Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

0.1 Диффеоморфизмы

Определение. *Областью* называют открытое связное множество.

Определение. Топологические пространства X, Y *гомеоморфны*, если существует обратимое и в обе стороны непрерывное $f : X \to Y$. f называют *гомеоморфизмом*.

Определение. *Диффеоморфизмом* гладких многообразий M, N называется обратимое и в обе стороны гладкое отображение $f : M \to N$.

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$. Тогда отображение $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ называется *диффеоморфизмом*, если оно обратимо и в обе стороны дифференцируемо.

Лемма 0.1.1. (О почти локальной инъективности)
Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, f дифференцируемо в $\mathbf{x}_0$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists c, \delta > 0$ такие, что $\forall \mathbf{h}\colon\ \|\mathbf{h}\| < \delta \quad \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$

Доказательство.

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \left\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\right\| \geqslant \left\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\right\| - \|\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\| \geqslant \frac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|$$

Последнее неравенство выполнено по следующим причинам:

- $\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$, так как $f'(\mathbf{x}_0)$ обратим
- $\|\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\| \leqslant \frac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|$ при достаточно малых $\mathbf{h}$, так как $\alpha(\mathbf{h})$ — бесконечно малое.

■

Теорема 0.1.2. (О сохранении области)
Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \ \det f'(\mathbf{x}) \neq 0$, тогда f открыто.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{O}$ открыто. Тогда нужно показать, что $f(\mathcal{O})$ открыто. Зафиксируем $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ и $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in f(\mathcal{O})$. По лемме о почти локальной инъективности имеем $c, \delta > 0$ такие, что

$$\forall \mathbf{h} \in \overline{B(0,\delta)}\ \ \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$$

Положим

$$r = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\mathbf{y}_0, f(S(\mathbf{x}_0, \delta)))$$

Поскольку f непрерывно, а сфера — компакт, имеем, что $f(S(\mathbf{x}_0, \delta))$ — компакт. В свою очередь, ρ является метрикой, то есть непрерывно. Тогда ρ достигает минимума, то есть r реализуется, а значит, не равно нулю (см. оценку выше). Раз $r > 0$, то $B(\mathbf{y}_0, r)$ — полноправный шар, проверим, что он входит в образ f целиком, что и закончит доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$. Положим $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$ на $\overline{B(\mathbf{x}_0, \delta)}$; g непрерывно, поэтому достигает минимума. Попробуем этот минимум найти:

- Рассмотрим поведение $g(\mathbf{x})$ на $S(\mathbf{x}_0, \delta)$:

$$g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| \geqslant \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| - \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| \geqslant 2r - r = r$$

- $g(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| < r$, так как $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$

Тогда понятно, что минимум достигается не на границе. Раз так, он достигается во внутренности. Отображение $l\colon \mathbf{x} \mapsto g^2(\mathbf{x})$ достигает минимума в той же точке, что и g, при этом $l'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$. Из невырожденности производного оператора следует, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, что и требовалось. ■

