

# **Математический анализ III**

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Многомерный анализ</b>	<b>2</b>
1.1	Сведения из линейной алгебры . . . . .	2
1.2	Дифференцируемость и дифференциал отображений . . . . .	6
1.3	Теоремы Лагранжа для отображений . . . . .	12
1.4	Формула Тейлора . . . . .	13
1.5	Диффеоморфизмы . . . . .	17
1.6	Относительный экстремум . . . . .	26
<b>2</b>	<b>Функциональные последовательности и ряды</b>	<b>27</b>
2.1	Сходимость функциональных последовательностей . . . . .	27
2.2	Сходимость функциональных рядов . . . . .	33
2.3	Степенные ряды . . . . .	38
2.4	Ряды тейлора . . . . .	43
2.5	Суммирование по Чезаро . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Криволинейные интегралы</b>	<b>46</b>
3.1	Интеграл по кусочно-гладкому пути . . . . .	46
3.2	Потенциальные векторные поля . . . . .	47
3.3	Локально потенциальные векторные поля . . . . .	48
3.4	Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути . . .	48
3.5	Гомотопия . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Теория меры</b>	<b>50</b>
4.1	Системы множеств . . . . .	50
4.2	Объём . . . . .	51
4.3	Мера . . . . .	52
4.4	О стандартном продолжении меры . . . . .	52
4.5	Мера Лебега . . . . .	53

# Глава 1

## Многомерный анализ

### 1.1 Сведения из линейной алгебры

**Определение.**  $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  — пространство линейных отображений из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Элементы  $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  называются операторами

**Определение.** Нормой на множестве  $X$  называется отображение  $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ , удовлетворяющее свойствам

i)  $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

ii)  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

iii)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Определение.** Нормированным пространством называется пара  $\langle X, \| \cdot \| \rangle$

**Замечание.** Отображение, задаваемое формулой  $d(x, y) = \|x - y\|$  является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

**Теорема 1.1.1.** (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)

Пусть  $V$  — конечномерное линейное пространство, а  $\| \cdot \|_1$  и  $\| \cdot \|_2$  — нормы на  $V$ . Тогда

$$\exists c, C > 0: c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

**Доказательство.** Пусть  $\|x\| = \|c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ .

i)  $\| \cdot \|$  — норма.

·  $\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \geq 0$  — очевидно

·  $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha c_i)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$  — очевидно

$$\cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ — неравенство Минковского}$$

ii) Проверим теперь, что все нормы на  $V$  эквивалентны  $\| \cdot \|$ .

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_1 \leq_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|_1^2} = c \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

тогда

$$| \|x\|_1 - \|y\|_1 | \leq \|x - y\|_1 \leq c \|x - y\|$$

Поэтому  $\| \cdot \|_1$  — непрерывное отображение  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{x \in S^n} \|x\|_1$$

$$c_2 := \max_{x \in S^n} \|x\|_1$$

Ни  $c_1$ , ни  $c_2$  не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \geq c_1 \|x\| \\ \|x\|_1 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \leq c_2 \|x\| \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы. ■

**Определение.** Нормой оператора называется отображение  $\| \cdot \| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in S^m} \|Ax\|_{\mathbb{R}^n}$$

**Замечание.**  $\sup_{\|x\|=1} Ax = \sup_{\|x\| \leq 1} Ax$

**Теорема 1.1.2.** (Пространство линейных операторов)

$\| \cdot \| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  — действительно норма.

*Доказательство.*

$$\|A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|Ae_i\| \leq_{\text{КБШ}} \|x\| \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов  $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i)  $\|A\| = 0 \iff \forall x \in S^n Ax = 0 \iff A = 0$ . Неотрицательность очевидна.

$$\text{ii) } \|\alpha \mathcal{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\alpha \mathcal{A} \mathbf{x}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} |\alpha| \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| = \alpha \|\mathcal{A}\|$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{x}\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| + \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B} \mathbf{x}\|$$

■

**Теорема 1.1.3.** (Липшицевость линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \implies \mathcal{A}$  — липшицево

*Доказательство.*

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x} - \mathcal{A} \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \left\| \mathcal{A} \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \right\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

■

**Теорема 1.1.4.** (О произведении линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ,  $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$ , тогда  $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ , причем  $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{B}\| \|\mathcal{A}\|$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B}(\mathcal{A} \mathbf{x})\| \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left( \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \|\mathcal{B} \left( \frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right)\| \right) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left\| \mathcal{B} \left( \frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right) \right\| \\ &\leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■

**Определение.**  $\Omega_m$  — пространство обратимых линейных операторов на  $\mathbb{R}^m$

**Лемма 1.1.5.** (Критерий обратимости линейного оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  обратим тогда и только тогда, когда  $m = n$  и  $\text{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

*Доказательство.* Линейная алгебра.

■

**Лемма 1.1.6.** (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  обратим  $\iff \exists c > 0 \forall \mathbf{x} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\|$ , причем  $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

*Доказательство.*  $\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \text{Ker}(\mathcal{A}) = 0 \iff \mathcal{A}$  обратим.

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \|\mathbf{y}\| \geq c \|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{y}\| \iff \|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{y}\| \leq \frac{1}{c} \|\mathbf{y}\|$$

■

**Теорема 1.1.7.** (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)

$\mathcal{A} \in \Omega_m$ ,  $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ ,  $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$ , тогда

i)  $\mathcal{B} \in \Omega_m$

$$\text{ii) } \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|}$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$$

*Доказательство.*

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geq \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| \geq \left( \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \right) \|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\|$$

Далее по лемме получаем обратимость  $\mathcal{B}$  и оценку на его норму.

iii)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} &= \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathcal{B}^{-1} \\ \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| &\leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq_{\text{i)} } \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■

**Следствие 1.1.8.** Множество  $\Omega_m$  открыто в метрической топологии  $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\| \rangle$

## 1.2 Дифференцируемость и дифференциал отображений

**Определение.** Непустое множество  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$  называется *областью*, если оно открыто и связно.

**Определение.** Отображение  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  — область в  $\mathbb{R}^m$  называется *дифференцируемым* в точке  $\mathbf{x} \in \Omega$ , если существуют  $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ,  $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , такие что

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

Где  $r(\mathbf{h})$  удовлетворяет условию

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

или, что то же самое

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|$$

Где  $\alpha(\mathbf{h})$  бесконечно малое, то есть

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \alpha(\mathbf{h}) = 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

**Замечание.** Функции  $\alpha$ ,  $r$  из определения дифференцируемости зависят не только от  $\mathbf{h}$ , но и от  $\mathbf{x}$ .

**Определение.** Оператор  $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом  $f$  в точке  $\mathbf{x}$*  и обозначать  $d_{\mathbf{x}}f = \mathcal{A}$ .

**Замечание.** Отображение  $\mathbf{x} \mapsto d_{\mathbf{x}}f$ , действующее из  $\mathbb{R}^m$  в  $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  называют *дифференциалом  $f$* .

**Определение.** Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения  $f$  в точке  $\mathbf{x}$* .

**Теорема 1.2.1.** (Единственность производной)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $f$  дифференцируема в  $\mathbf{x}$ , тогда существует единственный производный оператор  $f$  в точке  $\mathbf{x}$ .

**Доказательство.** Проверим, что для любого  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$   $\mathcal{A}\mathbf{z}$  задано однозначно. Пусть  $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$  при  $t \in \mathbb{R}$ :

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(t\mathbf{z}) \|t\mathbf{z}\|, \quad t\mathbf{z} \rightarrow 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t), \quad t \rightarrow 0$$

Так как  $\|\mathbf{z}\|$  — константа. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{z} &= \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t), \quad t \rightarrow 0 \iff \\ \mathcal{A}\mathbf{z} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t}\end{aligned}$$

■

**Утверждение 1.2.2.** (Производный оператор линейного отображения)

Пусть  $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ , тогда  $\mathcal{A}$  дифференцируемо в каждой точке и  $d_{\mathbf{x}}\mathcal{A} = \mathcal{A}$

*Доказательство.*

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

**Утверждение 1.2.3.** (Линейность производного оператора)

Пусть  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ , дифференцируемы в  $\mathbf{x}$ . Тогда отображение  $\alpha f + \beta g$  дифференцируемо в точке  $\mathbf{x}$ , причем  $d_{\mathbf{x}}(\alpha f + \beta g) = \alpha d_{\mathbf{x}}f + \beta d_{\mathbf{x}}g$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) &= [(\alpha f)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f)(\mathbf{x})] + [(\beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\beta g)(\mathbf{x})] \\ &= [d_{\mathbf{x}}f + o] + [d_{\mathbf{x}}g + o] = d_{\mathbf{x}}f + d_{\mathbf{x}}g + o\end{aligned}$$

■

**Теорема 1.2.4.** (Дифференцируемость композиции)

Пусть  $f: \Omega \rightarrow \Omega_1$ ,  $g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  дифференцируемы в  $\mathbf{x}$ , тогда  $F = g \circ f$  дифференцируема в  $\mathbf{x}$ , причем  $d_{\mathbf{x}}F = d_{f(\mathbf{x})}g \cdot d_{\mathbf{x}}f$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{x}) + [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h})) \\ &= \{ \mathbf{v} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h}) \} \\ &= g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{v} + \tilde{r}(\mathbf{v}) \\ &= g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g][d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + [d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Осталось показать, что  $[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{h}\|)$ .

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \left\| [d_{f(\mathbf{x})}g] \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|} \|r(\mathbf{h})\| \right\| + \tilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|) \|\mathbf{v}\|$$

Обозначим  $\mathbf{w} = \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$ , причем  $\|\mathbf{w}\| = 1$ . Из определения нормы оператора получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{w}\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\|$$

Кроме того,  $\|\mathbf{v}\| \leq \|d_{\mathbf{x}}f\| \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$ . Окончательно получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\| \|r(\mathbf{h})\| + \tilde{\alpha}(\|d_{\mathbf{x}}f\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \cdot \|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{v}\| \leq \beta(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой  $\beta(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ .

■



**Определение.** Пусть  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  — стандартный базис  $\mathbb{R}^n$ , тогда отображения

$$f_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{u}_i \rangle$$

где  $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , называются *координатными функциями*.

**Теорема 1.2.5.** (Дифференцируемость координатных функций)

Пусть  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , тогда

$$f \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x} \iff \forall i \ f_i \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x}$$

причем

$$d_{\mathbf{x}}f = \begin{pmatrix} d_{\mathbf{x}}f_1 \\ \vdots \\ d_{\mathbf{x}}f_n \end{pmatrix}$$

*Доказательство.*

$\Leftarrow$

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(\mathbf{x}))$$

где  $g_i(t) = t\mathbf{u}_i$  — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда  $f$  дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

$\Rightarrow f_i$  дифференцируемы как композиции  $f$  и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

**Определение.** Пусть  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^m$  — область, тогда *производной по направлению*  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  в точке  $\mathbf{x}$  называется

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует.

