Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — *пространство линейных отображений* из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются *операторами*

Определение. *Нормой* на множестве X называется отображение $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = 0$

ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$

iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Определение. *Нормированным пространством* называется пара $\langle X, \| \ \| \rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)
Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ — нормы на V. Тогда

$$\exists c, C > 0 \colon \ c\,\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant C\,\|\mathbf{x}\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n\| \overset{def}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$.

i) $\| \ \|$ — норма.

- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2} \geqslant 0$ — очевидно
- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha c_i)^2} = \alpha\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$ — очевидно

- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$ — неравенство Минковского

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\|\ \ \|$.

$$\|x_1e_1+\ldots+x_ne_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|x_ie_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|e_i\|_1 \leqslant_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|_1^2} = c\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

тогда

$$|\,\|\mathbf{x}\|_1 - \|\mathbf{y}\|_1\,| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 \leqslant c\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

Поэтому $\|\ \ \|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$
$$c_2 := \max_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$

Ни c_1, ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1\|\mathbf{x}\| \geqslant c_1\,\|\mathbf{x}\|$$
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1\|\mathbf{x}\| \leqslant c_2\,\|\mathbf{x}\|$$

- Покажем теперь, что из этого следует утверждение теоремы. Пусть

$$c_1^1\,\|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant c_2^1\,\|x\|$$
$$c_1^2\,\|x\| \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2^2\,\|x\|$$

Тогда

$$\frac{c_1^2}{c_2^1}\,\|x\|_1 \leqslant c_1^2\,\|x\| \leqslant \|x\|_2 \leqslant c_2^2\,\|x\| \leqslant \frac{c_2^2}{c_1^1}\,\|x\|_1$$

∎

Определение. *Нормой оператора* называется отображение $\|\ \ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{A}\| \stackrel{def}{=} \sup_{\mathbf{x}\in S^m}\|\mathcal{A}x\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup\limits_{\|x\|=1}\mathcal{A}\mathbf{x} = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\mathcal{A}\mathbf{x}$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)
$\|\ \ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{x}|\, \|\mathcal{A}e_i\| \leqslant_{\text{КБШ}} \|\mathbf{x}\| \sum_{i=1}^{n} \|\mathcal{A}e_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|\mathcal{A}\| = 0 \iff \forall \mathbf{x} \in S^n\ \mathcal{A}\mathbf{x} = 0 \iff \mathcal{A} = 0$. Неотрицательность очевидна.

ii) $\|\alpha\mathcal{A}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \|\alpha\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} |\alpha|\, \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \alpha\, \|\mathcal{A}\|$

iii) $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x} \leqslant \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\mathbf{x}$

■

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных опрераторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x}-\mathcal{A}\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| = \left\|\mathcal{A}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right)\right\| \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leqslant \|\mathcal{B}\|\, \|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x}) \\
&= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \left(\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right)\right) \\
&\leqslant \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right) \\
&\leqslant \|A\|\, \|B\|
\end{aligned}$$

■

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на $\mathbb{R}^m$

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра. ■

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^m)$ обратим $\iff \exists c > 0\ \forall \mathbf{x}\ \ \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c\,\|\mathbf{x}\|$, причем $\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}$

Доказательство.

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \leqslant \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{y}\| \Longrightarrow \|\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} \|\mathbf{x}\|$$

■

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)
$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| < \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

ii) $\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|}$

iii) $\left\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| \geqslant \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|\right) \|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \left\|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\|$$

Далее по лемме получаем обратимость $\mathcal{B}$ и оценку на его норму.

iii)

$$\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathcal{B}^{-1}$$

$$\left\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| \left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant_{\text{i)}} \frac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$$

■

Следствие 1.1.8. Множество Ω_m открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \| \ \ \| \rangle$

1.2 Дифференцируемость и дифференциал отображений

Определение. Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω — область в $\mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $r : \Omega \to \mathbb{R}^n$, такие что

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

Где $r(\mathbf{h})$ удовлетворяет уловию

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

или, что то же самое

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|$$

Где $\alpha(\mathbf{h})$ бесконечно малое, то есть

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \alpha(\mathbf{h}) = 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Замечание. Функции α, r из определения дифференцируемости зависят не только от $\mathbf{h}$, но и от $\mathbf{x}$.

Определение. Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом f в точке* $\mathbf{x}$ и обозначать $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \mathcal{A}$.

Замечание. Отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f$, действующее из $\mathbb{R}^m$ в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом f*.

Определение. Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения f в точке* $\mathbf{x}$.

Теорема 1.2.1. (Единственность производной)
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируема в $\mathbf{x}$, тогда существует единственный производный оператор f в точке $\mathbf{x}$.

Доказательство. Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(t\mathbf{z})\,\|t\mathbf{z}\|,\ \ t\mathbf{z} \to 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t),\ \ t \to 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t),\ t\to 0 \Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t}$$

■

Утверждение 1.2.2. (Производный оператор линейного отображения)
Пусть $\mathcal{A}\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, тогда $\mathcal{A}$ дифференцируемо в каждой точке и $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\mathcal{A}=\mathcal{A}$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

Утверждение 1.2.3. (Линейность производного оператора)
Пусть $f,\ g:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, дифференцируемы в $\mathbf{x}$. Тогда отображение $\alpha f+\beta g$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\alpha f+\beta g)=\alpha\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f+\beta\mathrm{d}_{\mathbf{x}}g$

Доказательство.

$$\begin{aligned}&(\alpha f+\beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h})-(\alpha f+\beta g)(\mathbf{x})\\ &=[(\alpha f)(\mathbf{x}+\mathbf{h})-(\alpha f)(\mathbf{x})]+[(\beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h})-(\beta g)(\mathbf{x})]\\ &=[\alpha\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f+o]+[\beta\mathrm{d}_{\mathbf{x}}g+o]=\alpha\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f+\beta\mathrm{d}_{\mathbf{x}}g+o\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.4. (Дифференцируемость композиции)
Пусть $f:\Omega\to\Omega_1$, $g:\Omega_1\to\mathbb{R}^k$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, $\Omega_1\subseteq\mathbb{R}^n$ дифференцируемы в $\mathbf{x}$, тогда $F=g\circ f$ дифференцируема в $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}F=\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g\cdot\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f$

Доказательство.

$$\begin{aligned}g(f(\mathbf{x}+\mathbf{h}))&=g(f(\mathbf{x})+[\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h}+r(\mathbf{h}))\\ &=\{\mathbf{v}=[\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h}+r(\mathbf{h})\}\\ &=g(f(\mathbf{x})+\mathbf{v})=g(f(\mathbf{x}))+[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{v}+\widetilde{r}(\mathbf{v})\\ &=g(f(\mathbf{x}))+[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g][\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h}+[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h})+\widetilde{r}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Осталось показать, что $[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h})+\widetilde{r}(\mathbf{v})=o(\|\mathbf{h}\|)$.

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h})+\widetilde{r}(\mathbf{v})\right\|\leqslant\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]\frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}\,\|r(\mathbf{h})\|\right\|+\widetilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|)\,\|\mathbf{v}\|$$

Обозначим $\mathbf{w}=\frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$, причем $\|\mathbf{w}\|=1$. Из определения нормы оператора получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{w}\right\|\leqslant\left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g\right\|$$

Кроме того, $\|\mathbf{v}\|\leqslant\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f\|\,\mathbf{h}+\alpha(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$. Окончательно получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h})+\widetilde{r}(\mathbf{v})\right\|\leqslant\left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g\right\|\,\|r(\mathbf{h})\|+\widetilde{\alpha}(\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f\|\cdot\|\mathbf{h}\|+\alpha(\|\mathbf{h}\|)\cdot\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{v}\|\leqslant\beta(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой $\beta(t)\xrightarrow[t\to 0]{}0$. ■

Определение. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$, тогда отображения

$$f_i(x) \overset{def}{=} \langle f(x), \mathbf{u}_i \rangle$$

где $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, называются *координатными функциями*.

Теорема 1.2.5. (Дифференцируемость координатных функций)
Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$f \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x} \iff \forall i\ f_i \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x}$$

причем

$$\mathrm{d}_\mathbf{x} f = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_\mathbf{x} f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}_\mathbf{x} f_n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$\Longleftarrow$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(\mathbf{x}))$$

где $g_i(t) = t\mathbf{u}_i$ — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда f дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

$\Longrightarrow$ f_i дифференцируемы как композиции f и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$ — область, тогда *производной по направлению* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}$ называется

$$D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \lim_{\substack{t \to 0 \\ \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует.

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^m$, тогда *частной производной f по k-й переменной* называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} f'_k \overset{def}{=} D_k f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

Утверждение 1.2.6. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\exists D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u}$$

Доказательство. Для любых $t \in \mathbb{R}$: $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} &= \frac{[\mathrm{d}_\mathbf{x} f](t\mathbf{u}) + r(t\mathbf{u})}{t} \\ &= [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u} + \frac{r(t\mathbf{u})}{t} = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u} + \frac{\alpha(\|\mathbf{u}\|)\,\|t\mathbf{u}\|}{t} = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u} + \alpha(\|\mathbf{u}\|)\,\|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

причем $\alpha(s) \xrightarrow[s \to 0]{} 0$. ■

Теорема 1.2.7. (Вид матрицы Якоби) Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_1 f_n(\mathbf{x}) & D_2 f_n(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{e}_i)$ — базис $\mathbb{R}^m$, $(\tilde{\mathbf{e}}_i)$ — базис $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]_{i,j} = \langle [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = \left\langle \frac{[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f](t\mathbf{e}_i)}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle \\ = \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i) - f_j(\mathbf{x})}{t} = D_i f_j(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

■

Определение. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Тогда *градиентом* φ в точке $\mathbf{x}$ наывается вектор

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Утверждение 1.2.8. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{u} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

■

Утверждение 1.2.9. (Необходимое условие дифференцируемости)
Если f дифференцируемо в $\mathbf{x}$, то существуют все частные производные в точке $\mathbf{x}$, причем матрица Якоби f в точке $\mathbf{x}$ совпадает с матрицей, составленной из матриц якоби f_i в точке $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}(\mathbf{x}) \right)$$

Доказательство. Подставим в определение дифференцируемости $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) &= f(\mathbf{x}) + [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f](t\mathbf{e}_k) + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\| \\ &= f(\mathbf{x}) + t[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{e}_k + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

Отсюда по определению частной производной получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t} = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{e}_k$$

■

Теорема 1.2.10. (Достаточное условие дифференцируемости)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $B(\mathbf{a}) \subseteq \Omega$, В $B(\mathbf{a})$ существуют все частные производные, причем они непрерывны в точке $\mathbf{a}$. Тогда f дифференцируемо в точке $\mathbf{a}$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $m = 2$. Схема, примененная в доказательстве тривиально обобщается на произвольные m.

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2) &= (f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1,\mathbf{x}_2)) + (f(\mathbf{a}_1,\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)) \\
&\overset{\text{Лагранж}}{=} f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1,\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1,\tilde{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) \\
&+ \left[\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1,\mathbf{x}_2) - f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2))}_{\to 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|} + \underbrace{(f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1,\tilde{\mathbf{x}}_2) - f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2))}_{\to 0 \text{ по непрерывности}} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\right] \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1) + f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_2) + \alpha(\mathbf{x}-\mathbf{a})\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|
\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.11. Пусть $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, f, g, λ дифференцируемы в $\mathbf{a}$. Тогда λf, $\langle f, g\rangle$ дифференцируемы в $\mathbf{a}$, причем

- $[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}(\lambda f)]\mathbf{h} = [\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\lambda]\mathbf{h} \cdot f(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f]\mathbf{h}$
- $[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\langle f, g\rangle]\mathbf{h} = \langle [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a})\rangle + \langle f(\mathbf{a}), [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} g]\mathbf{h}\rangle$

Доказательство.

