

Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

1	Многомерный анализ	2
1.1	Сведения из линейной алгебры	2
1.2	Дифференцируемость и дифференциал отображений	6
1.3	Теоремы Лагранжа для отображений	12
1.4	Формула Тейлора	13
1.5	Диффеоморфизмы	17
1.6	Относительный экстремум	28
2	Функциональные последовательности и ряды	31
2.1	Сходимость функциональных последовательностей	31
2.2	Сходимость функциональных рядов	37
2.3	Степенные ряды	42
2.4	Ряды тейлора	47
2.5	Суммирование по Чезаро	48
3	Криволинейные интегралы	50
3.1	Интеграл по кусочно-гладкому пути	50
3.2	Потенциальные векторные поля	52
3.3	Локально потенциальные векторные поля	54
3.4	Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути . . .	55
3.5	Гомотопия	58
4	Теория меры	60
4.1	Системы множеств	60
4.2	Объём	61
4.3	Мера	63
4.4	О стандартном продолжении меры	65
4.5	Мера Лебега	66

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются операторами

Определение. Нормой на множестве X называется отображение $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Определение. Нормированным пространством называется пара $\langle X, \| \cdot \| \rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(x, y) = \|x - y\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)

Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ — нормы на V . Тогда

$$\exists c, C > 0: c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$.

i) $\| \cdot \|$ — норма.

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \geq 0$ — очевидно

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha c_i)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ — очевидно

$$\cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ — неравенство Минковского}$$

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\|\cdot\|$.

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_1 \leq_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|_1^2} = c \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

тогда

$$|\|x\|_1 - \|y\|_1| \leq \|x - y\|_1 \leq c \|x - y\|$$

Поэтому $\|\cdot\|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{x \in S^n} \|x\|_1$$

$$c_2 := \max_{x \in S^n} \|x\|_1$$

Ни c_1 , ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\|x\|_1 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \geq c_1 \|x\|$$

$$\|x\|_1 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \leq c_2 \|x\|$$

что и доказывает утверждение теоремы. ■

Определение. Нормой оператора называется отображение $\|\cdot\| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in S^m} \|Ax\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup_{\|x\|=1} Ax = \sup_{\|x\| \leq 1} Ax$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)

$\|\cdot\| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|Ae_i\| \leq_{\text{КБШ}} \|x\| \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|A\| = 0 \iff \forall x \in S^n Ax = 0 \iff A = 0$. Неотрицательность очевидна.

$$\text{ii) } \|\alpha \mathcal{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\alpha \mathcal{A} \mathbf{x}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} |\alpha| \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| = \alpha \|\mathcal{A}\|$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{x}\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| + \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B} \mathbf{x}\|$$

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \implies \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x} - \mathcal{A} \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \left\| \mathcal{A} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \right\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{B}\| \|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B}(\mathcal{A} \mathbf{x})\| \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left(\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \|\mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right)\| \right) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right)\| \\ &\leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{B}\| \end{aligned}$$

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на \mathbb{R}^m

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\text{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра.

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\iff \exists c > 0 \forall \mathbf{x} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\|$, причем $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{y}\| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \|\mathbf{y}\| \implies \|\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} \|\mathbf{x}\|$$

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)

$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

$$\text{i)} \quad \mathcal{B} \in \Omega_m$$

$$\text{ii)} \quad \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|}$$

$$\text{iii)} \quad \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geq \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| \geq \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \right) \|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\|$$

Далее по лемме получаем обратимость \mathcal{B} и оценку на его норму.

iii)

$$\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathcal{B}^{-1}$$

$$\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq_{\text{i)} \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$$

■

Следствие 1.1.8. Множество Ω_m открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\| \rangle$

1.2 Дифференцируемость и дифференциал отображений

Определение. Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение. Отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω — область в \mathbb{R}^m называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, такие что

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

Где $r(\mathbf{h})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

или, что то же самое

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|$$

Где $\alpha(\mathbf{h})$ бесконечно малое, то есть

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \alpha(\mathbf{h}) = 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Замечание. Функции α , r из определения дифференцируемости зависят не только от \mathbf{h} , но и от \mathbf{x} .

Определение. Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом f в точке \mathbf{x}* и обозначать $d_{\mathbf{x}}f = \mathcal{A}$.

Замечание. Отображение $\mathbf{x} \mapsto d_{\mathbf{x}}f$, действующее из \mathbb{R}^m в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом f* .

Определение. Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения f в точке \mathbf{x}* .

Теорема 1.2.1. (Единственность производной)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируема в \mathbf{x} , тогда существует единственный производный оператор f в точке \mathbf{x} .

Доказательство. Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(t\mathbf{z}) \|t\mathbf{z}\|, \quad t\mathbf{z} \rightarrow 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t), \quad t \rightarrow 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{z} &= \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t), \quad t \rightarrow 0 \iff \\ \mathcal{A}\mathbf{z} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t}\end{aligned}$$

■

Утверждение 1.2.2. (Производный оператор линейного отображения)

Пусть $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда \mathcal{A} дифференцируемо в каждой точке и $d_{\mathbf{x}}\mathcal{A} = \mathcal{A}$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

Утверждение 1.2.3. (Линейность производного оператора)

Пусть $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в \mathbf{x} . Тогда отображение $\alpha f + \beta g$ дифференцируемо в точке \mathbf{x} , причем $d_{\mathbf{x}}(\alpha f + \beta g) = \alpha d_{\mathbf{x}}f + \beta d_{\mathbf{x}}g$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) &= [(\alpha f)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f)(\mathbf{x})] + [(\beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\beta g)(\mathbf{x})] \\ &= [d_{\mathbf{x}}f + o] + [d_{\mathbf{x}}g + o] = d_{\mathbf{x}}f + d_{\mathbf{x}}g + o\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.4. (Дифференцируемость композиции)

Пусть $f: \Omega \rightarrow \Omega_1$, $g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в \mathbf{x} , тогда $F = g \circ f$ дифференцируема в \mathbf{x} , причем $d_{\mathbf{x}}F = d_{f(\mathbf{x})}g \cdot d_{\mathbf{x}}f$

Доказательство.

$$\begin{aligned}g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{x}) + [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h})) \\ &= \{ \mathbf{v} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h}) \} \\ &= g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{v} + \tilde{r}(\mathbf{v}) \\ &= g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g][d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + [d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Осталось показать, что $[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{h}\|)$.

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \left\| [d_{f(\mathbf{x})}g] \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|} \|r(\mathbf{h})\| \right\| + \tilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|) \|\mathbf{v}\|$$

Обозначим $\mathbf{w} = \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$, причем $\|\mathbf{w}\| = 1$. Из определения нормы оператора получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{w}\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\|$$

Кроме того, $\|\mathbf{v}\| \leq \|d_{\mathbf{x}}f\| \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$. Окончательно получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\| \|r(\mathbf{h})\| + \tilde{\alpha}(\|d_{\mathbf{x}}f\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \cdot \|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{v}\| \leq \beta(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой $\beta(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

■

Определение. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис \mathbb{R}^n , тогда отображения

$$f_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{u}_i \rangle$$

где $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, называются *координатными функциями*.

Теорема 1.2.5. (Дифференцируемость координатных функций)

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$f \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x} \iff \forall i \text{ } f_i \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x}$$

причем

$$d_{\mathbf{x}}f = \begin{pmatrix} d_{\mathbf{x}}f_1 \\ \vdots \\ d_{\mathbf{x}}f_n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

\Leftarrow

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(\mathbf{x}))$$

где $g_i(t) = t\mathbf{u}_i$ — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда f дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

$\Rightarrow f_i$ дифференцируемы как композиции f и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

Определение. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$ — область, тогда *производной по направлению* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ в точке \mathbf{x} называется

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует.

Определение. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис \mathbb{R}^n , тогда *частной производной* f по k -й переменной называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f'_k \stackrel{\text{def}}{=} D_k f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

Утверждение 1.2.6. Пусть $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\exists D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u}$$

Доказательство. Для любых $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} &= \frac{[d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{u}) + r(t\mathbf{u})}{t} \\ &= [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} + \frac{r(t\mathbf{u})}{t} \leq [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} + \frac{\alpha(\mathbf{u})\|t\mathbf{u}\|}{t} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u})\|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.7. (Вид матрицы Якоби) Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$d_{\mathbf{x}}f = \begin{pmatrix} D_1f_1(\mathbf{x}) & D_2f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_mf_1(\mathbf{x}) \\ D_1f_2(\mathbf{x}) & D_2f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_mf_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_1f_n(\mathbf{x}) & D_2f_n(\mathbf{x}) & \cdots & D_mf_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть (\mathbf{e}_i) — базис \mathbb{R}^m , $(\tilde{\mathbf{e}}_j)$ — базис \mathbb{R}^n , тогда

$$\begin{aligned} [d_{\mathbf{x}}f]_{i,j} &= \langle [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = \left\langle \frac{[d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{e}_i)}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \left\langle \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_j(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f_j(\mathbf{x})}{t} = D_i f_j(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

■

Утверждение 1.2.8. Пусть $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} = [\text{grad } f(\mathbf{x})]\mathbf{u} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

■

Утверждение 1.2.9. (Необходимое условие дифференцируемости)

Если f дифференцируемо в \mathbf{x} , то существуют все частные производные в точке \mathbf{x} , причем матрица Якоби f в точке \mathbf{x} совпадает с матрицей, составленной из матриц Якоби f_i в точке \mathbf{x} :

$$d_{\mathbf{x}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}(\mathbf{x}) \right)$$

Доказательство. Подставим в определение дифференцируемости $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) &= f(\mathbf{x}) + [d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{e}_k) + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\| \\ &= f(\mathbf{x}) + t[d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_k + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

Отсюда по определению частной производной получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_k$$

■

Теорема 1.2.10. (Достаточное условие дифференцируемости)

Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $B(\mathbf{a}) \subseteq \Omega$, в $B(\mathbf{a})$ существуют все частные производные, причем они непрерывны в точке \mathbf{a} . Тогда f дифференцируемо в точке \mathbf{a} .

Доказательство. Докажем теорему для случая $m = 2$. Схема, примененная в доказательстве тривиально обобщается на произвольные m .

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= (f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2)) + (f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)) \\
&\stackrel{\text{Лагранж}}{=} f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&\quad + \left[\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2) - f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\rightarrow 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} + \underbrace{(f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) - f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\rightarrow 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|
\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.11. Пусть $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, f, g, λ дифференцируемы в \mathbf{a} . Тогда λf , $\langle f, g \rangle$ дифференцируемы в \mathbf{a} , причем

- $[d_{\mathbf{a}}(\lambda f)]\mathbf{h} = [d_{\mathbf{a}}\lambda]\mathbf{h} \cdot f(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}$
- $[d_{\mathbf{a}}\langle f, g \rangle]\mathbf{h} = \langle [d_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a}) \rangle + \langle f(\mathbf{a}), [d_{\mathbf{a}}g]\mathbf{h} \rangle$

Доказательство.

- Докажем покомпонентно:

$$\begin{aligned}
(\lambda f_i)(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) &= \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \cdot f_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= (\lambda(\mathbf{a}) + d_{\mathbf{a}}\lambda\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) \cdot (f_i(\mathbf{a}) + d_{\mathbf{a}}f_i\mathbf{h} + \beta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= [d_{\mathbf{a}}\lambda] \cdot f_i(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h} + o(\mathbf{h})
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
[d_{\mathbf{a}}\langle f, g \rangle]\mathbf{h} &= d_{\mathbf{a}} \left[\sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i \right] \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n d_{\mathbf{a}}[f_i \cdot g_i]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n ([d_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a}) + f_i(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}g_i]\mathbf{h}) \\
&= \sum_{i=1}^n ([d_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a})) + \sum_{i=1}^n (f_i(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}g_i]\mathbf{h}) = \langle [d_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a}) \rangle + \langle f(\mathbf{a}), [d_{\mathbf{a}}g]\mathbf{h} \rangle
\end{aligned}$$

■

Определение. Пусть $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Тогда *градиентом* φ в точке \mathbf{x} называется вектор

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Теорема 1.2.12. (Экстремальное свойство градиента)

Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируемо в \mathbf{x} , $\text{grad } f(\mathbf{x}) \neq 0$ Тогда

$$\mathbf{l} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{x})}{\|\text{grad } f(\mathbf{x})\|}$$

— направление наибольшего возрастания f , то есть

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{h}\| = 1 \implies D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) \leq D_{\mathbf{l}}f(\mathbf{x})$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) = [\mathbf{d}_{\mathbf{x}}f] \mathbf{h} = [\text{grad } f(\mathbf{x})] \mathbf{h} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \leq \|\text{grad } f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{h}\| = \|\text{grad } f(\mathbf{x})\|$$

■

1.3 Теоремы Лагранжа для отображений

Теорема 1.3.1. (Лагранжа для векторнозначных функций)

Пусть $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, дифференцируемо на (a, b) . Тогда

$$\exists c \in (a, b): \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| |b - a|$$

Доказательство. При $f(a) = f(b)$ утверждение тривиально. Положим $\varphi(x) = \langle f(b) - f(a), f(x) - f(a) \rangle$. Тогда

$$\varphi(a) = 0, \varphi(b) = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$$

Применим теорему Лагранжа для φ :

$$\begin{aligned} \exists c \in (a, b): \|f(b) - f(a)\|^2 = \varphi(b) - \varphi(a) &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} \varphi'(c) |b - a| = \langle f(b) - f(a), f'(c) \rangle \cdot |b - a| \\ &\stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(c)\| |b - a| \implies \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| |b - a| \end{aligned}$$

■

Теорема 1.3.2. (Лагранжа для отображений)

Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, дифференцируемо на Ω , $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subseteq \Omega$, тогда

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \|d_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

Доказательство. $g = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$ для $t \in [0, 1]$ — дифференцируемо как композиция дифференцируемых функций. По предыдущей теореме

$$\begin{aligned} \exists t_0 \in (0, 1): \|g(1) - g(0)\| &\leq \|g'(t_0)\| = \|f'(\mathbf{a} + t_0(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})\| \\ &\leq \|f'(\mathbf{a} + t_0(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\| \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \|d_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \end{aligned}$$

■

1.4 Формула Тейлора

Определение. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω — область, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Определим частные производные высшего порядка по индукции:

$$D_{i_1, \dots, i_k} f \stackrel{\text{def}}{=} D_{i_k} (D_{i_1, \dots, i_{k-1}} f)$$

Теорема 1.4.1. (О независимости ч.п. от порядка дифференцирования)

Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Ω — область, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\exists B((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega$, причем в $B((x_0, y_0), r)$ существуют $D_{12}f$ и $D_{21}f$, непрерывные в точке (x_0, y_0) . Тогда $D_{12}f(x_0, y_0) = D_{21}f(x_0, y_0)$

Доказательство.

$$\alpha(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда $\alpha(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha(h) &= \alpha(h) - \alpha(0) \underset{\text{Лагранж}}{=} \alpha'(\tilde{h})h = [f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0)]h \\ &\underset{\text{Лагранж}}{=} f''_{xy}(x_0 + \tilde{h}, y_0 + \tilde{k})hk \end{aligned}$$

Аналогично введем $\beta(k)$:

$$\beta(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta(k) &= \beta(k) - \beta(0) \underset{\text{Лагранж}}{=} \beta'(\bar{k})k = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \bar{k}) - f'_y(x_0, y_0 + \bar{k})]k \\ &\underset{\text{Лагранж}}{=} f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk \end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha(h) = \beta(k)$. Осталось перейти к пределу при $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ и воспользоваться непрерывностью частных производных в точке (x_0, y_0) . ■

Следствие 1.4.2. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $x \in \Omega$, $\exists B(x, r) \subseteq \Omega$, причем в $B(x, r)$ для любой перестановки индексов $\pi \in S_k$ существуют и непрерывны в x частные производные $D_{i_{\pi_1}, \dots, i_{\pi_k}} f$. Тогда все они совпадают в точке x .