**Определение.** Пусть  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega \in \mathbb{R}^m$ ,  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  — стандартный базис  $\mathbb{R}^n$ , тогда *частной производной  $f$  по  $k$ -й переменной* называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f'_k \stackrel{\text{def}}{=} D_k f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

**Утверждение 1.2.6.** Пусть  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ . Тогда

$$\exists D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u}$$

*Доказательство.* Для любых  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} &= \frac{[d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{u}) + r(t\mathbf{u})}{t} \\ &= [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} + \frac{r(t\mathbf{u})}{t} \leq [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} + \frac{\alpha(\mathbf{u})\|t\mathbf{u}\|}{t} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u})\|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

■

**Теорема 1.2.7.** (Вид матрицы Якоби) Пусть  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ , тогда

$$d_{\mathbf{x}}f = \begin{pmatrix} D_1f_1(\mathbf{x}) & D_2f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_mf_1(\mathbf{x}) \\ D_1f_2(\mathbf{x}) & D_2f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_mf_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_1f_n(\mathbf{x}) & D_2f_n(\mathbf{x}) & \cdots & D_mf_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

*Доказательство.* Пусть  $(\mathbf{e}_i)$  — базис  $\mathbb{R}^m$ ,  $(\tilde{\mathbf{e}}_j)$  — базис  $\mathbb{R}^n$ , тогда

$$\begin{aligned} [d_{\mathbf{x}}f]_{i,j} &= \langle [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = \left\langle \frac{[d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{e}_i)}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \left\langle \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_j(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f_j(\mathbf{x})}{t} = D_{ij}f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

■

**Утверждение 1.2.8.** Пусть  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ . Тогда

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

*Доказательство.*

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} = [\text{grad } f(\mathbf{x})]\mathbf{u} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

■

**Утверждение 1.2.9.** (Необходимое условие дифференцируемости)

Если  $f$  дифференцируемо в  $\mathbf{x}$ , то существуют все частные производные в точке  $\mathbf{x}$ , причем матрица Якоби  $f$  в точке  $\mathbf{x}$  совпадает с матрицей, составленной из матриц Якоби  $f_i$  в точке  $\mathbf{x}$ :

$$d_{\mathbf{x}}f = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}(\mathbf{x}) \right)$$

*Доказательство.* Подставим в определение дифференцируемости  $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) &= f(\mathbf{x}) + [d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{e}_k) + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\| \\ &= f(\mathbf{x}) + t[d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_k + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

Отсюда по определению частной производной получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_k$$

■

**Теорема 1.2.10.** (Достаточное условие дифференцируемости)

Пусть  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a} \in \Omega$ ,  $B(\mathbf{a}) \subseteq \Omega$ , в  $B(\mathbf{a})$  существуют все частные производные, причем они непрерывны в точке  $\mathbf{a}$ . Тогда  $f$  дифференцируемо в точке  $\mathbf{a}$ .

**Доказательство.** Докажем теорему для случая  $m = 2$ . Схема, примененная в доказательстве тривиально обобщается на произвольные  $m$ .

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= (f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2)) + (f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)) \\
&\stackrel{\text{Лагранж}}{=} f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&\quad + \left[ \underbrace{(f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2) - f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\rightarrow 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} + \underbrace{(f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) - f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\rightarrow 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|
\end{aligned}$$

■

**Теорема 1.2.11.** Пусть  $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a} \in \Omega$ ,  $f, g, \lambda$  дифференцируемы в  $\mathbf{a}$ . Тогда  $\lambda f$ ,  $\langle f, g \rangle$  дифференцируемы в  $\mathbf{a}$ , причем

- $[d_{\mathbf{a}}(\lambda f)]\mathbf{h} = [d_{\mathbf{a}}\lambda]\mathbf{h} \cdot f(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}$
- $[d_{\mathbf{a}}\langle f, g \rangle]\mathbf{h} = \langle [d_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a}) \rangle + \langle f(\mathbf{a}), [d_{\mathbf{a}}g]\mathbf{h} \rangle$

**Доказательство.**

- Докажем покомпонентно:

$$\begin{aligned}
(\lambda f_i)(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) &= \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \cdot f_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= (\lambda(\mathbf{a}) + d_{\mathbf{a}}\lambda\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) \cdot (f_i(\mathbf{a}) + d_{\mathbf{a}}f_i\mathbf{h} + \beta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= [d_{\mathbf{a}}\lambda] \cdot f_i(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h} + o(\mathbf{h})
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
[d_{\mathbf{a}}\langle f, g \rangle]\mathbf{h} &= d_{\mathbf{a}} \left[ \sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i \right] \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n d_{\mathbf{a}}[f_i \cdot g_i]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n ([d_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a}) + f_i(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}g_i]\mathbf{h}) \\
&= \sum_{i=1}^n ([d_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a})) + \sum_{i=1}^n (f_i(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}g_i]\mathbf{h}) = \langle [d_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a}) \rangle + \langle f(\mathbf{a}), [d_{\mathbf{a}}g]\mathbf{h} \rangle
\end{aligned}$$

■

**Определение.** Пусть  $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Тогда *градиентом*  $\varphi$  в точке  $\mathbf{x}$  называется вектор

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

**Теорема 1.2.12.** (Экстремальное свойство градиента)

Пусть  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $f$  дифференцируемо в  $\mathbf{x}$ ,  $\text{grad } f(\mathbf{x}) \neq 0$  Тогда

$$\mathbf{l} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{x})}{\|\text{grad } f(\mathbf{x})\|}$$

— направление наибольшего возрастания  $f$ , то есть

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{h}\| = 1 \implies D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) \leq D_{\mathbf{l}}f(\mathbf{x})$$

*Доказательство.*

$$D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) = [\mathbf{d}_{\mathbf{x}}f] \mathbf{h} = [\text{grad } f(\mathbf{x})] \mathbf{h} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \leq \|\text{grad } f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{h}\| = \|\text{grad } f(\mathbf{x})\|$$

■

### 1.3 Теоремы Лагранжа для отображений

**Теорема 1.3.1.** (Лагранжа для векторнозначных функций)

Пусть  $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$ , дифференцируемо на  $(a, b)$ . Тогда

$$\exists c \in (a, b): \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| |b - a|$$

*Доказательство.* При  $f(a) = f(b)$  утверждение тривиально. Положим  $\varphi(x) = \langle f(b) - f(a), f(x) - f(a) \rangle$ . Тогда

$$\varphi(a) = 0, \varphi(b) = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$$

Применим теорему Лагранжа для  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \exists c \in (a, b): \|f(b) - f(a)\|^2 = \varphi(b) - \varphi(a) &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} \varphi'(c) |b - a| = \langle f(b) - f(a), f'(c) \rangle \cdot |b - a| \\ &\stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(c)\| |b - a| \implies \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| |b - a| \end{aligned}$$

■

**Теорема 1.3.2.** (Лагранжа для отображений)

Пусть  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , дифференцируемо на  $\Omega$ ,  $[a, b] \subseteq \Omega$ , тогда

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|d_x f\| \cdot \|b - a\|$$

*Доказательство.*  $g = f(a + t(b - a))$  для  $t \in [0, 1]$  — дифференцируемо как композиция дифференцируемых функций. По предыдущей теореме

$$\begin{aligned} \exists t_0 \in (0, 1): \|g(1) - g(0)\| &\leq \|g'(t_0)\| = \|f'(a + t_0(b - a)) \cdot (b - a)\| \\ &\leq \|f'(a + t_0(b - a))\| \|b - a\| \leq \sup_{x \in [a, b]} \|d_x f\| \cdot \|b - a\| \end{aligned}$$

■

## 1.4 Формула Тейлора

**Определение.** Пусть  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  — область,  $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Определим частные производные высшего порядка по индукции:

$$D_{i_1, \dots, i_k} f \stackrel{\text{def}}{=} D_{i_k} (D_{i_1, \dots, i_{k-1}} f)$$

**Теорема 1.4.1.** (О независимости ч.п. от порядка дифференцирования)

Пусть  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  — область,  $(x_0, y_0) \in \Omega$ ,  $\exists B((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega$ , причем в  $B((x_0, y_0), r)$  существуют  $D_{12}f$  и  $D_{21}f$ , непрерывные в точке  $(x_0, y_0)$ . Тогда  $D_{12}f(x_0, y_0) = D_{21}f(x_0, y_0)$

*Доказательство.*

$$\alpha(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда  $\alpha(0) = 0$ :

$$\begin{aligned} \alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} \alpha'(\tilde{h})h = [f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0)]h \\ &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} f''_{xy}(x_0 + \tilde{h}, y_0 + \tilde{k})hk \end{aligned}$$

Аналогично введем  $\beta(k)$ :

$$\beta(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta(k) = \beta(k) - \beta(0) &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} \beta'(\bar{k})k = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \bar{k}) - f'_y(x_0, y_0 + \bar{k})]k \\ &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk \end{aligned}$$

Заметим, что  $\alpha(h) = \beta(k)$ . Осталось перейти к пределу при  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$  и воспользоваться непрерывностью частных производных в точке  $(x_0, y_0)$ . ■

**Следствие 1.4.2.** Пусть  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $x \in \Omega$ ,  $\exists B(x, r) \subseteq \Omega$ , причем в  $B(x, r)$  для любой перестановки индексов  $\pi \in S_k$  существуют и непрерывны в  $x$  частные производные  $D_{i_{\pi_1}, \dots, i_{\pi_k}} f$ . Тогда все они совпадают в точке  $x$ .

*Доказательство.* Доказательство сводится к координатным функциям, поэтому считаем, что  $n = 1$ . Предыдущая теорема дает возможность менять местами пары индексов. Осталось заметить, что группа перестановок порождается транспозициями. ■

**Определение.** Множество функций  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , у которых все частные производные порядка не более  $r$  существуют и непрерывны на  $\Omega$ , будем обозначать  $C^r(\Omega)$

**Определение.** Пусть  $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$ , тогда набор  $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$  будем называть *мультииндексом*. Используются обозначения  $|k| = k_1 + \dots + k_m$ ,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} f$$

**Лемма 1.4.3.** (Полиномиальная формула)

$$(a_1 + \dots + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^m \sum_{n_2=1}^m \dots \sum_{n_r=1}^m a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_r} = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$$

*Доказательство.* Первое равенство очевидно по правилам раскрытия скобок. Докажем второе равенство индукцией по  $r$ .

- Для  $r = 1$  утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_m)^{r+1} &= (a_1 + \dots + a_m) \cdot (a_1 + \dots + a_m)^r \\ &= (a_1 + \dots + a_m) \cdot \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1+1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m+1} \\ &= [\text{переобозначим } k_i = k_i + 1 \text{ в } i\text{-й сумме}] \\ &= \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_1 \geq 1}} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_m \geq 1}} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= [\text{добавим все пропущенные слагаемые с } k_i = 0] \\ &= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot (k_1 + k_2 + \dots + k_m)}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \end{aligned}$$

■

**Лемма 1.4.4.** (О дифференцировании сдвига)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  — область,  $f \in C^r(\Omega)$ ,  $\mathbf{a} \in \Omega$ ,  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$ ,  $\forall t \in [-1, 1]$   $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in \Omega$ , тогда для отображения  $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$  и для  $k \leq r$  выполнено

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} \mathbf{h}^j \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(\mathbf{a})$$

*Доказательство.* Для доказательства этого факта достаточно показать, что

$$\varphi^{(k)}(t) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^k \cdot f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

Докажем по индукции:

- Для  $k = 0$  утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= (\varphi^{(k-1)}(t))' = \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \right)' \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \end{aligned}$$

■

**Теорема 1.4.5.** (Формула Тейлора в форме Лагранжа)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^{r+1}(\Omega)$ ,  $\Omega$  — область,  $\mathbf{a} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$ , тогда

$$\exists \theta \in (0, 1): f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leq r} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k$$

*Доказательство.* Пусть  $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$  для  $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ . Выпишем формулу Тейлора в форме Лагранжа для  $\varphi$ :

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^r \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}$$

Пользуясь леммой о дифференцировании сдвига, получаем искомое равенство. ■

**Теорема 1.4.6.** (Формула Тейлора в форме Пеано)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^{r+1}(\Omega)$ ,  $\Omega$  — область,  $\mathbf{a} \in \Omega$ ,  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$ , тогда

$$\exists \theta \in (0, 1): f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leq r} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

*Доказательство.* Достаточно показать, что

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Проверим это:

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r} = \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1} \dots (\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r}$$



$$= \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \cdots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

Все дроби вида

$$\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i)^{k_i}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_i}}$$

меньше единицы, выражения вида

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$$

постоянны. Поэтому

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \cdots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \rightarrow 0$$

При  $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \rightarrow 0$ . ■

## 1.5 Диффеоморфизмы

**Определение.** Областью называют открытое связное множество.

**Определение.** Топологические пространства  $X, Y$  гомеоморфны, если существует обратимое и в обе стороны непрерывное  $f : X \rightarrow Y$ .  $f$  называют гомеоморфизмом.

