

Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

1	Многомерный анализ	2
1.1	Сведения из линейной алгебры	2
1.2	Дифференцируемость и дифференциал отображений	6
1.3	Теоремы Лагранжа для отображений	12
1.4	Формула Тейлора	13
2	Функциональные последовательности и ряды	17
2.1	Поточечная и равномерная сходимости последовательностей функций	17
2.2	Теоремы о равномерно сходящихся функциональных последовательностях	20

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются операторами

Определение. Нормой на множестве X называется отображение $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Определение. Нормированным пространством называется пара $\langle X, \| \cdot \| \rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(x, y) = \|x - y\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)

Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ — нормы на V . Тогда

$$\exists c, C > 0: c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$.

i) $\| \cdot \|$ — норма.

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \geq 0$ — очевидно

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha c_i)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ — очевидно

$$\cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ — неравенство Минковского}$$

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\| \cdot \|$.

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_1 \leq_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|_1^2} = c \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

тогда

$$| \|x\|_1 - \|y\|_1 | \leq \|x - y\|_1 \leq c \|x - y\|$$

Поэтому $\| \cdot \|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{x \in S^n} \|x\|_1$$

$$c_2 := \max_{x \in S^n} \|x\|_1$$

Ни c_1 , ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \geq c_1 \|x\| \\ \|x\|_1 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \leq c_2 \|x\| \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы. ■

Определение. Нормой оператора называется отображение $\| \cdot \| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in S^m} \|Ax\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup_{\|x\|=1} Ax = \sup_{\|x\| \leq 1} Ax$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)
 $\| \cdot \| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|Ae_i\| \leq_{\text{КБШ}} \|x\| \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|A\| = 0 \iff \forall x \in S^n \ Ax = 0 \iff A = 0$. Неотрицательность очевидна.

$$\text{ii) } \|\alpha \mathcal{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\alpha \mathcal{A} \mathbf{x}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} |\alpha| \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| = \alpha \|\mathcal{A}\|$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{x}\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| + \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B} \mathbf{x}\|$$

■

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \implies \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x} - \mathcal{A} \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \left\| \mathcal{A} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \right\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{B}\| \|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B}(\mathcal{A} \mathbf{x})\| \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left(\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \|\mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right)\| \right) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left\| \mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right) \right\| \\ &\leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на \mathbb{R}^m

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\text{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра.

■

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\iff \exists c > 0 \forall \mathbf{x} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\|$, причем $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство. $\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \text{Ker}(\mathcal{A}) = 0 \iff \mathcal{A}$ обратим.

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \|\mathbf{y}\| \geq c \|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{y}\| \iff \|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{y}\| \leq \frac{1}{c} \|\mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)

$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

$$\text{ii) } \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|}$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geq \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| \geq \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \right) \|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\|$$

Далее по лемме получаем обратимость \mathcal{B} и оценку на его норму.

iii)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} &= \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathcal{B}^{-1} \\ \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| &\leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq_{\text{i)} } \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■

Следствие 1.1.8. Множество Ω_m открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\| \rangle$

1.2 Дифференцируемость и дифференциал отображений

Определение. Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение. Отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω — область в \mathbb{R}^m называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $r: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, такие что

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

Где $r(\mathbf{h})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

или, что то же самое

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|$$

Где $\alpha(\mathbf{h})$ бесконечно малое, то есть

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \alpha(\mathbf{h}) = 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Замечание. Функции α , r из определения дифференцируемости зависят не только от \mathbf{h} , но и от \mathbf{x} .

Определение. Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом f в точке \mathbf{x}* и обозначать $d_{\mathbf{x}}f = \mathcal{A}$.

Замечание. Отображение $\mathbf{x} \mapsto d_{\mathbf{x}}f$, действующее из \mathbb{R}^m в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом f* .

Определение. Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения f в точке \mathbf{x}* .

Теорема 1.2.1. (Единственность производной)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируема в \mathbf{x} , тогда существует единственный производный оператор f в точке \mathbf{x} .