- Докажем покоординатно:

$$\begin{aligned}
&(\lambda f_i)(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= \lambda(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \cdot f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= (\lambda(\mathbf{a}) + \mathrm{d}_{\mathbf{a}}\lambda\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) \cdot (f_i(\mathbf{a}) + \mathrm{d}_{\mathbf{a}} f_i\mathbf{h} + \beta(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|) - (\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&= [\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\lambda] \cdot f_i(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f_i]\mathbf{h} + o(\mathbf{h})
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\langle f, g\rangle]\mathbf{h} = \mathrm{d}_{\mathbf{a}}\left[\sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i\right]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}_{\mathbf{a}}[f_i \cdot g_i]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^{n}([\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a}) + f_i(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} g_i]\mathbf{h}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}([\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f_i]\mathbf{h} \cdot g_i(\mathbf{a})) + \sum_{i=1}^{n}(f_i(\mathbf{a}) \cdot [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} g_i]\mathbf{h}) = \langle [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a})\rangle + \langle f(\mathbf{a}), [\mathrm{d}_{\mathbf{a}} g_i]\mathbf{h}\rangle
\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.12. (Экстремальное свойство градиента)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируемо в $\mathbf{x}$, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq 0$ Тогда

$$\mathbf{l} = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$$

— направление наибольшего возрастания f, то есть

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{h}\| = 1 \Longrightarrow D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) \leqslant D_{\mathbf{l}} f(\mathbf{x})$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{h} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \leqslant \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \, \|\mathbf{h}\| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|$$

■

1.3 Теоремы Лагранжа для отображений

Теорема 1.3.1. (Лагранжа для векторнозначных функций)
Пусть $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$, дифференцируемо на (a,b). Тогда

$$\exists c \in (a,b):\quad \|f(b)-f(a)\| \leqslant \left\|f'(c)\right\| |b-a|$$

Доказательство. При $f(a)=f(b)$ утверждение тривиально. Положим $\varphi(t)=\langle f(b)-f(a), f(t)-f(a)\rangle$. Тогда

$$\varphi(a)=0, \varphi(b)=\langle f(b)-f(a), f(b)-f(a)\rangle = \|f(b)-f(a)\|^2$$

Применим теорему Лагранжа для φ:

$$\exists c \in (a,b):\quad \|f(b)-f(a)\|^2 = \varphi(b)-\varphi(a) \underset{\text{Лагранж}}{=} \varphi'(c)|b-a| = \langle f(b)-f(a), f'(c)\rangle \cdot |b-a|$$
$$\underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \|f(b)-f(a)\| \cdot \left\|f'(c)\right\| |b-a| \Longrightarrow \|f(b)-f(a)\| \leqslant \left\|f'(c)\right\| |b-a|$$

■

Теорема 1.3.2. (Лагранжа для отображений)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, дифференцируемо на Ω, $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subseteq \Omega$, тогда

$$\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$$

Доказательство. $g = f(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))$ для $t\in[0,1]$ — дифференцируемо как композиция дифференцируемых функций. По предыдущей теореме

$$\exists t_0 \in (0,1):\quad \|g(1)-g(0)\| \leqslant \left\|g'(t_0)\right\| = \left\|f'(\mathbf{a}+t_0(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\right\|$$
$$\leqslant \left\|f'(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\right\| \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$$

■

1.4 Формула Тейлора

Определение. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, Ω — область, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Определим частные производные высшего порядка по индукции:

$$D_{i_1,\ldots,i_k} f \overset{def}{=} D_{i_k}(D_{i_1,\ldots,i_{k-1}} f)$$

Теорема 1.4.1. (О независимости ч.п. от порядка дифференцирования)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω — область, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\exists B((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega$, причем в $B((x_0, y_0), r)$ существуют $D_{12} f$ и $D_{21} f$, непрерывные в точке (x_0, y_0). Тогда $D_{12} f(x_0, y_0) = D_{21} f(x_0, y_0)$

Доказательство.

$$\alpha(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда $\alpha(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) \underset{\text{Лагранж}}{=} & \ \alpha'(\tilde{h})h = [f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0)]h \\ \underset{\text{Лагранж}}{=} & \ f''_{xy}(x_0 + \tilde{h}, y_0 + \tilde{k})hk \end{aligned}$$

Аналогично введем $\beta(k)$:

$$\beta(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta(k) = \beta(k) - \beta(0) \underset{\text{Лагранж}}{=} & \ \beta'(\bar{k})k = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \bar{k}) - f'_y(x_0, y_0 + \bar{k})]k \\ \underset{\text{Лагранж}}{=} & \ f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk \end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha(h) = \beta(k)$. Осталось перейти к пределу при $(h, k) \to (0, 0)$ и воспользоваться непрерывностью частных производных в точке (x_0, y_0). ■

Следствие 1.4.2. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\exists B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, причем в $B(\mathbf{x}, r)$ для любой перестановки индексов $\pi \in S_k$ существуют и непрерывны в $\mathbf{x}$ частные производные $D_{i_{\pi_1},\ldots,i_{\pi_k}} f$. Тогда все они совпадают в точке $\mathbf{x}$.

Доказательство. Доказательство сводится к координатным функциям, поэтому считаем, что $n = 1$. Предыдущая теорема дает возможность менять местами пары индексов. Осталось заметить, что группа перестановок порождается транспозициями. ■

Определение. Множество функций $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, у которых все частные производные порядка не более r существуют и непрерывны на Ω, будем обозначать $C^r(\Omega)$

Определение. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$, тогда набор $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ будем называть *мультииндексом*. Используются обозначения $|k| = k_1 + \ldots + k_m$,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f \overset{def}{=} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} f$$

Лемма 1.4.3. (Полиномиальная формула)

$$(a_1 + \ldots + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{m} \ldots \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_r} = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$$

Доказательство. Первое равенство очевидно по правилам раскрытия скобок. Докажем второе равенство индукцией по r.

- Для $r = 1$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + \ldots + a_m)^{r+1} = (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (a_1 + \ldots + a_m)^r \\
&= (a_1 + \ldots + a_m) \cdot \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1+1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m+1} \\
&= [\text{переобозначим } k_i = k_i + 1 \text{ в } i\text{-й сумме}] \\
&= \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_1 \geqslant 1}} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_m \geqslant 1}} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= [\text{добавим все пропущенные слагаемые с } k_i = 0] \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot (k_1 + k_2 \ldots + k_m)}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}
\end{aligned}$$

■

Лемма 1.4.4. (О дифференцировании сдвига)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, Ω — область, $f \in C^r(\Omega)$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \in [-1, 1]$ $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in \Omega$, тогда для отображения $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ и для $k \leqslant r$ выполнено

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} \mathbf{h}^j \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(\mathbf{a})$$

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно показать, что

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^k \cdot f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

Докажем по индукции:

- Для $k = 0$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(t) = (\varphi^{(k-1)}(t))' &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\right)' \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\end{aligned}$$

∎

Теорема 1.4.5. (Формула Тейлора в форме Лагранжа)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0,1)\colon\ f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leqslant r} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + \sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ для $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Выпишем формулу Тейлора в форме Лагранжа для φ:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}$$

Пользуясь леммой о дифференцировании сдвига, получаем искомое равенство. ∎

Теорема 1.4.6. (Формула Тейлора в форме Пеано)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0,1)\colon\ f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leqslant r} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Проверим это:

$$\sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r} = \sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1} \ldots (\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r}$$

$$= \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \dots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

Все дроби вида

$$\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i)^{k_i}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_i}}$$

меньше единицы, выражения вида

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$$

постоянны. Поэтому

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \dots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0$$

При $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0$. ■

1.5 Диффеоморфизмы

Определение. *Областью* называют открытое связное множество.

Определение. Топологические пространства X, Y *гомеоморфны*, если существует обратимое и в обе стороны непрерывное $f : X \to Y$. f называют *гомеоморфизмом*.

Определение. *Диффеоморфизмом* гладких многообразий M, N называется обратимое и в обе стороны гладкое отображение $f : M \to N$.

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$. Тогда отображение $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ называется *диффеоморфизмом*, если оно обратимо и в обе стороны дифференцируемо.

Лемма 1.5.1. (О почти локальной инъективности)
Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, f дифференцируемо в $\mathbf{x}_0$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists c, \delta > 0$ такие, что $\forall \mathbf{h}\colon\ \|\mathbf{h}\| < \delta\ \ \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$

Доказательство.

$$\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)\| = \left\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}+\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\right\| \geqslant \left\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\right\| - \|\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\| \geqslant \frac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|$$

Последнее неравенство выполнено по следующим причинам:

- $\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$, так как $f'(\mathbf{x}_0)$ обратим
- $\|\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\| \leqslant \dfrac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|$ при достаточно малых $\mathbf{h}$, так как $\alpha(\mathbf{h})$ — бесконечно малое.

■

Теорема 1.5.2. (О сохранении области)
Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \ \det f'(\mathbf{x}) \neq 0$, тогда f открыто.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{O}$ открыто. Тогда нужно показать, что $f(\mathcal{O})$ открыто. Зафиксируем $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ и $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in f(\mathcal{O})$. По лемме о почти локальной инъективности имеем $c, \delta > 0$ такие, что

$$\forall \mathbf{h} \in \overline{B(0,\delta)}\ \ \|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$$

Положим

$$r = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\mathbf{y}_0, f(S(\mathbf{x}_0,\delta)))$$

Поскольку f непрерывно, а сфера — компакт, имеем, что $f(S(\mathbf{x}_0,\delta))$ — компакт. В свою очередь, ρ является метрикой, то есть непрерывно. Тогда ρ достигает минимума, то есть r реализуется, а значит, не равно нулю (см. оценку выше). Раз $r > 0$, то $B(\mathbf{y}_0, r)$ — полноправный шар, проверим, что он входит в образ f целиком, что и закончит доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$. Положим $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$ на $\overline{B(\mathbf{x}_0,\delta)}$; g непрерывно, поэтому достигает минимума. Попробуем этот минимум найти:

- Рассмотрим поведение $g(\mathbf{x})$ на $S(\mathbf{x}_0,\delta)$:

$$g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x})-\mathbf{y}\| \geqslant \|f(\mathbf{x})-\mathbf{y}_0\| - \|\mathbf{y}_0-\mathbf{y}\| \geqslant 2r - r = r$$

- $g(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| < r$, так как $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$

Тогда понятно, что минимум достигается не на границе. Раз так, он достигается во внутренности. Отображение $l\colon \mathbf{x} \mapsto g^2(\mathbf{x})$ достигает минимума в той же точке, что и g, при этом $l'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$. Из невырожденности производного оператора следует, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, что и требовалось. ■

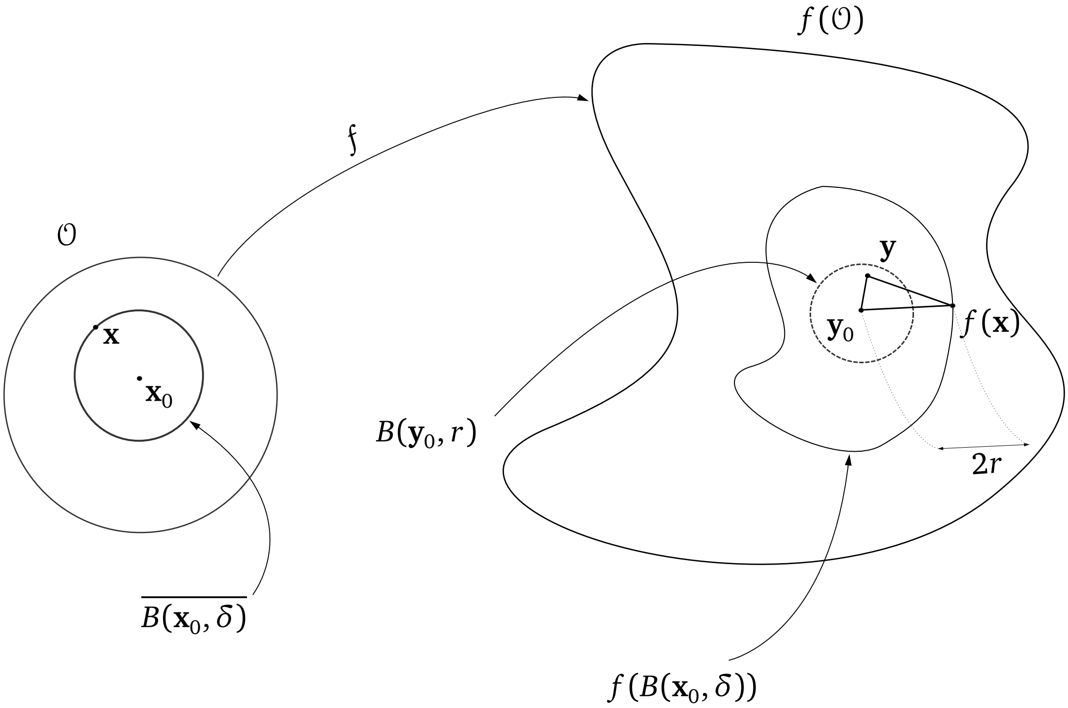

Рис. 1.1: Теорема о сохранении области

Следствие 1.5.3. Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{l \leqslant m}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \operatorname{rank} f'(\mathbf{x}) = l$, тогда f открыто.