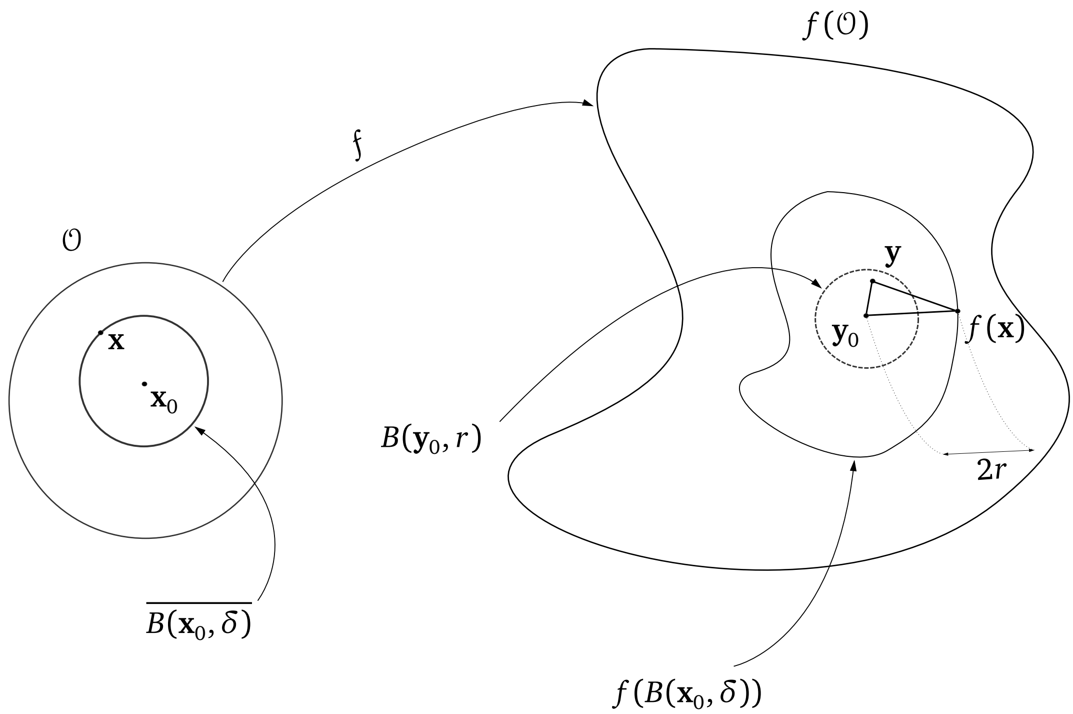

Рис. 1: Теорема о сохранении области

Следствие 0.1.3. Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{l \leqslant m}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}$ $\operatorname{rank} f'(\mathbf{x}) = l$, тогда f открыто.

Доказательство. Построим оторбражение $\tilde{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\tilde{f}_i = f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l$$
$$\tilde{f}_i = x_i,\ \text{иначе}$$

Производный оператор тогда будет выглядеть так:

$$\tilde{f}' = \begin{pmatrix} & & f' & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Где первая сверху единица стоит на $l+1$-м месте. Тогда отображение $\tilde{f}$ тоже дифференцируемо, и его производный оператор невырожден. Применяя предыдущую теорему, получаем, что $\tilde{f}(A)$ открыто, если множество A открыто. Тогда $f(A)$ тоже открыто. ■

Теорема 0.1.4. (О гладкости обратного отображения)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, $T \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}$ $\det T'(\mathbf{x}) \neq 0$,
T обратимо, тогда $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(\mathbf{y}_0) = (T'(\mathbf{x}_0))^{-1}$, при $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$.

Доказательство. Докажем теорему по индукции. В качестве базы рассмотрим случай $r = 1$. Обозначим $S = T^{-1}$, $S\colon T(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно, так как по теореме о сохранении области T открыто. Зафиксируем $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$ и проверим дифференцируемость S в точке $\mathbf{y}_0$.

- По теореме о почти локальной инъективности имеем
$$\exists c, \delta > 0\colon\ \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)\ \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

- Воспользуемся дифференцируемостью T:
$$T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$
  Здесь $A = T'(\mathbf{x}_0)$. Положим $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$:
$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = A(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) + \alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$
  Перепишем это равенство в виде, похожем на определение дифференцируемости S:
$$S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$
  Если мы поймем, что $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$ — бесконечно малое при $\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0$, то мы получим определение дифференцируемости S в точке $\mathbf{y}_0$. Проверим это:
$$\begin{aligned}\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) &\leqslant \left\|A^{-1}\right\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &\leqslant \left\|A^{-1}\right\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c}\,\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \\ &= \left\|A^{-1}\right\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c}\,\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|\end{aligned}$$
  S непрерывно, поэтому $\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \xrightarrow[\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0]{} 0$, тогда $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \xrightarrow[\mathbf{y}\to\mathbf{y}_0]{} 0$.