Доказательство. Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(t\mathbf{z}) \|t\mathbf{z}\|, \quad t\mathbf{z} \rightarrow 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t), \quad t \rightarrow 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{z} &= \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t), \quad t \rightarrow 0 \iff \\ \mathcal{A}\mathbf{z} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t}\end{aligned}$$

■

Утверждение 1.2.2. (Производный оператор линейного отображения)

Пусть $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда \mathcal{A} дифференцируемо в каждой точке и $d_{\mathbf{x}}\mathcal{A} = \mathcal{A}$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

Утверждение 1.2.3. (Линейность производного оператора)

Пусть $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в \mathbf{x} . Тогда отображение $\alpha f + \beta g$ дифференцируемо в точке \mathbf{x} , причем $d_{\mathbf{x}}(\alpha f + \beta g) = \alpha d_{\mathbf{x}}f + \beta d_{\mathbf{x}}g$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) &= [(\alpha f)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f)(\mathbf{x})] + [(\beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\beta g)(\mathbf{x})] \\ &= [d_{\mathbf{x}}f + o] + [d_{\mathbf{x}}g + o] = d_{\mathbf{x}}f + d_{\mathbf{x}}g + o\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.4. (Дифференцируемость композиции)

Пусть $f: \Omega \rightarrow \Omega_1$, $g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в \mathbf{x} , тогда $F = g \circ f$ дифференцируема в \mathbf{x} , причем $d_{\mathbf{x}}F = d_{f(\mathbf{x})}g \cdot d_{\mathbf{x}}f$

Доказательство.

$$\begin{aligned}g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{x}) + [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h})) \\ &= \{ \mathbf{v} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h}) \} \\ &= g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{v} + \tilde{r}(\mathbf{v}) \\ &= g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g][d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + [d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Осталось показать, что $[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{h}\|)$.

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \left\| [d_{f(\mathbf{x})}g] \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|} \|r(\mathbf{h})\| \right\| + \tilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|) \|\mathbf{v}\|$$

Обозначим $\mathbf{w} = \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$, причем $\|\mathbf{w}\| = 1$. Из определения нормы оператора получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{w}\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\|$$

Кроме того, $\|\mathbf{v}\| \leq \|d_{\mathbf{x}}f\| \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$. Окончательно получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\| \|r(\mathbf{h})\| + \tilde{\alpha}(\|d_{\mathbf{x}}f\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \cdot \|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{v}\| \leq \beta(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой $\beta(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

■

Определение. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис \mathbb{R}^n , тогда отображения

$$f_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(\mathbf{x}), \mathbf{u}_i \rangle$$

где $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, называются *координатными функциями*.

Теорема 1.2.5. (Дифференцируемость координатных функций)

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$f \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x} \iff \forall i \ f_i \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x}$$

причем

$$d_{\mathbf{x}}f = \begin{pmatrix} d_{\mathbf{x}}f_1 \\ \vdots \\ d_{\mathbf{x}}f_n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

\Leftarrow

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(\mathbf{x}))$$

где $g_i(t) = t\mathbf{u}_i$ — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда f дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

\Rightarrow f_i дифференцируемы как композиции f и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

Определение. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$ — область, тогда *производной по направлению* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ в точке \mathbf{x} называется

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует.

Определение. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис \mathbb{R}^n , тогда *частной производной* f по k -й переменной называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f'_k \stackrel{\text{def}}{=} D_k f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

Утверждение 1.2.6. Пусть $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\exists D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u}$$

Доказательство. Для любых $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} &= \frac{[d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{u}) + r(t\mathbf{u})}{t} \\ &= [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} + \frac{r(t\mathbf{u})}{t} \leq [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} + \frac{\alpha(\mathbf{u})\|t\mathbf{u}\|}{t} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u})\|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.7. (Вид матрицы Якоби) Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$d_{\mathbf{x}}f = \begin{pmatrix} D_1f_1(\mathbf{x}) & D_2f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_mf_1(\mathbf{x}) \\ D_1f_2(\mathbf{x}) & D_2f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_mf_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_1f_n(\mathbf{x}) & D_2f_n(\mathbf{x}) & \cdots & D_mf_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть (\mathbf{e}_i) — базис \mathbb{R}^m , $(\tilde{\mathbf{e}}_j)$ — базис \mathbb{R}^n , тогда

$$\begin{aligned} [d_{\mathbf{x}}f]_{i,j} &= \langle [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = \left\langle \frac{[d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{e}_i)}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \left\langle \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_j(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_i) - f_j(\mathbf{x})}{t} = D_i f_j(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

■

Утверждение 1.2.8. Пусть $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{u} = [\text{grad } f(\mathbf{x})]\mathbf{u} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

■

Утверждение 1.2.9. (Необходимое условие дифференцируемости)

Если f дифференцируемо в \mathbf{x} , то существуют все частные производные в точке \mathbf{x} , причем матрица Якоби f в точке \mathbf{x} совпадает с матрицей, составленной из матриц Якоби f_i в точке \mathbf{x} :

$$d_{\mathbf{x}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}(\mathbf{x}) \right)$$