Доказательство. Построим оторбражение $\tilde{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\tilde{f}_i = f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l$$
$$\tilde{f}_i = x_i,\ \text{иначе}$$

Производный оператор тогда будет выглядеть так:

$$\tilde{f}' = \begin{pmatrix} & & f' & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Где первая сверху единица стоит на $l+1$-м месте. Тогда отображение $\tilde{f}$ тоже дифференцируемо, и его производный оператор невырожден. Применяя предыдущую теорему, получаем, что $\tilde{f}(A)$ открыто, если множество A открыто. Тогда $f(A)$ тоже открыто. ■

Теорема 1.5.4. (О гладкости обратного отображения)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, $T \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \det T'(\mathbf{x}) \neq 0$,
T обратимо, тогда $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(\mathbf{y}_0) = (T'(\mathbf{x}_0))^{-1}$, при $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$.

Доказательство. Докажем теорему по индукции. В качестве базы рассмотрим случай $r = 1$. Обозначим $S = T^{-1}$, $S\colon T(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно, так как по теореме о сохранении области T открыто. Зафиксируем $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$ и проверим дифференцируемость S в точке $\mathbf{y}_0$.

- По теореме о почти локальной инъективности имеем
$$\exists c, \delta > 0\colon\ \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)\ \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$
- Воспользуемся дифференцируемостью T:
$$T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$
Здесь $A = T'(\mathbf{x}_0)$. Положим $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$:
$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = A(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) + \alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$
Перепишем это равенство в виде, похожем на определение дифференцируемости S:
$$S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$
Если мы поймем, что $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$ — бесконечно малое при $\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0$, то мы получим определение дифференцируемости S в точке $\mathbf{y}_0$. Проверим это:
$$\begin{aligned}\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) &\leqslant \left\|A^{-1}\right\|\,\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &\leqslant \left\|A^{-1}\right\|\,\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c}\,\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \\ &= \left\|A^{-1}\right\|\,\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c}\,\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|\end{aligned}$$
S непрерывно, поэтому $\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \xrightarrow[\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0]{} 0$, тогда $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \xrightarrow[\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0]{} 0$.

Теперь нужно доказать непрерывность S'. Из доказанного уже известно, что $S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1}$:
$$\mathbf{y} \mapsto S(\mathbf{y}) = T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \mapsto T'(\mathbf{x}) \mapsto (T'(\mathbf{x}))^{-1} = S'(\mathbf{y})$$
Эту схему можно переписать в привычном виде:
$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$
Таким образом получаем, что S' — композиция непрерывных отображений, то есть непрерывно (в частности, отображение $GL(\mathbb{R}^m) \ni A \mapsto A^{-1}$ непрерывно). Таким образом, база доказана.

Для доказательства индукционного перехода нужно показать только гладкость S. Пусть $T \in C^n$, $S \in C^n$, покажем, что тогда если вдруг $T \in C^{n+1}$, то и $S \in C^{n+1}$. Для этого достаточно, чтобы $S' \in C^n$:

$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$

$S \in C^n$ по предположению индукции, $T' \in C^n$ потому, что $T \in C^{n+1}$, обращение матрицы — вообще класса C^∞, то есть переход доказан. ■

Лемма 1.5.5. (О приближении оботражения его линеаризацией)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, тогда $\forall \mathbf{h}$

$$\left\| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| \leqslant M \|\mathbf{h}\|$$

где

$$M = \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\|$$

Доказательство. Положим $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x})$, тогда $F'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)$. Применим теорему Лагранжа к F:

$$\begin{aligned}\left\| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| = \|F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0)\| &\leqslant \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| F'(\mathbf{z}) \right\| \cdot \|\mathbf{h}\| \\ &= \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\| \cdot \|\mathbf{h}\|\end{aligned}$$

■

Теорема 1.5.6. (О локальной обратимости)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists U(\mathbf{x}_0)$ такая, что $f\big|_U$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Если мы докажем, что f обратимо в некоторой окрестности $U(\mathbf{x}_0)$, то по теореме о гладкости обратного отображения мы получим требуемое (невырожденность определителя в окрестности $\mathbf{x}_0$ следует из его непрерывности и того, что $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$). Для начала заметим. что из невырожденности оператора в точке $\mathbf{x}_0$ следует, что

$$\exists c > 0 \colon \ \left\| f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| \geqslant c \|\mathbf{h}\|$$

Попробуем построить окрестность. Пусть она будет содержать точки такие, что одновременно выполнены условия:

- $\left\| f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\| \leqslant \dfrac{c}{4}$. Эти точки есть вблизи $\mathbf{x}_0$ по теореме о непрерывно дифференцируемых отображениях.
- $\det f'(\mathbf{x}) \neq 0$. Такие точки есть из непрерывности $\det$.

Проверим, что в этой окрестности f не склеивает точки, что и будет означать его обратимость; пусть $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$, тогда:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{y} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}) + (f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0))\mathbf{h} + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$$

$$\|f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})\| \geqslant \underbrace{\left\|f'(\mathbf{x}_0)\right\| \|\mathbf{h}\|}_{\geqslant c\|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\left\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x})\mathbf{h}\right\|}_{\leqslant M\|\mathbf{h}\|\leqslant \frac{c}{2}\|h\|} - \underbrace{\left\|f'(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x}_0)\right\| \cdot \|\mathbf{h}\|}_{\leqslant \frac{c}{4}\|\mathbf{h}\|}$$
$$\geqslant \frac{c}{4}\|\mathbf{h}\|$$

Где $M\|\mathbf{h}\| \leqslant \frac{c}{2}\|\mathbf{h}\|$ потому, что:

$$M\|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\| \sup \left\|f'(\mathbf{z})-f'(\mathbf{x})\right\| \leqslant \sup\Big(\underbrace{\left\|f'(\mathbf{z})-f'(\mathbf{x}_0)\right\|}_{\leqslant \frac{c}{4}} + \underbrace{\|f(\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x})\|}_{\leqslant \frac{c}{4}} \Big) \leqslant \frac{c}{2}$$

■

Теорема 1.5.7. (О неявном отображении)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \underset{f}{\mapsto} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $f \in C^r$,
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{O}:\ f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $\det f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, тогда

- $\exists U(\mathbf{a})$, $\exists U(\mathbf{b})$, $\exists! \varphi: U(\mathbf{a}) \to U(\mathbf{b}) \in C^r$ такое, что $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a})\ f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$
- $\varphi'(\mathbf{x}) = -(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})))^{-1} \cdot f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$

Доказательство.

- Подготовим несколько объектов, полезных для доказательства. Положим
$$T: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{m+n}$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$
Производный оператор этого отображения в блочном виде выглядит следующим образом:
$$T' = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$
Он обратим, так как $\det T' = 1 \cdot \det f'_y \neq 0$. Тогда по теореме о локальной обратимости $\exists U(\mathbf{a}, \mathbf{b})$: $T\big|_U$ — диффеоморфизм. Без ограничения общности будем считать, что $U = \tilde{P} \times Q$, где $\tilde{P} \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ открыты и $\mathbf{a} \in \tilde{P}$, $\mathbf{b} \in Q$. Будем обозначать $S = T^{-1}$ и $V = T(U)$ — открыто в $\mathbb{R}^{m+n}$ так как T — диффеоморфизм. Заметим, что T не меняет первую координату, то есть S тоже её не меняет, а значит, имеет вид $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, где $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^r$, так как $S \in C^r$.
- Пусть $P = (\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}_n) \cap V$ — открытое в $\mathbb{R}^m$ множество (само множество из $\mathbb{R}^{m+n}$, но нулевые координаты отбросим, см. рисунок). Предъявим требуемое отображение:
$$\varphi(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$
- Проверим, что φ подходит: $f \in C^r$, так как $H \in C^r$. Проверим $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0$ и единственность:
$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))) = T(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = T(S(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$$
С другой стороны, если $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, то:
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$
То есть $\mathbf{y} = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, из чего следует, что φ единственно.

- Проверим второй пункт теоремы, вычислив производный оператор φ:

$$f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \varphi' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Откуда получаем:

$$f'_x + f'_y \cdot \varphi' = \mathbf{0} \Longrightarrow \varphi' = -(f'_y)^{-1} f'_x$$

■

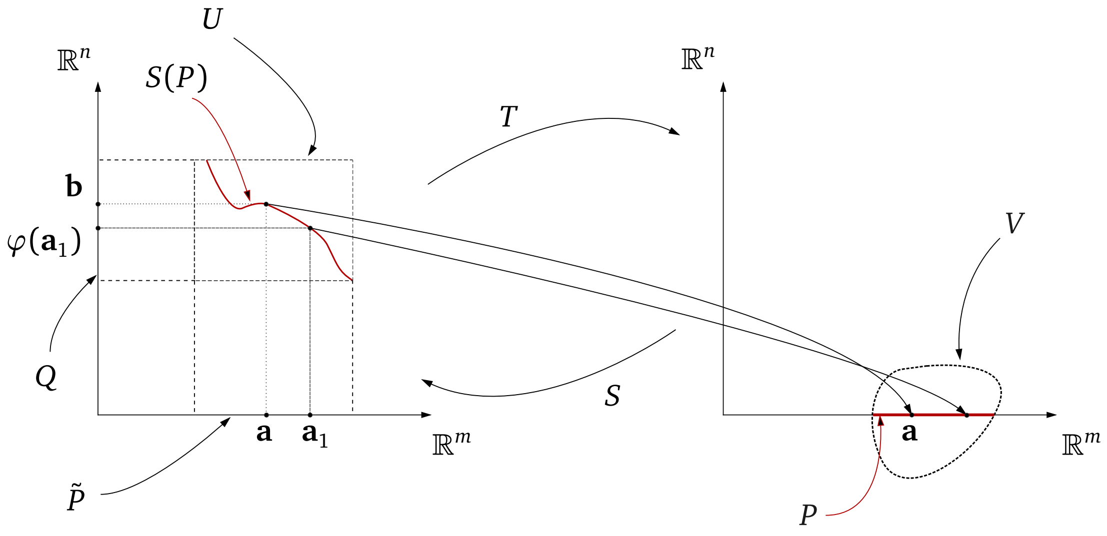

Рис. 1.2: Теорема о неявном отображении

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *k-мерным многообразием* в $\mathbb{R}^m$, если оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, $\forall \mathbf{x} \in M\ \exists U(\mathbf{x})\ \exists \varphi$ — гомеоморфизм: $U(\mathbf{x}) \underset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}^k$.

Определение. k-мерное многообразие $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *простым*, если оно гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, в предыдущем определении можно выбрать $U(\mathbf{x}) = M$.

Определение. Пара $\langle U(\mathbf{x}), \varphi \rangle$ из определения называется *картой*, или *параметризацией* многообразия в точке $\mathbf{x}$. Набор карт, который покрывает все M, называется *атласом*.

Определение. Простое k-мерное многообразие M называют *C^r-гладким*, если $\varphi \in C^r$ — параметризация M и $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \operatorname{rank} \varphi'(\mathbf{x}) = k$.

Теорема 1.5.8. (О задании гладкого многообразия системой уравнений)
Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant k < m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, тогда $\forall \mathbf{p} \in M$ эквивалентны утверждения:

- $\exists U(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap U$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие.