**Определение.** Диффеоморфизмом гладких многообразий  $M, N$  называется обратимое и в обе стороны гладкое отображение  $f : M \rightarrow N$ .

**Определение.** Пусть  $\mathcal{O}$  — область в  $\mathbb{R}^m$ . Тогда отображение  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется диффеоморфизмом, если оно обратимо и в обе стороны дифференцируемо.

**Лемма 1.5.1.** (О почти локальной инъективности)

Пусть  $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ ,  $f$  дифференцируемо в  $\mathbf{x}_0$ ,  $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$ , тогда  $\exists c, \delta > 0$  такие, что  $\forall \mathbf{h} : \|\mathbf{h}\| < \delta \quad \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geq c \|\mathbf{h}\|$

*Доказательство.*

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\| \geq \|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| - \|\alpha(\mathbf{h})\| \geq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|$$

Последнее неравенство выполнено по следующим причинам:

- $\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| \geq c \|\mathbf{h}\|$ , так как  $f'(\mathbf{x}_0)$  обратим
- $\|\alpha(\mathbf{h})\| \leq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|$  при достаточно малых  $\mathbf{h}$ , так как  $\alpha(\mathbf{h})$  — бесконечно малое.

■

**Теорема 1.5.2.** (О сохранении области)

Пусть  $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \quad \det f'(\mathbf{x}) \neq 0$ , тогда  $f$  открыто.

*Доказательство.* Достаточно рассмотреть случай, когда  $\mathcal{O}$  открыто. Тогда нужно показать, что  $f(\mathcal{O})$  открыто. Зафиксируем  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$  и  $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in f(\mathcal{O})$ . По лемме о почти локальной инъективности имеем  $c, \delta > 0$  такие, что

$$\forall \mathbf{h} \in \overline{B(0, \delta)} \quad \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geq c \|\mathbf{h}\|$$

Положим

$$r = \frac{1}{2} \text{dist}(\mathbf{y}_0, f(S(\mathbf{x}_0, \delta)))$$

Поскольку  $f$  непрерывно, а сфера — компакт, имеем, что  $f(S(\mathbf{x}_0, \delta))$  — компакт. В свою очередь,  $\rho$  является метрикой, то есть непрерывно. Тогда  $\rho$  достигает минимума, то есть  $r$  реализуется, а значит, не равно нулю (см. оценку выше). Раз  $r > 0$ , то  $B(\mathbf{y}_0, r)$  — полноправный шар, проверим, что он входит в образ  $f$  целиком, что и закончит доказательство. Пусть  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$ . Положим  $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$  на  $\overline{B(\mathbf{x}_0, \delta)}$ ;  $g$  непрерывно, поэтому достигает минимума. Попробуем этот минимум найти:

- Рассмотрим поведение  $g(\mathbf{x})$  на  $S(\mathbf{x}_0, \delta)$ :

$$g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| \geq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| - \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| \geq 2r - r = r$$

- $g(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| < r$ , так как  $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$

Тогда понятно, что минимум достигается не на границе. Раз так, он достигается во внутренности. Отображение  $l: \mathbf{x} \mapsto g^2(\mathbf{x})$  достигает минимума в той же точке, что и  $g$ , при этом  $l'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$ . Из невырожденности производного оператора следует, что  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ , что и требовалось. ■



Рис. 1.1: Теорема о сохранении области

**Следствие 1.5.3.** Пусть  $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{l \leq m}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \text{ rank } f'(\mathbf{x}) = l$ , тогда  $f$  открыто.

*Доказательство.* Построим отображение  $\tilde{f}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i &= f_i, \quad 1 \leq i \leq l \\ \tilde{f}_i &= x_i, \quad \text{иначе} \end{aligned}$$

Производный оператор тогда будет выглядеть так:

$$\tilde{f}' = \begin{pmatrix} & & f' & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Где первая сверху единица стоит на  $l + 1$ -м месте. Тогда отображение  $\tilde{f}$  тоже дифференцируемо, и его производный оператор невырожден. Применяя предыдущую

теорему, получаем, что  $\tilde{f}(A)$  открыто, если множество  $A$  открыто. Тогда  $f(A)$  тоже открыто. ■

**Теорема 1.5.4.** (О гладкости обратного отображения)

Пусть  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$  — область,  $T \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \det T'(\mathbf{x}) \neq 0$ ,  $T$  обратимо, тогда  $T^{-1} \in C^r$  и  $(T^{-1})'(\mathbf{y}_0) = (T'(\mathbf{x}_0))^{-1}$ , при  $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$ .

*Доказательство.* Докажем теорему по индукции. В качестве базы рассмотрим случай  $r = 1$ . Обозначим  $S = T^{-1}$ ,  $S: T(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}^m$  непрерывно, так как по теореме о сохранении области  $T$  открыто. Зафиксируем  $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$  и проверим дифференцируемость  $S$  в точке  $\mathbf{y}_0$ .

- По теореме о почти локальной инъективности имеем

$$\exists c, \delta > 0: \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \quad \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \geq c \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

- Воспользуемся дифференцируемостью  $T$ :

$$T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

Здесь  $A = T'(\mathbf{x}_0)$ . Положим  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ :

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = A(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) + \alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) \|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$

Перепишем это равенство в виде, похожем на определение дифференцируемости  $S$ :

$$S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) \|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$

Если мы поймем, что  $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) \|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$  — бесконечно малое при  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0$ , то мы получим определение дифференцируемости  $S$  в точке  $\mathbf{y}_0$ . Проверим это:

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) &\leq \|A^{-1}\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c} \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \\ &= \|A^{-1}\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \end{aligned}$$

$S$  непрерывно, поэтому  $\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} 0$ , тогда  $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} 0$ .

Теперь нужно доказать непрерывность  $S'$ . Из доказанного уже известно, что  $S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1}$ :

$$\mathbf{y} \mapsto S(\mathbf{y}) = T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \mapsto T'(\mathbf{x}) \mapsto (T'(\mathbf{x}))^{-1} = S'(\mathbf{y})$$

Эту схему можно переписать в привычном виде:

$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$

Таким образом получаем, что  $S'$  — композиция непрерывных отображений, то есть непрерывно (в частности, отображение  $GL(\mathbb{R}^m) \ni A \mapsto A^{-1}$  непрерывно). Таким образом, база доказана.

Для доказательства индукционного перехода нужно показать только гладкость  $S$ . Пусть  $T \in C^n$ ,  $S \in C^n$ , покажем, что тогда если вдруг  $T \in C^{n+1}$ , то и  $S \in C^{n+1}$ . Для этого достаточно, чтобы  $S' \in C^n$ :

$$S'(y) = (T'(x))^{-1} = (T'(S(y)))^{-1}$$

$S \in C^n$  по предположению индукции,  $T' \in C^n$  потому, что  $T \in C^{n+1}$ , обращение матрицы — вообще класса  $C^\infty$ , то есть переход доказан. ■

**Лемма 1.5.5.** (О приближении отображения его линеаризацией)

Пусть  $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ ,  $x_0 \in \mathcal{O}$ , тогда  $\forall h$

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| \leq M \|h\|$$

где

$$M = \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|f'(z) - f'(x_0)\|$$

*Доказательство.* Положим  $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x)$ , тогда  $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ . Применим теорему Лагранжа к  $F$ :

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| &= \|F(x_0 + h) - F(x_0)\| \leq \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|F'(z)\| \cdot \|h\| \\ &= \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|f'(z) - f'(x_0)\| \cdot \|h\| \end{aligned}$$

■

**Теорема 1.5.6.** (О локальной обратимости)

Пусть  $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ ,  $x_0 \in \mathcal{O}$ ,  $\det f'(x_0) \neq 0$ , тогда  $\exists U(x_0)$  такая, что  $f|_U$  — диффеоморфизм.

*Доказательство.* Если мы докажем, что  $f$  обратимо в некоторой окрестности  $U(x_0)$ , то по теореме о гладкости обратного отображения мы получим требуемое (невырожденность определителя в окрестности  $x_0$  следует из его непрерывности и того, что  $\det f'(x_0) \neq 0$ ). Для начала заметим, что из невырожденности оператора в точке  $x_0$  следует, что

$$\exists c > 0: \|f'(x_0)h\| \geq c \|h\|$$

Попробуем построить окрестность. Пусть она будет содержать точки такие, что одновременно выполнены условия:

- $\|f'(x) - f'(x_0)\| \leq \frac{c}{4}$ . Эти точки есть вблизи  $x_0$  по теореме о непрерывно дифференцируемых отображениях.
- $\det f'(x) \neq 0$ . Такие точки есть из непрерывности  $\det$ .

Проверим, что в этой окрестности  $f$  не склеивает точки, что и будет означать его обратимость; пусть  $y = x + h$ , тогда:

$$f(y) - f(x) = (f(y + h) - f(x) - f'(x)h) + (f'(x) - f'(x_0))h + f'(x_0)h$$

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| &\geq \underbrace{\|f'(\mathbf{x}_0)\| \|\mathbf{h}\|}_{\geq c \|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}_{\leq M \|\mathbf{h}\| \leq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\|f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{h}\|}_{\leq \frac{c}{4} \|\mathbf{h}\|} \\ &\geq \frac{c}{4} \|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

Где  $M \|\mathbf{h}\| \leq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|$  потому, что:

$$M \|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\| \sup \|f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x})\| \leq \sup \left( \underbrace{\|f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0)\|}_{\leq \frac{c}{4}} + \underbrace{\|f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x})\|}_{\leq \frac{c}{4}} \right) \leq \frac{c}{2}$$

■

**Теорема 1.5.7.** (О неявном отображении)

Пусть  $\mathcal{O}$  открыто,  $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $f \in C^r$ ,

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{O}$ :  $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ ,  $\det f'_y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$ , тогда

- $\exists U(\mathbf{a}), \exists U(\mathbf{b}), \exists! \varphi: U(\mathbf{a}) \rightarrow U(\mathbf{b}) \in C^r$  такое, что  $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$
- $\varphi'(\mathbf{x}) = -(f'_y(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})))^{-1} \cdot f'_x(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$

*Доказательство.*

- Подготовим несколько объектов, полезных для доказательства. Положим

$$\begin{aligned} T: \mathcal{O} &\rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \end{aligned}$$

Производный оператор этого отображения в блочном виде выглядит следующим образом:

$$T' = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$

Он обратим, так как  $\det T' = 1 \cdot \det f'_y \neq 0$ . Тогда по теореме о локальной обратимости  $\exists U(\mathbf{a}, \mathbf{b}): T|_U$  — диффеоморфизм. Без ограничения общности будем считать, что  $U = \tilde{P} \times Q$ , где  $\tilde{P} \subset \mathbb{R}^m$ ,  $Q \subset \mathbb{R}^n$  открыты и  $\mathbf{a} \in \tilde{P}$ ,  $\mathbf{b} \in Q$ . Будем обозначать  $S = T^{-1}$  и  $V = T(U)$  — открыто в  $\mathbb{R}^{m+n}$  так как  $T$  — диффеоморфизм. Заметим, что  $T$  не меняет первую координату, то есть  $S$  тоже её не меняет, а значит, имеет вид  $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ , где  $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^r$ , так как  $S \in C^r$ .