Теперь нужно доказать непрерывность S'. Из доказанного уже известно, что $S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1}$:
$$\mathbf{y} \mapsto S(\mathbf{y}) = T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \mapsto T'(\mathbf{x}) \mapsto (T'(\mathbf{x}))^{-1} = S'(\mathbf{y})$$
Эту схему можно переписать в привычном виде:
$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$
Таким образом получаем, что S' — композиция непрерывных отображений, то есть непрерывно (в частности, отображение $GL(\mathbb{R}^m) \ni A \mapsto A^{-1}$ непрерывно). Таким образом, база доказана.

Для доказательства индукционного перехода нужно показать только гладкость S. Пусть $T \in C^n$, $S \in C^n$, покажем, что тогда если вдруг $T \in C^{n+1}$, то и $S \in C^{n+1}$. Для этого достаточно, чтобы $S' \in C^n$:

$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$

$S \in C^n$ по предположению индукции, $T' \in C^n$ потому, что $T \in C^{n+1}$, обращение матрицы — вообще класса C^∞, то есть переход доказан. ∎

Лемма 0.1.5. (О приближении оботражения его линеаризацией)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, тогда $\forall \mathbf{h}$

$$\left\| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| \leqslant M \|\mathbf{h}\|$$

где

$$M = \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\|$$

Доказательство. Положим $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x})$, тогда $F'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)$. Применим теорему Лагранжа к F:

$$\begin{aligned} \left\| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| = \|F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0)\| &\leqslant \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| F'(\mathbf{z}) \right\| \cdot \|\mathbf{h}\| \\ &= \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\| \cdot \|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

∎

Теорема 0.1.6. (О локальной обратимости)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists U(\mathbf{x}_0)$ такая, что $f\big|_U$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Если мы докажем, что f обратимо в некоторой окрестности $U(\mathbf{x}_0)$, то по теореме о гладкости обратного отображения мы получим требуемое (невырожденность определителя в окрестности $\mathbf{x}_0$ следует из его непрерывности и того, что $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$). Для начала заметим. что из невырожденности оператора в точке $\mathbf{x}_0$ следует, что

$$\exists c > 0: \ \left\| f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| \geqslant c \|\mathbf{h}\|$$

Попробуем построить окрестность. Пусть она будет содержать точки такие, что одновременно выполнены условия:

- $\left\| f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\| \leqslant \dfrac{c}{4}$. Эти точки есть вблизи $\mathbf{x}_0$ по теореме о непрерывно дифференцируемых отображениях.
- $\det f'(\mathbf{x}) \neq 0$. Такие точки есть из непрерывности det.

Проверим, что в этой окрестности f не склеивает точки, что и будет означать его обратимость; пусть $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$, тогда:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{y} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}) + (f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0))\mathbf{h} + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$$

$$
\begin{aligned}
\|f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})\| &\geqslant \underbrace{\left\|f'(\mathbf{x}_0)\right\| \|\mathbf{h}\|}_{\geqslant c\|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\left\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x})\mathbf{h}\right\|}_{\leqslant M\|\mathbf{h}\| \leqslant \frac{c}{2}\|h\|} - \underbrace{\left\|f'(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x}_0)\right\| \cdot \|\mathbf{h}\|}_{\leqslant \frac{c}{4}\|\mathbf{h}\|} \\
&\geqslant \frac{c}{4}\|\mathbf{h}\|
\end{aligned}
$$

Где $M\|\mathbf{h}\| \leqslant \frac{c}{2}\|\mathbf{h}\|$ потому, что:

$$
M\|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\| \sup \left\|f'(\mathbf{z})-f'(\mathbf{x})\right\| \leqslant \sup \Big(\underbrace{\left\|f'(\mathbf{z})-f'(\mathbf{x}_0)\right\|}_{\leqslant \frac{c}{4}} + \underbrace{\|f(\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x})\|}_{\leqslant \frac{c}{4}} \Big) \leqslant \frac{c}{2}
$$

■

Теорема 0.1.7. (О неявном отображении)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \underset{f}{\mapsto} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $f \in C^r$,
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{O}$: $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $\det f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, тогда

- $\exists U(\mathbf{a})$, $\exists U(\mathbf{b})$, $\exists! \varphi : U(\mathbf{a}) \to U(\mathbf{b}) \in C^r$ такое, что $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a})$ $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$
- $\varphi'(\mathbf{x}) = -(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})))^{-1} \cdot f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$

Доказательство.