- $\exists \tilde{U}(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap \tilde{U}$ можно задать системой C^r-гладких уравнений, иначе говоря: $\exists f_1, \dots, f_{m-k} \colon \tilde{U} \to \mathbb{R} \in C^r$ такие, что $\mathbf{x} \in M \cap \tilde{U} \iff \forall i \ f_i(\mathbf{x}) = 0$, причем $\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независим.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть имеется параметризация $\varphi \colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \in C^r$, которая задает $M \cap U(\mathbf{p})$. Зафиксируем точку $t_0 = \varphi(\mathbf{p})$. Параметризация C^r гладкая, поэтому $\operatorname{rank} \varphi' = k$. Будем считать, что ранг реализуется на первых k строках. Рассмотрим проекцию $L \colon \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$. Из того, что первые k столбцов φ' линейно независимы, имеем невырожденность производного оператора отображения $L \circ \varphi$. Тогда по теореме о локальной обратимости $\exists W(t_0) \colon (L \circ \varphi)\big|_W$ — диффеоморфизм. Обозначим $V = (L \circ \varphi)(W)$. Тогда (см. рисунок) удобно интерпретировать $\varphi(W)$ как график отображения, заданного на V; $H \colon V \to \mathbb{R}^{m-k}$. Положим $\psi = (L \circ \varphi)^{-1}$, $\psi \in C^r$ по теореме о гладкости обратного отображения. Тогда вернемся к интерпретации графиком и посмотрим на точку $\mathbf{x} \in V$:

$$(\mathbf{x}, H(\mathbf{x})) = \varphi(\psi(\mathbf{x}))$$

Тогда $H \in C^r$ как композиция C^r-гладких отображений. φ гомеоморфизм, поэтому $\varphi(W)$ открыто в M. Тогда $\exists \tilde{U}$ открытое в $\mathbb{R}^m$ такое, что $\varphi(W) = M \cap \tilde{U}$. Рассмотрим теперь набор функций:

$$\begin{aligned} f_i &\colon \tilde{U} \to \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto H_i(L(\mathbf{x})) - x_{k+i} \end{aligned}$$

для $i = 1 \dots m-k$. Тогда

$$\forall i = 1 \dots m{-}k \ \ f_i(\mathbf{x}) = 0 \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})){-}\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \in M{\cap}\tilde{U}$$

Осталось показать, что $\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независим. Для этого просто выпишем этот набор:

$$\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \dfrac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_k} & 0 & \cdots & -1_{k+i} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, он линейно независим.

$\Longleftarrow$ Пусть теперь имеется система уравнений f_i. Составим из f_i отображение $f \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-k}$. Поскольку набор градиентов линейно независим (будем считать, что ранг реализуется на последних $m-k$ столбцах), можно применить теорему о неявном отображении: $\exists P(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k), Q(\mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_m)$ и $\exists H \colon P \to Q$ такое, что

$$\forall (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \in P \ \ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)) \text{ — решение уравнения } f = \mathbf{0}$$

Построим теперь искомую параметризацию:

$$\begin{aligned} \varphi &\colon P \to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{u} &\mapsto (\mathbf{u}, H(\mathbf{u})) \end{aligned}$$

Понятно, что φ подходит в качестве параметризации $M \cap (P \times Q)$. ∎

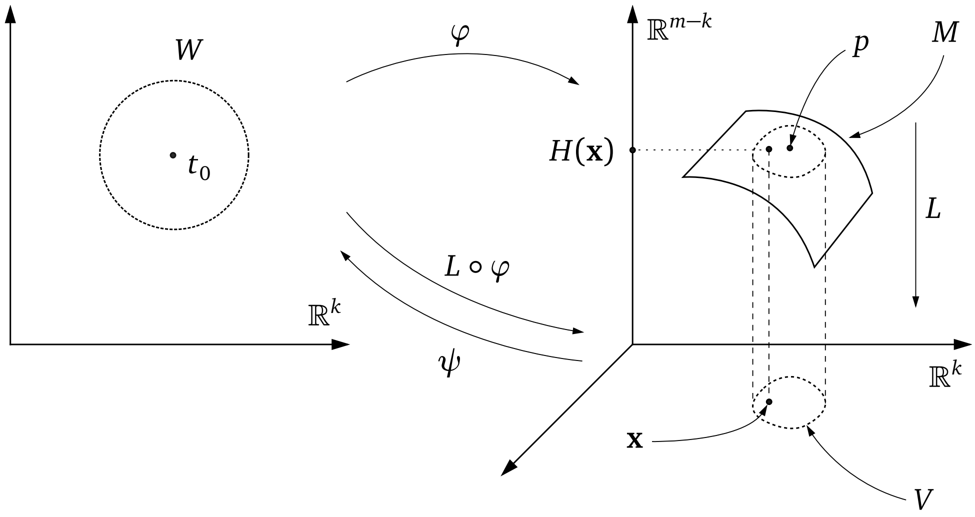

Рис. 1.3: Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

Следствие 1.5.9. (О двух параметризациях)
Пусть M — k-мерное простое C^r-гладкое многообразие, $\mathbf{p} \in M$, причем $C^r \ni \varphi_1 \colon \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$, $C^r \ni \varphi_2 \colon \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$ — параметризации $U(\mathbf{p}) \cap M$. Тогда φ_1 и φ_2 отличаются на диффеоморфизм, а именно, $\exists \psi \colon \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ — диффеоморфизм, причем $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$.

Доказательство. Будем считать, что невырожденность производных операторов параметризаций реализуется на первых k строках. Пусть L — проекция из доказательства предыдущей теоремы. Тогда, как и в предыдущей теореме, отображения $L \circ \varphi_1$, $L \circ \varphi_2$, и им обратные существуют и гладкие. Тогда заметим, что L обратимо (по крайней мере там, где обратимо $L \circ \varphi_1$). Положим тогда $\psi = (L \circ \varphi_2)^{-1} \circ (L \circ \varphi_1)$. В таком случае нетрудно видеть, что

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (L \circ \varphi_2)^{-1} \circ (L \circ \varphi_1) = \varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ \varphi_1) = \varphi_1$$

ψ обратим, потому что $\psi^{-1} = (L \circ \varphi_1)^{-1} \circ (L \circ \varphi_2)$. Гладкость ψ и ψ^{-1} следует из гладкости составных частей ψ. ■

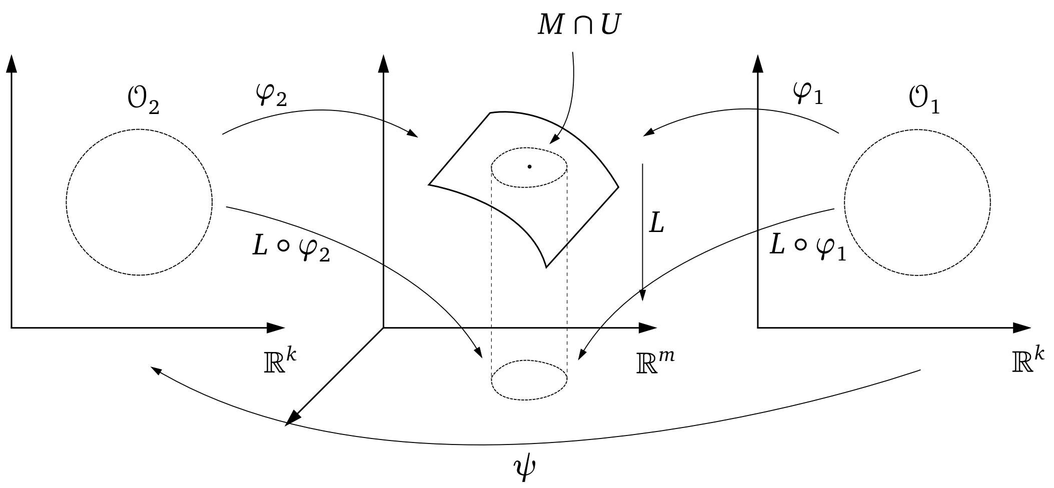

Рис. 1.4: Теорема о двух параметризациях

Определение. Пусть M — C^r-гладкое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{p} \in M$, $\varphi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация окрестности $U(\mathbf{p})$, причем $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$. Тогда *касательным пространством* к M в точке $\mathbf{p}$ называется $T_{\mathbf{p}}(M) = \operatorname{Im} \varphi'(\mathbf{a})$.

Теорема 1.5.10. (О корректности определения касательного пространства)
Касательное пространство не зависит от выбора параметризации.

Доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — две параметризации $U(\mathbf{p})$. В таком случае по теореме о двух параметризациях $\exists C^r \ni \psi\colon \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ такое, что $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$. В таком случае, поскольку ψ — диффеоморфизм, то есть имеет невырожденный производный оператор в $\mathbf{a}$, имеем $\operatorname{Im} \psi'(\mathbf{a}) = \mathbb{R}^k$. Тогда:

$$\operatorname{Im} \varphi_1'(\mathbf{a}) = \operatorname{Im} \varphi_2'(\mathbf{a}) \circ \psi'(\mathbf{a}) = \varphi_2'(\mathbf{a})(\mathbb{R}^k) = \operatorname{Im} \varphi_2'(\mathbf{a})$$

∎

Теорема 1.5.11. (О касательном пространстве к гладкому пути)
Пусть M — гладкое многообразие. Тогда $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(M) \iff \exists$ гладкий путь $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^m\colon\ \gamma([-1,1]) \subseteq M$ такой, что $\gamma(0) = \mathbf{p}$ и $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

Доказательство.

- Подготовим среду для доказательства. Зафиксируем $C^r \ni \varphi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to M$ — параметризация M в какой-нибуль окрестности (не умаляя общности, во всем M). Вспомним в очередной раз отображение $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекцию первых k координат. Копируя рассуждения предыдущих теорем, приходим к выводу, что $L \circ \varphi$ и $\psi = (L \circ \varphi)^{-1}$ лежат в классе C^r.

$\Longrightarrow$ Пусть имеется вектор $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(M)$, построим путь, проходящий через точку $\mathbf{p}$ со скоростью $\mathbf{v}$. Пусть $\mathbf{p} = \varphi(t_0)$, положим $u = (\varphi'(t_0))^{-1}(\mathbf{v})$. По смыслу это та скорость, с которой нужно двигаться в $\mathcal{O}$, чтобы получить скорость $\mathbf{v}$ в $\varphi(\mathcal{O})$ (то есть "*прообраз скорости*"). Построим сам путь:

$$\gamma(s) = \varphi(t_0 + su)$$

Проверим его свойства:

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \varphi(t_0) = \mathbf{p} \\ \gamma'(s)\Big|_{s=0} &= (\varphi'(t_0+su)\cdot u)\Big|_{s=0} \\ &= \varphi'(t_0)\cdot u = (\varphi'(t_0)\cdot(\varphi'(t_0)^{-1})(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Пусть теперь имеется гладкий путь $\gamma\colon [-1,1] \to M$ такой, что $\gamma(0) = \mathbf{p}$ и $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Поймем, почему вектор $\mathbf{v}$ лежит в $T_{\mathbf{p}}(M)$. Для этого воспользуемся подготовленным арсеналом и пустим путь "*по кругу*":

$$\gamma(s) = \varphi(\psi(L(\gamma(s))))$$

Проще всего понять это соотношение, внимательно посмотрев на картинку. Корректность же следует из свойств используемых отображений, в частности потому, что L обратимо (на том же множестве, где обратимо $L\circ\varphi$). Теперь:

$$\gamma'(0) = \varphi'(\psi(L(\gamma(0)))\cdot(\ldots) = \varphi'(\psi(L(\mathbf{p})))\cdot(\ldots) = \varphi'(t_0)\cdot(\ldots) \in T_{\mathbf{p}}(M)$$

