Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — *пространство линейных отображений* из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются *операторами*

Определение. *Нормой* на множестве X называется отображение $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = 0$

ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$

iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Определение. *Нормированным пространством* называется пара $\langle X, \| \ \| \rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)
Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ — нормы на V. Тогда

$$\exists c, C > 0\colon\ c\,\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant C\,\|\mathbf{x}\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n\| \overset{def}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$.

i) $\| \ \|$ — норма.

- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2} \geqslant 0$ — очевидно
- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha c_i)^2} = \alpha \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$ — очевидно

· $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(c_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}c_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$ — неравенство Минковского

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\|\ \|$.

$$\|x_1e_1+\ldots+x_ne_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|x_ie_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|e_i\|_1 \leqslant_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|_1^2} = c\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

тогда

$$|\,\|\mathbf{x}\|_1 - \|\mathbf{y}\|_1\,| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 \leqslant c\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

Поэтому $\|\ \|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$
$$c_2 := \max_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$

Ни c_1, ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1 \|\mathbf{x}\| \geqslant c_1\,\|\mathbf{x}\|$$
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1 \|\mathbf{x}\| \leqslant c_2\,\|\mathbf{x}\|$$

что и доказывает утверждение теоремы.

■

Определение. *Нормой оператора* называется отображение $\|\ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{A}\| \overset{def}{=} \sup_{\mathbf{x}\in S^m}\|\mathcal{A}x\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup\limits_{\|x\|=1}\mathcal{A}\mathbf{x} = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\mathcal{A}\mathbf{x}$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)
$\|\ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{x}|\,\|\mathcal{A}e_i\| \leqslant_{\text{КБШ}} \|\mathbf{x}\|\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{A}e_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|\mathcal{A}\| = 0 \iff \forall\mathbf{x}\in S^n\ \mathcal{A}\mathbf{x} = 0 \iff \mathcal{A} = 0$. Неотрицательность очевидна.

ii) $\|\alpha\mathcal{A}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \|\alpha\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} |\alpha|\,\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \alpha\,\|\mathcal{A}\|$

iii) $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x} \leqslant \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\mathbf{x}$

■

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных опрераторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{A}\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| = \left\|\mathcal{A}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right)\right\| \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leqslant \|\mathcal{B}\|\,\|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x}) \\ &= \sup_{\mathbf{x}\in S^n}\left(\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|\cdot\mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right)\right) \\ &\leqslant \sup_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|\cdot\sup_{\mathbf{x}\in S^n}\mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right) \\ &\leqslant \|A\|\,\|B\|\end{aligned}$$

■

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на $\mathbb{R}^m$

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра. ■

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\Longleftrightarrow \exists c > 0\ \forall \mathbf{x}\ \ \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathbf{x}\|$, причем $\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}$

Доказательство. $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c\,\|\mathbf{x}\| \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ обратим.
$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c\,\|\mathbf{x}\| \Longleftrightarrow \|\mathbf{y}\| \geqslant c\left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \Longleftrightarrow \left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}\|\mathbf{y}\|$ ■

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)
$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A}-\mathcal{B}\| < \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

ii) $\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|}$

iii) $\left\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|} \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A}-\mathcal{B})\mathbf{x}\| \geqslant \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|\right)\|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \left\|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\|$$

Далее по лемме получаем обратимость $\mathcal{B}$ и оценку на его норму.

iii)

$$\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathcal{B}^{-1}$$

$$\left\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \|\mathcal{B}-\mathcal{A}\| \left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant_{\text{i)}} \frac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|} \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|$$

■

Следствие 1.1.8. Множество Ω_m открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\ \ \|\rangle$

1.2 Дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных

Определение. Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω — область в $\mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $r : \Omega \to \mathbb{R}^n$, такие что

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

Где $r(\mathbf{h})$ удовлетворяет уловию

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

или, что то же самое

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|$$

Где $\alpha(\mathbf{h})$ бесконечно малое, то есть

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \alpha(\mathbf{h}) = 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Замечание. Функции α, r из определения дифференцируемости зависят не только от $\mathbf{h}$, но и от $\mathbf{x}$.

Определение. Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом f в точке* $\mathbf{x}$ и обозначать $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \mathcal{A}$.

Замечание. Отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f$, действующее из $\mathbb{R}^m$ в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом f*.

Определение. Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения f в точке* $\mathbf{x}$.