Доказательство. Доказательство сводится к координатным функциям, поэтому считаем, что $n = 1$. Предыдущая теорема дает возможность менять местами пары индексов. Осталось заметить, что группа перестановок порождается транспозициями. ■

Определение. Множество функций $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, у которых все частные производные порядка не более r существуют и непрерывны на Ω , будем обозначать $C^r(\Omega)$

Определение. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$, тогда набор $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ будем называть *мультииндексом*. Используются обозначения $|k| = k_1 + \dots + k_m$,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} f$$

Лемма 1.4.3. (Полиномиальная формула)

$$(a_1 + \dots + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^m \sum_{n_2=1}^m \dots \sum_{n_r=1}^m a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_r} = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$$

Доказательство. Первое равенство очевидно по правилам раскрытия скобок. Докажем второе равенство индукцией по r .

- Для $r = 1$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_m)^{r+1} &= (a_1 + \dots + a_m) \cdot (a_1 + \dots + a_m)^r \\ &= (a_1 + \dots + a_m) \cdot \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1+1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m+1} \\ &= [\text{переобозначим } k_i = k_i + 1 \text{ в } i\text{-й сумме}] \\ &= \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_1 \geq 1}} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_m \geq 1}} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= [\text{добавим все пропущенные слагаемые с } k_i = 0] \\ &= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot (k_1 + k_2 + \dots + k_m)}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \end{aligned}$$

■

Лемма 1.4.4. (О дифференцировании сдвига)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, Ω — область, $f \in C^r(\Omega)$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \in [-1, 1]$ $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in \Omega$, тогда для отображения $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ и для $k \leq r$ выполнено

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} \mathbf{h}^j \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(\mathbf{a})$$

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно показать, что

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^k \cdot f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

Докажем по индукции:

- Для $k = 0$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= (\varphi^{(k-1)}(t))' = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \right)' \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \end{aligned}$$

■

Теорема 1.4.5. (Формула Тейлора в форме Лагранжа)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0, 1): f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leq r} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ для $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Выпишем формулу Тейлора в форме Лагранжа для φ :

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^r \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}$$

Пользуясь леммой о дифференцировании сдвига, получаем искомое равенство. ■

Теорема 1.4.6. (Формула Тейлора в форме Пеано)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0, 1): f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leq r} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Проверим это:

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r} = \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1} \dots (\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r}$$

$$= \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \cdots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

Все дроби вида

$$\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i)^{k_i}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_i}}$$

меньше единицы, выражения вида

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$$

постоянны. Поэтому

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \cdots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \rightarrow 0$$

При $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \rightarrow 0$. ■

1.5 Диффеоморфизмы

Определение. Областью называют открытое связное множество.

Определение. Топологические пространства X, Y гомеоморфны, если существует обратимое и в обе стороны непрерывное $f : X \rightarrow Y$. f называют гомеоморфизмом.

Определение. Диффеоморфизмом гладких многообразий M, N называется обратимое и в обе стороны гладкое отображение $f : M \rightarrow N$.

Определение. Пусть \mathcal{O} — область в \mathbb{R}^m . Тогда отображение $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется диффеоморфизмом, если оно обратимо и в обе стороны дифференцируемо.

Лемма 1.5.1. (О почти локальной инъективности)

Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, f дифференцируемо в \mathbf{x}_0 , $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists c, \delta > 0$ такие, что $\forall \mathbf{h} : \|\mathbf{h}\| < \delta \quad \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geq c \|\mathbf{h}\|$

Доказательство.

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\| \geq \|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| - \|\alpha(\mathbf{h})\| \geq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|$$

Последнее неравенство выполнено по следующим причинам:

- $\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| \geq c \|\mathbf{h}\|$, так как $f'(\mathbf{x}_0)$ обратим
- $\|\alpha(\mathbf{h})\| \leq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|$ при достаточно малых \mathbf{h} , так как $\alpha(\mathbf{h})$ — бесконечно малое.

■

Теорема 1.5.2. (О сохранении области)

Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \quad \det f'(\mathbf{x}) \neq 0$, тогда f открыто.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда \mathcal{O} открыто. Тогда нужно показать, что $f(\mathcal{O})$ открыто. Зафиксируем $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ и $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in f(\mathcal{O})$. По лемме о почти локальной инъективности имеем $c, \delta > 0$ такие, что

$$\forall \mathbf{h} \in \overline{B(0, \delta)} \quad \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geq c \|\mathbf{h}\|$$

Положим

$$r = \frac{1}{2} \text{dist}(\mathbf{y}_0, f(S(\mathbf{x}_0, \delta)))$$

Поскольку f непрерывно, а сфера — компакт, имеем, что $f(S(\mathbf{x}_0, \delta))$ — компакт. В свою очередь, ρ является метрикой, то есть непрерывно. Тогда ρ достигает минимума, то есть r реализуется, а значит, не равно нулю (см. оценку выше). Раз $r > 0$, то $B(\mathbf{y}_0, r)$ — полноправный шар, проверим, что он входит в образ f целиком, что и закончит доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$. Положим $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$ на $\overline{B(\mathbf{x}_0, \delta)}$; g непрерывно, поэтому достигает минимума. Попробуем этот минимум найти:

- Рассмотрим поведение $g(\mathbf{x})$ на $S(\mathbf{x}_0, \delta)$:

$$g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| \geq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| - \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| \geq 2r - r = r$$

- $g(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| < r$, так как $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$

Тогда понятно, что минимум достигается не на границе. Раз так, он достигается во внутренности. Отображение $l: \mathbf{x} \mapsto g^2(\mathbf{x})$ достигает минимума в той же точке, что и g , при этом $l'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$. Из невырожденности производного оператора следует, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, что и требовалось. ■



Рис. 1.1: Теорема о сохранении области

Следствие 1.5.3. Пусть $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{l \leq m}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \text{ rank } f'(\mathbf{x}) = l$, тогда f открыто.

Доказательство. Построим отображение $\tilde{f}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i &= f_i, \quad 1 \leq i \leq l \\ \tilde{f}_i &= x_i, \quad \text{иначе} \end{aligned}$$

Производный оператор тогда будет выглядеть так:

$$\tilde{f}' = \begin{pmatrix} & & f' & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Где первая сверху единица стоит на $l + 1$ -м месте. Тогда отображение \tilde{f} тоже дифференцируемо, и его производный оператор невырожден. Применяя предыдущую

теорему, получаем, что $\tilde{f}(A)$ открыто, если множество A открыто. Тогда $f(A)$ тоже открыто. ■

Теорема 1.5.4. (О гладкости обратного отображения)

Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, $T \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \det T'(\mathbf{x}) \neq 0$, T обратимо, тогда $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(\mathbf{y}_0) = (T'(\mathbf{x}_0))^{-1}$, при $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$.

Доказательство. Докажем теорему по индукции. В качестве базы рассмотрим случай $r = 1$. Обозначим $S = T^{-1}$, $S: T(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно, так как по теореме о сохранении области T открыто. Зафиксируем $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$ и проверим дифференцируемость S в точке \mathbf{y}_0 .

- По теореме о почти локальной инъективности имеем

$$\exists c, \delta > 0: \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \quad \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \geq c \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

- Воспользуемся дифференцируемостью T :

$$T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

Здесь $A = T'(\mathbf{x}_0)$. Положим $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = A(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) + \alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) \|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$

Перепишем это равенство в виде, похожем на определение дифференцируемости S :

$$S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) \|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$

Если мы поймем, что $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) \|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$ — бесконечно малое при $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0$, то мы получим определение дифференцируемости S в точке \mathbf{y}_0 . Проверим это:

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) &\leq \|A^{-1}\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c} \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \\ &= \|A^{-1}\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \end{aligned}$$

S непрерывно, поэтому $\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} 0$, тогда $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} 0$.

Теперь нужно доказать непрерывность S' . Из доказанного уже известно, что $S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1}$:

$$\mathbf{y} \mapsto S(\mathbf{y}) = T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \mapsto T'(\mathbf{x}) \mapsto (T'(\mathbf{x}))^{-1} = S'(\mathbf{y})$$

Эту схему можно переписать в привычном виде:

$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$

Таким образом получаем, что S' — композиция непрерывных отображений, то есть непрерывно (в частности, отображение $GL(\mathbb{R}^m) \ni A \mapsto A^{-1}$ непрерывно). Таким образом, база доказана.

Для доказательства индукционного перехода нужно показать только гладкость S . Пусть $T \in C^n$, $S \in C^n$, покажем, что тогда если вдруг $T \in C^{n+1}$, то и $S \in C^{n+1}$. Для этого достаточно, чтобы $S' \in C^n$:

$$S'(y) = (T'(x))^{-1} = (T'(S(y)))^{-1}$$

$S \in C^n$ по предположению индукции, $T' \in C^n$ потому, что $T \in C^{n+1}$, обращение матрицы — вообще класса C^∞ , то есть переход доказан. ■

Лемма 1.5.5. (О приближении отображения его линеаризацией)

Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathcal{O}$, тогда $\forall h$

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| \leq M \|h\|$$

где

$$M = \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|f'(z) - f'(x_0)\|$$

Доказательство. Положим $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x)$, тогда $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Применим теорему Лагранжа к F :

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| &= \|F(x_0 + h) - F(x_0)\| \leq \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|F'(z)\| \cdot \|h\| \\ &= \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|f'(z) - f'(x_0)\| \cdot \|h\| \end{aligned}$$

■

Теорема 1.5.6. (О локальной обратимости)

Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathcal{O}$, $\det f'(x_0) \neq 0$, тогда $\exists U(x_0)$ такая, что $f|_U$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Если мы докажем, что f обратимо в некоторой окрестности $U(x_0)$, то по теореме о гладкости обратного отображения мы получим требуемое (невырожденность определителя в окрестности x_0 следует из его непрерывности и того, что $\det f'(x_0) \neq 0$). Для начала заметим, что из невырожденности оператора в точке x_0 следует, что

$$\exists c > 0: \|f'(x_0)h\| \geq c \|h\|$$

Попробуем построить окрестность. Пусть она будет содержать точки такие, что одновременно выполнены условия:

- $\|f'(x) - f'(x_0)\| \leq \frac{c}{4}$. Эти точки есть вблизи x_0 по теореме о непрерывно дифференцируемых отображениях.
- $\det f'(x) \neq 0$. Такие точки есть из непрерывности \det .

Проверим, что в этой окрестности f не склеивает точки, что и будет означать его обратимость; пусть $y = x + h$, тогда:

$$f(y) - f(x) = (f(y + h) - f(x) - f'(x)h) + (f'(x) - f'(x_0))h + f'(x_0)h$$

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| &\geq \underbrace{\|f'(\mathbf{x}_0)\| \|\mathbf{h}\|}_{\geq c \|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}_{\leq M \|\mathbf{h}\| \leq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\|f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{h}\|}_{\leq \frac{c}{4} \|\mathbf{h}\|} \\ &\geq \frac{c}{4} \|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

Где $M \|\mathbf{h}\| \leq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|$ потому, что:

$$M \|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\| \sup \|f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x})\| \leq \sup \left(\underbrace{\|f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0)\|}_{\leq \frac{c}{4}} + \underbrace{\|f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x})\|}_{\leq \frac{c}{4}} \right) \leq \frac{c}{2}$$

■

Теорема 1.5.7. (О неявном отображении)

Пусть \mathcal{O} открыто, $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $f \in C^r$,

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{O}$: $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $\det f'_y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, тогда

- $\exists U(\mathbf{a}), \exists U(\mathbf{b}), \exists ! \varphi: U(\mathbf{a}) \rightarrow U(\mathbf{b}) \in C^r$ такое, что $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$
- $\varphi'(\mathbf{x}) = -(f'_y(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})))^{-1} \cdot f'_x(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$

Доказательство.

- Подготовим несколько объектов, полезных для доказательства. Положим

$$\begin{aligned} T: \mathcal{O} &\rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \end{aligned}$$

Производный оператор этого отображения в блочном виде выглядит следующим образом:

$$T' = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$

Он обратим, так как $\det T' = 1 \cdot \det f'_y \neq 0$. Тогда по теореме о локальной обратимости $\exists U(\mathbf{a}, \mathbf{b}): T|_U$ — диффеоморфизм. Без ограничения общности будем считать, что $U = \tilde{P} \times Q$, где $\tilde{P} \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ открыты и $\mathbf{a} \in \tilde{P}$, $\mathbf{b} \in Q$. Будем обозначать $S = T^{-1}$ и $V = T(U)$ — открыто в \mathbb{R}^{m+n} так как T — диффеоморфизм. Заметим, что T не меняет первую координату, то есть S тоже её не меняет, а значит, имеет вид $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, где $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^r$, так как $S \in C^r$.

- Пусть $P = (\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}_n) \cap V$ — открытое в \mathbb{R}^m множество (само множество из \mathbb{R}^{m+n} , но нулевые координаты отбросим, см. рисунок). Предъявим требуемое отображение:

$$\varphi(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

- Проверим, что φ подходит: $f \in C^r$, так как $H \in C^r$. Проверим $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ и единственность:

$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))) = T(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = T(S(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

С другой стороны, если $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, то:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

То есть $\mathbf{y} = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, из чего следует, что φ единственно.

- Проверим второй пункт теоремы, вычислив производный оператор φ :

$$f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \implies \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \varphi' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Откуда получаем:

$$f'_x + f'_y \cdot \varphi' = \mathbf{0} \implies \varphi' = -(f'_y)^{-1} f'_x$$

■



Рис. 1.2: Теорема о неявном отображении

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют k -мерным многообразием в \mathbb{R}^m , если оно локально гомеоморфно \mathbb{R}^k . Иными словами, $\forall \mathbf{x} \in M \exists U(\mathbf{x}) \exists \varphi$ — гомеоморфизм: $U(\mathbf{x}) \underset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}^k$.

Определение. k -мерное многообразие $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *простым*, если оно гомеоморфно \mathbb{R}^k . Иными словами, в предыдущем определении можно выбрать $U(\mathbf{x}) = M$.

Определение. Пара $\langle U(\mathbf{x}), \varphi \rangle$ из определения называется *картой*, или *параметризацией* многообразия в точке \mathbf{x} . Набор карт, который покрывает все M , называется *атласом*.

Определение. Простое k -мерное многообразие M называют C^r -гладким, если $\varphi \in C^r$ — параметризация M и $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \text{ rank } \varphi'(\mathbf{x}) = k$.

Теорема 1.5.8. (О задании гладкого многообразия системой уравнений)
Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \leq k < m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, тогда $\forall \mathbf{p} \in M$ эквивалентны утверждения:

- $\exists U(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap U$ — простое k -мерное C^r -гладкое многообразие.
- $\exists \tilde{U}(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap \tilde{U}$ можно задать системой C^r -гладких уравнений, иначе говоря: $\exists f_1, \dots, f_{m-k}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R} \in C^r$ такие, что $\mathbf{x} \in M \cap \tilde{U} \iff \forall i f_i(\mathbf{x}) = 0$, причем $\{\text{grad } f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независим.

Доказательство.

