z \in Y \land z \notin \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \iff z \in Y \land \forall \alpha \in A \; z \notin X_\alpha \iff$$
$$\forall \alpha \in A \; z \in Y \land z \notin X_\alpha \iff z \in \bigcap_{\alpha \in A} \big(Y \setminus X_\alpha\big)$$

■

Теорема 0.1.4. (Неравенство Бернулли) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x \geqslant -1$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство.

i) База индукции при $n = 1$: $1 + x \geqslant 1 + x$

ii) Индукционный переход:

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} \geqslant (1+x)(1+(n-1)x) =$$
$$1 + x + (n-1)x + (n-1)x^2 = 1 + nx + (n-1)x^2 \geqslant 1 + nx$$

■

Теорема 0.1.5. (Неравенство КБШ)

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Доказательство.

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}(a_i b_k - a_k b_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}(a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_k b_k) =$$
$$\frac{1}{2}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big) - 2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)\Big] =$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2$$

■