Теорема 1.2.1. (Единственность производной)
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируема в $\mathbf{x}$, тогда существует единственный производный оператор f в точке $\mathbf{x}$.

Доказательство. Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(t\mathbf{z})\,\|t\mathbf{z}\|,\ t\mathbf{z} \to 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t),\ t \to 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t),\ t \to 0 \Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t}$$

■

Утверждение 1.2.2. (Производный оператор линейного отображения)
Пусть $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда $\mathcal{A}$ дифференцируемо в каждой точке и $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\mathcal{A} = \mathcal{A}$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

Утверждение 1.2.3. (Линейность производного оператора)
Пусть $f,\ g : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в $\mathbf{x}$. Тогда отображение $\alpha f + \beta g$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f + \beta \mathrm{d}_{\mathbf{x}} g$

Доказательство.

$$\begin{aligned}&(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x})\\ &= [(\alpha f)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\alpha f)(\mathbf{x})] + [(\beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\beta g)(\mathbf{x})]\\ &= [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f + o] + [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} g + o] = \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f + \mathrm{d}_{\mathbf{x}} g + o\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.4. (Дифференцируемость композиции)
Пусть $f : \Omega \to \Omega_1$, $g : \Omega_1 \to \mathbb{R}^k$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в $\mathbf{x}$, тогда $F = g \circ f$ дифференцируема в $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} F = \mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g \cdot \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f$

Доказательство.

$$\begin{aligned}g(f(\mathbf{x}+\mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{x}) + [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h}))\\ &= \{\mathbf{v} = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h})\}\\ &= g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x})) + [\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]\mathbf{v} + \widetilde{r}(\mathbf{v})\\ &= g(f(\mathbf{x})) + [\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g][\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} + [\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Осталось показать, что $[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{h}\|)$.

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v})\right\| \leqslant \left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]\frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}\,\|r(\mathbf{h})\|\right\| + \widetilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|)\,\|\mathbf{v}\|$$

Обозначим $\mathbf{w} = \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$, причем $\|\mathbf{w}\| = 1$. Из определения нормы оператора получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]\mathbf{w}\right\| \leqslant \left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g\right\|$$

Кроме того, $\|\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\|\,\mathbf{h} + \alpha(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$. Окончательно получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v})\right\| \leqslant \left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g\right\|\,\|r(\mathbf{h})\| + \widetilde{\alpha}(\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \cdot \|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{v}\| \leqslant \beta(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой $\beta(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. ■

Определение. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$, тогда отображения

$$f_i(x) \overset{def}{=} \langle f(x), \mathbf{u}_i \rangle$$

где $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, называются *координатными функциями*.

Теорема 1.2.5. (Дифференцируемость координатных функций)
Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$f \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x} \iff \forall i \; f_i \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x}$$

причем

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

- $\Longleftarrow$
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} g_i(f_i(\mathbf{x}))$$
где $g_i(t) = t\mathbf{u}_i$ — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда f дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

- $\Longrightarrow$ f_i дифференцируемы как композиции f и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$ — область, тогда *производной по направлению* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}$ называется

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \lim_{\substack{t \to 0 \\ \mathbf{x}+t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует.

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^m$, тогда *частной производной f по k -й переменной* называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} f'_k \overset{def}{=} D_k f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

Утверждение 1.2.6. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\exists D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u}$$

Доказательство. Для любых $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} &= \frac{[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f](t\mathbf{u}) + r(t\mathbf{u})}{t} \\ &= [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} + \frac{r(t\mathbf{u})}{t} \leqslant [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} + \frac{\alpha(\mathbf{u})\,\|t\mathbf{u}\|}{t} = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u})\,\|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.7. (Вид матрицы Якоби) Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_1 f_n(\mathbf{x}) & D_2 f_n(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{e}_i)$ — базис $\mathbb{R}^m$, $(\tilde{\mathbf{e}}_i)$ — базис $\mathbb{R}^n$, тогда

$$[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]_{i,j} = \langle [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = \left\langle \frac{[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f](t\mathbf{e}_i)}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle$$
$$= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i)-f_j(\mathbf{x})}{t} = D_i f_j(\mathbf{x})$$

■

Утверждение 1.2.8. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

Доказательство.
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{u} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

■

Утверждение 1.2.9. (Необходимое условие дифференцируемости)
Если f дифференцируемо в $\mathbf{x}$, то существуют все частные производные в точке $\mathbf{x}$, причем матрица Якоби f в точке $\mathbf{x}$ совпадает с матрицей, составленной из матриц якоби f_i в точке $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}(\mathbf{x}) \right)$$