\implies Пусть имеется параметризация $\varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^r$, которая задает $M \cap U(\mathbf{p})$. Зафиксируем точку $t_0 = \varphi(\mathbf{p})$. Параметризация C^r гладкая, поэтому $\text{rank } \varphi' = k$. Будем считать, что ранг реализуется на первых k строках. Рассмотрим проекцию $L: \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$. Из того, что первые k столбцов φ' линейно независимы, имеем невырожденность производного оператора отображения $L \circ \varphi$. Тогда по теореме о локальной обратимости $\exists W(t_0): (L \circ \varphi)|_W$ — диффеоморфизм. Обозначим $V = (L \circ \varphi)(W)$. Тогда (см. рисунок) удобно интерпретировать $\varphi(W)$ как график

отображения, заданного на V ; $H: V \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$. Положим $\psi = (L \circ \varphi)^{-1}$, $\psi \in C^r$ по теореме о гладкости обратного отображения. Тогда вернемся к интерпретации графика и посмотрим на точку $\mathbf{x} \in V$:

$$(\mathbf{x}, H(\mathbf{x})) = \varphi(\psi(\mathbf{x}))$$

Тогда $H \in C^r$ как композиция C^r -гладких отображений. φ гомеоморфизм, поэтому $\varphi(W)$ открыто в M . Тогда $\exists \tilde{U}$ открытое в \mathbb{R}^m такое, что $\varphi(W) = M \cap \tilde{U}$. Рассмотрим теперь набор функций:

$$\begin{aligned} f_i: \tilde{U} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto H_i(L(\mathbf{x})) - x_{k+i} \end{aligned}$$

для $i = 1 \dots m - k$. Тогда

$$\forall i = 1 \dots m - k \quad f_i(\mathbf{x}) = 0 \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})) - \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \in M \cap \tilde{U}$$

Осталось показать, что $\{\text{grad } f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независим. Для этого просто выпишем этот набор:

$$\text{grad } f_i(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_1} & \dots & \frac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_k} & 0 & \dots & -1_{k+i} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, он линейно независим.

\Leftarrow Пусть теперь имеется система уравнений f_i . Составим из f_i отображение $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$. Поскольку набор градиентов линейно независим (будем считать, что ранг реализуется на последних $m - k$ столбцах), можно применить теорему о неявном отображении: $\exists P(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k), Q(\mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_m)$ и $\exists H: P \rightarrow Q$ такое, что

$$\forall (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \in P \quad (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)) \text{ — решение уравнения } f = \mathbf{0}$$

Построим теперь искомую параметризацию:

$$\begin{aligned} \varphi: P &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \mathbf{u} &\mapsto (\mathbf{u}, H(\mathbf{u})) \end{aligned}$$

Понятно, что φ подходит в качестве параметризации $M \cap (P \times Q)$. ■

Следствие 1.5.9. (О двух параметризациях)

Пусть M — k -мерное простое C^r -гладкое многообразие, $\mathbf{p} \in M$, причем $C^r \ni \varphi_1: \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow U \cap M$, $C^r \ni \varphi_2: \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow U \cap M$ — параметризации $U(\mathbf{p}) \cap M$. Тогда φ_1 и φ_2 отличаются на диффеоморфизм, а именно, $\exists \psi: \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ — диффеоморфизм, причем $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$.

Доказательство. Будем считать, что невырожденность производных операторов параметризаций реализуется на первых k строках. Пусть L — проекция из доказательства предыдущей теоремы. Тогда, как и в предыдущей теореме, отображения

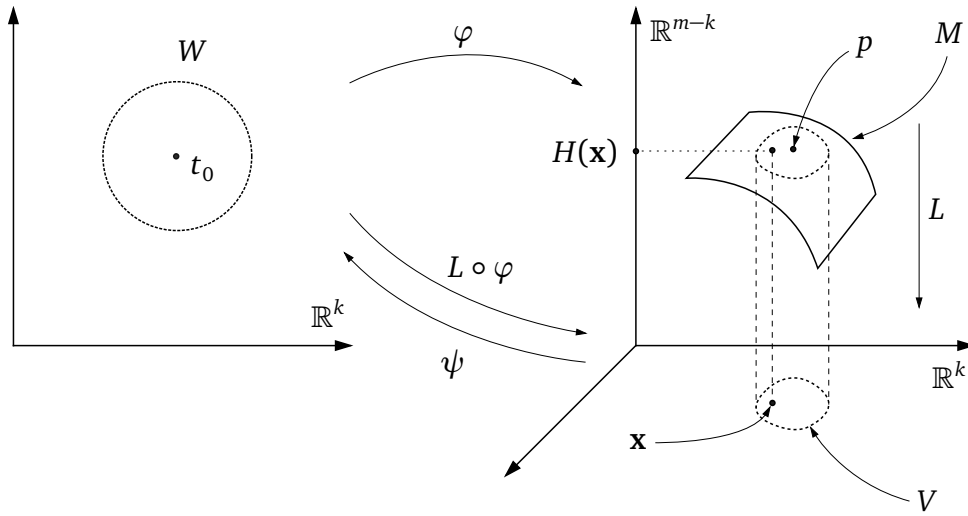


Рис. 1.3: Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

$L \circ \varphi_1, L \circ \varphi_2$, и им обратные существуют и гладкие. Тогда заметим, что L обратимо (по крайней мере там, где обратимо $L \circ \varphi_1$). Положим тогда $\psi = (L \circ \varphi_2)^{-1} \circ (L \circ \varphi_1)$. В таком случае нетрудно видеть, что

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (L \circ \varphi_2)^{-1} \circ (L \circ \varphi_1) = \varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ \varphi_1) = \varphi_1$$

ψ обратим, потому что $\psi^{-1} = (L \circ \varphi_1)^{-1} \circ (L \circ \varphi_2)$. Гладкость ψ и ψ^{-1} следует из гладкости составных частей ψ . ■



Рис. 1.4: Теорема о двух параметризациях

Определение. Пусть M — C^r -гладкое k -мерное многообразие в \mathbb{R}^m , $\mathbf{p} \in M$, $\varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ — параметризация окрестности $U(\mathbf{p})$, причем $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$. Тогда касательным пространством к M в точке \mathbf{p} называется $T_{\mathbf{p}}(M) = \text{Im } \varphi'(\mathbf{a})$.

Теорема 1.5.10. (О корректности определения касательного пространства)
Касательное пространство не зависит от выбора параметризации.

Доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — две параметризации $U(\mathbf{p})$. В таком случае по теореме о двух параметризациях $\exists C^r \ni \psi: \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ такое, что $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$. В таком случае, поскольку ψ — диффеоморфизм, то есть имеет невырожденный производный оператор в \mathbf{a} , имеем $\text{Im } \psi'(\mathbf{a}) = \mathbb{R}^k$. Тогда:

$$\text{Im } \varphi_1'(\mathbf{a}) = \text{Im } \varphi_2'(\mathbf{a}) \circ \psi'(\mathbf{a}) = \varphi_2'(\mathbf{a})(\mathbb{R}^k) = \text{Im } \varphi_2'(\mathbf{a})$$

■

Теорема 1.5.11. (О касательном пространстве к гладкому пути)

Пусть M — гладкое многообразие. Тогда $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(M) \iff \exists$ гладкий путь $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m: \gamma([-1, 1]) \subseteq M$ такой, что $\gamma(0) = \mathbf{p}$ и $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

Доказательство.

- Подготовим среду для доказательства. Зафиксируем $C^r \ni \varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$ — параметризация M в какой-нибудь окрестности (не умаляя общности, во всем M). Вспомним в очередной раз отображение $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ — проекцию первых k координат. Копируя рассуждения предыдущих теорем, приходим к выводу, что $L \circ \varphi$ и $\psi = (L \circ \varphi)^{-1}$ лежат в классе C^r .

\implies Пусть имеется вектор $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(M)$, построим путь, проходящий через точку \mathbf{p} со скоростью \mathbf{v} . Пусть $\mathbf{p} = \varphi(t_0)$, положим $u = (\varphi'(t_0))^{-1}(\mathbf{v})$. По смыслу это та скорость, с которой нужно двигаться в \mathcal{O} , чтобы получить скорость \mathbf{v} в $\varphi(\mathcal{O})$ (то есть "прообраз скорости"). Построим сам путь:

$$\gamma(s) = \varphi(t_0 + su)$$

Проверим его свойства:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \varphi(t_0) = \mathbf{p} \\ \gamma'(s)\big|_{s=0} &= (\varphi'(t_0 + su) \cdot u)\big|_{s=0} \\ &= \varphi'(t_0) \cdot u = (\varphi'(t_0) \cdot (\varphi'(t_0)^{-1})(\mathbf{v})) = \mathbf{v}\end{aligned}$$

\Leftarrow Пусть теперь имеется гладкий путь $\gamma: [-1, 1] \rightarrow M$ такой, что $\gamma(0) = \mathbf{p}$ и $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Поймем, почему вектор \mathbf{v} лежит в $T_{\mathbf{p}}(M)$. Для этого воспользуемся подготовленным арсеналом и пустим путь "по кругу":

$$\gamma(s) = \varphi(\psi(L(\gamma(s))))$$

Проще всего понять это соотношение, внимательно посмотрев на картинку. Корректность же следует из свойств используемых отображений, в частности потому, что L обратимо (на том же множестве, где обратимо $L \circ \varphi$). Теперь:

$$\gamma'(0) = \varphi'(\psi(L(\gamma(0)))) \cdot (...) = \varphi'(\psi(L(\mathbf{p}))) \cdot (...) = \varphi'(t_0) \cdot (...) \in T_{\mathbf{p}}(M)$$

■

$$\mathbb{R}^n[-1, 1]$$

Рис. 1.5: Теорема о касательном пространстве к гладкому пути

Теорема 1.5.12. (О касательном пространстве к графику функции)

Аффинное касательное пространство к графику $C^r \ni f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ задается уравнением

$$y - f(\mathbf{x}_0) = f'_{x_1}(\mathbf{x}_0)(x^1 - x_0^1) + \dots + f'_{x_m}(\mathbf{x}_0)(x^m - x_0^m)$$

Доказательство. Для доказательства построим параметризацию:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in C^r$$

Далее вычислим образ производного оператора $\varphi'(\mathbf{x}_0)$:

$$\varphi'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f'_{x_1}(\mathbf{x}_0) & f'_{x_2}(\mathbf{x}_0) & f'_{x_3}(\mathbf{x}_0) & \dots & f'_{x_m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы максимален и равен m . Рассмотрим образы стандартных базисных векторов:

$$\varphi'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ f'_{x_k}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Их m штук и они линейно независимы, поэтому составляют базис образа оператора. Тогда нетрудно понять, что касательное пространство задается уравнением

$$y = f'_{x_1}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}^1 + \dots + f'_{x_m}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}^m$$

Тогда после сдвига на $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ получаем нужное аффинное кп. ■

Теорема 1.5.13. (О касательном пространстве к поверхности уровня)

Аффинное касательное пространство к поверхности уровня функции $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ задается уравнением

$$f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(y_0)(y - y_0) + f'_z(z_0)(z - z_0) = 0$$

Доказательство. Поступим аналогично предыдущей теореме. Поверхность уровня задается уравнением:

$$f(x, y, z) = C$$

Предполагая, что $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, применим теорему о неявном отображении и получим $z = z(x, y)$ в некоторой окрестности (x_0, y_0) . Тогда рассмотрим параметризацию:

$$\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y))$$

Вычислим производный оператор:

$$\varphi'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z'_x(x_0, y_0) & z'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

На базисных векторах оператор принимает значения

$$\varphi'(x_0, y_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z'_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad \varphi'(x_0, y_0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

которые, очевидно, линейно независимы. Эти два вектора удовлетворяют уравнению

$$f'_x \cdot x + f'_y \cdot y + f'_z \cdot z = 0$$

потому, что

$$\begin{aligned} f'_x \cdot 1 + f'_y \cdot 0 + f'_z \cdot z'_x &= f(x, y, z(x, y))'_x = C'_x = 0 \\ f'_x \cdot 0 + f'_y \cdot 1 + f'_z \cdot z'_y &= f(x, y, z(x, y))'_y = C'_y = 0 \end{aligned}$$

Значит, из соображений размерности, это уравнение и задает касательное пространство. Осталось только сместить его, чтобы получить аффинное. ■

1.6 Относительный экстремум

Определение. Пусть $f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $M_\phi = \{\mathbf{x} \in E \mid \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, $\mathbf{x}_0 \in E$, $\phi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ называется точкой локального *относительного* экстремума, если \mathbf{x}_0 — точка локального экстремума $f|_{M_\phi}$.

Теорема 1.6.1. (Необходимое условие относительного экстремума)

Пусть $C^1 \ni f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $C^1 \ni \phi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in E$, $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, $\text{rank } \phi'(\mathbf{a}) = n$, \mathbf{a} — точка локального экстремума, тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} f'(\mathbf{a}) - \lambda \cdot \phi'(\mathbf{a}) = 0 \\ \phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Доказательство. Будем обозначать $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \in \mathbb{R}^{m+n}$. Пусть ранг производного оператора $\phi'(\mathbf{a})$ реализуется на последних n столбцах. Тогда

$$\det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_{m+j}}(\mathbf{a}) \right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \neq 0$$

Тогда можно применить теорему о неявном отображении:

$$\exists U(\mathbf{a}_x), U(\mathbf{a}_y) \exists C^r \ni \varphi: U(\mathbf{a}_x) \rightarrow U(\mathbf{a}_y): \phi(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

Рассмотрим функцию $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$. Тогда $\mathbf{a}_x = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$ является точкой обычного локального экстремума для функции g . Далее будут использованы не совсем обычные, но понятные обозначения для частных производных. Выпишем необходимое условие экстремума:

$$f'_x(\mathbf{a}_x, \varphi(\mathbf{a}_x)) + f'_y(\mathbf{a}_x, \varphi(\mathbf{a}_x)) \cdot \varphi'(\mathbf{a}_x) = \underbrace{f'_x(\mathbf{a})}_{1 \times m} + \underbrace{f'_y(\mathbf{a})}_{1 \times n} \cdot \underbrace{\varphi'(\mathbf{a}_x)}_{n \times m} = 0$$

Кроме того, нам известно, что $\phi(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, тогда:

$$\underbrace{\phi'_x(\mathbf{a})}_{n \times m} + \underbrace{\phi'_y(\mathbf{a})}_{n \times n} \cdot \underbrace{\varphi'_x(\mathbf{a}_x)}_{n \times m} = \mathbf{0} \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \cdot \phi'_x(\mathbf{a}) + \lambda \cdot \phi'_y(\mathbf{a}) \cdot \varphi'_x(\mathbf{a}_x) = 0$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$(f'_x - \lambda \cdot \phi'_x) + (f'_y - \lambda \cdot \phi'_y) \varphi'_x = 0$$

и положим

$$\lambda = f'_y(\mathbf{a}) \cdot (\phi'_y(\mathbf{a}))^{-1}$$

Убедимся в том, что λ подходит:

$$\begin{aligned} f'_x - \lambda \cdot \phi'_x &= f'_x - f'_y \cdot (\phi'_y)^{-1} \cdot \phi'_x = f'_x - f'_y \cdot (\phi'_y)^{-1} \cdot (-\phi'_y \cdot \varphi'_x) = f'_x + f'_y \cdot \varphi'_x = 0 \\ f'_y - \lambda \cdot \phi'_y &= f'_y - f'_y \cdot (\phi'_y)^{-1} \cdot \phi'_y = 0 \end{aligned}$$

■

Определение. В терминах последней теоремы отображение

$$G = f - \lambda \phi$$

называется *функцией Лагранжа*.

