

# **Математический анализ I**

Конспект основан на лекциях Константина Петровича Кохася

# Оглавление

0.1	Некоторые базовые понятия . . . . .	2
-----	-------------------------------------	---

## 0.1 Некоторые базовые понятия

**Определение.** *Отображением* из множества  $X$  в множество  $Y$  называется отношение  $F \subseteq X \times Y$ , для которого

$$\forall x \in X \exists! y \in Y: (x, y) \in F$$

Обозначается  $F: X \rightarrow Y$  или  $X \xrightarrow{F} Y$ . Сам факт того, что  $(x, y) \in F$  обозначается  $f(x) = y$ .  $X$  называют *областью определения*, а  $Y$  — *областью значений*  $f$ .

**Определение.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *инъективным*, если для него выполняется

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Иначе говорят, что  $f$  — *1-1 отображение*, и часто обозначают  $f: X \xrightarrow{1-1} Y$ .

**Определение.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называется *сюръективным*, если для него выполняется

$$\forall y \in Y \exists x \in X: f(x) = y$$

Такие отображения называют *отображениями на*, и часто обозначают  $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$ .

**Определение.** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  называют *биекцией*, если оно одновременно сюръективно и инъективно, иначе говоря

$$\forall y \in Y \exists! x \in X: f(x) = y$$

Такие отображения, по аналогии с предыдущими определениями, называют *1-1 на отображениями*, и часто обозначают  $f: X \xrightarrow[на]{1-1} Y$ .

**Определение.** *Образом* множества  $A \subseteq X$  при отображении  $f: X \rightarrow Y$  называют множество

$$f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in A\}$$

**Определение.** *Прообразом* множества  $B \subseteq Y$  при отображении  $f: X \rightarrow Y$  называют множество

$$f^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

**Определение.** *Обратимым* называется отображение  $f: X \rightarrow Y$ , для которого существует обратное относительно композиции отображение  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , для которого выполняется

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

**Теорема 0.1.1** (Свойства прообраза). Пусть  $f: X \rightarrow Y$ ,  $A, B \subseteq X$ . Тогда справедливо

1.  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2.  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

*Доказательство.* Без доказательства (очевидно). ■

**Теорема 0.1.2.**  $f$  биективно  $\iff f$  обратимо

*Доказательство.* Без доказательства (тривиально). ■

**Определение.** Полем называется тройка  $\langle X, +: X \times X \rightarrow X, \cdot: X \times X \rightarrow X \rangle$ , где  $X$  — множество, удовлетворяющая аксиомам поля:

$$+G1 \quad \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$+G2 \quad \exists 0 \in X: \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$

$$+G3 \quad \exists -\alpha: \alpha + -\alpha = 0$$

$$+G4 \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$\cdot G1 \quad \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

$$\cdot G2 \quad \exists 1 \in X: 1\alpha = \alpha 1 = \alpha$$

$$\cdot G3 \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1}: \alpha\alpha^{-1} = 1$$

$$\cdot G4 \quad \alpha\beta = \beta\alpha$$

$$D \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$$

Для любых  $\alpha, \beta, \gamma \in X$ . Аксиомы +G1-4 задают на  $X$  структуры абелевой группы по  $+$ , аксиомы  $\cdot G1-4$  задают на  $X \setminus \{0\}$  структуру абелевой группы по  $\cdot$ , аксиома дистрибутивности D связывает  $+$  и  $\cdot$ .

**Примеры.**

1.  $\mathbb{R}$  — поле. В дальнейшем можно под произвольным полем понимать  $\mathbb{R}$ , общность от этого сильно не пострадает.

2.  $\mathbb{Z}_p$  тогда и только тогда поле, когда  $p$  — простое.

**Определение.** Векторным (линейным) пространством над полем  $K$  называют тройку  $\langle V, +_V: V \times V \rightarrow V, \cdot_V: V \times K \rightarrow V \rangle$ , где  $V$  — множество, удовлетворяющую аксиомам:

$$+_VG1 \quad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$$

$$+_VG2 \quad \exists \mathbf{0} \in V: \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$+_VG3 \quad \exists -\mathbf{x}: \mathbf{x} + -\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$+_VG4 \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$$

$$V1 \quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$$

$$V2 \quad (\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$$

$$V3 \quad \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$$

$$V4 \quad 1_K\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Для любых  $\alpha, \beta \in K, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ .

**Пример.**  $K^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{K \oplus K \oplus \dots \oplus K}_n$  — векторное пространство, которому изоморфны

все векторные пространства над полем  $K$  размерности  $n$ . Мы ограничимся рассмотрением  $\mathbb{R}^n$ .