- Пусть  $P = (\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}_n) \cap V$  — открытое в  $\mathbb{R}^m$  множество (само множество из  $\mathbb{R}^{m+n}$ , но нулевые координаты отбросим, см. рисунок). Предъявим требуемое отображение:

$$\varphi(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

- Проверим, что  $\varphi$  подходит:  $f \in C^r$ , так как  $H \in C^r$ . Проверим  $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$  и единственность:

$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))) = T(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = T(S(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

С другой стороны, если  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ , то:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

То есть  $\mathbf{y} = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ , из чего следует, что  $\varphi$  единственно.

- Проверим второй пункт теоремы, вычислив производный оператор  $\varphi$ :

$$f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \varphi' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Откуда получаем:

$$f'_x + f'_y \cdot \varphi' = \mathbf{0} \implies \varphi' = -(f'_y)^{-1} f'_x$$

■

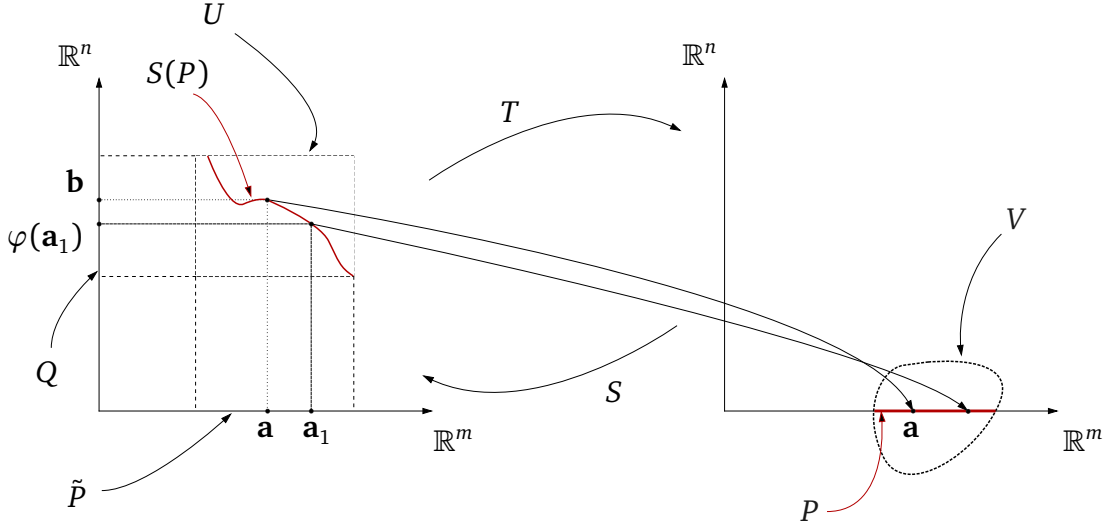


Рис. 1.2: Теорема о неявном отображении

**Определение.**  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  называют  $k$ -мерным многообразием в  $\mathbb{R}^m$ , если оно локально гомеоморфно  $\mathbb{R}^k$ . Иными словами,  $\forall \mathbf{x} \in M \exists U(\mathbf{x}) \exists \varphi$  — гомеоморфизм:  $U(\mathbf{x}) \underset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}^k$ .

**Определение.**  $k$ -мерное многообразие  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  называют *простым*, если оно гомеоморфно  $\mathbb{R}^k$ . Иными словами, в предыдущем определении можно выбрать  $U(\mathbf{x}) = M$ .

**Определение.** Пара  $\langle U(\mathbf{x}), \varphi \rangle$  из определения называется *картой*, или *параметризацией* многообразия в точке  $\mathbf{x}$ . Набор карт, который покрывает все  $M$ , называется *атласом*.

**Определение.** Простое  $k$ -мерное многообразие  $M$  называют  $C^r$ -гладким, если  $\varphi \in C^r$  — параметризация  $M$  и  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \text{ rank } \varphi'(\mathbf{x}) = k$ .

**Теорема 1.5.8.** (О задании гладкого многообразия системой уравнений)  
Пусть  $M \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq k < m$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ , тогда  $\forall \mathbf{p} \in M$  эквивалентны утверждения:

- $\exists U(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$  — открытое такое, что  $M \cap U$  — простое  $k$ -мерное  $C^r$ -гладкое многообразие.
- $\exists \tilde{U}(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$  — открытое такое, что  $M \cap \tilde{U}$  можно задать системой  $C^r$ -гладких уравнений, иначе говоря:  $\exists f_1, \dots, f_{m-k}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R} \in C^r$  такие, что  $\mathbf{x} \in M \cap \tilde{U} \iff \forall i f_i(\mathbf{x}) = 0$ , причем  $\{\text{grad } f_i(\mathbf{p})\}$  линейно независим.

*Доказательство.*

$\implies$  Пусть имеется параметризация  $\varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^r$ , которая задает  $M \cap U(\mathbf{p})$ . Зафиксируем точку  $t_0 = \varphi(\mathbf{p})$ . Параметризация  $C^r$  гладкая, поэтому  $\text{rank } \varphi' = k$ . Будем считать, что ранг реализуется на первых  $k$  строках. Рассмотрим проекцию  $L: \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ . Из того, что первые  $k$  столбцов  $\varphi'$  линейно независимы, имеем невырожденность производного оператора отображения  $L \circ \varphi$ . Тогда по теореме о локальной обратимости  $\exists W(t_0): (L \circ \varphi)|_W$  — диффеоморфизм. Обозначим  $V = (L \circ \varphi)(W)$ . Тогда (см. рисунок) удобно интерпретировать  $\varphi(W)$  как график отображения, заданного на  $V$ ;  $H: V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ . Положим  $\psi = (L \circ \varphi)^{-1}$ ,  $\psi \in C^r$  по теореме о гладкости обратного отображения. Тогда вернемся к интерпретации графиком и посмотрим на точку  $\mathbf{x} \in V$ :

$$(\mathbf{x}, H(\mathbf{x})) = \varphi(\psi(\mathbf{x}))$$

Тогда  $H \in C^r$  как композиция  $C^r$ -гладких отображений.  $\varphi$  гомеоморфизм, поэтому  $\varphi(W)$  открыто в  $M$ . Тогда  $\exists \tilde{U}$  открытое в  $\mathbb{R}^m$  такое, что  $\varphi(W) = M \cap \tilde{U}$ . Рассмотрим теперь набор функций:

$$\begin{aligned} f_i: \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto H_i(L(\mathbf{x})) - x_{k+i} \end{aligned}$$

для  $i = 1 \dots m - k$ . Тогда

$$\forall i = 1 \dots m - k \quad f_i(\mathbf{x}) = 0 \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})) - \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \in M \cap \tilde{U}$$

Осталось показать, что  $\{\text{grad } f_i(\mathbf{p})\}$  линейно независим. Для этого просто выпишем этот набор:

$$\text{grad } f_i(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_1} & \dots & \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_k} & 0 & \dots & 1_{k+i} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, он линейно независим.

$\Leftarrow$  Пусть теперь имеется система уравнений  $f_i$ . Составим из  $f_i$  отображение  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ . Поскольку набор градиентов линейно независим (будем считать, что ранг реализуется на последних  $m - k$  столбцах), можно применить теорему о неявном отображении:  $\exists P(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k), Q(\mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_m)$  и  $\exists H: P \rightarrow Q$  такое, что

$$\forall (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \in P \quad (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)) \text{ — решение уравнения } f = \mathbf{0}$$

Построим теперь искомую параметризацию:

$$\begin{aligned} \varphi: P &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{u} &\mapsto (\mathbf{u}, H(\mathbf{u})) \end{aligned}$$

Понятно, что  $\varphi$  подходит в качестве параметризации  $M \cap (P \times Q)$ . ■



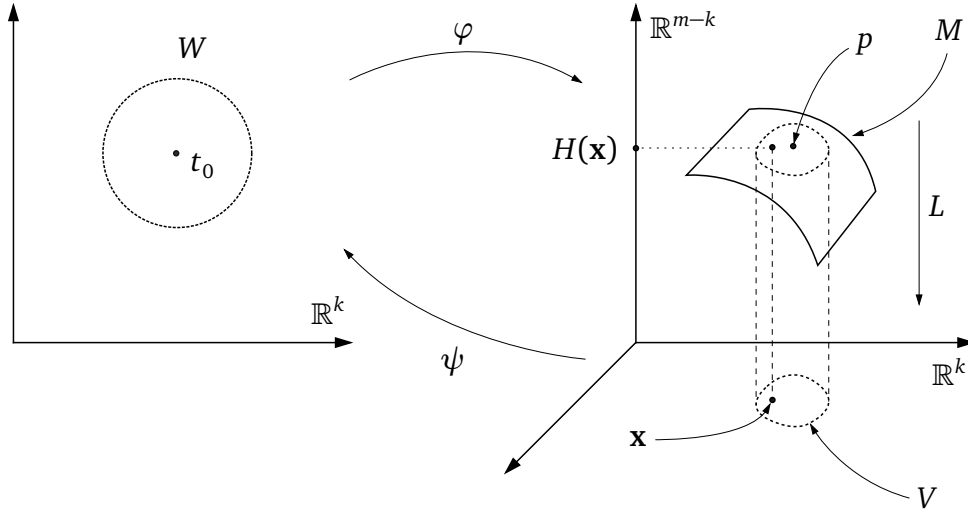


Рис. 1.3: Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

**Следствие 1.5.9.** (О двух параметризациях)

Пусть  $M$  —  $k$ -мерное простое  $C^r$ -гладкое многообразие,  $\mathbf{p} \in M$ , причем  $C^r \ni \varphi_1: \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow U \cap M$ ,  $C^r \ni \varphi_2: \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow U \cap M$  — параметризации  $U(\mathbf{p}) \cap M$ . Тогда  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отличаются на диффеоморфизм, а именно,  $\exists \psi: \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$  — диффеоморфизм, причем  $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$ .

Доказательство. TBD ■

**Определение.** Пусть  $M$  —  $C^r$ -гладкое  $k$ -мерное многообразие в  $\mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{p} \in M$ ,  $\varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$  — параметризация окрестности  $U(\mathbf{p})$ , причем  $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$ . Тогда касательным пространством к  $M$  в точке  $\mathbf{p}$  называется  $T_p(M) = \text{Im } \varphi'(\mathbf{a})$ .

**Теорема 1.5.10.** (О корректности определения касательного пространства)  
Касательное пространство не зависит от выбора параметризации.

Доказательство. TBD ■

**Теорема 1.5.11.** (О касательном пространстве к гладкому пути)

Пусть  $M$  — гладкое многообразие. Тогда  $\mathbf{v} \in T_p(M) \iff \exists$  гладкий путь  $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m: \gamma([-1, 1]) \subseteq M$  такой, что  $\gamma(0) = \mathbf{p}$  и  $\gamma'(0) = \mathbf{v}$ .