Теорема 1.6.2. (Достаточное условие относительного экстремума)

Пусть $C^1 \ni f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$, $C^1 \ni \phi: E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in E$, $\phi(\mathbf{a}) = 0$, $\text{rank } \phi'(\mathbf{a}) = n$, выполнено необходимое условие относительного экстремума, то есть $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} f'(\mathbf{a}) - \lambda \cdot \phi'(\mathbf{a}) = 0 \\ \phi(\mathbf{a}) = 0 \end{cases}$$

кроме того, пусть $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_x \in \mathbb{R}^m, \mathbf{h}_y \in \mathbb{R}^n)$. Тогда, так как $\text{rank } \phi'(\mathbf{a}) = n$, то по \mathbf{h}_x можно однозначно восстановить \mathbf{h}_y такой, что $\phi'(\mathbf{a})\mathbf{h} = 0$. Тогда рассмотрим квадратичную форму

$$Q(\mathbf{h}_x) = d_{\mathbf{a}}^2 G(\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y)$$

Где $G = f - \lambda \cdot \phi$ — функция Лагранжа. В зависимости от определенности Q можно сделать вывод о наличии экстремума в точке \mathbf{a} :

- Q положительно определена $\implies \mathbf{a}$ — точка относительного локального минимума.
- Q отрицательно определена $\implies \mathbf{a}$ — точка относительного локального максимума.
- Q неопределена $\implies \mathbf{a}$ — не точка экстремума.
- В остальных случаях требуется более детальное исследование.

Лемма 1.6.3. Пусть A — матрица $m \times m$. Тогда

- $A^T A$ симметрична
- $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = \langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$
- У $A^T A$ все собственные числа неотрицательны.

Доказательство.

- Помним, что $(A^T)^T = A$ и $(AB)^T = B^T A^T$

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

•

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle &= \sum_{i=1}^m (A\mathbf{x})_i^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \mathbf{x}_j \right)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} \mathbf{x}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} \mathbf{x}_k \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m a_{ij} a_{ik} \mathbf{x}_k \right) \mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (A^T A\mathbf{x})_j \mathbf{x}_j \\ &= \langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

•

$$\lambda \|\mathbf{x}\|^2 = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A^T A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle A \mathbf{x}, A \mathbf{x} \rangle = \|A \mathbf{x}\|^2 \geq 0$$

■

Теорема 1.6.4. (Вычисление нормы линейного оператора)

Пусть $A \in \text{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, S — множество собственных чисел $A^T A$. Тогда

$$\|A\| = \max_{\lambda \in S} \sqrt{\lambda}$$

Доказательство.

- Вычислим для начала максимум $f(\mathbf{x}) = \langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ на сфере $\mathbf{x}_1^2 + \dots + \mathbf{x}_m^2 = 1$, где A — симметричная матрица.

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \sum a_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_1^2 + \dots + \mathbf{x}_m^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Тогда функция Лагранжа имеет вид

$$G = \sum a_{ij} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j - \lambda \cdot \left(\sum_i \mathbf{x}_i^2 - 1 \right)$$

Продифференцируем её:

$$G'_{\mathbf{x}_k} = 2 \sum a_{kj} \mathbf{x}_j - 2\lambda \mathbf{x}_k$$

Здесь мы воспользовались симметричностью матрицы. Решим систему уравнений $G' = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} A \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_1^2 + \dots + \mathbf{x}_m^2 = 1 \end{cases}$$

Решениями этой системы могут быть пары из собственных векторов \mathbf{x} и собственных чисел λ (причем все собственные числа попадут в пару). Вычислим f в собственных векторах матрицы A .

$$f(\mathbf{x}) = \langle A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \lambda \|\mathbf{x}\| = \lambda$$

- Докажем утверждение теоремы.

$$\|A\|^2 = \max_{\mathbf{x} \in S^{m-1}} \|A \mathbf{x}\|^2 = \max_{\mathbf{x} \in S^{m-1}} \langle A \mathbf{x}, A \mathbf{x} \rangle = \max_{\mathbf{x} \in S^{m-1}} \langle (A^T A) \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \max_{\lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda$$

По предыдущей лемме $A^T A$ симметрична, тогда:

$$\max_{\mathbf{x} \in S^{m-1}} \langle A^T A \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \max_{\lambda \in \sigma(A^T A)} \lambda$$

Но тогда, так как $\lambda \geq 0$, имеем:

$$\|A\| = \max_{\lambda \in \sigma(A^T A)} \sqrt{\lambda}$$

■

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Сходимость функциональных последовательностей

Замечание. Здесь и далее запись вида $f \rightarrow \perp$ будет означать, что f сходится. Знак \perp используется, если не важно (или не известно), к чему сходится f .

Определение. $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ сходится поточечно к $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ на E , если

$$\forall x_0 \in E \quad f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$$

иными словами, раскрывая определение сходимости последовательности:

$$\forall x_0 \in E \quad [\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightarrow f$.

Примеры. TBD

Определение. $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно к $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ на E , если

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

или, раскрывая описание супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad [\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightrightarrows f$.

Замечание. Из равномерной сходимости очевидным образом следует поточечная:

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \rightarrow f$$

Про сходимость мы знаем очень многое для случая метрических пространств. А нельзя ли переформулировать новые определения так, чтобы они оказались обычной сходимостью, просто в хитром метрическом пространстве?

Предложение. (Метрическое пространство ограниченных функций)

Положим

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ограничено} \}$$

На этом множестве тривиально задается структура линейного пространства:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\end{aligned}$$

Оказывается, можно ввести **метрику** на \mathcal{F} , сходимость по которой есть равномерная сходимость. Для $f, g \in \mathcal{F}$ положим

$$\rho(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Проверим, что это — метрика на \mathcal{F}

- i) Неотрицательность очевидна. Равенство нулю может выполняться только для равных функций.
- ii) Симметричность очевидна.
- iii) Проверим неравенство треугольника. Применим техническое описание супремума для $\rho(f_1, f_2)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x: \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leq |f_1(x) - f_2(x)|$$

Далее

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \exists x: \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon &\leq |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \\ &\leq \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_3(y)| + \sup_{y \in X} |f_2(y) - f_3(y)| \\ &= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)\end{aligned}$$

Получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \rho(f_1, f_2) - \varepsilon \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Откуда непосредственно следует

$$\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Осталось только понять, что теперь означает сходимость по этой метрике. Пусть (f_n) — последовательность в \mathcal{F} , сходящаяся к f по метрике ρ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad \rho(f_n, f) < \varepsilon$$

Раскроем значение ρ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad [\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

А это — обычное определение равномерной сходимости!

Подобную конструкцию, по всей видимости, не получится ввести для поточечной сходимости. Зато, можно построить хаусдорфово топологическое пространство, в котором сходимость будет означать поточечную сходимость.

Предложение. (Топологическое пространство ограниченных функций)
Введем на \mathcal{F} топологию, порожденную следующими множествами:

$$U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n} \stackrel{def}{=} \{g: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall i \ |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}$$

Поймем теперь, что означает сходимость в этом топологическом пространстве:

$$f_n \rightarrow f \iff \forall U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n} \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ f_n \in U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n}$$

Что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ \forall i \ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Что как раз и есть поточечная сходимость! Просто запись вида

$$[\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0] \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

В этом пространстве обретает вид

$$[\forall U_\varepsilon(f)_{x_0}] \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1. (Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости)

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

Доказательство.

\implies Обычное свойство всех последовательностей, сходящихся по метрике (если все f_n и f лежат в \mathcal{F}). Общее доказательство такое:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

\Leftarrow Зафиксируем x . Тогда $f_n(x)$ — обычная фундаментальная вещественная последовательность. Тогда, так как \mathbb{R} — полное, получаем

$$\forall x \ \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Посмотрим на фундаментальность f_n :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

и перейдем к пределу $m \rightarrow +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Что и есть определение равномерной сходимости. ■

Примеры. TBD

Теорема 2.1.2. (Стокс-Зейдель)

Пусть $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$, X — топологическое пространство, f_n непрерывны в $c \in E$, и $f_n \rightrightarrows f$ на X . Тогда f непрерывна в c .

Доказательство. Для любых n выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Воспользуемся равномерной сходимостью: выберем n таким, чтобы

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Теперь воспользуемся непрерывностью f_n : выберем такую окрестность $U(c)$, чтобы $\forall x, y \in U(c)$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Тогда

$$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$$

что и означает непрерывность f в точке c . ■

Определение. Будем говорить, что f_n сходится локально равномерно к f на X , если

$$\forall x \in X \exists U(x): f_n \rightrightarrows f \text{ на } U(x)$$

Замечание. Для выполнения условия теоремы Стокса-Зейделя достаточно равномерной сходимости на некоторой окрестности c .

Замечание. Для того, чтобы f было непрерывным на X , достаточно, чтобы f_n локально равномерно на X сходилась к f .

Теорема 2.1.3. (О предельном переходе под знаком интеграла)

Пусть $f_n \in C([a, b])$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{\quad} & f \\ \downarrow \int & & \downarrow \int \\ \int_a^b f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & \int_a^b f \end{array}$$

Доказательство. f непрерывна на $[a, b]$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Тогда

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a|$$

Из равномерной сходимости имеем:

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

тогда

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

■

Теорема 2.1.4. (Правило Лейбница)

$f : [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists f'_y, f'_y, f$ непрерывны. Пусть

$$\phi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx$$

Тогда ϕ дифференцируемо на $[y_1, y_2]$ и

$$\phi'(y) = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x, y) dx$$

Доказательство.

$$\frac{\phi(y + \frac{1}{n}) - \phi(y)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \int_{x_1}^{x_2} \left(f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y) \right) dx \stackrel{\text{Лагранж}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f'_y\left(x, y + \frac{\theta}{n}\right) dx$$

Обозначим

$$g_n(x, y) = f'_y\left(x, y + \frac{\theta}{n}\right)$$

f'_y непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывна на нём. Воспользуемся этим:

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall n: \frac{1}{n} < \delta \quad \forall x \quad \left| f'_y\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f'_y(x, y) \right| < \varepsilon$$

Отсюда получаем по определению

$$g_n(x, y) \rightrightarrows f'_y(x, y) \text{ на } [x_1, x_2]$$

Воспользуемся теоремой о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_1}^{x_2} g_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x, y) dx$$

Понятно, что вместо последовательности $\frac{1}{n}$ можно рассматривать любую последовательность h_n , сходящуюся к 0. То есть

$$\phi'(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(y + h_n) - \phi(y)}{h_n} = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x, y) dx$$

■

Теорема 2.1.5. (О предельном переходе под знаком производной)
 $f_n \in C^1(\langle a, b \rangle)$, $f_n \rightarrow f$ поточечно на $\langle a, b \rangle$, $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a, b \rangle$. Тогда

- $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$
- $f' = \varphi$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ f'_n & \xrightarrow{\quad} & \varphi \end{array}$$

Доказательство. Пусть $x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$, тогда $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0, x_1]$. Тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Откуда

$$f(x_1) - f(x_0) \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

То есть

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi = f(x_1) - f(x_0)$$

Тогда f — первообразная φ . φ непрерывна по теореме Стокса-Зейделя. Получаем, что $f \in C^1(\langle a, b \rangle)$ и $f' = \varphi$. ■

2.2 Сходимость функциональных рядов

Определение. Пусть $u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, тогда функциональным рядом будем называть $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ сходится поточечно на E , если $S_N(x) \rightarrow S(x)$.

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на E , если $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$.

Замечание. Из равномерной сходимости следует поточечная.

Лемма 2.2.1. (Об остатке функционального ряда)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows 0 \iff R_N(x) \rightrightarrows 0$$

Доказательство. $\sup_{x \in E} |R_{N+1}(x)| = \sup_{x \in E} |S(x) - S_N(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ ■

Лемма 2.2.2. (Необходимое условие равномерной сходимости ряда)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \implies u_n(x) \rightrightarrows 0$$

Доказательство.

$$\sup_{x \in E} |u_N(x)| = \sup_{x \in E} |R_N(x) - R_{N+1}(x)| \leq \sup_{x \in E} |R_N(x)| + \sup_{x \in E} |R_{N+1}(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

■

Теорема 2.2.3. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)

$u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists c_n: \forall n, x \quad |u_n(x)| \leq c_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \rightarrow \perp$, тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp &\iff R_N(x) \rightrightarrows 0 \iff \sup_{x \in E} |R_N(x)| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \\ &\iff \sup_{x \in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right| \leq \sup_{x \in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

■

Теорема 2.2.4. (Критерий Больцано-Коши сходимости функционального ряда)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x) \iff \forall \varepsilon \exists N: \forall m, n > N \quad \sup_{x \in E} |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$$

Доказательство. Это обычный критерий Больцано-Коши для $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ ■

Теорема 2.2.5. (Стокс-Зейдель)

$u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, u_n непрерывны в $x_0 \in E$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$, тогда $S(x)$ непрерывна в x_0 .

Доказательство. $\forall N$ $S_N(x)$ непрерывна в x_0 как конечная сумма непрерывных функций. Тогда по теореме Стокса-Зейделя для функциональных последовательностей $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$, $S_N(x)$ непрерывны в $x_0 \implies S(x)$ непрерывна в x_0 . ■

Теорема 2.2.6. (Интегрирование функциональных рядов)

$u_n \in C([a, b])$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a, b]$, тогда

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

иначе говоря:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

Доказательство. $S \in C([a, b])$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Применим аналогичную теорему для функциональных последовательностей к $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$:

$$\int_a^b S_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_a^b S(x) dx$$

в левой части интеграл и сумму можно переставлять местами (так как сумма конечная). Поэтому

$$\sum_{n=1}^N \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b S_N(x) dx \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_a^b S(x) dx$$

Слева стоят частичные суммы обычного числового ряда. Поэтому по определению сходимости числового ряда имеем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx$$

■

Теорема 2.2.7. (Дифференцирование функциональных рядов)

$u_n \in C^1(\langle a, b \rangle)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightarrow S(x)$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a, b \rangle$,

тогда $S \in C^1(\langle a, b \rangle)$, причем $S'(x) = \varphi(x)$.

Доказательство. Введем функциональную последовательность: $S_N(x) \rightarrow S(x)$. Поскольку $S_N(x)$ — конечные суммы непрерывно дифференцируемых функций, $S_N(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$, причем $S'_N(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a, b \rangle$. Тогда по аналогичной теореме для функциональных последовательностей получаем требуемое. ■

Теорема 2.2.8. (О предельном переходе в функциональных рядах)

$u_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E , $\forall n \exists a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$ на E .

Тогда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, причем $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Иначе говоря:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Доказательство. Обозначим $S_N^a = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Проверим критерий Больцано-Коши

для $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leq |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

Поскольку S_{n+p}^a и $S_{n+p}(x)$ просто конечные суммы, в них спокойно можно переставлять предел и сумму. Поэтому найдется такая окрестность точки x_0 , что $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \varepsilon$. Аналогично поступим с третьим слагаемым. Из критерия Больцано-Коши получаем такое N , что для $\forall n, m > N$ $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Таким образом имеем:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| < 3\varepsilon$$

Мы доказали сходимость ряда a_n . Проверим второе утверждение теоремы. Положим

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \neq x_0 \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

Все u_n , очевидно, непрерывны в x_0 . Если мы проверим, что $\sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E \cup \{x_0\}$, то по теореме Стокса-Зейделя \tilde{S} будет непрерывной, что означает

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

в левой части x_0 никогда не подставляется в \tilde{S} , поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Осталось проверить, что $\sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E \cup \{x_0\}$.

$$\sup_{x \in E \cup \{x_0\}} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \right| \leq \sup_{x \in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right| + \sup_{x \in \{x_0\}} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n \right| \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

■

Теорема 2.2.9. (О предельном переходе в функциональных последовательностях)
 $f_n: E \subseteq X \rightarrow \mathbb{R}$, X — метрическое пространство, x_0 — предельная точка E , $f_n \rightrightarrows f$, $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A_n$. Тогда $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$, причем $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} A$. Иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \xrightarrow{\quad} & f(x) \\ \downarrow x \rightarrow x_0 & & \downarrow x \rightarrow x_0 \\ f_n(x_0) & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f(x_0) \end{array}$$

или

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$$

Доказательство. Введем обозначения: $u_1 = f_1, u_2 = f_2 - f_1, \dots, a_k = A_k - A_{k-1}$. Тогда $\sum_{k=1}^n u_k = f_n$, то есть $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x)$ на E , причем $u_k(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} a_k$. Пользуясь аналогичной теоремой для функциональных рядов, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

— сходится. Кроме того имеем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

■

Теорема 2.2.10. (Признак Дирихле)

Пусть $a_n, b_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, причем

- $\exists C_a: \forall N \forall x \in X \left| \sum_{i=1}^N a_n(x) \right| \leq C_a$
- $b_n \rightrightarrows 0, \forall x \in X$ b_n монотонна по n .