Доказательство. Подставим в определение дифференцируемости $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$:

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) = f(\mathbf{x}) + [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f](t\mathbf{e}_k) + \alpha(\mathbf{h})\,||\mathbf{h}||$$
$$= f(\mathbf{x}) + t[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{e}_k + \alpha(\mathbf{h})\,||\mathbf{h}||$$

Отсюда по определению частной производной получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k)-f(\mathbf{x})}{t} = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{e}_k$$

■

Теорема 1.2.10. (Достаточное условие дифференцируемости)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $B(\mathbf{a}) \subseteq \Omega$, В $B(\mathbf{a})$ существуют все частные производные, причем они непрерывны в точке $\mathbf{a}$. Тогда f дифференцируемо в точке $\mathbf{a}$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $m = 2$. Схема, примененная в доказательстве тривиально обобщается на произвольные m.

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= (f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2)) + (f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)) \\
&\overset{\text{Лагранж}}{=} f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&+ \left[\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2) - f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\to 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} + \underbrace{(f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) - f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\to 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|
\end{aligned}
$$

■

Теорема 1.2.11. Пусть $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, f, g, λ дифференцируемы в $\mathbf{a}$. Тогда λf, $\langle f, g \rangle$ дифференцируемы в $\mathbf{a}$, причем

- $[\mathrm{d}_\mathbf{a}(\lambda f)]\mathbf{h} = [\mathrm{d}_\mathbf{a}\lambda]\mathbf{h} \cdot f(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_\mathbf{a} f]\mathbf{h}$
- $[\mathrm{d}_\mathbf{a}\langle f, g \rangle]\mathbf{h} = \langle [\mathrm{d}_\mathbf{a} f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a}) \rangle + \langle f(\mathbf{a}), [\mathrm{d}_\mathbf{a} g]\mathbf{h} \rangle$

Доказательство.

- Докажем покоординатно:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda f_i)(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \cdot f_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= (\lambda(\mathbf{a}) + \mathrm{d}_\mathbf{a}\lambda\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|) \cdot (f_i(\mathbf{a}) + \mathrm{d}_\mathbf{a} f_i \mathbf{h} + \beta(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= [\mathrm{d}_\mathbf{a}\lambda] \cdot f_i(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_\mathbf{a} f_i]\mathbf{h} + o(\mathbf{h})
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{d}_\mathbf{a}\langle f, g \rangle]\mathbf{h} &= \mathrm{d}_\mathbf{a}\left[\sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i \right]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}_\mathbf{a}[f_i \cdot g_i]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n ([\mathrm{d}_\mathbf{a} f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a}) + f_i(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_\mathbf{a} g_i]\mathbf{h}) \\
&= \sum_{i=1}^n ([\mathrm{d}_\mathbf{a} f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a})) + \sum_{i=1}^n (f_i(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_\mathbf{a} g_i]\mathbf{h}) = \langle [\mathrm{d}_\mathbf{a} f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a}) \rangle + \langle f(\mathbf{a}), [\mathrm{d}_\mathbf{a} g_i]\mathbf{h} \rangle
\end{aligned}
$$

■

Теорема 1.2.12. (Лагранж) Пусть $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, дифференцируемо на (a, b). Тогда

$$\exists c \in (a, b) : \quad \|f(b) - f(a)\| \leqslant \left\| f'(c) \right\| |b - a|$$

Доказательство. Положим $\varphi(x) = \langle f(b) - f(a), f(t) - f(a)\rangle$. Тогда

$$\varphi(a) = 0, \varphi(b) = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a)\rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$$

Применим теорему Лагранжа для φ:

$$\exists c \in (a,b):\ \|f(b) - f(a)\|^2 = \varphi(b) - \varphi(a) \underset{\text{Лагранж}}{=} \varphi'(c)|b-a| = \langle f(b) - f(a), f'(c)\rangle \cdot |b-a|$$
$$\underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \|f(b) - f(a)\| \cdot \left\|f'(c)\right\| \Longrightarrow \|f(b) - f(a)\| \leqslant \left\|f'(c)\right\| |b-a|$$

■

Определение. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Тогда *градиентом* φ в точке $\mathbf{x}$ наывается вектор