Доказательство. TBD ■

**Теорема 1.5.12.** (О касательном пространстве к графику функции)

Касательное пространство к графику  $C^r \ni f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$  задается уравнением

$$y - f(\mathbf{x}_0) = f'_1(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \dots + f'_m(\mathbf{x}_m)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)$$

Доказательство. TBD

■

**Теорема 1.5.13.** (О касательном пространстве к поверхности уровня)

Касательное пространство к поверхности уровня функции  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  задается уравнением

$$f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(y_0)(y - y_0) + f'_z(z_0)(z - z_0) = 0$$

Доказательство. TBD

■

## 1.6 Относительный экстремум

**Определение.** Пусть  $f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $M_\phi = \{x \in E \mid \phi(x) = 0\}$ ,  $x_0 \in E$ ,  $\phi(x_0) = 0$  называется точкой локального *относительного* экстремума, если  $x_0$  — точка локального экстремума  $f|_{M_\phi}$ .

**Теорема 1.6.1.** (Необходимое условие относительного экстремума)

Пусть  $C^1 \ni f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1 \ni \phi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in E$ ,  $\phi(x_0) = 0$ ,  $\text{rank } \phi'(x_0) = n$ ,  $x_0$  — точка локального экстремума, тогда  $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{cases} f'(x_0) - \lambda \cdot \phi'(x_0) = 0 \\ \phi(x_0) = 0 \end{cases}$$

Доказательство. TBD ■

**Теорема 1.6.2.** (Достаточное условие относительного экстремума)

Пусть  $C^1 \ni f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^1 \ni \phi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in E$ ,  $\phi(x_0) = 0$ ,  $\text{rank } \phi'(x_0) = n$ , выполнено необходимое условие относительного экстремума, то есть  $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{cases} f'(x_0) - \lambda \cdot \phi'(x_0) = 0 \\ \phi(x_0) = 0 \end{cases}$$

кроме того, пусть  $h = (h_x \in \mathbb{R}^m, h_y \in \mathbb{R}^n)$ . Тогда, так как  $\text{rank } \phi'(x_0)$ , по  $h_x$  можно однозначно восстановить  $h_y$  такой, что  $\phi'(x_0)h = 0$ . Тогда рассмотрим квадратичную форму

$$Q(h_x) = d_{x_0}^2 G(h_x, h_y)$$

Где  $G = f - \lambda \cdot \phi$  — функция Лагранжа. В зависимости от определенности  $Q$  можно сделать вывод о наличии экстремума в точке  $x_0$ :

- $Q$  положительно определена  $\implies x_0$  — точка относительного локального минимума.
- $Q$  отрицательно определена  $\implies x_0$  — точка относительного локального максимума.
- $Q$  неопределена  $\implies x_0$  — не точка экстремума.
- В остальных случаях требуется более детальное исследование.

Доказательство. TBD ■

**Теорема 1.6.3.** (Вычисление нормы линейного оператора)

Пусть  $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ ,  $S$  — множество собственных чисел  $A^T A$ . Тогда

$$\|A\| = \max_{\lambda \in S} \sqrt{\lambda}$$

## Глава 2

# Функциональные последовательности и ряды

### 2.1 Сходимость функциональных последовательностей

**Замечание.** Здесь и далее запись вида  $f \rightarrow \perp$  будет означать, что  $f$  сходится. Знак  $\perp$  используется, если не важно (или не известно), к чему сходится  $f$ .

**Определение.**  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  сходится поточечно к  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  на  $E$ , если

$$\forall x_0 \in E \quad f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$$

иными словами, раскрывая определение сходимости последовательности:

$$\forall x_0 \in E \quad [\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Обозначение:  $f_n \rightarrow f$ .

**Примеры.** TBD

**Определение.**  $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$  сходится равномерно к  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  на  $E$ , если

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

или, раскрывая описание супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad [\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Обозначение:  $f_n \rightrightarrows f$ .

**Замечание.** Из равномерной сходимости очевидным образом следует поточечная:

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \rightarrow f$$

Про сходимость мы знаем очень многое для случая метрических пространств. А нельзя ли переформулировать новые определения так, чтобы они оказались обычной сходимостью, просто в хитром метрическом пространстве?

**Предложение.** (Метрическое пространство ограниченных функций)

Положим

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ограничено} \}$$

На этом множестве тривиально задается структура линейного пространства:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\end{aligned}$$

Оказывается, можно ввести **метрику** на  $\mathcal{F}$ , сходимость по которой есть равномерная сходимость. Для  $f, g \in \mathcal{F}$  положим

$$\rho(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Проверим, что это — метрика на  $\mathcal{F}$

- i) Неотрицательность очевидна. Равенство нулю может выполняться только для равных функций.
- ii) Симметричность очевидна.
- iii) Проверим неравенство треугольника. Применим техническое описание супремума для  $\rho(f_1, f_2)$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x: \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leq |f_1(x) - f_2(x)|$$

Далее

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \exists x: \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon &\leq |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \\ &\leq \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_3(y)| + \sup_{y \in X} |f_2(y) - f_3(y)| \\ &= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)\end{aligned}$$

Получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \rho(f_1, f_2) - \varepsilon \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Откуда непосредственно следует

$$\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Осталось только понять, что теперь означает сходимость по этой метрике. Пусть  $(f_n)$  — последовательность в  $\mathcal{F}$ , сходящаяся к  $f$  по метрике  $\rho$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad \rho(f_n, f) < \varepsilon$$

Раскроем значение  $\rho$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad [\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

А это — обычное определение равномерной сходимости!

Подобную конструкцию, по всей видимости, не получится ввести для поточечной сходимости. Зато, можно построить хаусдорфово топологическое пространство, в котором сходимость будет означать поточечную сходимость.

**Предложение.** (Топологическое пространство ограниченных функций)  
Введем на  $\mathcal{F}$  топологию, порожденную следующими множествами:

$$U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n} \stackrel{def}{=} \{g: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall i \ |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}$$

Поймем теперь, что означает сходимость в этом топологическом пространстве:

$$f_n \rightarrow f \iff \forall U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n} \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ f_n \in U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n}$$

Что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ \forall i \ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Что как раз и есть поточечная сходимость! Просто запись вида

$$[\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0] \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

В этом пространстве обретает вид

$$[\forall U_\varepsilon(f)_{x_0}] \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Теорема 2.1.1.** (Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости)

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

*Доказательство.*

$\implies$  Обычное свойство всех последовательностей, сходящихся по метрике (если все  $f_n$  и  $f$  лежат в  $\mathcal{F}$ ). Общее доказательство такое:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$  Зафиксируем  $x$ . Тогда  $f_n(x)$  — обычная фундаментальная вещественная последовательность. Тогда, так как  $\mathbb{R}$  — полное, получаем

$$\forall x \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Покажем, что  $f_n \rightrightarrows f$ . Посмотрим на фундаментальность  $f_n$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

и перейдем к пределу  $m \rightarrow +\infty$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Что и есть определение равномерной сходимости. ■

**Примеры.** TBD

**Теорема 2.1.2.** (Стокс-Зейдель)

Пусть  $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  — топологическое пространство,  $f_n$  непрерывны в  $c \in E$ , и  $f_n \rightrightarrows f$  на  $X$ . Тогда  $f$  непрерывна в  $c$ .

*Доказательство.* Для любых  $n$  выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Воспользуемся равномерной сходимостью: выберем  $n$  таким, чтобы

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Теперь воспользуемся непрерывностью  $f_n$ : выберем такую окрестность  $U(c)$ , чтобы  $\forall x, y \in U(c)$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Тогда

$$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$$

что и означает непрерывность  $f$  в точке  $c$ . ■

**Определение.** Будем говорить, что  $f_n$  сходится локально равномерно к  $f$  на  $X$ , если

$$\forall x \in X \exists U(x): f_n \rightrightarrows f \text{ на } U(x)$$

**Замечание.** Для выполнения условия теоремы Стокса-Зейделя достаточно равномерной сходимости на некоторой окрестности  $c$ .

**Замечание.** Для того, чтобы  $f$  было непрерывным на  $X$ , достаточно, чтобы  $f_n$  локально равномерно на  $X$  сходилась к  $f$ .

**Теорема 2.1.3.** (О предельном переходе под знаком интеграла)

Пусть  $f_n \in C([a, b])$ ,  $f_n \rightrightarrows f$  на  $[a, b]$ . Тогда

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{\quad} & f \\ \downarrow \int & & \downarrow \int \\ \int_a^b f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & \int_a^b f \end{array}$$

*Доказательство.*  $f$  непрерывна на  $[a, b]$  по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Тогда

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a|$$

Из равномерной сходимости имеем:

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

тогда

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

■

**Теорема 2.1.4.** (Правило Лейбница)

$f : [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exists f'_y, f'_y, f$  непрерывны. Пусть

$$\phi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx$$

Тогда  $\phi$  дифференцируемо на  $[y_1, y_2]$  и

$$\phi'(y) = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x, y) dx$$

*Доказательство.*

$$\frac{\phi(y + \frac{1}{n}) - \phi(y)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \int_{x_1}^{x_2} \left( f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y) \right) dx \stackrel{\text{Лагранж}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f'_y\left(x, y + \frac{\theta}{n}\right) dx$$

Обозначим

$$g_n(x, y) = f'_y\left(x, y + \frac{\theta}{n}\right)$$

$f'_y$  непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывна на нём. Воспользуемся этим:

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall n: \frac{1}{n} < \delta \quad \forall x \quad \left| f'_y\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f'_y(x, y) \right| < \varepsilon$$

Отсюда получаем по определению

$$g_n(x, y) \rightrightarrows f'_y(x, y) \text{ на } [x_1, x_2]$$

Воспользуемся теоремой о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_1}^{x_2} g_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x, y) dx$$

Понятно, что вместо последовательности  $\frac{1}{n}$  можно рассматривать любую последовательность  $h_n$ , сходящуюся к 0. То есть

$$\phi'(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(y + h_n) - \phi(y)}{h_n} = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x, y) dx$$

■



**Теорема 2.1.5.** (О предельном переходе под знаком производной)  
 $f_n \in C^1(\langle a, b \rangle)$ ,  $f_n \rightarrow f$  поточечно на  $\langle a, b \rangle$ ,  $f'_n \rightrightarrows \varphi$  на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда

- $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$
- $f' = \varphi$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ f'_n & \xrightarrow{\quad} & \varphi \end{array}$$

*Доказательство.* Пусть  $x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$ , тогда  $f'_n \rightrightarrows \varphi$  на  $[x_0, x_1]$ . Тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Откуда

$$f(x_1) - f(x_0) \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

То есть

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi = f(x_1) - f(x_0)$$

Тогда  $f$  — первообразная  $\varphi$ .  $\varphi$  непрерывна по теореме Стокса-Зейделя. Получаем, что  $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$  и  $f' = \varphi$ . ■

## 2.2 Сходимость функциональных рядов

**Определение.** Пусть  $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ , тогда функциональным рядом будем называть  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ .

**Определение.** Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  сходится поточечно на  $E$ , если  $S_N(x) \rightarrow S(x)$ .

**Определение.** Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$  сходится равномерно на  $E$ , если  $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ .

**Замечание.** Из равномерной сходимости следует поточечная.

**Лемма 2.2.1.** (Об остатке функционального ряда)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows 0 \iff R_N(x) \rightrightarrows 0$$

**Доказательство.**  $\sup_{x \in E} |R_{N+1}(x)| = \sup_{x \in E} |S(x) - S_N(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  ■

**Лемма 2.2.2.** (Необходимое условие равномерной сходимости ряда)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \implies u_n(x) \rightrightarrows 0$$

**Доказательство.**

$$\sup_{x \in E} |u_N(x)| = \sup_{x \in E} |R_N(x) - R_{N+1}(x)| \leq \sup_{x \in E} |R_N(x)| + \sup_{x \in E} |R_{N+1}(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

■

**Теорема 2.2.3.** (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

$u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\exists c_n: \forall n, x \quad |u_n(x)| \leq c_n$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \rightarrow \perp$ , тогда  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$ .