- Подготовим несколько объектов, полезных для доказательства. Положим

  $$
  \begin{gathered}
  T : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{m+n} \\
  (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))
  \end{gathered}
  $$

  Производный оператор этого отображения в блочном виде выглядит следующим образом:

  $$
  T' = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}
  $$

  Он обратим, так как $\det T' = 1 \cdot \det f'_y \neq 0$. Тогда по теореме о локальной обратимости $\exists U(\mathbf{a}, \mathbf{b})$: $T\big|_U$ — диффеоморфизм. Без ограничения общности будем считать, что $U = \tilde{P} \times Q$, где $\tilde{P} \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ открыты и $\mathbf{a} \in \tilde{P}$, $\mathbf{b} \in Q$. Будем обозначать $S = T^{-1}$ и $V = T(U)$ — открыто в $\mathbb{R}^{m+n}$ так как T — диффеоморфизм. Заметим, что T не меняет первую координату, то есть S тоже её не меняет, а значит, имеет вид $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, где $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^r$, так как $S \in C^r$.

- Пусть $P = (\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}_n) \cap V$ — открытое в $\mathbb{R}^m$ множество (само множество из $\mathbb{R}^{m+n}$, но нулевые координаты отбросим, см. рисунок). Предъявим требуемое отображение:

  $$
  \varphi(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})
  $$

- Проверим, что φ подходит: $f \in C^r$, так как $H \in C^r$. Проверим $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0$ и единственность:

  $$
  (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))) = T(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = T(S(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})
  $$

  С другой стороны, если $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, то:

  $$
  (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})
  $$

  То есть $\mathbf{y} = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, из чего следует, что φ единственно.

- Проверим второй пункт теоремы, вычислив производный оператор φ:

$$f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \varphi' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

  Откуда получаем:

$$f'_x + f'_y \cdot \varphi' = \mathbf{0} \Longrightarrow \varphi' = -(f'_y)^{-1} f'_x$$