Тогда $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \perp$

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{N \leq k \leq M} a_k b_k = A_N b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

тогда

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N}^M a_k(x) b_k(x) \right| &\leq |A_N b_M| + |A_{N-1} b_N| + \left| \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k \right| \\ &\leq C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} |b_k - b_{k+1}| \end{aligned}$$

Все слагаемые в сумме одного знака. Считая, что $b_k - b_{k+1} \geq 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=N}^M a_k(x) b_k(x) \right| &\leq C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) \\ &\leq C_a \cdot (|b_M| + |b_N| + |b_M| + |b_N|) \xrightarrow{N, M \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

■

Теорема 2.2.11. (Признак Абеля)

Пусть $a_n, b_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, причем

- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \Rightarrow \perp$
- $\exists C_b: \forall N \forall x \in X |b_n(x)| \leq C_b, \forall x \in X b_n(x)$ монотонна по n .

Тогда $\sum_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \Rightarrow \perp$

Доказательство. Применим критерий Коши к ряду a_n :

$$\forall \varepsilon \exists N: \forall n > N \forall p \geq 1 \forall x \in X |A_{n,p}(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i(x) \right| < \varepsilon$$

Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &\leq |b_{n+p}(x) A_{n,p}(x)| + \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_{k+1}(x) - b_k(x)) A_{n,k}(x) \right| \\ &\leq C \varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_{k+1}(x) - b_k(x)| \leq C \varepsilon + \varepsilon |b_{n+p}(x)| + \varepsilon |b_n(x)| \\ &\leq C \varepsilon + 2C_b \varepsilon \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались монотонностью и ограниченностью b_n .

■

2.3 Степенные ряды

Определение. Степенным рядом называется формальный ряд вида $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$, где $z, z_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема 2.3.1. (О круге сходимости степенного ряда)

Пусть $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд. Тогда верно одно из трёх:

- Ряд сходится только при $z = z_0$
- Ряд сходится при любых z
- $\exists 0 < R < +\infty$ такое, что ряд сходится при $|z - z_0| < R$, и расходится при $|z - z_0| > R$. Поведение на границе не известно.

Доказательство. Изучим ряд на абсолютную сходимость, пользуясь признаком Коши: рассмотрим величину $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n(z - z_0)^n|} = |z - z_0| \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$:

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, тогда ряд сходится, очевидно, только при $z = z_0$.
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, тогда ряд сходится для любых z .
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, +\infty)$, тогда
 - a) при $|z - z_0| < \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд сходится.
 - b) при $|z - z_0| > \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд расходится.

■

Следствие 2.3.2. (Формула Адамара)

Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Следствие 2.3.3. (О множестве сходимости степенного ряда)

Множеством сходимости степенного ряда является $B(z_0, R) \cup \Gamma$, где $\Gamma \subseteq \text{Cl}B(z_0, R)$, а R — радиус сходимости ряда.

Теорема 2.3.4. (О равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)

Пусть $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд, причем $0 < R \leq +\infty$. Тогда

- $\forall 0 < r < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{B(z_0, r)}$.
- $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n \in C(B(z_0, R))$.

Доказательство.

- Применим признак Вейерштрасса: $|a_n(z - z_0)^n| \leq |a_n| \cdot r^n$. Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot r^n$ сходится абсолютно, потому что исходный ряд сходится при $z = z_0 + r$.
- Слагаемое непрерывно, есть равномерная сходимость на $\overline{B(z_0, r)} \implies$ во всех точках $B(z_0, R)$ сумма непрерывна.

■

Лемма 2.3.5. $w, w_0 \in \mathbb{C}, |w|, |w_0| \leq r$. Тогда $|w^n - w_0^n| \leq nr^{n-1}|w - w_0|$

Доказательство.

$$|w^n - w_0^n| = |w - w_0| \cdot |w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \dots + w_0^{n-1}| \leq |w - w_0| \cdot (|w|^{n-1} + \dots + |w_0|^{n-1}) \leq |w - w_0| nr^{n-1}$$

■

Лемма 2.3.6. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$ имеют одинаковый радиус сходимости.

Доказательство. Пусть $S_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\tilde{S}_N(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$, тогда $\tilde{S}_N(x) = x S_N(x) \implies \lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{S}_N(x) = x \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(x)$ — существуют на одном и том же множестве.

■

Теорема 2.3.7. (О дифференцировании степенного ряда)

Пусть $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ — степенной ряд, причем $0 < R \leq +\infty$, и $\varphi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n(z - z_0)^{n-1}$.

Тогда

- φ имеет тот же радиус сходимости, что и f .
- f дифференцируемо на $B(z_0, R)$, причем $f'(z) = \varphi(z)$

Доказательство.

- Найдем радиус сходимости \hat{R} ряда φ по формуле Адамара и пользуясь последней леммой:

$$\hat{R} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n \cdot a_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

- Рассмотрим точку $a \in B(z_0, R)$ и покажем, что в этой точке существует производная ряда, причем она равна тому, что ожидается. Сузим круг до $B(z_0, r)$, где $r = \frac{R+|a-z_0|}{2}$. Положим $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$:

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{(z-z_0) - (a-z_0)}$$

Пусть $w = z - z_0 : |w| < r$, $w_0 = a - z_0 : |w_0| < r$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{(z-z_0) - (a-z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n - w_0^n}{w - w_0} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot nr^{n-1}$$

Последний ряд сходится по первому пункту теоремы. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{(z-z_0) - (a-z_0)}$ сходится равномерно. Зная это, воспользуемся теоремой о предельном переходе в сумме:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z - a} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-z_0)^n - (a-z_0)^n}{z - a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1} \end{aligned}$$

■

Следствие 2.3.8. $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \in C^\infty(B(z_0, R))$, причем все производные — почленные.

Следствие 2.3.9. (О почленном интегрировании степенного ряда)

Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ где $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in B(x_0, R)$, тогда

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и f .
- Выполняется равенство

$$\int_{x_0}^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^x a_n(x-x_0)^n dx$$

Определение. Экспонентой называется функция $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что $z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Теорема 2.3.10. (Свойства экспоненты)

- Радиус сходимости равен $+\infty$
- $\exp(0) = 1$
- $\overline{\exp}(z) = \exp(z)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$
- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = 1$
- $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$

Доказательство. Докажем последние два утверждения. Остальные очевидны.

- $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - 1}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{e^z - e^0}{z - z_0} = (e^z)' \Big|_0 = 1$

-

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z + w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \exp(z) \exp(w) \end{aligned}$$

■

Теорема 2.3.11. (Метод Абеля)

Пусть $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ — сходящийся ряд. Положим $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ при $|x| < 1$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \lim_{x \rightarrow 1_-} f(x)$$

Доказательство. Для начала отметим, что f задана корректно: при $0 < x < 1$ ряд сходится равномерно по признаку Абеля. Так как f — ряд, то область его сходимости симметрична, то есть для отрицательных x f тоже задана корректно. Раз f — равномерно сходящийся ряд, причем $c_n x^n$ непрерывны, то по теореме Стокса-Зейделя f непрерывна. Раз так, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1_-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

■

Теорема 2.3.12. (Формула Григори-Лейбница)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Доказательство. Положим $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$, тогда $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x$. Тогда $f(x) = c + \arctan x$. Подставляя $x = 0$ убеждаемся, что $c = 0$.
Получаем $\lim_{x \rightarrow 1_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1_-} \arctan x = \frac{\pi}{4}$. ■

Следствие 2.3.13. (О сходимости произведения рядов)

Пусть $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$, тогда ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ сходится, причем $AB = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$.

Доказательство. Положим $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, $x \in [0, 1]$. при $x < 1$ ряды сходятся абсолютно (вспомним теорему о круге сходимости: в ней мы доказывали абсолютную сходимость), поэтому по старой теореме о произведении рядов $f(x)g(x) = h(x)$. Осталось совершить предельный переход в этом равенстве, чтобы получить требуемое. ■

2.4 Ряды тейлора

Определение. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ разложима в степенной ряд в точке x_0 , если

$$\exists U(x_0) \exists \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n: \forall x \in U(x_0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$$

Теорема 2.4.1. (Единственность разложения в ряд)

f разложима в степенной ряд в $x_0 \implies$ этот ряд единственный.

Доказательство. Для доказательства этого непосредственно вычислим a_i .

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Поэтому $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$. Значит, можно дифференцировать. Подставим $x = x_0$: $a_0 = f(x_0)$. Этим мы однозначно определили a_0 . Рассмотрим

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots$$

Подставим $x = x_0$: $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая в том же духе, однозначно определим все a_i . ■

Определение. Рядом Тейлора $f \in C^\infty(U(x_0))$ в точке x_0 называется формальный

$$\text{ряд } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Теорема 2.4.2. (Разложение бинома в ряд Тейлора)

Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, тогда

$$(1+x)^\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} x^n$$

Доказательство. Изучим ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x(\sigma-n)}{n+1} \right| = |x| < 1$$

Значит, при $|x| < 1$ ряд сходится абсолютно. Раз ряд степенной, то на круге сходимости он сходится и равномерно. Пусть $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} x^n$. Заметим, что

$$S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$$

Теперь положим $f(x) = \frac{S(x)}{(1+x)^\sigma}$. Достаточно показать, что $f(x) = 1$ при $|x| < 1$. Изучим производную f :

$$f'(x) = \frac{S'(x)(1+x)^\sigma + S(x)\sigma(1+x)^{\sigma-1}}{(1+x)^{2\sigma}} = \frac{S'(x)}{(1+x)^\sigma} + \frac{\sigma S(x)}{(1+x)^{\sigma-1}} = 0$$

Осталось проверить $f(x) = 1$ в каком-нибудь x :

$$f(0) = \frac{1}{1} = 1$$

■

Замечание. Пусть $|t| < 1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) \cdot t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}}$$

Теорема 2.4.3. (Критерий разложимости в ряд Тейлора)

Пусть $f \in C^\infty([x_0 - h, x_0 + h])$. Тогда f разложима в ряд Тейлора в $U(x_0) \iff \exists \delta, C, A: \forall n \forall |x - x_0| < \delta \quad |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$

Доказательство.

(\Leftarrow) Оценим остаток в форме Лагранжа:

$$f(x) = T_n f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!} (x - x_0)^n$$

$$\left| \frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!} (x - x_0)^n \right| \leq \frac{CA^n n!}{n!} |x - x_0|^n$$

Чтобы остаток стремился к нулю, нужно, чтобы $A|x - x_0| < 1$, откуда получаем $U(x_0): |x - x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$. Поскольку теперь остаток ряда стремится к нулю, то $\forall x \in U(x_0) \quad T_n f(x) \rightarrow f(x)$, что и требовалось доказать.

(\Rightarrow) Пусть $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ в $U(x_0)$. Ряд сходится, поэтому для (произвольного) $x = x_1 \neq x_0$ имеем

$$\exists C_1: \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x_1 - x_0)^n \right| \leq C_1 \implies |f^{(n)}(x_0)| \leq C_1 n! \frac{1}{|x_1 - x_0|^n}$$

Положим $B_n = \frac{1}{|x_1 - x_0|^n}$. Проанализируем m -ю производную f :

$$|f^{(m)}(x)| \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \left| \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!} (x - x_0)^{n-m} \right| \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \left| C_1 \frac{B^n n!}{(n-m)!} (x - x_0)^{n-m} \right|$$

$$= B^m C_1 \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) \cdot |B(x - x_0)|^{n-m}$$

$$= C_1 B^m \frac{m!}{(1 - |B(x - x_0)|)^{m+1}} \underset{x: |x-x_0| < \frac{1}{2}}{\leq} \frac{C_1 m! B^m}{\frac{1}{2^{m+1}}} = C_1 m! B^m 2^{m+1} = (2C_1) m! (2B)^m$$

■

2.5 Суммирование по Чезаро

Теорема 2.5.1. (Коши о перманентности метода средних арифметических)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underset{c/a}{=} S$$

Доказательство. Обозначим $\sigma_n = \frac{1}{n+1}(S_0 + \dots + S_n)$. По определению

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall N > N_1 |S_N - S| < \varepsilon$$

Далее:

$$\begin{aligned} |\sigma_N - S| = \left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N (S_n - S) \right| &\leq \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N |S_n - S| \underset{N > N_1}{=} \underbrace{\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N_1} |S_n - S|}_{=\frac{c}{N+1} \rightarrow 0} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{N+1} \sum_{n=N_1+1}^N |S_n - S|}_{< \varepsilon} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

■

Глава 3

Криволинейные интегралы

3.1 Интеграл по кусочно-гладкому пути

Определение. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто, тогда $V: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ будем называть *векторным полем*. По умолчанию $V \in C(E)$.

Определение. (Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути)
Пусть V - векторное поле, $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ — кусочно-гладкий путь, тогда *интегралом векторного поля по этому пути* называется

$$I(V, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt$$

Замечание. Предыдущее определение можно переписать в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt \\ &\stackrel{\gamma \rightarrow x}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(x(t)) x'_i(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i dx_i \end{aligned}$$

Определение. Пусть $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — пути, $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, тогда определим *произведение путей* $\gamma = \gamma_1 \gamma_2: [a, d] \rightarrow \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), & t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

Определение. *Обратным путем* называется путь $\gamma^{-1}: t \mapsto \gamma(a + b - t)$.

Теорема 3.1.1. (О свойствах интеграла по кусочно-гладкому пути)

1. Линейность по полю: $I(\alpha U + \beta V, \gamma) = \alpha I(U, \gamma) + \beta I(V, \gamma)$ для любых полей U, V , любого k -г пути γ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Аддитивность при дроблении пути: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a < c < b$, тогда $I(V, \gamma) = I(V, \gamma|_{[a, c]}) + I(V, \gamma|_{[c, b]})$.
3. Замена параметра: пусть $\varphi: [p, q] \rightarrow [a, b]$ — сюръекция, причем $\varphi(p) = a$, $\varphi(q) = b$, $\varphi \in C^1$, тогда $I(V, \gamma) = I(V, \gamma \circ \varphi)$.
4. Интеграл произведения путей: $I(V, \gamma_1 \gamma_2) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2)$.
5. $I(V, \gamma) = -I(V, \gamma^{-1})$.
6. $|I(V, \gamma)| \leq \max_{x \in \gamma[a, b]} \|V(x)\| \cdot l(\gamma)$.

Доказательство.

3.