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp &\iff R_N(x) \rightrightarrows 0 \iff \sup_{x \in E} |R_N(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \\ &\iff \sup_{x \in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right| \leq \sup_{x \in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

■

**Теорема 2.2.4.** (Критерий Больцано-Коши сходимости функционального ряда)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x) \iff \forall \varepsilon \exists N: \forall m, n > N \quad \sup_{x \in E} |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$$

*Доказательство.* Это обычный критерий Больцано-Коши для  $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$  ■

**Теорема 2.2.5.** (Стокс-Зейдель)

$u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_n$  непрерывны в  $x_0 \in E$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ , тогда  $S(x)$  непрерывна в  $x_0$ .

*Доказательство.*  $\forall N$   $S_N(x)$  непрерывна в  $x_0$  как конечная сумма непрерывных функций. Тогда по теореме Стокса-Зейделя для функциональных последовательностей  $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ ,  $S_N(x)$  непрерывны в  $x_0 \implies S(x)$  непрерывна в  $x_0$ . ■

**Теорема 2.2.6.** (Интегрирование функциональных рядов)

$u_n \in C([a, b])$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$  на  $[a, b]$ , тогда

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

иначе говоря:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

*Доказательство.*  $S \in C([a, b])$  по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Применим аналогичную теорему для функциональных последовательностей к  $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ :

$$\int_a^b S_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_a^b S(x) dx$$

в левой части интеграл и сумму можно переставлять местами (так как сумма конечная). Поэтому

$$\sum_{n=1}^N \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b S_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_a^b S(x) dx$$

Слева стоят частичные суммы обычного числового ряда. Поэтому по определению сходимости числового ряда имеем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx$$

■

**Теорема 2.2.7.** (Дифференцирование функциональных рядов)

$u_n \in C^1(\langle a, b \rangle)$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightarrow S(x)$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$  на  $\langle a, b \rangle$ ,

тогда  $S \in C^1(\langle a, b \rangle)$ , причем  $S'(x) = \varphi(x)$ .

*Доказательство.* Введем функциональную последовательность:  $S_N(x) \rightarrow S(x)$ . Поскольку  $S_N(x)$  — конечные суммы непрерывно дифференцируемых функций,  $S_N(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$ , причем  $S'_N(x) \rightrightarrows \varphi(x)$  на  $\langle a, b \rangle$ . Тогда по аналогичной теореме для функциональных последовательностей получаем требуемое. ■

**Теорема 2.2.8.** (О предельном переходе в функциональных рядах)

$u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — предельная точка  $E$ ,  $\forall n \exists a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$  на  $E$ .

Тогда  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  сходится, причем  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ . Иначе говоря:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

*Доказательство.* Обозначим  $S_N^a = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ . Проверим критерий Больцано-Коши

для  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ :

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

Поскольку  $S_{n+p}^a$  и  $S_{n+p}(x)$  просто конечные суммы, в них спокойно можно переставлять предел и сумму. Поэтому найдется такая окрестность точки  $x_0$ , что  $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \varepsilon$ . Аналогично поступим с третьим слагаемым. Из критерия Больцано-Коши получаем такое  $N$ , что для  $\forall n, m > N$   $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ . Таким образом имеем:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| < 3\varepsilon$$

Мы доказали сходимость ряда  $a_n$ . Проверим второе утверждение теоремы. Положим

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \neq x_0 \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

Все  $u_n$ , очевидно, непрерывны в  $x_0$ . Если мы проверим, что  $\sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$  на  $E \cup \{x_0\}$ , то по теореме Стокса-Зейделя  $\tilde{S}$  будет непрерывной, что означает

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

в левой части  $x_0$  никогда не подставляется в  $\tilde{S}$ , поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Осталось проверить, что  $\sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$  на  $E \cup \{x_0\}$ .

$$\sup_{x \in E \cup \{x_0\}} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \right| \leq \sup_{x \in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right| + \sup_{x \in \{x_0\}} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

■

**Теорема 2.2.9.** (О предельном переходе в функциональных последовательностях)  
 $f_n: E \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X$  — метрическое пространство,  $x_0$  — предельная точка  $E$ ,  $f_n \rightrightarrows f$ ,  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n$ . Тогда  $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$ , причем  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$ . Иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \xrightarrow{\quad} & f(x) \\ \downarrow x \rightarrow x_0 & & \downarrow x \rightarrow x_0 \\ f_n(x_0) & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f(x_0) \end{array}$$

или

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

*Доказательство.* Введем обозначения:  $u_1 = f_1, u_2 = f_2 - f_1, \dots, a_k = A_k - A_{k-1}$ . Тогда  $\sum_{k=1}^n u_k = f_n$ , то есть  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x)$  на  $E$ , причем  $u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_k$ . Пользуясь аналогичной теоремой для функциональных рядов, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

— сходится. Кроме того имеем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

■

**Теорема 2.2.10.** (Признак Дирихле)

Пусть  $a_n, b_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ , причем

- $\exists C_a: \forall N \forall x \in X \left| \sum_{i=1}^N a_n(x) \right| \leq C_a$
- $b_n \rightrightarrows 0, \forall x \in X$   $b_n$  монотонна по  $n$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \perp$

*Доказательство.* Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{N \leq k \leq M} a_k b_k = A_N b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N}^M a_k(x) b_k(x) \right| &\leq |A_N b_M| + |A_{N-1} b_N| + \left| \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k \right| \\ &\leq C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} |b_k - b_{k+1}| \end{aligned}$$

Все слагаемые в сумме одного знака. Считая, что  $b_k - b_{k+1} \geq 0$ , имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N}^M a_k(x) b_k(x) \right| &\leq C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) \\ &\leq C_a \cdot (|b_M| + |b_N| + |b_M| + |b_N|) \xrightarrow{N, M \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

■

**Теорема 2.2.11.** (Признак Абеля)

Пусть  $a_n, b_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ , причем

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \Rightarrow \perp$
- $\exists C_b: \forall N \forall x \in X |b_n(x)| \leq C_b, \forall x \in X b_n(x)$  монотонна по  $n$ .

Тогда  $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \Rightarrow \perp$

*Доказательство.* Применим критерий Коши к ряду  $a_n$ :

$$\forall \varepsilon \exists N: \forall n > N \forall p \geq 1 \forall x \in X |A_{n,p}(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i(x) \right| < \varepsilon$$

Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &\leq |b_{n+p}(x) A_{n,p}(x)| + \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_{k+1}(x) - b_k(x)) A_{n,k}(x) \right| \\ &\leq C \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_{k+1}(x) - b_k(x)| \leq C \varepsilon + \varepsilon |b_{n+p}(x)| + \varepsilon |b_n(x)| \\ &\leq C \varepsilon + 2C_b \varepsilon \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались монотонностью и ограниченностью  $b_n$ .

■

## 2.3 Степенные ряды

**Определение.** Степенным рядом называется формальный ряд вида  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ , где  $z, z_0 \in \mathbb{C}$ .

**Теорема 2.3.1.** (О круге сходимости степенного ряда)

Пусть  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  — степенной ряд. Тогда верно одно из трёх:

- Ряд сходится только при  $z = z_0$
- Ряд сходится при любых  $z$
- $\exists 0 < R < +\infty$  такое, что ряд сходится при  $|z - z_0| < R$ , и расходится при  $|z - z_0| > R$ . Поведение на границе не известно.

*Доказательство.* Изучим ряд на абсолютную сходимость, пользуясь признаком Коши: рассмотрим величину  $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ :

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ , тогда ряд сходится, очевидно, только при  $z = z_0$ .
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ , тогда ряд сходится для любых  $z$ .
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, +\infty)$ , тогда
  - a) при  $|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  ряд сходится.
  - b) при  $|z - z_0| > \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$  ряд расходится.

■

**Следствие 2.3.2.** (Формула Адамара)

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

**Следствие 2.3.3.** (О множестве сходимости степенного ряда)

Множеством сходимости степенного ряда является  $B(z_0, R) \cup \Gamma$ , где  $\Gamma \subseteq \text{Cl}B(z_0, R)$ , а  $R$  — радиус сходимости ряда.

**Теорема 2.3.4.** (О равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)

Пусть  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  — степенной ряд, причем  $0 < R \leq +\infty$ . Тогда

- $\forall 0 < r < R$  ряд сходится равномерно на  $\overline{B(z_0, r)}$ .
- $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \in C(B(z_0, R))$ .

*Доказательство.*

- Применим признак Вейерштрасса:  $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n$ . Ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot r^n$  сходится абсолютно, потому что исходный ряд сходится при  $z = z_0 + r$ .
- Слагаемое непрерывно, есть равномерная сходимость на  $\overline{B(z_0, r)} \implies$  во всех точках  $B(z_0, R)$  сумма непрерывна.

■

**Лемма 2.3.5.**  $w, w_0 \in \mathbb{C}, |w|, |w_0| \leq r$ . Тогда  $|w^n - w_0^n| \leq nr^{n-1}|w - w_0|$

*Доказательство.*

$$|w^n - w_0^n| = |w - w_0| \cdot |w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \dots + w_0^{n-1}| \leq |w - w_0| \cdot (|w|^{n-1} + \dots + |w_0|^{n-1}) \leq |w - w_0| nr^{n-1}$$

■

**Лемма 2.3.6.** Степенные ряды  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  и  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$  имеют одинаковый радиус сходимости.

*Доказательство.* Пусть  $S_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ,  $\tilde{S}_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$ , тогда  $\tilde{S}_N(x) = x S_N(x) \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{S}_N(x) = x \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x)$  — существуют на одном и том же множестве.

■

**Теорема 2.3.7.** (О дифференцировании степенного ряда)

Пусть  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$  — степенной ряд, причем  $0 < R \leq +\infty$ , и  $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$ .

Тогда

- $\varphi$  имеет тот же радиус сходимости, что и  $f$ .
- $f$  дифференцируемо на  $B(z_0, R)$ , причем  $f'(z) = \varphi(z)$

*Доказательство.*

- Найдем радиус сходимости  $\hat{R}$  ряда  $\varphi$  по формуле Адамара и пользуясь последней леммой:

$$\hat{R} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n \cdot a_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$



- Рассмотрим точку  $a \in B(z_0, R)$  и покажем, что в этой точке существует производная ряда, причем она равна тому, что ожидается. Сузим круг до  $B(z_0, r)$ , где  $r = \frac{R+|a-z_0|}{2}$ . Положим  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ :

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{(z-z_0) - (a-z_0)}$$

Пусть  $w = z - z_0 : |w| < r$ ,  $w_0 = a - z_0 : |w_0| < r$ . Тогда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{(z-z_0) - (a-z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot nr^{n-1}$$

Последний ряд сходится по первому пункту теоремы. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{(z-z_0) - (a-z_0)}$  сходится равномерно. Зная это, воспользуемся теоремой о предельном переходе в сумме:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z - a} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1} \end{aligned}$$

■

**Следствие 2.3.8.**  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \in C^\infty(B(z_0, R))$ , причем все производные — почленные.