■

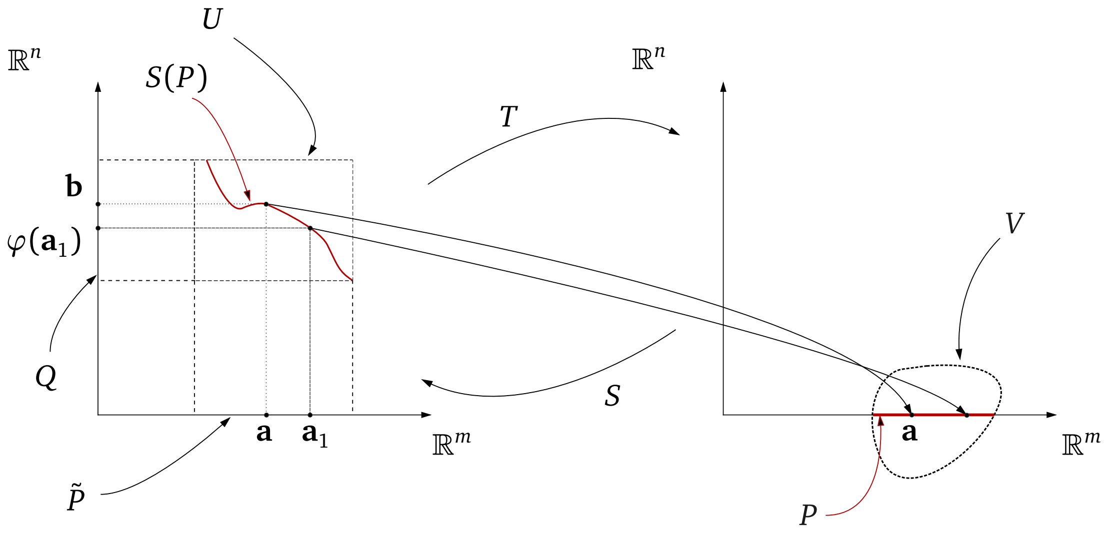

Рис. 2: Теорема о неявном отображении

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *k-мерным многообразием* в $\mathbb{R}^m$, если оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, $\forall \mathbf{x} \in M\ \exists U(\mathbf{x})\ \exists \varphi$ — гомеоморфизм: $U(\mathbf{x}) \underset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}^k$.

Определение. k-мерное многообразие $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *простым*, если оно гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, в предыдущем определении можно выбрать $U(\mathbf{x}) = M$.

Определение. Пара $\langle U(\mathbf{x}), \varphi \rangle$ из определения называется *картой*, или *параметризацией* многообразия в точке $\mathbf{x}$. Набор карт, который покрывает все M, называется *атласом*.

Определение. Простое k-мерное многообразие M называют *C^r-гладким*, если $\varphi \in C^r$ — параметризация M и $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \operatorname{rank} \varphi'(\mathbf{x}) = k$.

Теорема 0.1.8. (О задании гладкого многообразия системой уравнений)
Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant k < m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, тогда $\forall \mathbf{p} \in M$ эквивалентны утверждения:

- $\exists U(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap U$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие.

- $\exists \tilde{U}(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap \tilde{U}$ можно задать системой C^r-гладких уравнений, иначе говоря: $\exists f_1, \ldots, f_{m-k} \colon \tilde{U} \to \mathbb{R} \in C^r$ такие, что $\mathbf{x} \in M \cap \tilde{U} \iff \forall i \ f_i(\mathbf{x}) = 0$, причем $\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независимы.

Доказательство. TBD ■

Следствие 0.1.9. (О двух параметризациях)
Пусть M — k-мерное простое C^r-гладкое многообразие, $\mathbf{p} \in M$, причем $C^r \ni \varphi_1 \colon \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$, $C^r \ni \varphi_2 \colon \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$ — параметризации $U(\mathbf{p}) \cap M$. Тогда φ_1 и φ_2 отличаются на диффеоморфизм, а именно, $\exists \psi \colon \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ — диффеоморфизм, причем $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$.

Доказательство. TBD ■

Определение. Пусть M — C^r-гладкое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{p} \in M$, $\varphi \colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация окрестности $U(\mathbf{p})$, причем $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$. Тогда *касательным пространством* к M в точке $\mathbf{p}$ называется $T_p(M) = \operatorname{Im} \varphi'(\mathbf{a})$.

Теорема 0.1.10. (О корректности определения касательного пространства)
Касательное пространство не зависит от выбора параметризации.

Доказательство. TBD ■

Теорема 0.1.11. (О касательном пространстве к гладкому пути)
Пусть M — гладкое многообразие. Тогда $\mathbf{v} \in T_p(M) \iff \exists$ гладкий путь $\gamma \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^m \colon \ \gamma([-1, 1]) \subseteq M$ такой, что $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = v$.

Доказательство. TBD ■

Теорема 0.1.12. (О касательном пространстве к графику функции)
Касательное пространство к графику $C^r \ni f \colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ задается уравнением

$$y - f(\mathbf{x}_0) = f_1'(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \ldots + f_m'(\mathbf{x}_m)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)$$

Доказательство. TBD ■

Теорема 0.1.13. (О касательном пространстве к поверхности уровня)
Касательное пространство к поверхности уровня функции $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задается уравнением

$$f_x'(x_0)(x - x_0) + f_y'(y_0)(y - y_0) + f_z'(z_0)(z - z_0) = 0$$

Доказательство. TBD ■