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_p^q \langle V(\gamma(\varphi(s))), \gamma'(\varphi(s)) \rangle \varphi'(s) ds \\ &= \int_p^q \langle V((\gamma \circ \varphi)(s)), (\gamma \circ \varphi)'(s) \rangle ds = I(V, \gamma \circ \varphi) \end{aligned}$$

Поскольку любые две параметризации гладкого многообразия отличаются на диффеоморфизм, интеграл зависит только от носителя пути.

5.

$$\begin{aligned} I(V, \gamma^{-1}) &= \int_a^b \langle V(\gamma(a+b-t)), \gamma'(a+b-t) \rangle \cdot (-1) dt \\ &= \int_{\tau=a+b-t}^b \langle V(\gamma(\tau)), \gamma'(\tau) \rangle d\tau = I(V, \gamma) \end{aligned}$$

6.

$$|I(V, \gamma)| \leq \int_a^b |\langle V(\gamma), \gamma' \rangle| \leq \int_a^b \|V(\gamma)\| \cdot \|\gamma'\| \leq \max_{\gamma} \|V(\gamma)\| \cdot \int_a^b \|\gamma'\|$$

■

3.2 Потенциальные векторные поля

Определение. Пусть \mathcal{O} — область в \mathbb{R}^m , $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m \in C$, тогда поле V называется *потенциальным*, если оно является градиентом какого-то отображения, то есть $\exists f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}): V = \text{grad } f$.

Замечание. Пусть f_1, f_2 — отображения из определения потенциальности поля V . Тогда $f_1 - f_2 = c \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.2.1. (Обобщенная формула Ньютона-Лейбница)

Пусть $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ — потенциальное поле с потенциалом f , $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{O}$ — кусочно-гладкий путь, $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$. Тогда

$$I(V, \gamma) = f(B) - f(A)$$

Доказательство. Докажем теорему для гладкого (не кусочно) пути. Тогда кусочно-гладкий путь разобьем на гладкие пути и посчитаем интеграл как сумму интегралов по этим путям. Сумма будет телескопической, получится заявленная формула. Пусть $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. Тогда

$$\varphi'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

То есть φ — первообразная подынтегрального выражения. Тогда работает обычная формула Ньютона-Лейбница. ■

Определение. Интеграл векторного поля *не зависит от пути* в \mathcal{O} , если $\forall A, B \forall \gamma_1, \gamma_2$ кусочно-гладких путей из A в B $I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$.

Лемма 3.2.2. Пусть \mathcal{O} — область, $A \in \mathcal{O}$, тогда $\forall x \in \mathcal{O} \exists \gamma_x: A \rightsquigarrow x$ — кусочно-гладкий.

Доказательство. Пусть $M_A = \{x \in \mathcal{O} \mid \exists \gamma_x\}$, где γ_x — путь из формулировки. Тогда M_A открыто. Действительно, пусть $x \in \mathcal{O}: \exists \gamma_x$. Тогда, поскольку \mathcal{O} открыто, $\exists U(x) \subseteq \mathcal{O}$. Но тогда $\forall y \in U(x) \exists \gamma_y$, получаемый произведением пути γ_x и прямого пути из x в y .

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{O} \setminus M_A$: оно тоже открыто, так как если до точки x нет пути, то и до ближайших точек его тоже нет, иначе можно было бы достроить путь и до x .

Получается, мы разбили \mathcal{O} на два открытых непересекающихся множества. Поскольку \mathcal{O} связно, одно из них должно оказаться пустым. M_A не пустое, потому что совершенно очевидно, что $A \in M_A$. Поэтому $M_A = \mathcal{O}$, что и требовалось. ■

Теорема 3.2.3. (Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)

$V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$, \mathcal{O} — область в \mathbb{R}^m . Эквивалентны утверждения:

1. V — потенциальное
2. $I(V, \gamma)$ не зависит от пути

3. \forall кусочно-гладкой петли γ $I(V, \gamma) = 0$

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ см. обобщенную теорему Ньютона-Лейбница.

$2 \Rightarrow 3$ Пусть A — точка на петле γ_0 и γ — постоянный путь в точке A . Тогда

$$I(V, \gamma_0) \stackrel{(2)}{=} I(V, \gamma) = 0$$

$3 \Rightarrow 2$ Пусть γ_1, γ_2 — пути из A в B . Тогда рассмотрим кусочно-гладкую петлю $\gamma_0 = \gamma_1 \gamma_2^{-1}$. Имеем:

$$0 = I(V, \gamma_0) = I(V, \gamma_1 \gamma_2^{-1}) = I(V, \gamma_1) + I(V, \gamma_2^{-1}) = I(V, \gamma_1) - I(V, \gamma_2)$$

$2 \Rightarrow 1$ Построим потенциал. Зафиксируем точку $A \in \mathcal{O}$. Для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ зафиксируем кусочно-гладкий путь $\gamma_{\mathbf{x}}: A \rightsquigarrow \mathbf{x}$ (см. лемму). Проверим, что $f(\mathbf{x}) = I(V, \gamma_{\mathbf{x}})$ — потенциал V . Для этого докажем, что $f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x})$ (число 1 здесь не играет никакой роли). Рассмотрим путь $\gamma_0: t \mapsto \mathbf{x} + th\mathbf{u}_1$ для $t \in [0, 1]$, где \mathbf{u}_1 — стандартный базисный вектор. Тогда путь $\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0: A \rightsquigarrow \mathbf{x} + h\mathbf{u}_1$ — тоже кусочно-гладкий. Из аддитивности интеграла по пути имеем:

$$f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}_1) - f(\mathbf{x}) = I(V, \gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0) - I(V, \gamma_{\mathbf{x}}) = I(V, \gamma_0)$$

Здесь мы воспользовались (2) в первом переходе, позволив себе считать $f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}_1)$ не через $\gamma_{\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1}$, а через $\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0$. Далее

$$\begin{aligned} I(V, \gamma_0) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i d\mathbf{x}_i \stackrel{\substack{d\mathbf{x}_1=hdt \\ d\mathbf{x}_i=0, i \geq 2}}{=} \int_0^1 V_1(\mathbf{x}_1 + th, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) h dt \\ &= V_1(\mathbf{x}_1 + \theta h, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) h \cdot |1 - 0| \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{u}_1) - f(\mathbf{x})}{h} = V_1(\mathbf{x}_1 + \theta h, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{\text{непер.}} V_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$$

■

Рис. 3.1: Теорема о характеристизации потенциальных векторных полей

3.3 Локально потенциальные векторные поля

Лемма 3.3.1. $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое потенциальное векторное поле. Тогда

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \quad \forall k, j \quad \frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$$

Определение. Пользуемся теоремой о независимости частных производных от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k \mathbf{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k} = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}$$

Теорема 3.3.2. (Лемма Пуанкаре)

Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — выпуклая область, $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m \in C^1$, $\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V потенциально.

Доказательство. Зафиксируем точку $A \in \mathcal{O}$. Положим

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{x}}: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto A + t(\mathbf{x} - A) \in \mathcal{O} \end{aligned}$$

Проверим, что $f(\mathbf{x}) = I(V, \gamma_{\mathbf{x}})$ — потенциал V . Поскольку $V \in C^1$, можно использовать правило Лейбница:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot (\mathbf{x}_i - A_i) dt \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \left(V_j(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_j}(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot t \cdot (\mathbf{x}_i - A_i) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(V_j(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_i}(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot t \cdot (\mathbf{x}_i - A_i) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(t \cdot V_j(A + t(\mathbf{x} - A)) \right)'_t dt = t \cdot V_j(A + t(\mathbf{x} - A)) \Big|_0^1 = V_j(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

■

Определение. Поле $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется *локально потенциальным*, если оно потенциально в некоторой окрестности любой точки.

Следствие 3.3.3. (Лемма Пуанкаре)

Пусть \mathcal{O} открыто в \mathbb{R}^m , $V \in C^1(\mathcal{O})$, $\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V локально потенциально.

3.4 Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути

Лемма 3.4.1. (О гусенице)

Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, для всех \mathbf{x} задана окрестность $U(\mathbf{x})$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$, тогда существует такое дробление пути $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ и такие шары $B_k = B_k(\mathbf{x}_k, r_k) \subseteq U(\mathbf{x}_k)$, что $\forall k \text{ Im } \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \subseteq B_k$.

Доказательство. Зафиксируем за каждой точкой $c \in [a, b]$ шар $B_c = B(\gamma(c), r_c)$ такой, чтобы $B_c \subseteq U(\gamma(c))$. Теперь вычислим для всех точек величины:

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_c &= \inf_{\alpha \in [a, b]} \{ \alpha \mid \text{Im } \gamma|_{[\alpha, c]} \subseteq B_c \} \\ \tilde{\beta}_c &= \sup_{\beta \in [a, b]} \{ \beta \mid \text{Im } \gamma|_{[c, \beta]} \subseteq B_c \}\end{aligned}$$

Далее сузим $(\tilde{\alpha}_c, \tilde{\beta}_c)$:

$$\tilde{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \tilde{\beta}_c$$

Теперь $\forall c \text{ Im } \gamma|_{(\alpha_c, \beta_c)} \subseteq B_c$. Кроме того:

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{c \in [a, b]} (\alpha_c, \beta_c) \implies \exists c_i: [a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^n (\alpha_{c_i}, \beta_{c_i})$$

Далее для краткости вместо c_i будет использоваться просто i . Уберем из покрытия множества, которые можно покрыть другими множествами (это можно следать, поскольку покрытие конечное). Теперь на каждом интервале (α_i, β_i) есть точка d_i , не принадлежащая ни одному интервалу, кроме i -го. Выберем t_1 так, чтобы оно лежало сразу в 1 и 2 множествах. Тогда $a = t_0 < d_1 < t_1$, и

$$d_1 \in [t_0, t_1] \subseteq (\alpha_1, \beta_1) \implies \text{Im } \gamma|_{[t_0, t_1]} \subseteq B_1$$

Продолжая аналогичный процесс далее, получаем нужное дробление пути. ■

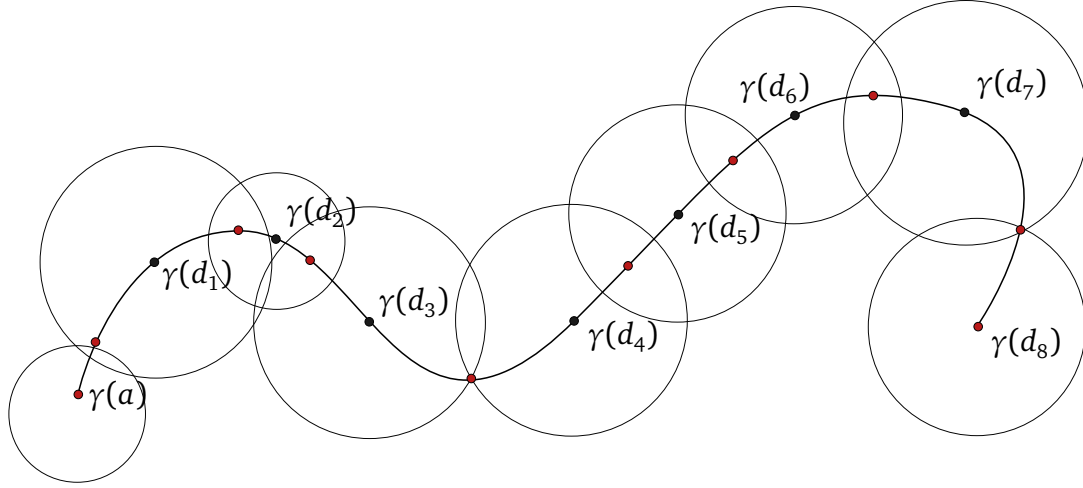


Рис. 3.2: Теорема о гусенице

Определение. Объект из последней теоремы, для которого окрестности $U(x)$ соответствуют окрестностям, на которых V локально потенциально, будем называть V -гусеницей.

Определение. Пути $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$ будем называть *похожими*, если у них есть общая V -гусеница. При этом ограничение идем именно на гусеницу, то есть наборы t_k могут быть разными.

Лемма 3.4.2. Пусть V — локально потенциальное векторное поле, γ_1, γ_2 — похожие кусочно-гладкие пути, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, тогда $I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$.

Доказательство. Пусть Γ — общая V -гусеница путей, f_k потенциал в B_k . Подгоняя константы, следаем потенциалы одинаковыми на стыках шаров:

$$f_k = f_{k+1} \text{ на } B_k \cap B_{k+1}$$

Теперь посчитаем интеграл по γ_1 :

$$I(V, \gamma_1) = \sum_{k=1}^n I(V, \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}) = \sum_{k=1}^n (f_k(\gamma(t_k)) - f_{k-1}(\gamma(t_{k-1}))) = f_n(\gamma(b)) - f_0(\gamma(a))$$

Аналогично вычисляем второй интеграл: получится такая же формула. ■

Лемма 3.4.3. Пусть B открыто, $A \subseteq B$ — компакт. Тогда $\exists \delta > 0$: $U(A, \delta) \subseteq B$, где $U(A, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid \rho(x, A) < \delta\}$

Доказательство. Пусть

$$r = \text{dist}(A, \text{Fr}(B)) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in \text{Fr}(B)}} \rho(a, b)$$

Инфимум реализуется, так как dist вычисляется на прямом произведении компактов (т.е. на компакте). Поэтому $r > 0$ (иначе A зашло бы на границу B , чего быть не может, т.к. $A \subseteq B$ и B открыто). Выберем $\delta = \frac{r}{2}$. ■

Лемма 3.4.4. (О трёх путях)

$C([a, b]) \ni \gamma: [a, b] \rightarrow \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$, \mathcal{O} — область, тогда $\exists \delta > 0$:

Если $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow \mathcal{O}: \forall t \in [a, b] |\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \delta, |\gamma(t) - \gamma_2(t)| < \delta$, тогда $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ похожи друг на друга.

Доказательство. Множества $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ компактны, B_k открыты, поэтому

$$\forall k \exists \delta_k: U(\gamma([t_{k-1}, t_k]), \delta_k) \subseteq B_k$$

Выберем тогда $\delta = \min \delta_k$. В таком случае все три пути окажутся в δ -окрестности по условию, то есть будут заключены в шары B_k . ■

Определение. (Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути)
Пусть γ — непрерывный путь, γ' — любой кусочно-гладкий путь, удовлетворяющий предыдущей лемме. тогда положим $I(V, \gamma) = I(V, \gamma')$

Лемма 3.4.5. (О корректности определения интеграла по непрерывному пути)

Доказательство.

- Если таких путей γ' найдется несколько, то интегралы по ним совпадут по лемме об интегралах по похожим путям.
- Такой путь γ' всегда найдется. Для доказательства предъявим такой путь. Из соображений равномерной непрерывности,

$$\delta > 0 \implies \exists \alpha > 0: \forall t, t': |t - t'| < \alpha \implies \|\gamma(t) - \gamma(t')\| < \frac{\delta}{2}$$

Тогда разобьём $[a, b]$ на отрезки длины α и построим кусочно-линейный путь $\tilde{\gamma}$; проверим условие похожести:

$$\begin{aligned} \|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)\| &\leq \|\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})\| + \|\gamma(t_{i-1}) - \tilde{\gamma}(t)\| \\ &\leq \|\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})\| + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leq \delta \end{aligned}$$

■

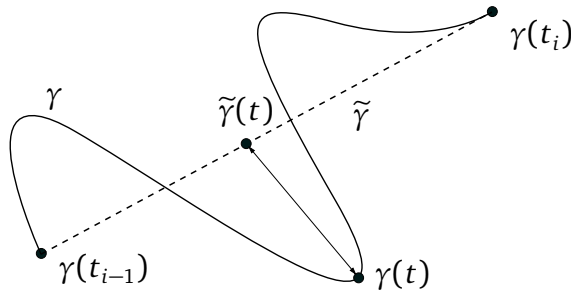


Рис. 3.3: Лемма о корректности определения интеграла по непрерывному пути

3.5 Гомотопия

Определение. Рассмотрим два пути $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathcal{O}$. Гомотопией путей γ_0, γ_1 называется отображение $\Gamma: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{O} \in C$, такое, что $\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$ и $\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Определение. Гомотопия называется *связанной*, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

Определение. Гомотопия называется *петельной*, если $\forall u \in [0, 1] \quad \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$.