■

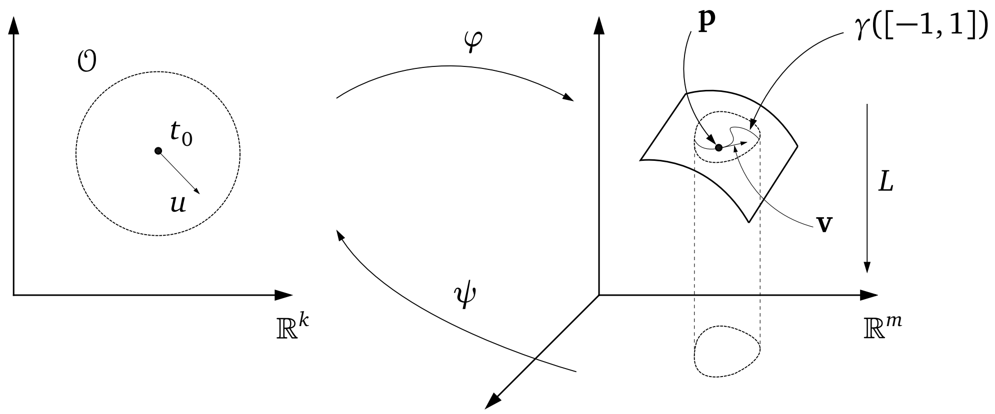

Рис. 1.5: Теорема о касательном пространстве к гладкому пути

Теорема 1.5.12. (О касательном пространстве к графику функции)
Афинное касательное пространство к графику $C^r \ni f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ задается уравнением

$$y - f(\mathbf{x}_0) = f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}_0^1) + \ldots + f'_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}_0^m)$$

Доказательство. Для доказательства построим параметризацию:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in C^r$$

Далее вычислим образ производного оператора $\varphi'(\mathbf{x}_0)$:

$$\varphi'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ f'_{x_1}(\mathbf{x}_0) & f'_{x_2}(\mathbf{x}_0) & f'_{x_3}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f'_{x_m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы максимален и равен m. Рассмотрим образы стандартных базисных векторов:

$$\varphi'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ f'_{x_k}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Их m штук и они линейно независимы, поэтому составляют базис образа оператора. Тогда нетрудно понять, что касательное пространство задается уравнением

$$y = f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}^1 + \ldots + f'_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}^m$$

Тогда после сдвига на $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ получаем нужное афинное кп. ■

Теорема 1.5.13. (О касательном пространстве к поверхности уровня)
Афинное касательное пространство к поверхности уровня функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задается уравнением

$$f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(y_0)(y - y_0) + f'_z(z_0)(z - z_0) = 0$$

Доказательство. Поступим аналогично предыдущей теореме. Поверхность уровня задается уравнением:

$$f(x, y, z) = C$$

Предполагая, что $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, применим теорему о неявном отображении и получим $z = z(x, y)$ в некоторой окрестности (x_0, y_0). Тогда рассмотрим параметризацию:

$$\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y))$$

Вычислим проиводный оператор:

$$\varphi'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z'_x(x_0, y_0) & z'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

На базисных векторах оператор принимает значения

$$\varphi'(x_0, y_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\z'_x(x_0, y_0)\end{pmatrix} \quad \varphi'(x_0, y_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\z'_y(x_0, y_0)\end{pmatrix}$$

которые, очевидно, линейно независимы. Эти два вектора удовлетворяют уравнению

$$f'_x \cdot x + f'_y \cdot y + f'_z \cdot z = 0$$

потому, что

$$\begin{aligned} f'_x \cdot 1 + f'_y \cdot 0 + f'_z \cdot z'_x = f(x, y, z(x, y))'_x = C'_x = 0 \\ f'_x \cdot 0 + f'_y \cdot 1 + f'_z \cdot z'_y = f(x, y, z(x, y))'_y = C'_y = 0 \end{aligned}$$

Значит, из соображений размерности, это уравнение и задает касательное пространство. Осталось только сместить его, чтобы получить афинное. ■

1.6 Относительный экстремум

Определение. Пусть $f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $\phi: E \to \mathbb{R}^n$, $M_\phi = \{\mathbf{x} \in E \mid \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, $\mathbf{x}_0 \in E$, $\phi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ называется точкой локального *относительного* экстремума, если x_0 — точка локального экстремума $f\big|_{M_\phi}$.

Теорема 1.6.1. (Необходимое условие относительного экстремума)
Пусть $C^1 \ni f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $C^1 \ni \phi: E \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in E$, $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, $\operatorname{rank}\phi'(\mathbf{a}) = n$, $\mathbf{a}$ — точка локального экстремума, тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} f'(\mathbf{a}) - \lambda \cdot \phi'(\mathbf{a}) = 0 \\ \phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Доказательство. Будем обозначать $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ Пусть ранг производного оператора $\phi'(\mathbf{a})$ реализуется на последних n столбцах. Тогда

$$\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}_{m+j}}(\mathbf{a})\right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \neq 0$$

Тогда можно применить теорему о неявном отображении:

$$\exists U(\mathbf{a}_x), U(\mathbf{a}_y)\ \exists C^r \ni \varphi: U(\mathbf{a}_x) \to U(\mathbf{a}_y):\ \phi(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

Рассмотрим функцию $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$. Тогда $\mathbf{a}_x = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ является точкой обычного локального экстремума для функции g. Далее будут использованы не совсем обычные, но понятные обозначения для частных производных. Выпишем необходимое условие экстремума:

$$f'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a}_x, \varphi(\mathbf{a}_x)) + f'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}_x, \varphi(\mathbf{a}_x)) \cdot \varphi'(\mathbf{a}_x) = \underbrace{f'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a})}_{1\times m} + \underbrace{f'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a})}_{1\times n} \cdot \underbrace{\varphi'(\mathbf{a}_x)}_{n\times m} = 0$$

Кроме того, нам известно, что $\phi(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, тогда:

$$\underbrace{\phi'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a})}_{n\times m} + \underbrace{\phi'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a})}_{n\times n} \cdot \underbrace{\varphi'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a}_x)}_{n\times m} = \mathbf{0} \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^n\ \ \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a}) + \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}) \cdot \varphi'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a}_x) = 0$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$(f'_{\mathrm{x}} - \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{x}}) + (f'_{\mathrm{y}} - \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{y}})\varphi'_{\mathrm{x}} = 0$$

и положим

$$\lambda = f'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}) \cdot (\phi'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}))^{-1}$$

Убедимся в том, что λ подходит:

$$f'_{\mathrm{x}} - \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{x}} = f'_{\mathrm{x}} - f'_{\mathrm{y}} \cdot (\phi'_{\mathrm{y}})^{-1} \cdot \phi'_{\mathrm{x}} = f'_{\mathrm{x}} - f'_{\mathrm{y}} \cdot (\phi'_{\mathrm{y}})^{-1} \cdot (-\phi'_{\mathrm{y}} \cdot \varphi'_{\mathrm{x}}) = f'_{\mathrm{x}} + f'_{\mathrm{y}} \cdot \varphi'_{\mathrm{x}} = 0$$
$$f'_{\mathrm{y}} - \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{y}} = f'_{\mathrm{y}} - f'_{\mathrm{y}} \cdot (\phi'_{\mathrm{y}})^{-1} \cdot \phi'_{\mathrm{y}} = 0$$

∎

Определение. В терминах последней теоремы отображение

$$G = f - \lambda\phi$$

называется *функцией Лагранжа*.

Теорема 1.6.2. (Достаточное условие относительного экстремума)
Пусть $C^1 \ni f : E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $C^1 \ni \phi : E \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in E$, $\phi(\mathbf{a}) = 0$, $\operatorname{rank}\phi'(\mathbf{a}) = n$, выполнено необходимое условие относительного экстремума, то есть $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n :$

$$\begin{cases} f'(\mathbf{a}) - \lambda \cdot \phi'(\mathbf{a}) = 0 \\ \phi(\mathbf{a}) = 0 \end{cases}$$

кроме того, пусть $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_x \in \mathbb{R}^m, \mathbf{h}_y \in \mathbb{R}^n)$. Тогда, так как $\operatorname{rank}\phi'(\mathbf{a}) = n$, то по $\mathbf{h}_x$ можно однозначно восстановить $\mathbf{h}_y$ такой, что $\phi'(\mathbf{a})\mathbf{h} = 0$. Тогда рассмотрим квадратичную форму

$$Q(\mathbf{h}_x) = \mathrm{d}^2_{\mathbf{a}} G(\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y)$$

Где $G = f - \lambda \cdot \phi$ — функция Лагранжа. В зависимости от определенности Q можно сделать вывод о наличии экстремума в точке $\mathbf{a}$:

- Q положительно определена $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}$ — точка относительного локального минимума.
- Q отрицательно определена $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}$ — точка относительного локального максимума.
- Q неопределена $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}$ — не точка экстремума.
- В остальных случаях требуется более детальное исследование.

Лемма 1.6.3. Пусть A — матрица $m \times m$. Тогда

- $A^T A$ симметрична
- $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = \langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$
- У $A^T A$ все собственные числа неотрицательны.

Доказательство.

- Помним, что $(A^T)^T = A$ и $(AB)^T = B^T A^T$

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

- $$\begin{aligned}\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle &= \sum_{i=1}^m (A\mathbf{x})_i^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\mathbf{x}_j\right)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\mathbf{x}_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^m a_{ik}\mathbf{x}_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m a_{ij} a_{ik} \mathbf{x}_k\right) \mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (A^T A\mathbf{x})_j \mathbf{x}_j \\ &= \langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\end{aligned}$$

-
$$\lambda\left\|\mathbf{x}\right\|^2 = \langle\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \langle A^TA\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \langle A\mathbf{x},A\mathbf{x}\rangle = \|A\mathbf{x}\|^2 \geqslant 0$$

■

Теорема 1.6.4. (Вычисление нормы линейного опреатора)
Пусть $A \in Lin(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, S — множество собственных чисел A^TA. Тогда

$$\|A\| = \max_{\lambda\in S}\sqrt{\lambda}$$

Доказательство.

- Вычислим для начала максимум $f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ на сфере $\mathbf{x}_1^2+\ldots+\mathbf{x}_m^2 = 1$, где A — симметричная матрица.

  $$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \sum a_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_1^2+\ldots+\mathbf{x}_m^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

  Тогда функция Лагранжа имеет вид

  $$G = \sum a_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j - \lambda\cdot\left(\sum_i \mathbf{x}_i^2 - 1\right)$$

  Продифференцируем её:

  $$G'_{\mathbf{x}_k} = 2\sum a_{kj}\mathbf{x}_j - 2\lambda\mathbf{x}_k$$

  Здесь мы воспользовались симметричностью матрицы. Решим систему уравнений $G' = \mathbf{0}$:

  $$\begin{cases} A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{x}_1^2+\ldots+\mathbf{x}_m^2 = 1 \end{cases}$$

  Решениями этой системы могут быть пары из собственных векторов $\mathbf{x}$ и собственных чисел λ (причем все собственные числа попадут в пару). Вычислим f в собственных векторах матрицы A.

  $$f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \langle\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \lambda\left\|\mathbf{x}\right\| = \lambda$$

- Докажем утверждение теоремы.

  $$\|A\|^2 = \max_{\mathbf{x}\in S^{m-1}}\|A\mathbf{x}\|^2 = \max_{\mathbf{x}\in S^{m-1}}\langle A\mathbf{x},A\mathbf{x}\rangle = \max_{x\in S^{m-1}}\langle (A^TA)\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \max_{\lambda\in\sigma A^TA}\lambda$$

  По предыдущей лемме A^TA симмметрична, тогда:

  $$\max_{x\in S^{m-1}}\langle A^TA\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \max_{\lambda\in\sigma A^TA}\lambda$$

  Но тогда, так как $\lambda \geqslant 0$, имеем:

  $$\|A\| = \max_{\lambda\in\sigma A^TA}\sqrt{\lambda}$$

■

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Сходимость фукнциональных последовательностей

Замечание. *Здесь и далее запись вида $f \to \perp$ будет означать, что f сходится. Знак $\perp$ используется, если не важно (или не известно), к чему сходится f.*

Определение. $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *сходится поточечно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на E, если

$$\forall x_0 \in E \;\; f_n(x_0) \to f(x_0)$$

иными словами, раскрывая определение сходимости последовательности:

$$\forall x_0 \in E \;\; [\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\; \forall n > N \;\; |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \to f$.