**Следствие 2.3.9.** (О почленном интегрировании степенного ряда)

Пусть  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$  где  $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x \in B(x_0, R)$ , тогда

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$  имеет тот же радиус сходимости, что и  $f$ .
- Выполняется равенство

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^x a_n(x-x_0)^n dx$$

**Определение.** Экспонентой называется функция  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  такая, что  $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

**Теорема 2.3.10.** (Свойства экспоненты)

- Радиус сходимости равен  $+\infty$
- $\exp(0) = 1$
- $\overline{\exp}(z) = \exp(z)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1$
- $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$

*Доказательство.* Докажем последние два утверждения. Остальные очевидны.

- $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - 1}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^0}{z - z_0} = (e^z)' \Big|_0 = 1$

- 

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \exp(z) \exp(w) \end{aligned}$$

■

**Теорема 2.3.11.** (Метод Абеля)

Пусть  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$  — сходящийся ряд. Положим  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$  при  $|x| < 1$ . Тогда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \lim_{x \rightarrow 1_-} f(x)$$

*Доказательство.* Для начала отметим, что  $f$  задана корректно: при  $0 < x < 1$  ряд сходится равномерно по признаку Абеля. Так как  $f$  — ряд, то область его сходимости симметрична, то есть для отрицательных  $x$   $f$  тоже задана корректно. Раз  $f$  — равномерно сходящийся ряд, причем  $c_n x^n$  непрерывны, то по теореме Стокса-Зейделя  $f$  непрерывна. Раз так, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1_-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

■

**Теорема 2.3.12.** (Формула Григори-Лейбница)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

*Доказательство.* Положим  $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$ , тогда  $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x$ . Тогда  $f(x) = c + \arctan x$ . Подставляя  $x = 0$  убеждаемся, что  $c = 0$ .  
Получаем  $\lim_{x \rightarrow 1_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1_-} \arctan x = \frac{\pi}{4}$ . ■

**Следствие 2.3.13.** (О сходимости произведения рядов)

Пусть  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$ ,  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$ ,  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ , тогда ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$  сходится, причем  $AB = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ .

*Доказательство.* Положим  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ,  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ ,  $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ . при  $x < 1$  ряды сходятся абсолютно (вспомним теорему о круге сходимости: в ней мы доказывали абсолютную сходимость), поэтому по старой теореме о произведении рядов  $f(x)g(x) = h(x)$ . Осталось совершить предельный переход в этом равенстве, чтобы получить требуемое. ■

## 2.4 Ряды тейлора

**Определение.**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  разложима в степенной ряд в точке  $x_0$ , если

$$\exists U(x_0) \exists \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n: \forall x \in U(x_0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

**Теорема 2.4.1.** (Единственность разложения в ряд)

$f$  разложима в степенной ряд в  $x_0 \implies$  этот ряд единственный.

*Доказательство.* Для доказательства этого непосредственно вычислим  $a_i$ .

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Поэтому  $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$ . Значит, можно дифференцировать. Подставим  $x = x_0$ :  $a_0 = f(x_0)$ . Этим мы однозначно определили  $a_0$ . Рассмотрим

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots$$

Подставим  $x = x_0$ :  $a_1 = f'(x_0)$ . Продолжая в том же духе, однозначно определим все  $a_i$ . ■

**Определение.** Рядом Тейлора  $f \in C^\infty(U(x_0))$  в точке  $x_0$  называется формальный ряд  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

**Теорема 2.4.2.** (Разложение бинома в ряд Тейлора)

Пусть  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $|x| < 1$ , тогда

$$(1+x)^\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} x^n$$

*Доказательство.* Изучим ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x(\sigma-n)}{n+1} \right| = |x| < 1$$

Значит, при  $|x| < 1$  ряд сходится абсолютно. Раз ряд степенной, то на круге сходимости он сходится и равномерно. Пусть  $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} x^n$ . Заметим, что

$$S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$$

Теперь положим  $f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma}$ . Достаточно показать, что  $f(x) = 1$  при  $|x| < 1$ . Изучим производную  $f$ :

$$f'(x) = \frac{S'(x)(1+x)^\sigma + S(x)\sigma(1+x)^{\sigma-1}}{(1+x)^{2\sigma}} = \frac{S'(x)}{(1+x)^\sigma} + \frac{\sigma S(x)}{(1+x)^{\sigma-1}} = 0$$

Осталось проверить  $f(x) = 1$  в каком-нибудь  $x$ :

$$f(0) = \frac{1}{1} = 1$$

■

**Замечание.** Пусть  $|t| < 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) \cdot t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}}$$

**Теорема 2.4.3.** (Критерий разложимости в ряд Тейлора)

Пусть  $f \in C^\infty([x_0 - h, x_0 + h])$ . Тогда  $f$  разложима в ряд Тейлора в  $U(x_0) \iff \exists \delta, C, A: \forall n \forall |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$

*Доказательство.*

( $\Leftarrow$ ) Оценим остаток в форме Лагранжа:

$$f(x) = T_n f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!} (x - x_0)^n$$

$$\left| \frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{CA^n n!}{n!} |x - x_0|^n$$

Чтобы остаток стремился к нулю, нужно, чтобы  $A|x - x_0| < 1$ , откуда получаем  $U(x_0): |x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$ . Поскольку теперь остаток ряда стремится к нулю, то  $\forall x \in U(x_0) \quad T_n f(x) \rightarrow f(x)$ , что и требовалось доказать.

( $\Rightarrow$ ) Пусть  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$  в  $U(x_0)$ . Ряд сходится, поэтому для (произвольного)  $x = x_1 \neq x_0$  имеем

$$\exists C_1: \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n \right| \leq C_1 \implies |f^{(n)}(x_0)| \leq C_1 n! \frac{1}{|x_1 - x_0|^n}$$

Положим  $B_n = \frac{1}{|x_1 - x_0|^n}$ . Проанализируем  $m$ -ю производную  $f$ :

$$|f^{(m)}(x)| \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} (x - x_0)^{n-m} \right| \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \left| C_1 \frac{B^n n!}{(n-m)!} (x - x_0)^{n-m} \right|$$

$$= B^m C_1 \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) \cdot |B(x - x_0)|^{n-m}$$

$$= C_1 B^m \frac{m!}{(1 - |B(x - x_0)|)^{m+1}} \underset{x: |x-x_0| < \frac{1}{2}}{\leq} \frac{C_1 m! B^m}{\frac{1}{2^{m+1}}} = C_1 m! B^m 2^{m+1} = (2C_1) m! (2B)^m$$

■

## 2.5 Суммирование по Чезаро

**Теорема 2.5.1.** (Коши о перманентности метода средних арифметических)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underset{c/a}{=} S$$

*Доказательство.* Обозначим  $\sigma_n = \frac{1}{n+1}(S_0 + \dots + S_n)$ . По определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall N > N_1 |S_N - S| < \varepsilon$$

Далее:

$$\begin{aligned} |\sigma_N - S| = \left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (S_n - S) \right| &\leq \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N |S_n - S| \underset{N > N_1}{=} \underbrace{\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N_1} |S_n - S|}_{=\frac{c}{N+1} \rightarrow 0} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{N+1} \sum_{n=N_1+1}^N |S_n - S|}_{< \varepsilon} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

■

## Глава 3

# Криволинейные интегралы

### 3.1 Интеграл по кусочно-гладкому пути

**Определение.** Пусть  $E \subseteq \mathbb{R}^m$  открыто, тогда  $V: E \rightarrow \mathbb{R}^m$  будем называть *векторным полем*. По умолчанию  $V \in C(E)$ .

**Определение.** (Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути)  
Пусть  $V$  - векторное поле,  $\gamma: [a, b] \rightarrow E$  — кусочно-гладкий путь, тогда *интегралом векторного поля по этому пути* называется

$$I(V, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

**Замечание.** Предыдущее определение можно переписать в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt \\ &\stackrel{\gamma \rightarrow x}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(x(t)) x'_i(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i dx_i \end{aligned}$$

**Определение.** Пусть  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$  — пути,  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ , тогда определим *произведение путей*  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2: [a, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$  следующим образом:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

**Определение.** *Обратным путем* называется путь  $\gamma^{-1}: t \mapsto \gamma(a + b - t)$ .

**Теорема 3.1.1.** (О свойствах интеграла по кусочно-гладкому пути)

1. Линейность по полю:  $I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$  для любых полей  $U, V$ , любого  $k$ -г пути  $\gamma$  и любых  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
2. Аддитивность при дроблении пути:  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $a < c < b$ , тогда  $I(V, \gamma) = I(V, \gamma|_{[a, c]}) + I(V, \gamma|_{[c, b]})$ .
3. Замена параметра: пусть  $\varphi: [p, q] \rightarrow [a, b]$  — сюръекция, причем  $\varphi(p) = a$ ,  $\varphi(q) = b$ ,  $\varphi \in C^1$ , тогда  $I(V, \gamma) = I(V, \gamma \circ \varphi)$ .
4. Интеграл произведения путей:  $I(V, \gamma_1 \gamma_2) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$ .
5.  $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^{-1})$ .
6.  $|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in \gamma[a, b]} \|V(x)\| \cdot l(\gamma)$ .

## 3.2 Потенциальные векторные поля

**Определение.** Пусть  $\mathcal{O}$  — область в  $\mathbb{R}^m$ ,  $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m \in C$ , тогда поле  $V$  называется *потенциальным*, если оно является градиентом какого-то отображения, то есть  $\exists f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}): V = \text{grad } f$ .

**Лемма 3.2.1.** Пусть  $f_1, f_2$  — отображения из определения потенциальности поля  $V$ . Тогда  $f_1 - f_2 = c \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 3.2.2.** (Обобщенная формула Ньютона-Лейбница)

Пусть  $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$  — потенциальное поле с потенциалом  $f$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{O}$  — кусочно-гладкий путь,  $A = \gamma(a)$ ,  $B = \gamma(b)$ . Тогда

$$I(V, \gamma) = f(B) - f(A)$$

**Определение.** Интеграл векторного поля *не зависит от пути* в  $\mathcal{O}$ , если  $\forall A, B \forall \gamma_1, \gamma_2$  кусочно-гладких путей из  $A$  в  $B$   $I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$ .

**Теорема 3.2.3.** (Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)

$V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ . эквивалентны утверждения:

- $V$  — потенциальное
- $I(V, \gamma)$  не зависит от пути
- $\forall$  кусочно-гладкой петли  $\gamma$   $I(V, \gamma) = 0$



### 3.3 Локально потенциальные векторные поля

**Лемма 3.3.1.**  $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$  — гладкое потенциальное векторное поле. Тогда

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \quad \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$$

**Теорема 3.3.2.** (Лемма Пуанкаре)

Пусть  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$  — выпуклая область,  $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^1$ ,  $\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$ , тогда  $V$  потенциально.

**Определение.** Поле  $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *локально потенциальным*, если оно потенциально в некоторой окрестности любой точки.

**Следствие 3.3.3.** (Лемма Пуанкаре)

Пусть  $\mathcal{O}$  открыто в  $\mathbb{R}^m$ ,  $V \in C^1(\mathcal{O})$ ,  $\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$ , тогда  $V$  локально потенциально.

### 3.4 Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути

**Лемма 3.4.1.** (О гусенице)

Пусть  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$  — область, для всех  $x$  задана окрестность  $U(x)$ ,  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$ , тогда существует такое дробление пути  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  и такие шары  $B_k = B_k(x_k, r_k) \subseteq U(x_k)$ , что  $\forall k \quad \text{Im } \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \subseteq B_k$ .