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Теорема 1.2.13. (Экстремальное свойство градиента)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируемо в $\mathbf{x}$, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq 0$ Тогда

$$\mathbf{l} = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$$

— направление наибольшего возрастания f, то есть

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{h}\| = 1 \Longrightarrow D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) \leqslant D_{\mathbf{l}} f(\mathbf{x})$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{h} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{h}\rangle \leqslant \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \, \|\mathbf{h}\| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|$$

■

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Поточечная и равномерная сходимости последовательностей функций

Замечание. *Здесь и далее запись вида $f \to \perp$ будет означать, что f сходится. Знак $\perp$ используется, если не важно (или не известно), к чему сходится f.*

Определение. $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *сходится поточечно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на E, если

$$\forall x_0 \in E \;\; f_n(x_0) \to f(x_0)$$

иными словами, раскрывая определение сходимости последовательности:

$$\forall x_0 \in E \;\; [\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\; \forall n > N \;\; |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \to f$.

Примеры. TBD

Определение. $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на E, если

$$\sup_{\mathrm{x} \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

или, раскрывая описание супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\; \forall n > N \; [\forall x \in E \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightrightarrows f$.

Замечание. Из равномерной сходимости очевидным образом следует поточечная:

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \to f$$

Про сходимость мы значем очень многое для случая метрических пространств. А нельзя ли переформулировать новые определения так, чтобы они оказались обычной сходимостью, просто в хитром метрическом пространстве?

Предложение. (Метрическое пространство ограниченных функций)
Положим
$$\mathcal{F} \overset{def}{=} \{X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ограничено}\}$$

На этом множестве тривиально задается структура линейного пространства:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Оказывается, можно ввести **метрику** на $\mathcal{F}$, сходимость по которой есть равномерная сходимость. Для $f, g \in \mathcal{F}$ положим

$$\rho(f,g) \overset{def}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Проверим, что это — метрика на $\mathcal{F}$

i) Неотрицательность очевидна. Равенство нулю может выполнится только для равных функций.

ii) Симметричность очевидна.

iii) Проверим неравенство треугольника. Применим техническое описание супремума для $\rho(f_1, f_2)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x\colon\ \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)|$$

Далее

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists x\colon\ \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)| &\leqslant |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \\ &\leqslant \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_3(y)| + \sup_{y \in X} |f_2(y) - f_3(y)| \\ &= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)\end{aligned}$$

Получаем
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \rho(f_1, f_2) - \varepsilon \leqslant \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Откуда непосредственно следует

$$\rho(f_1, f_2) \leqslant \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Осталось только понять, что теперь означает сходимость по этой метрике. Пусть (f_n) — последовательность в $\mathcal{F}$, сходящаяся к f по метрике ρ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \ \rho(f_n, f) < \varepsilon$$

Раскроем значение ρ:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \ [\forall x \in X\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

А это — обычное определение равномерной сходимости!

Подобную конструкцию, по всей видимости, не получится ввести для поточечной сходимости. Зато, можно построить хаусдорфово топологическое пространство, в котором сходимость будет означать поточечную сходимость.

Предложение. (Топологическое пространство ограниченных функций)
Введем на $\mathcal{F}$ топологию, порожденную следующими множествами:

$$U_\varepsilon(f)_{x_1,\dots,x_n} \overset{def}{=} \{g : X \to \mathbb{R} \mid \forall i \ \ |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}$$

Поймем теперь, что означает сходимость в этом топологическом пространстве:

$$f_n \to f \iff \forall U_\varepsilon(f)_{x_1,\dots,x_n} \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ \ f_n \in U_\varepsilon(f)_{x_1,\dots,x_n}$$

Что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ \ \forall i \ \ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Что как раз и есть поточечная сходимость! Просто запись вида

$$[\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0] \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

В этом пространстве обретает вид

$$[\forall U_\varepsilon(f)_{x_0}] \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1. (Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости)

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Обычное свойство всех последовательностей, сходящихся по метрике (если все f_n и f лежат в $\mathcal{F}$). Общее доказательство такое:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longleftarrow$ Зафиксируем x. Тогда $f_n(x)$ — обычная фундаментальная вещественная последовательность. Тогда, так как $\mathbb{R}$ — полное, получаем

$$\forall x \ \exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Посмотрим на фундаментальность f_n:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n, m > N \ \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

и перейдем к пределу $m \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N \ \ [\forall x \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Что и есть определение равномерной сходимости.

■

Примеры. TBD