Лемма 3.5.1. Локально постоянное отображение связного компакта постоянно на нём.

Доказательство. (нестрогое)

Выберем конечное покрытие K окрестностями, на которых $f: K \rightarrow X$ постоянно. Вручную установим равенство f на стыках окрестностей (их конечное число), а значит автоматически и на объединении окрестностей из одной компоненты связности. Поскольку K связно, компонента одна, а значит f постоянно. ■

Теорема 3.5.2. (Интегралы по связанно гомотопным путям)

V — локально потенциальное поле, γ_0, γ_1 — связанно гомотопные пути. Тогда $I(V, \gamma_0) = I(V, \gamma_1)$.

Доказательство.

- Пусть Γ — гомотопия путей γ_0 и γ_1 . Введем отображение $\varphi(u) = I(V, \gamma_u)$. Наша цель — показать, что φ локально постоянно на $[0, 1]$, или, что то же самое:

$$\forall u_0 \in [0, 1] \exists U(u_0): \forall u \in U(u_0) \cap [0, 1] \quad \varphi(u_0) = \varphi(u)$$

В таком случае по предыдущей лемме оно окажется постоянным на $[0, 1]$, что и докажет утверждение теоремы.

- Пусть δ взято из леммы о трёх путях. Γ непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывно на нём:

$$\exists \sigma > 0: \forall u, t: \begin{cases} |u - u_0| < \sigma \\ |t - t_0| < \sigma \end{cases} \implies \|\Gamma(t, u) - \Gamma(t_0, u_0)\| < \frac{\delta}{2}$$

Поэтому, в частности,

$$\|\gamma_u(t) - \gamma_{u_0}(t)\| < \frac{\delta}{2}$$

то есть пути γ_u и γ_{u_0} похожи. Но они не кусочно-гладкие, поэтому похожесть недостаточно.

- Придется искать похожие пути. Пользуясь технологией из доказательства леммы о корректности определения интеграла по непрерывному пути, построим пути $\tilde{\gamma}_u$ и $\tilde{\gamma}_{u_0}$ так, чтобы они попадали в $\frac{\delta}{4}$ -окрестность путей γ_u и γ_{u_0} соответственно. Тогда

$$\|\tilde{\gamma}_u - \tilde{\gamma}_{u_0}\| \leq \|\tilde{\gamma}_u - \gamma_u\| + \|\gamma_u - \gamma_{u_0}\| + \|\gamma_{u_0} - \tilde{\gamma}_{u_0}\| \leq \delta$$

То есть пути $\tilde{\gamma}_u$ и $\tilde{\gamma}_{u_0}$ похожи. Но они кусочно-гладкие, поэтому получается, что:

$$I(V, \gamma_u) \stackrel{def}{=} I(V, \tilde{\gamma}_u) \stackrel{\text{похож. к.-г.}}{=} I(V, \tilde{\gamma}_{u_0}) \stackrel{def}{=} I(V, \gamma_{u_0})$$

■

Определение. Область называется *односвязной* если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному.

Теорема 3.5.3. Пусть \mathcal{O} — односвязная область в \mathbb{R}^m , V — локально потенциальное векторное поле в \mathcal{O} , тогда V потенциально в \mathcal{O} .

Доказательство. Область односвязная, значит любая петля в ней гомотопна постоянному пути, то есть интеграл по любой петле равен нулю. Это — критерий потенциальности поля. ■

Следствие 3.5.4. (Теорема Пуанкаре для односвязной области)

\mathcal{O} — односвязная область, $V \in C^1$, $\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V потенциально.

Теорема 3.5.5. (О резиночке) Область $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ не является односвязной.

Доказательство. Рассмотрим петлю:

$$\begin{aligned} \gamma: [0, 2\pi] &\rightarrow \mathcal{O} \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

И векторное поле $V: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$V(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся (*нет*) что $\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$. Отсюда делаем вывод, что V — локально-потенциально (теорема Пуанкаре). Проинтегрируем по петле:

$$I(V, \gamma) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin(t)}{1} \cdot (-\sin(t)) + \frac{\cos(t)}{1} \cdot \cos(t) \right) dt = 2\pi \neq 0$$

Значит, γ — нестягиваемая петля. ■

Глава 4

Теория меры

4.1 Системы множеств

Определение. Полукольцом подмножеств множества X называют $\mathcal{P} \subseteq 2^X$, удовлетворяющее условиям

1. $\emptyset \in \mathcal{P}$.
2. $A, B \in \mathcal{P} \implies A \cap B \in \mathcal{P}$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{P} \exists B_1, \dots, B_k \in \mathcal{P}: A \setminus B = \bigsqcup_{i=1}^k B_i$.

Определение. Ячейкой в \mathbb{R}^m называется множество вида

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{a}_i \leq x_i < \mathbf{b}_i \}$$

Теорема 4.1.1. (Свойства полуколец)

1. $A \in \mathcal{P} \not\Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{P}$
2. $A, A' \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A @ A' \in \mathcal{P}, @ \in \{ \cup, \setminus, \Delta \}$
3. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P} \implies A \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigsqcup_{fin} D_j$

Определение. Алгеброй подмножеств множества X называется множество $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ такое, что выполнены аксиомы:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \implies A \setminus B \in \mathcal{A}$

Теорема 4.1.2. (Свойства алгебр)

1. $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{A}$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

$$3. \bar{A} = X \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$4. A \cup B \in \mathcal{A}$$

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

$$5. A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$$

6. Алгебра подмножеств является полукольцом подмножеств

Определение. σ -Алгеброй подмножеств множества X называется алгебра подмножеств \mathcal{A} , удовлетворяющая дополнительной аксиоме:

$$\{A_n\} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Лемма 4.1.3. (О нарезке)

Пусть $A_0, A_1, \dots, A_n \subseteq X$. Тогда набор множеств

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \dots, B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right), \dots$$

дизъюнкты, причем

$$\bigsqcup_{i=1}^n B_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

Лемма 4.1.4. (О минимальной алгебре)

Пусть \mathcal{P} — полукольцо. Положим \mathcal{A}_0 — система подмножеств, состоящая из всевозможных конечных объединений множеств из \mathcal{P} , а так же из их дополнений. Тогда

- \mathcal{A}_0 — алгебра подмножеств.
- Для любой алгебры $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{P}$ верно, что $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0$

4.2 Объём

Определение. Пусть \mathcal{P} — полукольцо, $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *конечно-аддитивной*, если

1. μ принимает не более одного значения из $\{+\infty, -\infty\}$
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}, A_i \cap A_{j \neq i} = \emptyset$, тогда если оказалось, что $A = \bigsqcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{P}$, то

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$$

Определение. Пусть $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ называется *объёмом*, если

1. μ конечно-аддитивна
2. $\mu \geq 0$

Определение. Объём называется *конечным*, если $\mu(X) < +\infty$.

Определение. Классическим объёмом в \mathbb{R}^m называется объём, заданный на полукольце ячеек в \mathbb{R}^m , вычисляющийся по формуле $\mu([a, b)) = \prod_{k=1}^m (b_k - a_k)$.

Лемма 4.2.1. (Монотонность объёма)

Для объёма μ , $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subseteq B$ выполнено $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Доказательство.

$$B = A + B \setminus A = A + \bigsqcup D_i \implies \mu(B) = \mu(A) + \sum \mu(D_i) \geq \mu(A)$$

■

Теорема 4.2.2. (Свойства объёма)

1. $\forall A$, дизъюнктивных $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$: $\bigsqcup_{i=1}^n A_i \subseteq A \implies \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \leq \mu(A)$
(усиленная монотонность)
2. $\forall A, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$: $A \subseteq \bigsqcup_{i=1}^n A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$
(конечная полуаддитивность)
3. $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P} \implies \mu(A \setminus B) \geq \mu(A) - \mu(B)$

Доказательство.

1.

$$\begin{aligned} A \setminus \bigsqcup_{i=1}^n A_i &= \bigsqcup_{i=1}^k D_i \implies A = \left(\bigsqcup_{i=1}^n A_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^k D_i \right) \\ \implies \mu(A) &= \sum_{i=1}^n \mu(A_i) + \sum_{i=1}^k \mu(D_i) \geq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) \end{aligned}$$

2. Сейчас будет использован стандартный прием, смысл которого заключается в переходе от простого объединения к дизъюнктному. Пусть $B_k = A \cap A_k$. Тогда $A = \bigcup B_k$. Теперь нарежем B_k :

$$C_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$$

При $k > 1$ и $C_1 = B_1$. Набор C_k получился дизъюнктным:

$$A = \bigsqcup_{i=1}^n C_i$$

Сами множества C_k могут и не быть в \mathcal{P} , но $B_k \in \mathcal{P}$ как пересечения множеств из \mathcal{P} . Из определения C_k имеем, что,

$$C_k = \bigsqcup_{i=1}^{j_k} D_{ki}$$

Тогда можно вычислить объём A :

$$\mu(A) = \sum_{k,i} \mu(D_{ki})$$

Теперь воспользуемся монотонностью объёма: $C_k \subseteq B_k \subseteq A_k$:

$$\sum_j D_{kj} \leq \mu(B_k) \leq \mu(A_k)$$

Поэтому

$$\mu(A) = \sum_k \sum_j D_{kj} \leq \sum_k \mu(A_k)$$

3.

(a)

$$B \subseteq A \implies \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) \implies \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$$

(b)

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \implies \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \geq \mu(A) - \mu(B)$$

■

4.3 Мера

Определение. Мерой называется объём $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, обладающий свойством счётной аддитивности.

Теорема 4.3.1. Пусть $\mu: \mathcal{P} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивен
2. μ счетно-полуаддитивен

Доказательство. Импликация $1 \implies 2$ доказывается практически так же, как второй пункт предыдущей теоремы (используется нарезка). Докажем $2 \implies 1$. Для этого воспользуемся усиленной монотонностью объёма (A_i дизъюнкты):

$$\forall N \sum_{i=1}^N \mu(A_i) \leq \mu(A)$$

Добавляя к этому посылку:

$$\forall N \sum_{i=1}^N \mu(A_i) \leq \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

И переходя к пределу при $N \rightarrow +\infty$, получаем требуемое. ■

Теорема 4.3.2. Пусть \mathcal{A} — алгебра, $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивно
2. μ непрерывно снизу, то есть $A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}: A_1 \subset A_2 \subset \dots; A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \implies \mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$

Доказательство.

$1 \implies 2$ Нарезем множеств:

$$B_1 = A_1, \dots, B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i \right)$$

Как всегда, B_k дизъюнктны, причем $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_k$. Тогда, пользуясь счетной аддитивностью, имеем:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \mu(B_i) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu(A_N)$$

$2 \implies 1$ Пусть есть дизъюнктные A_k . Сделаем из них C_k :

$$C_k = \bigsqcup_{i=1}^k A_i$$

Тогда $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \dots$. Воспользуемся непрерывностью снизу:

$$\mu(A) = \mu(C) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu(C_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$$

■

Теорема 4.3.3. Пусть \mathcal{A} — алгебра, $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — **конечный** объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивен
2. μ непрерывно сверху

$$A, A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}: A_1 \supset A_2 \supset \dots; A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \implies \mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n)$$

3. μ непрерывно сверху на пустом множестве, то есть при условии, что $A = \emptyset$.

Доказательство.

1 \implies 2 Будем пользоваться непрерывностью снизу, но для этого нужна подготовка:

$$B_1 = A_1 \setminus A, \dots, B_k = A_1 \setminus A_k$$

Тогда $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots; B = \bigcup B_k$:

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(B) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(B_k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k)$$

Откуда

$$\mu(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k)$$

2 \implies 3 Очевидно.

3 \implies 1 Пусть C_k дизъюнкты. Положим

$$A_k = \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} C_k$$

Тогда $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots; A = \bigcap A_k = \emptyset$. Вообще говоря, $A_k \notin \mathcal{A}$. Но в нашем случае

$$A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^k C_i \in \mathcal{A}$$

Далее надо как-то воспользоваться непрерывностью сверху:

$$C = A_k \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^k C_i \right) \implies \mu(C) = \mu(A_k) + \sum_{i=1}^k \mu(C_i)$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получаем требуемое. ■

4.4 О стандартном продолжении меры

Определение. Пространством с мерой называется тройка $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$, где \mathcal{A} — σ -алгебра, $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ — мера.

Определение. $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ называется *полным* (соответственно мера называется *полной*), если $\forall E \in \mathcal{A}: \mu(E) = 0 \implies \forall A \subseteq E, A \in \mathcal{A} \text{ и } \mu(A) = 0$.

Определение. $\langle X, \mathcal{P}, \mu \rangle$ называется *σ -конечным* (соответственно мера называется *σ -конечной*), если $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k$, где $\mu(B_k) < +\infty$.

Теорема 4.4.1. (О стандартном продолжении меры)

$\langle X, \mathcal{P}, \mu_0 \rangle$, μ_0 — σ -конечный объём. Тогда \exists σ -алгебра \mathcal{A} и мера $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$:

1. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}, \mu|_{\mathcal{P}} = \mu_0$

2. μ полная

3. Если $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{P}$, $\mu'|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, μ' — полная, тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ и $\mu'|_{\mathcal{A}} = \mu$

4. Если \mathcal{P}' — полукольцо, μ' — мера на \mathcal{P}' , $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{A}$, тогда $\mu' = \mu|_{\mathcal{P}'}$

5. $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mu(A) = \inf \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_0(P_k) \mid A \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P} \right)$

4.5 Мера Лебега

Теорема 4.5.1. Классический объём в \mathbb{R}^m является σ -конечной мерой.

Доказательство. σ -конечность очевидна. Докажем счетную полуаддитивность. Пусть $[a, b] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n]$. Наша цель — показать, что $\mu[a, b] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mu[a_n, b_n]$. Выберем $b' < b$ таким образом, чтобы

$$\mu[a, b] - \varepsilon < \mu[a, b'] < \mu[a, b]$$

И $a'_n < a_n$ так, чтобы

$$\forall n \quad \mu[a_n, b_n] < \mu[a'_n, b_n] < \mu[a_n, b_n] + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Теперь отрезок $[a, b']$ накрыт счетным объединением интервалов (a'_n, b_n) . Выберем из этого покрытия конечное:

$$[a, b'] \subseteq \bigcup_{n=1}^N (a'_n, b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^N [a'_n, b_n]$$

Воспользуемся конечной полуаддитивностью:

$$\mu[a, b'] \leq \sum_{n=1}^N \mu[a'_n, b_n] \leq \sum_{n=1}^N \left(\mu[a_n, b_n] + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \leq \sum_{n=1}^N \mu[a_n, b_n] + \varepsilon$$

С другой стороны:

$$\mu[a, b] - \varepsilon < \mu[a, b'] \leq \sum_{n=1}^N \mu[a_n, b_n] + \varepsilon$$

Откуда и следует требуемое. ■

Определение. Мерой Лебега называется стандартное продолжение классического объёма.

Определение. Алгебра, на которой определена мера Лебега, обозначается \mathfrak{M} .