Доказательство. Подставим в определение дифференцируемости $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) &= f(\mathbf{x}) + [d_{\mathbf{x}}f](t\mathbf{e}_k) + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\| \\ &= f(\mathbf{x}) + t[d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_k + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

Отсюда по определению частной производной получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{e}_k$$

■

Теорема 1.2.10. (Достаточное условие дифференцируемости)

Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $B(\mathbf{a}) \subseteq \Omega$, в $B(\mathbf{a})$ существуют все частные производные, причем они непрерывны в точке \mathbf{a} . Тогда f дифференцируемо в точке \mathbf{a} .

Доказательство. Докажем теорему для случая $m = 2$. Схема, примененная в доказательстве тривиально обобщается на произвольные m .

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) &= (f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2)) + (f(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)) \\
&\stackrel{\text{Лагранж}}{=} f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&\quad + \left[\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1, \mathbf{x}_2) - f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\rightarrow 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} + \underbrace{(f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1, \tilde{\mathbf{x}}_2) - f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2))}_{\rightarrow 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|
\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.11. Пусть $f, g: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, f, g, λ дифференцируемы в \mathbf{a} . Тогда λf , $\langle f, g \rangle$ дифференцируемы в \mathbf{a} , причем

- $[d_{\mathbf{a}}(\lambda f)]\mathbf{h} = [d_{\mathbf{a}}\lambda]\mathbf{h} \cdot f(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}$
- $[d_{\mathbf{a}}\langle f, g \rangle]\mathbf{h} = \langle [d_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a}) \rangle + \langle f(\mathbf{a}), [d_{\mathbf{a}}g]\mathbf{h} \rangle$

Доказательство.

- Докажем покомпонентно:

$$\begin{aligned}
&(\lambda f_i)(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \cdot f_i(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= (\lambda(\mathbf{a}) + d_{\mathbf{a}}\lambda\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) \cdot (f_i(\mathbf{a}) + d_{\mathbf{a}}f_i\mathbf{h} + \beta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= [d_{\mathbf{a}}\lambda] \cdot f_i(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h} + o(\mathbf{h})
\end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
[d_{\mathbf{a}}\langle f, g \rangle]\mathbf{h} &= d_{\mathbf{a}} \left[\sum_{i=1}^n f_i \cdot g_i \right] \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n d_{\mathbf{a}}[f_i \cdot g_i]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n ([d_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a}) + f_i(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}g_i]\mathbf{h}) \\
&= \sum_{i=1}^n ([d_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a})) + \sum_{i=1}^n (f_i(\mathbf{a}) \cdot [d_{\mathbf{a}}g_i]\mathbf{h}) = \langle [d_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a}) \rangle + \langle f(\mathbf{a}), [d_{\mathbf{a}}g]\mathbf{h} \rangle
\end{aligned}$$

■

Определение. Пусть $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Тогда *градиентом* φ в точке \mathbf{x} называется вектор

$$\text{grad } f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Теорема 1.2.12. (Экстремальное свойство градиента)

Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируемо в \mathbf{x} , $\text{grad } f(\mathbf{x}) \neq 0$ Тогда

$$\mathbf{l} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{x})}{\|\text{grad } f(\mathbf{x})\|}$$

— направление наибольшего возрастания f , то есть

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{h}\| = 1 \implies D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) \leq D_{\mathbf{l}}f(\mathbf{x})$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{h}}f(\mathbf{x}) = [\mathbf{d}_{\mathbf{x}}f] \mathbf{h} = [\text{grad } f(\mathbf{x})] \mathbf{h} = \langle \text{grad } f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \leq \|\text{grad } f(\mathbf{x})\| \|\mathbf{h}\| = \|\text{grad } f(\mathbf{x})\|$$

■

1.3 Теоремы Лагранжа для отображений

Теорема 1.3.1. (Лагранжа для векторнозначных функций)

Пусть $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, дифференцируемо на (a, b) . Тогда

$$\exists c \in (a, b): \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| |b - a|$$

Доказательство. При $f(a) = f(b)$ утверждение тривиально. Положим $\varphi(x) = \langle f(b) - f(a), f(x) - f(a) \rangle$. Тогда

$$\varphi(a) = 0, \varphi(b) = \langle f(b) - f(a), f(b) - f(a) \rangle = \|f(b) - f(a)\|^2$$