**Определение.** Объект из последней теоремы будем называть  $V$ -гусеницей.

**Определение.** Пути  $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$  будем называть *похожими*, если у них есть общая  $V$ -гусеница. При этом ограничение идем именно на гусеницу, то есть наборы  $t_k$  могут быть разными.

**Лемма 3.4.2.** Пусть  $V$  — локально потенциальное векторное поле,  $\gamma_1, \gamma_2$  — похожие кусочно-гладкие пути,  $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ ,  $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ , тогда  $I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$ .

**Лемма 3.4.3.**  $C([a, b]) \ni \gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ ,  $\mathcal{O}$  — область, тогда  $\exists \delta > 0$ :

Если  $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathcal{O}: \forall t \in [a, b] \quad |\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \delta, |\gamma(t) - \gamma_2(t)| < \delta$ , тогда  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$  похожи друг на друга.

**Определение.** (Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути)  
Пусть  $\gamma$  — непрерывный путь,  $\gamma'$  — любой кусочно-гладкий путь, удовлетворяющий предыдущей лемме. тогда положим  $I(V, \gamma) = I(V, \gamma')$

### 3.5 Гомотопия

**Определение.** Рассмотрим два пути  $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathcal{O}$ . *Гомотопией* путей  $\gamma_0, \gamma_1$  называется отображение  $\Gamma: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{O} \in C$ , такое, что  $\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$  и  $\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$ .

**Определение.** Гомотопия называется *связанной*, если  $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$  и  $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$ .

**Определение.** Гомотопия называется *петельной*, если  $\forall u \in [0, 1] \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$ .

**Теорема 3.5.1.** (Интегралы по связанно гомотопным путям)

$V$  — локально потенциальное поле,  $\gamma_0, \gamma_1$  — связанно гомотопные пути. Тогда  $I(V, \gamma_0) = I(V, \gamma_1)$ .

**Определение.** Область называется *односвязной* если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному.

**Теорема 3.5.2.** Пусть  $\mathcal{O}$  — односвязная область в  $\mathbb{R}^m$ ,  $V$  — локально потенциальное векторное поле в  $\mathcal{O}$ , тогда  $V$  потенциально в  $\mathcal{O}$ .

**Следствие 3.5.3.** (Теорема Пуанкаре для односвязной области)

$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \implies$  поле потенциально.

# Глава 4

## Теория меры

### 4.1 Системы множеств

**Определение.** Полукольцом подмножеств множества  $X$  называют  $\mathcal{P} \subseteq 2^X$ , удовлетворяющее условиям

1.  $\emptyset \in \mathcal{P}$ .
2.  $A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$ .
3.  $\forall A, B \in \mathcal{P} \exists B_1, \dots, B_k \in \mathcal{P}: A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^k B_i$ .

**Определение.** Ячейкой в  $\mathbb{R}^m$  называется множество вида

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{a}_i \leq x_i < \mathbf{b}_i \}$$

**Теорема 4.1.1.** (Свойства полуколец)

1.  $A \in \mathcal{P} \not\Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{P}$
2.  $A, A' \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A @ A' \in \mathcal{P}, @ \in \{ \cup, \setminus, \Delta \}$
3.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P} \implies A \setminus \left( \bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigsqcup_{fin} D_j$

**Определение.** Алгеброй подмножеств множества  $X$  называется множество  $\mathcal{A} \in 2^X$  такое, что выполнены аксиомы:

1.  $X \in \mathcal{A}$
2.  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$

**Теорема 4.1.2.** (Свойства алгебр)

1.  $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$
2.  $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

$$3. \bar{A} = X \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$4. A \cup B \in \mathcal{A}$$

$$5. A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$$

6. Алгебра подмножеств является полукольцом подмножеств

**Определение.**  $\sigma$ -Алгеброй подмножеств множества  $X$  называется алгебра подмножеств  $\mathcal{A}$ , удовлетворяющая дополнительной аксиоме:

$$\{A_n\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

## 4.2 Объём

**Определение.** Пусть  $\mathcal{P}$  — полукольцо,  $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  называется *конечно-аддитивной*, если

1.  $\mu$  принимает не более одного значения из  $\{+\infty, -\infty\}$

$$2. \mu(\emptyset) = 0$$

3.  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}, A_i \cap A_{j \neq i} = \emptyset$ , тогда если оказалось, что  $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{P}$ , то

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

**Определение.** Пусть  $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  называется *объёмом*, если

1.  $\mu$  конечно-аддитивна

$$2. \mu \geq 0$$

**Определение.** Объём называется *конечным*, если  $\mu(X) < +\infty$ .

**Определение.** *Классическим объёмом* в  $\mathbb{R}^m$  называется объём, заданный на полукольце ячеек в  $\mathbb{R}^m$ , вычисляющийся по формуле  $\mu([a, b)) = \prod_{k=1}^m (b_k - a_k)$ .

**Лемма 4.2.1.** (Монотонность объёма) Для объёма  $\mu, A, B \in \mathcal{P}, A \subseteq B$  выполнено  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

**Теорема 4.2.2.** (Свойства объёма)

1.  $\forall A$ , дизъюнктивных  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}: \bigsqcup_{i=1}^n A_i \subseteq A \Rightarrow \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu(A)$   
(усиленная монотонность)

2.  $\forall A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}: A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$   
(конечная полуаддитивность)

## 4.3 Мера

**Определение.** Мерой называется объём  $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , обладающий свойством счётной аддитивности.

**Теорема 4.3.1.** Пусть  $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1.  $\mu$  счетно-аддитивен
2.  $\mu$  счетно-полуаддитивен

**Теорема 4.3.2.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра,  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1.  $\mu$  счетно-аддитивно
2.  $\mu$  непрерывно снизу, то есть  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}: A_1 \subset A_2 \subset \dots; A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \implies \mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$

**Теорема 4.3.3.** Пусть  $\mathcal{A}$  — алгебра,  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — **конечный** объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1.  $\mu$  счетно-аддитивен
2.  $\mu$  непрерывно снизу
3.  $\mu$  непрерывно сверху, то есть  $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}: A_1 \supset A_2 \supset \dots; A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \implies \mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$

## 4.4 О стандартном продолжении меры

**Определение.** Пространством с мерой называется тройка  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ , где  $\mathcal{A}$  —  $\sigma$ -алгебра,  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  — мера.

**Определение.**  $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$  называется *полным* (соответственно мера называется *полной*), если  $\forall E \in \mathcal{A}: \mu(E) = 0 \implies \forall A \subseteq E, A \in \mathcal{A} \text{ и } \mu(A) = 0$ .

**Определение.**  $\langle X, \mathcal{P}, \mu \rangle$  называется  *$\sigma$ -конечным* (соответственно мера называется  *$\sigma$ -конечной*), если  $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k$ , где  $\mu(B_k) < +\infty$ .

**Теорема 4.4.1.** (О стандартном продолжении меры)

$\langle X, \mathcal{P}, \mu_0 \rangle$ ,  $\mu_0$  —  $\sigma$ -конечный объём. Тогда  $\exists$   $\sigma$ -алгебра  $\mathcal{A}$  и мера  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ :

1.  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ ,  $\mu|_{\mathcal{P}} = \mu_0$
2.  $\mu$  полная

3. Если  $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{P}$ ,  $\mu'|_{\mathcal{P}} = \mu_0$ ,  $\mu'$  — полная, тогда  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$  и  $\mu'|_{\mathcal{A}} = \mu$
4. Если  $\mathcal{P}'$  — полукольцо,  $\mu'$  — мера на  $\mathcal{P}'$ ,  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{A}$ , тогда  $\mu' = \mu|_{\mathcal{P}'}$
5.  $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = \inf \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_0(P_k) \mid A \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P} \right)$

## 4.5 Мера Лебега

**Теорема 4.5.1.** Классический объём в  $\mathbb{R}^m$  является  $\sigma$ -конечной мерой.

**Определение.** Мерой Лебега называется стандартное продолжение классического объёма.

**Определение.** Алгебра, на которой определена мера Лебега, обозначается  $\mathfrak{M}$ .

**Определение.** Измеримыми по Лебегу называются множества  $A \in \mathfrak{M}$ .

**Теорема 4.5.2.** (Свойства меры Лебега)

1. Объединения и пересечения измеримых множеств измеримы.
2. Все открытые и замкнутые множества измеримы.

**Лемма 4.5.3.** (О структуре открытых множеств)

1.  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$  открыто  $\implies \exists Q_i$  — ячейки в  $\mathbb{R}^m$  такие, что  $\mathcal{O} = \bigsqcup_i Q_i$ , причем можно дополнительно считать, что выполнено что-либо из нижеперечисленного:
  - (а) Ячейки имеют рациональные (двоично-рациональные) координаты
  - (б)  $\text{Cl}(Q_i) \subseteq \mathcal{O}$
  - (с)  $Q_i$  — кубы
2. Пусть  $E$  измеримо в  $\mathbb{R}^m$ ,  $\lambda(E) = 0$ , тогда  $\forall \varepsilon > 0 \exists Q_i$  — ячейки в  $\mathbb{R}^m$  такие, что  $E \subseteq \bigcup_i Q_i$  и  $\sum_i \mu(Q_i) < \varepsilon$ .

**Теорема 4.5.4.** (Свойства меры Лебега)

3. [Канторово множество TBD]
4. [Пример неизмеримого множества TBD]
5.
  - $A$  ограничено, тогда  $\lambda(A) < +\infty$
  - $A$  открыто, тогда  $\lambda(A) > 0$
  - $\lambda(A) = 0 \implies \forall A$  нет внутренних точек
6.  $A$  измеримо, тогда  $\forall \varepsilon > 0$

- $\exists G_\varepsilon$  открытое такое, что  $A \subset G_\varepsilon$ ,  $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
- $\exists F_\varepsilon$  замкнутое такое, что  $F_\varepsilon \subset A$ ,  $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

**Определение.** Пусть  $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ , тогда борелевской оболочкой множества  $\mathcal{A}$  называют минимальную по включению  $\sigma$ -алгебру, содержащую  $\mathcal{A}$ .

**Определение.** Борелевской  $\sigma$ -алгеброй называется борелевская оболочка всех открытых множеств.

**Следствие 4.5.5.**  $A$  измеримо, тогда  $\exists$  борелевские  $B, C$ :  $B \subset A \subset C$  такие, что  $\lambda(C \setminus B) = 0$ .

**Следствие 4.5.6.**  $A$  измеримо, тогда  $A = B \cup \mathfrak{N}$ ,  $B$  — борелевское,  $\lambda(\mathfrak{N}) = 0$ .

**Следствие 4.5.7.** (Регулярность меры Лебега)

Пусть  $A$  измеримо, тогда

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G \text{ открыто}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ замкнуто}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ компакт}}} \lambda(K)$$

**Лемма 4.5.8.** Пусть  $\langle X', \mathcal{A}', \mu' \rangle$  — пространство с мерой.  $\langle X, \mathcal{A}, \_ \rangle$  — заготовка для пространства с мерой.  $T: X \rightarrow X'$  — биекция,  $\forall A \in \mathcal{A} \ T(A) \in \mathcal{A}'$ ,  $T(\emptyset) = \emptyset$ . Положим  $\mu(A) = \mu'(T(A))$ . Тогда  $\mu$  — мера на  $\mathcal{A}$ .

**Лемма 4.5.9.**  $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \in C(\mathbb{R}^m)$ ,  $\forall E \in \mathfrak{M} \ \lambda(E) = 0 \implies \lambda(T(E)) = 0$ , тогда  $\forall A \in \mathfrak{M} \ T(A) \in \mathfrak{M}$ .