Определение. Измеримыми по Лебегу называются множества $A \in \mathfrak{M}$.

Теорема 4.5.2. (Свойства меры Лебега)

1. Объединения и пересечения измеримых множеств измеримы.
2. Все открытые и замкнутые множества измеримы.

Лемма 4.5.3. (О структуре открытых множеств)

1. $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто $\implies \exists Q_i$ — ячейки в \mathbb{R}^m такие, что $\mathcal{O} = \bigsqcup_i Q_i$, причем можно дополнительно считать, что выполнено что-либо из нижеперечисленного:

- (a) Ячейки имеют рациональные (двоично-рациональные) координаты
- (b) $\text{Cl}(Q_i) \subseteq \mathcal{O}$
- (c) Q_i — кубы

2. Пусть E измеримо в \mathbb{R}^m , $\lambda(E) = 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists Q_i$ — ячейки в \mathbb{R}^m такие, что

$$E \subseteq \bigcup_i Q_i \text{ и } \sum_i \mu(Q_i) < \varepsilon$$

причем можно потребовать свойства (a)–(c) и дизъюнктность набора ячеек.

Доказательство.

1. Всем точкам \mathcal{O} сопоставим ячейку требуемого типа с рациональными параметрами. Таких ячеек не более чем счетное множество:

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \tilde{Q}_i$$

Теперь надо сделать эти ячейки дизъюнктными. Для этого воспользуемся тем, что их счетное число:

$$Q'_1 = \tilde{Q}_1, \dots, Q'_k = \tilde{Q}_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \tilde{Q}_i$$

$\forall i$ Q'_i выражается через дизъюнктное объединение ячеек нужного типа, так как полукольцо ячеек — полукольцо. Тогда:

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \tilde{Q}_i = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} Q'_i = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} \bigsqcup_{j=1}^{k_i} D_{ij}$$

2. Пятый пункт теоремы о продолжении поставляет нам способ получить ячейки, удовлетворяющие всему, кроме дизъюнктности и (a) – (c). Эти свойства придется добывать самостоятельно. Пусть множества \tilde{P}_i пришли из теоремы для $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\sum \lambda(\tilde{P}_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Немного расширим эти множества до открытых $P_i \supset \tilde{P}_i$. Эти множества по первому пункту текущей леммы представляются в виде нужного нам объединения:

$$P_i = \bigsqcup D_{ij}$$

Потребуем (при выборе P_i):

$$\lambda(\tilde{P}_i) < \lambda(P_i) < \lambda(\tilde{P}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Тогда получается то, что нужно:

$$\sum \lambda(D_{ij}) = \sum \lambda(P_i) < \sum \left(\lambda(\tilde{P}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \leq \varepsilon$$

■

Теорема 4.5.4. (Свойства меры Лебега)

3. Пример: канторово множество в \mathbb{R} . Строится итеративно:

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_0 &= [0, 1] \\ \mathfrak{K}_1 &= \left[1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ \mathfrak{K}_2 &= \left[1, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\dots \\ \mathfrak{K} &= \bigcap_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{K}_i \end{aligned}$$

Получившееся множество измеримо, потому что является пересечением измеримых множеств. Его мера равна нулю, потому что к нулю стремится мера \mathfrak{K}_i . С другой стороны, можно задать это же множество в другом виде:

$$\mathfrak{K} = \{0.\varepsilon_1\varepsilon_2\dots_3 \mid \varepsilon_i \in \{0, 2\}\}$$

По построению понятно, что из отрезка просто выкинули все точки, троичная запись которых содержит хотя бы одну единицу. Тогда \mathfrak{K} континуально как множество бинарных последовательностей.

4. Пример: неизмеримое множество. Совершенно очевидно, что одними только пересечениями и объединениями не получится построить неизмеримое множество. Привлечем к борьбе с измеримостью фактормножества. Пусть \sim — отношение, заданное на отрезке $[0, 1]$ такое, что:

$$a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q}$$

Рассмотрим тогда фактормножество $A = [0, 1] / \sim$. Предположим, что оно измеримо. В одной из следующих теорем будет доказано, что мера Лебега инвариантна относительно сдвига, то есть $\lambda(A) = \lambda(A + q)$. Пусть тогда

$$B = \bigsqcup_{q \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}} (A + q)$$

Дизъюнктность объединяемых множеств очевидна. Тогда B тоже измеримо, причем

$$B \subseteq [-1, 2], B \supseteq [0, 1] \implies 0 < \lambda(B) < +\infty$$

Но с другой стороны можно вычислить $\lambda(B)$ через $\lambda(A)$:

$$\lambda(B) = \sum_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} \lambda(A+q) = \begin{cases} 0, & \lambda(A) = 0 \\ +\infty, & \lambda(A) > 0 \end{cases}$$

Возникло противоречие, поэтому A неизмеримо.

5. – A ограничено, тогда $\lambda(A) < +\infty$
 – A открыто, тогда $\lambda(A) > 0$
 – $\lambda(A) = 0 \implies \forall A$ нет внутренних точек

6. A измеримо, тогда $\forall \varepsilon > 0$

- $\exists G_\varepsilon$ открытое такое, что $A \subset G_\varepsilon$, $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
- $\exists F_\varepsilon$ замкнутое такое, что $F_\varepsilon \subset A$, $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство.

5. Очевидно.

6. – (i) Пусть $\lambda(A) < +\infty$. Из последнего пункта теоремы о продолжении получаем набор P_i такой, что

$$\lambda(A) < \sum \lambda(P_i) < \lambda(A) + \varepsilon$$

Далее немного расширим P_i до открытого \tilde{P}_i , которое наполовину замкнем до ячейки $\tilde{\tilde{P}}_i$:

$$P_i \subset \tilde{P}_i \subset \tilde{\tilde{P}}_i \in \mathcal{P}$$

Расширим мы несильно, а именно:

$$\lambda(\tilde{\tilde{P}}_i) - \lambda(P_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

В таком случае положим

$$G_{2\varepsilon} = \bigcup \tilde{\tilde{P}}_i$$

и проверим, что оно подходит:

$$\lambda(A) < \lambda(G_{2\varepsilon}) \leq \sum \lambda(\tilde{\tilde{P}}_i) \leq \lambda(A) + 2\varepsilon$$

$A \subset G_{2\varepsilon}$, поэтому:

$$\lambda(G_{2\varepsilon} \setminus A) = \lambda(G_{2\varepsilon}) - \lambda(A) < 2\varepsilon$$

(ii) $\lambda(A) = +\infty$. Воспользуемся σ -конечностью \mathbb{R}^m :

$$\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i \implies A = \bigsqcup A \cap Q_i$$

Пользуясь (i), расширим $A \cap Q_i$ до открытого множества $(G_\varepsilon)_i$ так, чтобы

$$\lambda((G_\varepsilon)_i \setminus (A \cap Q_i)) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Пусть тогда $G_\varepsilon = \bigcup (G_\varepsilon)_i$. Проверим, что оно подходит:

$$\lambda(A) < \lambda(G_\varepsilon) \leq \sum \lambda((G_\varepsilon)_i) < \sum \lambda(A \cap Q_i) + \varepsilon = \lambda(A) + \varepsilon$$

– Переход к дополнению: A^c открыто, поэтому

$$\exists G_\varepsilon: \lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon \implies \lambda(A \setminus G_\varepsilon^c) = \lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon$$

То есть $F_\varepsilon = G_\varepsilon^c$ подходит.

■

Определение. Пусть $A \subseteq 2^X$, тогда борелевской оболочкой множества A называют минимальную по включению σ -алгебру, содержащую A .

Определение. Борелевской σ -алгеброй называется борелевская оболочка всех открытых множеств.

Следствие 4.5.5. A измеримо, тогда \exists борелевские B, C : $B \subset A \subset C$ такие, что $\lambda(C \setminus B) = 0$.

Доказательство. Возьмем в качестве $B = \bigcup F_{\frac{1}{n}}$, $C = \bigcap G_{\frac{1}{n}}$. Имеем

$$F_{\frac{1}{n}} \subseteq A \subseteq G_{\frac{1}{n}}$$

И

$$\forall n \lambda(B \setminus A) < \lambda(G_{\frac{1}{n}} \setminus F_{\frac{1}{n}}) < \frac{2}{n}$$

Поэтому $\lambda(B \setminus A) = 0$. B, A борелевские, потому что являются пересечением и объединением борелевских множеств. ■

Следствие 4.5.6. A измеримо, тогда $A = B \cup \mathfrak{N}$, B — борелевское, $\lambda(\mathfrak{N}) = 0$.

Доказательство. Возьмем в качестве B множество B из предыдущего следствия, а в качестве \mathfrak{N} — множество $A \setminus B$. Тогда $\lambda(\mathfrak{N}) \leq \lambda(C \setminus B) = 0$. ■

Следствие 4.5.7. (Регулярность меры Лебега)

Пусть A измеримо, тогда

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G \text{ открыто}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ замкнуто}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ компакт}}} \lambda(K)$$

Доказательство. Первые два пункта следуют из существования последовательностей открытых $G_{\frac{1}{n}}$ и замкнутых $F_{\frac{1}{n}}$, которые и дают нужный супремум или инфимум. Докажем последнее равенство.

- Пусть A ограничено. Тогда

$$\sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ замкнуто}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ компакт}}} \lambda(K)$$

Левая часть равенства отличается от правой только тем, что там разрешены неограниченные множества; но неограниченных подмножеств ограниченного множества не бывает, поэтому получаем равенство.

- Пусть теперь A неограничено.

- $\lambda(A) < +\infty$. Воспользуемся непрерывностью снизу:

$$\mathbb{R}^m = \bigcup B(0, n); A_n = A \cap B(0, n) \implies A_1 \subset A_2 \subset \dots \\ \implies \lim \lambda(A_n) = \lambda(A)$$

Начиная с некоторого места, $\lambda(A_n) > \lambda(A) - \varepsilon$, при этом, A_n ограничены. Выберем тот компакт (он есть по первому пункту), для которого $\lambda(K) > \lambda(A_n) - \varepsilon$. Тогда, поскольку $K \subset A_n \subset A$, имеем, что

$$\lambda(A \setminus K) = \lambda((A \setminus A_n) \cup (A_n \setminus K)) < 2\varepsilon$$

- $\lambda(A) = +\infty$. Доказывается аналогично, просто определение предела по-меняется. Общий итог доказательства будет выглядеть так:

$$\forall R \exists A_n: \lambda(A_n) > R + 1 \exists K \subset A_n: \lambda(K) > R$$

■

Лемма 4.5.8. Пусть $\langle X', \mathcal{A}', \mu' \rangle$ — пространство с мерой. $\langle X, \mathcal{A}, _ \rangle$ — заготовка для пространства с мерой. $T: X \rightarrow X'$ — биекция, $\forall A \in \mathcal{A} T(A) \in \mathcal{A}', T(\emptyset) = \emptyset$. Положим $\mu(A) = \mu'(T(A))$. Тогда μ — мера на \mathcal{A} .

Доказательство. Докажем счетную аддитивность. Пусть $A = \bigsqcup A_i$. Тогда:

$$\mu(A) = \mu'(T(A)) = \mu'(T(\bigsqcup A_i)) = \mu'(\bigsqcup T(A_i)) = \sum \mu'(T(A_i)) = \sum \mu(A_i)$$

Переход от образа объединения к объединению образов можно совершить из-за того, что T — биекция. ■

Лемма 4.5.9. Пусть A — измеримое по Лебегу множество. Тогда A представимо в виде

$$A = \bigcup K_i \cup \mathfrak{N}$$

Где K_i компакты и $\lambda(\mathfrak{N}) = 0$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству пункта (б) теоремы о свойствах меры Лебега за исключением того, что пересечь или объединить компакты не получится. ■

Лемма 4.5.10. $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall E \in \mathfrak{M} \lambda(E) = 0 \implies \lambda(T(E)) = 0$, тогда $\forall A \in \mathfrak{M} T(A) \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Пользуясь леммой, представим A в виде:

$$A = \bigcup K_i \cup \mathfrak{N}$$

Тогда

$$T(A) = \bigcup T(K_i) \cup T(\mathfrak{N})$$

$T(K_i)$ — непрерывный образ компакта, то есть компакт, а значит, борелевское множество, $T(\mathfrak{N})$ измеримо по условию, поэтому $T(A)$ измеримо как объединение измеримых множеств. ■

Пример. (Канторова лестница) Это — пример, показывающий, что для того, чтобы отображение сохраняло измеримость, непрерывности мало. Зададим f итеративно: на отрезке $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ положим $f(x) = \frac{1}{2}$. Будем повторять такой процесс рекурсивно в левой и правой трети отрезка $[0, 1]$, задавая на среднем отрезке значения, равные среднему арифметическому значений на соседних отрезках. Доопределим f на $[0, 1]$ так, чтобы f оказалась непрерывна (кстати, подобное продолжение единственно):

$$f(x) = \sup \left(f\left(\frac{m}{3^k}\right) \mid \frac{m}{3^k} \leq x \right)$$

Заметим, что $f(\mathfrak{K}) = [0, 1]$, где \mathfrak{K} — канторово множество. То есть, мы отобразили множество нулевой меры на целый отрезок. Возьмем теперь совершенно любое неизмеримое подмножество $A \subset [0, 1]$ (см. пример ранее). Поскольку $f(\mathfrak{K}) = [0, 1]$, существует множество $e \subseteq \mathfrak{K}$ такое, что $f(e) = A$, причем e измеримо по полноте меры Лебега. Получается, что мы отобразили измеримое множество на неизмеримое.

Теорема 4.5.11. Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — открыто, $\varphi: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое. Тогда φ сохраняет измеримость.

Доказательство. Достаточно проверить, что φ переводит множества нулевой меры в множества нулевой меры. Пусть $\mathcal{O} = \bigsqcup Q_i$, причем $\text{Cl}(Q_i) \subseteq \mathcal{O}$ (лемма о структуре открытых множеств, п.1). Теперь из соображений счетной аддитивности достаточно проверить утверждение для подмножеств Q_i . По теореме Лагранжа:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{O} \quad \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \leq L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Где $L = \sup_{\mathbf{x} \in \text{Cl}(Q_i)} \|\varphi'(\mathbf{x})\| < +\infty$, потому что φ гладкое. Далее мы накроем наше множество нулевой меры E маленькими кубами (лемма о структуре открытых множеств, п.2), которые после пересадки дадут маленькие шары:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists D_i = D(\mathbf{x}_i, r_i) \text{ — кубы: } E \subseteq \bigcup D_i, \sum \lambda(D_i) < \varepsilon$$

Тогда посмотрим, насколько большим может оказаться образ E :

$$\varphi(E) = \bigcup \varphi(D_i) \subseteq \bigcup B(\varphi(\mathbf{x}_i), L \cdot r_i) \subseteq \bigcup K(\varphi(\mathbf{x}_i), \sqrt{m} \cdot L \cdot r_i)$$

Оценим меру получившегося образа:

$$\lambda(\varphi(E)) \leq \sum \lambda(K_i) = \sum (2\sqrt{m} \cdot L \cdot r_i)^m = (\sqrt{m} \cdot L)^m \cdot \sum \lambda(D_i) < (\sqrt{m} \cdot L)^m \cdot \varepsilon$$

■

Следствие 4.5.12. Мера Лебега инвариантна относительно сдвига.

Доказательство. Сдвиг как отображение гладкий, поэтому измеримость сохраняется. Из теоремы о продолжении меры мы знаем, что мера Лебега вычисляется на основе мер ячеек. При сдвиге, очевидно, мера ячеек не изменяется, поэтому не изменяется и мера других множеств. ■