Применим теорему Лагранжа для φ :

$$\begin{aligned} \exists c \in (a, b): \|f(b) - f(a)\|^2 = \varphi(b) - \varphi(a) &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} \varphi'(c) |b - a| = \langle f(b) - f(a), f'(c) \rangle \cdot |b - a| \\ &\stackrel{\text{КБШ}}{\leq} \|f(b) - f(a)\| \cdot \|f'(c)\| |b - a| \implies \|f(b) - f(a)\| \leq \|f'(c)\| |b - a| \end{aligned}$$

■

Теорема 1.3.2. (Лагранжа для отображений)

Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, дифференцируемо на Ω , $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subseteq \Omega$, тогда

$$\|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \|d_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

Доказательство. $g = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$ для $t \in [0, 1]$ — дифференцируемо как композиция дифференцируемых функций. По предыдущей теореме

$$\begin{aligned} \exists t_0 \in (0, 1): \|g(1) - g(0)\| &\leq \|g'(t_0)\| = \|f'(\mathbf{a} + t_0(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})\| \\ &\leq \|f'(\mathbf{a} + t_0(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\| \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]} \|d_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \end{aligned}$$

■

1.4 Формула Тейлора

Определение. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω — область, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Определим частные производные высшего порядка по индукции:

$$D_{i_1, \dots, i_k} f \stackrel{\text{def}}{=} D_{i_k} (D_{i_1, \dots, i_{k-1}} f)$$

Теорема 1.4.1. (О независимости ч.п. от порядка дифференцирования)

Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, Ω — область, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\exists B((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega$, причем в $B((x_0, y_0), r)$ существуют $D_{12}f$ и $D_{21}f$, непрерывные в точке (x_0, y_0) . Тогда $D_{12}f(x_0, y_0) = D_{21}f(x_0, y_0)$

Доказательство.

$$\alpha(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда $\alpha(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} \alpha'(\tilde{h})h = [f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0)]h \\ &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} f''_{xy}(x_0 + \tilde{h}, y_0 + \tilde{k})hk \end{aligned}$$

Аналогично введем $\beta(k)$:

$$\beta(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta(k) = \beta(k) - \beta(0) &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} \beta'(\bar{k})k = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \bar{k}) - f'_y(x_0, y_0 + \bar{k})]k \\ &\stackrel{\text{Лагранж}}{=} f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk \end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha(h) = \beta(k)$. Осталось перейти к пределу при $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ и воспользоваться непрерывностью частных производных в точке (x_0, y_0) . ■

Следствие 1.4.2. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $x \in \Omega$, $\exists B(x, r) \subseteq \Omega$, причем в $B(x, r)$ для любой перестановки индексов $\pi \in S_k$ существуют и непрерывны в x частные производные $D_{i_{\pi_1}, \dots, i_{\pi_k}} f$. Тогда все они совпадают в точке x .

Доказательство. Доказательство сводится к координатным функциям, поэтому считаем, что $n = 1$. Предыдущая теорема дает возможность менять местами пары индексов. Осталось заметить, что группа перестановок порождается транспозициями. ■

Определение. Множество функций $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, у которых все частные производные порядка не более r существуют и непрерывны на Ω , будем обозначать $C^r(\Omega)$

Определение. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$, тогда набор $k = (k_1, k_2, \dots, k_m)$ будем называть *мультииндексом*. Используются обозначения $|k| = k_1 + \dots + k_m$,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} f$$

Лемма 1.4.3. (Полиномиальная формула)

$$(a_1 + \dots + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^m \sum_{n_2=1}^m \dots \sum_{n_r=1}^m a_{n_1} a_{n_2} \dots a_{n_r} = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$$

Доказательство. Первое равенство очевидно по правилам раскрытия скобок. Докажем второе равенство индукцией по r .

- Для $r = 1$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_m)^{r+1} &= (a_1 + \dots + a_m) \cdot (a_1 + \dots + a_m)^r \\ &= (a_1 + \dots + a_m) \cdot \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1+1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m+1} \\ &= [\text{переобозначим } k_i = k_i + 1 \text{ в } i\text{-й сумме}] \\ &= \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_1 \geq 1}} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_m \geq 1}} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= [\text{добавим все пропущенные слагаемые с } k_i = 0] \\ &= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot (k_1 + k_2 + \dots + k_m)}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \\ &= \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k_1! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} \end{aligned}$$

■

Лемма 1.4.4. (О дифференцировании сдвига)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, Ω — область, $f \in C^r(\Omega)$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \in [-1, 1]$ $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in \Omega$, тогда для отображения $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ и для $k \leq r$ выполнено