Примеры. TBD

Определение. $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на E, если

$$\sup_{\mathbf{x} \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

или, раскрывая описание супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\; \forall n > N \; [\forall x \in E \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightrightarrows f$.

Замечание. Из равномерной сходимости очевидным образом следует поточечная:

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \to f$$

Про сходимость мы значем очень многое для случая метрических пространств. А нельзя ли переформулировать новые определения так, чтобы они оказались обычной сходимостью, просто в хитром метрическом пространстве?

Предложение. (Метрическое пространство ограниченных функций)
Положим
$$\mathcal{F} \stackrel{def}{=} \{X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ограничено}\}$$
На этом множестве тривиально задается структура линейного пространства:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$
Оказывается, можно ввести **метрику** на $\mathcal{F}$, сходимость по которой есть равномерная сходимость. Для $f,g \in \mathcal{F}$ положим
$$\rho(f,g) \stackrel{def}{=} \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$$
Проверим, что это — метрика на $\mathcal{F}$

i) Неотрицательность очевидна. Равенство нулю может выполнится только для равных функций.

ii) Симметричность очевидна.

iii) Проверим неравенство треугольника. Применим техническое описание супремума для $\rho(f_1,f_2)$:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x\colon\ \sup_{y\in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)|$$
Далее
$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists x\colon\ \sup_{y\in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)| &\leqslant |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \\ &\leqslant \sup_{y\in X} |f_1(y) - f_3(y)| + \sup_{y\in X} |f_2(y) - f_3(y)| \\ &= \rho(f_1,f_3) + \rho(f_2,f_3)\end{aligned}$$
Получаем
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \rho(f_1,f_2) - \varepsilon \leqslant \rho(f_1,f_3) + \rho(f_2,f_3)$$
Откуда непосредственно следует
$$\rho(f_1,f_2) \leqslant \rho(f_1,f_3) + \rho(f_2,f_3)$$

Осталось только понять, что теперь означает сходимость по этой метрике. Пусть (f_n) — последовательность в $\mathcal{F}$, сходящаяся к f по метрике ρ:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \ \rho(f_n, f) < \varepsilon$$
Раскроем значение ρ:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \ [\forall x \in X\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$
А это — обычное определение равномерной сходимости!

Подобную конструкцию, по всей видимости, не получится ввести для поточечной сходимости. Зато, можно построить хаусдорфово топологическое пространство, в котором сходимость будет означать поточечную сходимость.

Предложение. (Топологическое пространство ограниченных функций)
Введем на $\mathcal{F}$ топологию, порожденную следующими множествами:

$$U_\varepsilon(f)_{x_1,\ldots,x_n} \overset{def}{=} \{\, g : X \to \mathbb{R} \mid \forall i \;\; |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \,\}$$

Поймем теперь, что означает сходимость в этом топологическом пространстве:

$$f_n \to f \iff \forall U_\varepsilon(f)_{x_1,\ldots,x_n} \exists N \in \mathbb{N}\colon\; \forall n > N \;\; f_n \in U_\varepsilon(f)_{x_1,\ldots,x_n}$$

Что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon\; \forall n > N \;\; \forall i \;\; |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Что как раз и есть поточечная сходимость! Просто запись вида

$$[\forall x_0 \in X \; \forall \varepsilon > 0] \; \exists N \in \mathbb{N}\colon\; \forall n > N \;\; |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

В этом пространстве обретает вид

$$[\forall U_\varepsilon(f)_{x_0}] \; \exists N \in \mathbb{N}\colon\; \forall n > N \;\; |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1. (Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости)

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon\; \forall n, m > N \; [\forall x \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Обычное свойство всех последовательностей, сходящихся по метрике (если все f_n и f лежат в $\mathcal{F}$). Общее доказательство такое:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longleftarrow$ Зафиксируем x. Тогда $f_n(x)$ — обычная фундаментальная вещественная последовательность. Тогда, так как $\mathbb{R}$ — полное, получаем

$$\forall x \; \exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Посмотрим на фундаментальность f_n:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon\; \forall n, m > N \;\; [\forall x \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

и перейдем к пределу $m \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon\; \forall n > N \;\; [\forall x \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Что и есть определение равномерной сходимости.

■

Примеры. TBD

Теорема 2.1.2. (Стокс-Зейдель)
Пусть $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, X — топологическое пространство, f_n непрерывны в $c \in E$, и $f_n \rightrightarrows f$ на X. Тогда f непрерывна в c.

Доказательство. Для любых n выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Воспользуемся равномерной сходимостью: выберем n таким, чтобы

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$
$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Теперь воспользуемся непрерывностью f_n: выберем такую окрестность $U(c)$, чтобы $\forall x, y \in U(c)$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Тогда

$$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$$

что и означает непрерывность f в точке c. ■

Определение. Будем говорить, что f_n сходится *локально равномерно* к f на X, если

$$\forall x \in X \ \exists U(x) \colon \ f_n \rightrightarrows f \text{ на } U(x)$$

Замечание. Для выполнения условия теоремы Стокса-Зейделя достаточно равномерной сходимости на некоторой окрестности c.

Замечание. Для того, чтобы f было непрерывным на X, достаточно, чтобы f_n локально равномерно на X сходилось к f.

Теорема 2.1.3. (О предельном переходе под знаком интеграла)
Пусть $f_n \in C([a, b])$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\int"] & f \arrow[d, "\int"] \\ \int_a^b f_n \arrow[r, dashed, "n \to +\infty"] & \int_a^b f \end{tikzcd}$$

Доказательство. f непрерывна на $[a, b]$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Тогда

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a|$$

Из равномерной сходимости имеем:

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

тогда

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b-a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

■

Теорема 2.1.4. (Правило Лейбница)
$f : [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \to \mathbb{R}$, $\exists f'_y$, f'_y, f непрерывны. Пусть

$$\phi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx$$

Тогда ϕ дифференцируемо на $[y_1, y_2]$ и

$$\phi'(y) = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

Доказательство.

$$\frac{\phi(y+\frac{1}{n}) - \phi(y)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\int_{x_1}^{x_2} \left(f\left(x, y+\frac{1}{n}\right) - f(x,y) \right) dx \underset{\text{Лагранж}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f'_y\left(x, y+\frac{\theta}{n}\right) dx$$

Обозначим

$$g_n(x,y) = f'_y\left(x, y+\frac{\theta}{n}\right)$$

f'_y непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывна на нём. Воспользуемся этим:

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall n \colon \frac{1}{n} < \delta\ \forall x \quad \left| f'_y\left(x, y+\frac{1}{n}\right) - f'_y(x,y) \right| < \varepsilon$$

Отсюда получаем по определению

$$g_n(x,y) \rightrightarrows f'_y(x,y) \text{ на } [x_1, x_2]$$

Воспользуемся теоремой о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_1}^{x_2} g_n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

Понятно, что вместо последовательности $\frac{1}{n}$ можно рассматривать любую последовательность h_n, сходящуюся к 0. То есть

$$\phi'(y) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\phi(y+h_n) - \phi(y)}{h_n} = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

■

Теорема 2.1.5. (О предельном переходе под знаком производной)
$f_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$, $f_n \to f$ поточечно на $\langle a,b\rangle$, $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a,b\rangle$. Тогда

- $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$
- $f' = \varphi$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd}
f_n \arrow[r, "n\to+\infty"] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & f \arrow[d, dashed, "\mathrm{d}"] \\
f_n' \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \varphi
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle$, тогда $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0, x_1]$. Тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Откуда

$$f(x_1) - f(x_0) \xleftarrow[n\to+\infty]{} f_n(x_1) - f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

То есть

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi = f(x_1) - f(x_0)$$

Тогда f — первообразная φ. φ непрерывна по теореме Стокса-Зейделя. Получаем, что $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ и $f' = \varphi$. ∎

2.2 Сходимость функциональных рядов

Определение. Пусть $u_n\colon E \to \mathbb{R}$, тогда *функциональным рядом* будем называть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *сходится поточечно* на E, если $S_N(x) \to S(x)$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно* на E, если $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$.

Замечание. Из равномерной сходимости следует поточечная.

Лемма 2.2.1. (Об остатке функционального ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows 0 \iff R_N(x) \rightrightarrows 0$

Доказательство. $\sup\limits_{x\in E} |R_{N+1}(x)| = \sup\limits_{x\in E} |S(x) - S_N(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ ■

Лемма 2.2.2. (Необходимое условие равномерной сходимости ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \Longrightarrow u_n(x) \rightrightarrows 0$

Доказательство.

$$\sup_{x\in E} |u_N(x)| = \sup_{x\in E} |R_N(x) - R_{N+1}(x)| \leqslant \sup_{x\in E} |R_N(x)| + \sup_{x\in E} |R_{N+1}(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

■

Теорема 2.2.3. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
$u_n\colon E \to \mathbb{R}$, $\exists c_n\colon \forall n, x \quad |u_n(x)| \leqslant c_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n \to \perp$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$.

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \iff R_N(x) \rightrightarrows 0 \iff \sup_{x\in E} |R_N(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$
$$\iff \sup_{x\in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right| \leqslant \sup_{x\in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

■

Теорема 2.2.4. (Критерий Больцано-Коши сходимости функционального ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x) \iff \forall \varepsilon\ \exists N\colon\ \forall m, n > N \quad \sup\limits_{x\in E} |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство. Это обычный критерий Больцано-Коши для $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ ■

Теорема 2.2.5. (Стокс-Зейдель)
$u_n\colon E \to \mathbb{R}$, u_n непрерывны в $x_0 \in E$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$, тогда $S(x)$ непрерывна в x_0.

Доказательство. $\forall N$ $S_N(x)$ непрерывна в x_0 как конечная сумма непрерывных функций. Тогда по теореме Стокса-Зейделя для функциональных последовательностей $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$, $S_N(x)$ непрерывны в $x_0 \Longrightarrow S(x)$ непрерывна в x_0. ■

Теорема 2.2.6. (Интегрирование функциональных рядов)
$u_n \in C([a,b])$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

иначе говоря:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

Доказательство. $S \in C([a,b])$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Применим аналогичную теорему для функциональных последовательностей к $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$:

$$\int_a^b S_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b S(x)\,dx$$

в левой части интеграл и сумму можно переставлять местами (так как сумма конечная). Поэтому

$$\sum_{n=1}^{N} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b S_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b S(x)\,dx$$

Слева стоят частичные суммы обычного числового ряда. Поэтому по определению сходимости чисового ряда имеем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

■

Теорема 2.2.7. (Дифференцирование функциональных рядов)
$u_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \to S(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a,b\rangle$,
тогда $S \in C^1(\langle a,b\rangle)$, причем $S'(x) = \varphi(x)$.

Доказательство. Введем функциональную последовательность: $S_N(x) \to S(x)$. Поскольку $S_N(x)$ — конечные суммы непрерывно дифференцируемых функций, $S_N(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$, причем $S'_N(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда по аналогичной теореме для функциональных последовательностей получаем требуемое. ■

Теорема 2.2.8. (О предельном переходе в функциональных рядах)
$u_n : E \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E, $\forall n\ \exists a_n = \lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$ на E.

Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Иначе говоря:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Доказательство. Обозначим $S_N^a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Проверим критерий Больцано-Коши для $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$:

$$|S^a_{n+p} - S^a_n| \leqslant |S^a_{n+p} - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S^a_n|$$

Поскольку S^a_{n+p} и $S_{n+p}(x)$ просто конечные суммы, в них спокойно можно переставлять предел и сумму. Поэтому найдется такая окрестность точки x_0, что $|S^a_{n+p} - S_{n+p}(x)| < \varepsilon$. Аналогично поступим с третьим слагаемым. Из критерия Больцано-Коши получаем такое N, что для $\forall n, m > N$ $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Таким образом имеем:

$$|S^a_{n+p} - S^a_n| < 3\varepsilon$$

Мы доказали сходимость ряда a_n. Проверим второе утверждение теоремы. Положим

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \neq x_0 \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

Все u_n, очевидно, непрерывны в x_0. Если мы проверим, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E \cup \{x_0\}$, то по теореме Стокса-Зейделя $\tilde{S}$ будет непрерывной, что означает

$$\lim_{x\to x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

в левой части x_0 никогда не подставляется в $\tilde{S}$, поэтому

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Осталось проверить, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E \cup \{x_0\}$.

$$\sup_{x\in E\cup\{x_0\}}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}\tilde{u}_n(x)\right| \leqslant \sup_{x\in E}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}u_n(x)\right| + \sup_{x\in\{x_0\}}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}a_n\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

■

Теорема 2.2.9. (О предельном переходе в функциональных последовательностях) $f_n\colon E \subseteq X \to \mathbb{R}$, X — метрическое пространство, x_0 — предельная точка E, $f_n \rightrightarrows f$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$, причем $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$. Иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "x\to x_0"] & f(x) \arrow[d, dashed, "x\to x_0"] \\
f_n(x_0) \arrow[r, "n\to+\infty"] & f(x_0)
\end{tikzcd}$$

или

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Доказательство. Введем обозначения: $u_1 = f_1, u_2 = f_2 - f_1, \ldots, a_k = A_k - A_{k-1}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = f_n$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x)$ на E, причем $u_k(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a_k$. Пользуясь аналогичной теоремой для функциональных рядов, получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = A = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

— сходится. Кроме того имеем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

■

Теорема 2.2.10. (Признак Дирихле)
Пусть $a_n, b_n\colon X \to \mathbb{R}$, причем

- $\exists C_a\colon \forall N \forall x \in X \ \left|\sum\limits_{i=1}^{N} a_n(x)\right| \leqslant C_a$
- $b_n \rightrightarrows 0$, $\forall x \in X$ b_n монотонна по n.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \perp$

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{N\leqslant k\leqslant M} a_k b_k = A_N b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

тогда

$$\left|\sum_{k=N}^{M} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant |A_N b_M| + |A_{N-1} b_N| + \left|\sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k\right|$$
$$\leqslant C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} |b_k - b_{k+1}|$$

Все слагаемые в сумме одного знака. Считая, что $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$, имеем:

$$\left|\sum_{k=N}^{M} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1})$$
$$\leqslant C_a \cdot (|b_M| + |b_N| + |b_M| + |b_N|) \xrightarrow[N,M\to+\infty]{} 0$$

■

Теорема 2.2.11. (Признак Абеля)
Пусть $a_n, b_n : X \to \mathbb{R}$, причем

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \rightrightarrows \perp$
- $\exists C_b : \forall N \forall x \in X\ |b_n(x)| \leqslant C_b, \forall x \in X\ \ b_n(x)$ монотонна по n.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \perp$

Доказательство. Применим критерий Коши к ряду a_n:

$$\forall \varepsilon \exists N : \forall n > N\ \forall p \geqslant 1\ \forall x \in X\ |A_{n,p}(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_n(x)\right| < \varepsilon$$

Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant |b_{n+p}(x) A_{n,p}(x)| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_{k+1}(x) - b_k(x)) A_{n,k}(x)\right|$$
$$\leqslant C\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_{k+1}(x) - b_k(x)| \leqslant C\varepsilon + \varepsilon |b_{n+p}(x)| + \varepsilon |b_n(x)|$$
$$\leqslant C\varepsilon + 2C_b\varepsilon$$

Здесь мы воспользовались монотонностью и ограниченностью b_n. ■

2.3 Степенные ряды

Определение. *Степенным рядом* называется формальный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, где z, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема 2.3.1. (О круге сходимости степенного ряда)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд. Тогда верно одно из трёх:

- Ряд сходится только при $z = z_0$
- Ряд сходится при любых z
- $\exists\ 0 < R < +\infty$ такое, что ряд сходится при $|z-z_0| < R$, и расходится при $|z-z_0| > R$. Поведение на границе не известно.

Доказательство. Изучим ряд на абсолютную сходимость, полуьзуясь признаком Коши: рассмотрим величину $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$:

- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, тогда ряд сходится, очевидно, только при $z = z_0$.
- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, тогда ряд сходится для любых z.
- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, +\infty)$, тогда
  a) при $|z-z_0| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд сходится.
  b) при $|z-z_0| > \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд расходится.

■

Следствие 2.3.2. (Формула Адамара)
Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Следствие 2.3.3. (О множестве сходимости степенного ряда)
Множеством сходимости степенного ряда является $B(z_0, R) \cup \Gamma$, где $\Gamma \subseteq \operatorname{Cl} B(z_0, R)$, а R — радиус сходимости ряда.

Теорема 2.3.4. (О равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд, причем $0 < R \leqslant +\infty$. Тогда

- $\forall\ 0 < r < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{B(z_0, r)}$.

- $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \in C(B(z_0, R))$.

Доказательство.

- Применим признак Вейерштрасса: $|a_n(z-z_0)^n| \leqslant |a_n| \cdot r^n$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot r^n$ сходится абсолютно, потому что исходный ряд сходится при $z = z_0 + r$.

- Слагаемое непрерывно, есть равномерная сходимость на $\overline{B(z_0, r)} \Longrightarrow$ во всех точках $B(z_0, R)$ сумма непрерывна.

$\blacksquare$

Лемма 2.3.5. $w, w_0 \in \mathbb{C}, |w|, |w_0| \leqslant r$. Тогда $|w^n - w_0^n| \leqslant nr^{n-1}|w - w_0|$

Доказательство.

$|w^n - w_0^n| = |w - w_0| \cdot |w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \ldots + w_0^{n-1}| \leqslant |w - w_0| \cdot ||w|^{n-1} + \ldots + |w_0|^{n-1}| \leqslant |w - w_0| nr^{n-1}$

$\blacksquare$

Лемма 2.3.6. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$ имеют одинаковый радиус сходимости.

Доказательство. Пусть $S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \widetilde{S}_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$, тогда $\widetilde{S}_N(x) = xS_N(x) \Longrightarrow$ $\lim\limits_{N\to+\infty} \widetilde{S}_N(x) = x \lim\limits_{N\to+\infty} S_N(x)$ — существуют на одном и том же множестве. $\blacksquare$

Теорема 2.3.7. (О дифференцировании степенного ряда)
Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд, причем $0 < R \leqslant +\infty$, и $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$.
Тогда

- φ имеет тот же радиус сходимости, что и f.

- f дифференцируемо на $B(z_0, R)$, причем $f'(z) = \varphi(z)$

Доказательство.

- Найдем радиус сходимости $\hat{R}$ ряда φ по формуле Адамара и пользуясь последней леммой:
$$\hat{R} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

- Рассмотрим точку $a \in B(z_0, R)$ и покажем, что в этой точке существует производная ряда, причем она равна тому, что ожидается. Сузим круг до $B(z_0, r)$, где $r = \frac{R+|a-z_0|}{2}$. Положим $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)}$$

Пусть $w = z - z_0 : |w| < r$, $w_0 = a - z_0 : |w_0| < r$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n - w_0^n}{w-w_0} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot nr^{n-1}$$

Последний рад сходится по первому пукнту теоремы. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \dfrac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)}$ сходится равномерно. Зная это, воспользуемся теоремой о предельном переходе в сумме:

$$\begin{aligned} f'(z) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} &= \lim_{z\to a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{z\to a} \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n (z-z_0)^{n-1} \end{aligned}$$

■

Следствие 2.3.8. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \in C^\infty(B(z_0,R))$, причем все производные — почленные.

Следствие 2.3.9. (О почленном интегрировании степенного ряда)
Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ где $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in B(x_0, R)$, тогда

- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и f.
- Выполняется равенство

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(x-x_0)^n dx$$

Определение. *Экпонентой* называется функция $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такая, что $z \underset{\exp}{\mapsto} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

Теорема 2.3.10. (Свойства экспоненты)

- Радиус сходимости равен $+\infty$
- $\exp(0) = 1$
- $\overline{\exp}(z) = \exp(z)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$
- $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\exp(z)-1}{z} = 1$
- $\exp(z+w) = \exp(z) + \exp(w)$

Доказательство. Докажем последние два утверждения. Остальные очевидны.

- $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{e^z - 1}{z - z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{e^z - e^0}{z - z_0} = (e^z)'\Big|_0 = 1$
-

$$\exp(z+w) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \exp(z)\exp(w)$$

■

Теорема 2.3.11. (Метод Абеля)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ — сходящийся ряд. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ при $|x| < 1$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \lim\limits_{x\to 1_-} f(x)$

Доказательство. Для начала отметим, что f задана корректно: при $0 < x < 1$ ряд сходится равномерно по признаку Абеля. Так как f — ряд, то область его сходимости симметрична, то есть для отрицательных x f тоже задана корректно. Раз f — равномерно сходящийся ряд, причем $c_n x^n$ непрерывны, то по теореме Стокса-Зейделя f непрерывна. Раз так, имеем

$$\lim_{x\to 1_-} = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

■

Теорема 2.3.12. (Формула Григори-Лейбница)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Доказательство. Положим $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$, тогда $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x$. Тогда $f(x) = c + \arctan x$. Подставляя $x = 0$ убеждаемся, что $c = 0$. Получаем $\lim\limits_{x\to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1_-} \arctan x = \frac{\pi}{4}$. ■

Следствие 2.3.13. (О сходимости произведения рядов)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ сходится, причем $AB = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$.

Доказательство. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $x \in [0, 1]$. при $x < 1$ ряды сходятся абсолютно (вспомним теорему о круге сходимости: в ней мы доказывали абсолютную сходимость), поэтому по старой теореме о произведении рядов $f(x)g(x) = h(x)$. Осталось совершить предельный переход в этом равентсве, чтобы получить требуемое. ■

2.4 Ряды тейлора

Определение. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ разложима в степенной ряд в точке x_0, если $\exists U(x_0)\ \exists \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n:\ \forall x\in U(x_0)\ \ f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$

Теорема 2.4.1. (Единственность разложения в ряд)
f разложима в степенной ряд в $x_0 \Longrightarrow$ этот ряд единственный.

Доказательство. Для доказательства этого непосредственно вычислим a_i.

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots$$

Поэтому $f(x)\in C^\infty(U(x_0))$. Значит, можно дифференцировать. Подставим $x=x_0$: $a_0=f(x_0)$. Этим мы однозначно определили a_0. Рассмотрим

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\dots$$

Подставим $x=x_0$: $a_1=f'(x_0)$. Продолжая в том же духе, однозначно определим все a_i. ■

Определение. *Рядом Тейлора* $f\in C^\infty(U(x_0))$ в точке x_0 называется формальный ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Теорема 2.4.2. (Разложение бинома в ряд Тейлора)
Пусть $\sigma\in\mathbb{R}$, $|x|<1$, тогда

$$(1+x)^\sigma=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\sigma}{n}x^n$$

Доказательство. Изучим ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x(\sigma-n)}{n+1}\right|=|x|<1$$

Значит, при $|x|<1$ ряд сходится абсолютно. Раз ряд степенной, то на круге сходимости он сходится и равномерно. Пусть $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\binom{\sigma}{n}x^n$. Заметим, что

$$S'(x)(1+x)=\sigma S(x)$$

Теперь положим $f(x)=\dfrac{S(x)}{(1+x)^\sigma}$. Достаточно показать, что $f(x)=1$ при $|x|<1$. Изучим производную f:

$$f'(x)=\frac{S'(x)(1+x)^\sigma+S(x)\sigma(1+x)^{\sigma-1}}{(1+x)^{2\sigma}}=\frac{S'(x)}{(1+x)^\sigma}+\frac{\sigma S(x)}{(1+x)^{\sigma-1}}=0$$

Осталось проверить $f(x)=1$ в каком-нибудь x:

$$f(0)=\frac{1}{1}=1$$

■

Замечание. Пусть $|t| < 1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)\cdot t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}}$$

Теорема 2.4.3. (Критерий разложимости в ряд Тейлора)
Пусть $f \in C^\infty([x_0-h, x_0+h])$. Тогда f разложима в ряд Тейлора в $U(x_0) \iff \exists \delta, C, A\colon\ \forall n\ \forall |x-x_0| < \delta\ \ |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$

Доказательство.