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} \mathbf{h}^j \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(\mathbf{a})$$

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно показать, что

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^k \cdot f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

Докажем по индукции:

- Для $k = 0$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned} \varphi^{(k)}(t) &= (\varphi^{(k-1)}(t))' = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \right)' \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{h}_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} \mathbf{h}_m \right)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \end{aligned}$$

■

Теорема 1.4.5. (Формула Тейлора в форме Лагранжа)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0, 1): f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leq r} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ для $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Выпишем формулу Тейлора в форме Лагранжа для φ :

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^r \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}$$

Пользуясь леммой о дифференцировании сдвига, получаем искомое равенство. ■

Теорема 1.4.6. (Формула Тейлора в форме Пеано)

$f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0, 1): f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leq r} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Проверим это:

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r} = \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1} \dots (\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r}$$

$$= \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \cdots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

Все дроби вида

$$\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i)^{k_i}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_i}}$$

меньше единицы, выражения вида

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$$

постоянны. Поэтому

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \cdots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \rightarrow 0$$

При $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \rightarrow 0$. ■

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Поточечная и равномерная сходимости последовательностей функций

Замечание. Здесь и далее запись вида $f \rightarrow \perp$ будет означать, что f сходится. Знак \perp используется, если не важно (или не известно), к чему сходится f .

Определение. $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ сходится поточечно к $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ на E , если

$$\forall x_0 \in E \quad f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$$

иными словами, раскрывая определение сходимости последовательности:

$$\forall x_0 \in E \quad [\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightarrow f$.

Примеры. TBD

Определение. $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ сходится равномерно к $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ на E , если

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

или, раскрывая описание супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad [\forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightrightarrows f$.

Замечание. Из равномерной сходимости очевидным образом следует поточечная:

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \rightarrow f$$

Про сходимость мы знаем очень многое для случая метрических пространств. А нельзя ли переформулировать новые определения так, чтобы они оказались обычной сходимостью, просто в хитром метрическом пространстве?

Предложение. (Метрическое пространство ограниченных функций)

Положим

$$\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \{X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ограничено} \}$$

На этом множестве тривиально задается структура линейного пространства:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x)\end{aligned}$$

Оказывается, можно ввести **метрику** на \mathcal{F} , сходимость по которой есть равномерная сходимость. Для $f, g \in \mathcal{F}$ положим

$$\rho(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Проверим, что это — метрика на \mathcal{F}

- i) Неотрицательность очевидна. Равенство нулю может выполняться только для равных функций.
- ii) Симметричность очевидна.
- iii) Проверим неравенство треугольника. Применим техническое описание супремума для $\rho(f_1, f_2)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x: \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leq |f_1(x) - f_2(x)|$$

Далее

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \exists x: \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon &\leq |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \\ &\leq \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_3(y)| + \sup_{y \in X} |f_2(y) - f_3(y)| \\ &= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)\end{aligned}$$

Получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \rho(f_1, f_2) - \varepsilon \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Откуда непосредственно следует

$$\rho(f_1, f_2) \leq \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Осталось только понять, что теперь означает сходимость по этой метрике. Пусть (f_n) — последовательность в \mathcal{F} , сходящаяся к f по метрике ρ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad \rho(f_n, f) < \varepsilon$$

Раскроем значение ρ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad [\forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

А это — обычное определение равномерной сходимости!

Подобную конструкцию, по всей видимости, не получится ввести для поточечной сходимости. Зато, можно построить хаусдорфово топологическое пространство, в котором сходимость будет означать поточечную сходимость.

Предложение. (Топологическое пространство ограниченных функций)

Введем на \mathcal{F} топологию, порожденную следующими множествами:

$$U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n} \stackrel{\text{def}}{=} \{g: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall i \ |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}$$

Поймем теперь, что означает сходимость в этом топологическом пространстве:

$$f_n \rightarrow f \iff \forall U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n} \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ f_n \in U_\varepsilon(f)_{x_1, \dots, x_n}$$

Что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ \forall i \ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Что как раз и есть поточечная сходимость! Просто запись вида

$$[\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0] \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

В этом пространстве обретает вид

$$[\forall U_\varepsilon(f)_{x_0}] \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1. (Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости)

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

Доказательство.

\implies Обычное свойство всех последовательностей, сходящихся по метрике (если все f_n и f лежат в \mathcal{F}). Общее доказательство такое:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

\Leftarrow Зафиксируем x . Тогда $f_n(x)$ — обычная фундаментальная вещественная последовательность. Тогда, так как \mathbb{R} — полное, получаем

$$\forall x \ \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Посмотрим на фундаментальность f_n :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

и перейдем к пределу $m \rightarrow +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall n > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Что и есть определение равномерной сходимости. ■

Примеры. TBD

2.2 Теоремы о равномерно сходящихся функциональных последовательностях

Теорема 2.2.1. (Стокс-Зейдель)

Пусть $f_n, f: X \rightarrow \mathbb{R}$, X — топологическое пространство, f_n непрерывны в $c \in E$, и $f_n \rightrightarrows f$ на X . Тогда f непрерывна в c . Иначе говоря, коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) & \xrightarrow{\quad} & f(x) \\ \downarrow x \rightarrow c & & \downarrow x \rightarrow c \\ f_n(c) & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f(c) \end{array}$$

Доказательство. Для любых n выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Воспользуемся равномерной сходимостью: выберем n таким, чтобы

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Теперь воспользуемся непрерывностью f_n : выберем такую окрестность $U(c)$, чтобы $\forall x, y \in U(c)$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Тогда

$$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$$

что и означает непрерывность f в точке c . ■

Определение. Будем говорить, что f_n сходится локально равномерно к f на X , если

$$\forall x \in X \exists U(x): f_n \rightrightarrows f \text{ на } U(x)$$

Замечание. Для выполнения условия теоремы Стокса-Зейделя достаточно равномерной сходимости на некоторой окрестности c .

Замечание. Для того, чтобы f было непрерывным на X , достаточно, чтобы f_n локально равномерно на X сходилась к f .

Теорема 2.2.2. (О предельном переходе под знаком интеграла)

Пусть $f_n \in C([a, b])$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f$$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{\quad} & f \\ \downarrow \int & & \downarrow \int \\ \int_a^b f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & \int_a^b f \end{array}$$

Доказательство. f непрерывна на $[a, b]$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Тогда

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f_n - f| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a|$$

Из равномерной сходимости имеем:

$$\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

тогда

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

■

Теорема 2.2.3. (Правило Лейбница)

$f : [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists f'_y, f'_y, f$ непрерывны. Пусть

$$\phi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx$$

Тогда ϕ дифференцируемо на $[y_1, y_2]$ и

$$\phi'(y) = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x, y) dx$$

Доказательство.

$$\frac{\phi(y + \frac{1}{n}) - \phi(y)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \int_{x_1}^{x_2} \left(f\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f(x, y) \right) dx \stackrel{\text{Лагранж}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f'_y\left(x, y + \frac{\theta}{n}\right) dx$$

Обозначим

$$g_n(x, y) = \int_{x_1}^{x_2} f'_y\left(x, y + \frac{\theta}{n}\right) dx$$

f'_y непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывна на нём. Воспользуемся этим:

$$\forall \varepsilon \exists \delta \forall n: \frac{1}{n} < \delta \quad \forall x \quad \left| f'_y\left(x, y + \frac{1}{n}\right) - f'_y(x, y) \right| < \varepsilon$$

Отсюда получаем по определению

$$g_n(x, y) \rightrightarrows f'_y(x, y) \text{ на } [x_1, x_2]$$

Воспользуемся теоремой о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_1}^{x_2} g_n(x, y) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x, y) dx$$

Понятно, что вместо последовательности $\frac{1}{n}$ можно рассматривать любую последовательность h_n , сходящуюся к 0. То есть

$$\phi'(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\phi(y + h_n) - \phi(y)}{h_n} = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x, y) dx$$

■

Теорема 2.2.4. (О предельном переходе под знаком производной)
 $f_n \in C^1([a, b])$, $f_n \rightarrow f$ поточечно на $\langle a, b \rangle$, $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a, b \rangle$. Тогда

- $f \in C^1([a, b])$
- $f' = \varphi$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{array}{ccc} f_n & \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} & f \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ f'_n & \xrightarrow{\quad} & \varphi \end{array}$$

Доказательство. Пусть $x_0, x_1 \in \langle a, b \rangle$, тогда $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0, x_1]$. Тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Откуда

$$f(x_1) - f(x_0) \xleftarrow{n \rightarrow +\infty} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

То есть

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi = f(x_1) - f(x_0)$$

Тогда f — первообразная φ . φ непрерывна по теореме Стокса-Зейделя. Тогда получаем, что $f \in C^1([a, b])$ и $f' = \varphi$. ■