($\Longleftarrow$) Оценим остаток в форме Лагранжа:

$$f(x) = T_nf(x_0) + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!}(x-x_0)^n$$
$$\left|\frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!}(x-x_0)^n\right| \leqslant \frac{CA^n n!}{n!}|x-x_0|^n$$

Чтобы остаток стремился к нулю, нужно, чтобы $A|x-x_0| < 1$, откуда получаем $U(x_0)\colon\ |x-x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$. Поскольку теперь остаток ряда стремится к нулю, то $\forall x \in U(x_0)\ T_nf(x) \to f(x)$, что и требовалось доказать.

($\Longrightarrow$) Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ в $U(x_0)$. Ряд сходится, поэтому для (произвольного) $x = x_1 \neq x_0$ имеем

$$\exists C_1\colon\ \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n\right| \leqslant C_1 \Longrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \leqslant C_1 n! \frac{1}{|x_1-x_0|^n}$$

Положим $B_n = \dfrac{1}{|x_1-x_0|^n}$. Проанализируем m-ю производную f:

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m}\right| \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty}\left|C_1\frac{B^n n!}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m}\right|$$
$$= B^m C_1 \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)\cdot|B(x-x_0)|^{n-m}$$
$$= C_1B^m\frac{m!}{(1-|B(x-x_0)|)^{m+1}} \underset{x\colon\ B|x-x_0|<\frac{1}{2}}{\leqslant} \frac{C_1 m! B^m}{\frac{1}{2^{m+1}}} = C_1 m! B^m 2^{m+1} = (2C_1)m!(2B)^m$$

■

2.5 Суммирование по Чезаро

Теорема 2.5.1. (Коши о перманентности метода средних арифметических)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \underset{c/a}{=} S$

Доказательство. Обозначим $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}(S_0 + \ldots + S_n)$. По определению

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_1 : \; \forall N > N_1 \; |S_N - S| < \varepsilon$$

Далее:

$$|\sigma_N - S| = \left| \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} (S_n - S) \right| \leqslant \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} |S_n - S| \underset{N > N_1}{=} \underbrace{\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N_1} |S_n - S|}_{= \frac{c}{N+1} \to 0}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{N+1} \sum_{n=N_1+1}^{N} |S_n - S|}_{< \varepsilon} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

■

Глава 3

Криволинейные интегралы

3.1 Интеграл по кусочно-гладкому пути

Определение. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто, тогда $V : E \to \mathbb{R}^m$ будем называть *векторным полем*. По умолчанию $V \in C(E)$.

Определение. (Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути)
Пусть V - векторное поле, $\gamma : [a,b] \to E$ — кусочно-гладкий путь, тогда *интегралом векторного поля по этому пути* называется

$$I(V,\gamma) \stackrel{def}{=} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

Замечание. Предыдущее определение можно переписать в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} I(V,\gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t))\ \gamma'(t) dt \\ &\underset{\gamma\to x}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(x(t))\ x_i'(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i dx_i \end{aligned}$$

Определение. Пусть $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^m$ — пути, $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, тогда определим *произведение путей* $\gamma = \gamma_1\gamma_2 : [a,d] \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a,b] \\ \gamma_2(t-b+c), t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Определение. *Обратным путем* называется путь $\gamma^{-1} : t \mapsto \gamma(a+b-t)$.

Теорема 3.1.1. (О свойствах интеграла по кусочно-гладкому пути)

1. Линейность по полю: $I(\alpha U+\beta V,\gamma)=\alpha I(U,\gamma)+\beta I(V,\gamma)$ для любых полей U,V, любого к-г пути γ и любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2. Аддитивность при дроблении пути: $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^m$, $a<c<b$, тогда $I(v,\gamma)=I(V,\gamma\big|_{[a,c]})+I(V,\gamma\big|_{[c,b]})$.

3. Замена параметра: пусть $\varphi\colon[p,q]\to[a,b]$ — сюрьекция, причем $\varphi(p)=a$, $\varphi(q)=b$, $\varphi\in C^1$, тогда $I(V,\gamma)=I(V,\gamma\circ\varphi)$.

4. Интеграл произведения путей: $I(V,\gamma_1\gamma_2)=I(V,\gamma_1)+I(V,\gamma_2)$.

5. $I(V,\gamma)=-I(V,\gamma^{-1})$.

6. $|I(V,\gamma)|\leqslant\max\limits_{x\in\gamma[a,b]}\|V(x)\|\cdot l(\gamma)$.

Доказательство.

3.
$$\begin{aligned}I(V,\gamma)=\int_a^b\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\underset{t=\varphi(s)}{=}\int_p^q\langle V(\gamma(\varphi(s))),\gamma'(\varphi(s))\rangle\varphi'(s)\,ds\\=\int_p^q\langle V((\gamma\circ\varphi)(s)),(\gamma\circ\varphi)'(s)\rangle\,ds=I(V,\gamma\circ\varphi)\end{aligned}$$

Поскольку любые две параметризации гладкого многообразия отличаются на диффеоморфизм, интеграл зависит только от носителя пути.

5.
$$\begin{aligned}I(V,\gamma^{-1})&=\int_a^b\langle V(\gamma(a+b-t)),\gamma'(a+b-t)\rangle\cdot(-1)\,dt\\&\underset{\tau=a+b-t}{=}\int_a^b\langle V(\gamma(\tau)),\gamma'(\tau)\rangle\,d\tau=I(V,\gamma)\end{aligned}$$

6.
$$|I(V,\gamma)|\leqslant\int_a^b\left|\langle V(\gamma),\gamma'\rangle\right|\leqslant\int_a^b\|V(\gamma)\|\cdot\left\|\gamma'\right\|\leqslant\max_{\gamma}\|V(\gamma)\|\cdot\int_a^b\left\|\gamma'\right\|$$

■

3.2 Потенциальные векторные поля

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$, $V: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m \in C$, тогда поле V называется *потенциальным*, если оно является градиентом какого-то отображения, то есть $\exists f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})\colon\ V = \operatorname{grad} f$.

Замечание. Пусть f_1, f_2 — отображения из определения потенциальности поля V. Тогда $f_1 - f_2 = c \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.2.1. (Обобщенная формула Ньютона-Лейбница)
Пусть $V: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — потенциальное поле с потенциалом f, $\gamma: [a, b] \to \mathcal{O}$ — кусочно-гладкий путь, $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$. Тогда

$$I(V, \gamma) = f(B) - f(A)$$

Доказательство. Докажем теорему для гладкого (не кусочно) пути. Тогда кусочно-гладкий путь разобъем на гладкие пути и посчитаем интеграл как сумму интегралов по этим путям. Сумма будет телескопической, получится заявленная формула.
Пусть $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. Тогда

$$\varphi'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

То есть φ — первообразная подынтегрального выражения. Тогда работает обычная формула Ньютона-Лейбница. ■

Определение. Интеграл векторного поля *не зависит от пути* в $\mathcal{O}$, если $\forall A, B\ \forall \gamma_1, \gamma_2$ кусочно-гладких путей из A в B $\ I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$.

Лемма 3.2.2. Пусть $\mathcal{O}$ — область, $A \in \mathcal{O}$, тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \exists \gamma_{\mathbf{x}}\colon A \rightsquigarrow \mathbf{x}$ — кусочно-гладкий.

Доказательство. Пусть $M_A = \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} \mid \exists \gamma_{\mathbf{x}}\}$, где $\gamma_{\mathbf{x}}$ — путь из формулировки. Тогда M_A открыто. Действительно, пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{O}\colon \exists \gamma_{\mathbf{x}}$. Тогда, поскольку $\mathcal{O}$ открыто, $\exists U(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{O}$. Но тогда $\forall \mathbf{y} \in U(\mathbf{x})\ \exists \gamma_{\mathbf{y}}$, получаемый произведением пути $\gamma_{\mathbf{x}}$ и прямого пути из $\mathbf{x}$ в $\mathbf{y}$.
Рассмотрим теперь множество $\mathcal{O} \setminus M_A$: оно тоже открыто, так как если до точки $\mathbf{x}$ нет пути, то и до ближайших точек его тоже нет, иначе можно было бы достроить путь и до $\mathbf{x}$.
Получается, мы разбили $\mathcal{O}$ на два открытых непересекающихся множества. Поскольку $\mathcal{O}$ связно, одно из них должно оказаться пустым. M_A не пустое, потому что совершенно очевидно, что $A \in M_A$. Поэтому $M_A = \mathcal{O}$, что и требовалось. ■

Теорема 3.2.3. (Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)
$V: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$. Эквивалентны утверждения:

1. V — потенциальное
2. $I(V, \gamma)$ не зависит от пути

3. $\forall$ кусочно-гладкой петли γ $I(V,\gamma)=0$

Доказательство.

$1 \Longrightarrow 2$ см. обобщенную теорему Ньютона-Лейбница.

$2 \Longrightarrow 3$ Пусть A — точка на петле γ_0 и γ — постоянный путь в точке A. Тогда

$$I(V,\gamma_0) \overset{(2)}{=} I(V,\gamma)=0$$

$3 \Longrightarrow 2$ Пусть γ_1, γ_2 — пути из A в B. Тогда рассмотрим кусочно-гладкую петлю $\gamma_0=\gamma_1\gamma_2^{-1}$. Имеем:

$$0=I(V,\gamma_0)=I(V,\gamma_1\gamma_2^{-1})=I(V,\gamma_1)+I(V,\gamma_2^{-1})=I(V,\gamma_1)-I(V,\gamma_2)$$

$2 \Longrightarrow 1$ Построим потенциал. Зафиксируем точку $A \in \mathcal{O}$. Для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ зафиксируем кусочно-гладкий путь $\gamma_{\mathbf{x}}\colon A \rightsquigarrow \mathbf{x}$ (см. лемму). Проверим, что $f(\mathbf{x}) = I(V,\gamma_{\mathbf{x}})$ — потенциал V. Для этого докажем, что $f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x})$ (число 1 здесь не играет никакой роли). Рассмотрим путь $\gamma_0\colon t \mapsto \mathbf{x} + th\mathbf{u}_1$ для $t \in [0,1]$, где $\mathbf{u}_1$ — стандартный базисный вектор. Тогда путь $\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0\colon A \rightsquigarrow \mathbf{x}+h\mathbf{u}_1$ — тоже кусочно-гладкий. Из аддитивности интеграла по пути имеем:

$$f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1)-f(\mathbf{x})=I(V,\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0)-I(V,\gamma_{\mathbf{x}})=I(V,\gamma_0)$$

Здесь мы воспользовались (2) в первом переходе, позволив себе считать $f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1)$ не через $\gamma_{\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1}$, а через $\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0$. Далее

$$\begin{aligned} I(V,\gamma_0) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i\, d\mathbf{x}_i \underset{\substack{d\mathbf{x}_1=hdt \\ d\mathbf{x}_i=0, i\geqslant 2}}{=} \int_0^1 V_1(\mathbf{x}_1+th,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)h\, dt \\ &= V_1(\mathbf{x}_1+\theta h,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)h\cdot|1-0| \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1)-f(\mathbf{x})}{h}=V_1(\mathbf{x}_1+\theta h,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)\xrightarrow[h\to 0]{\text{непрер.}} V_1(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)$$

■

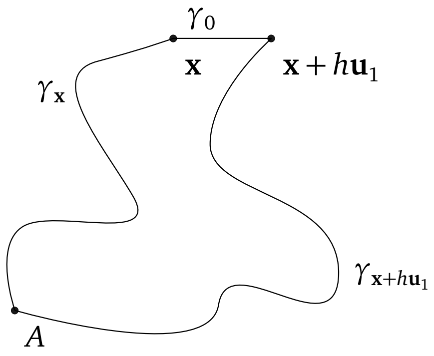

Рис. 3.1: Теорема о характеризации потенциальных векторных полей

3.3 Локально потенциальные векторные поля

Лемма 3.3.1. $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — гладкое потенциальное векторное поле. Тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \forall k, j\ \ \dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$

Определение. Пользуемся теоремой о независимотсти частных производных от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k \mathbf{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k} = \frac{\partial V_j}{\partial \kappa_k}$$

Теорема 3.3.2. (Лемма Пуанкаре)

Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — выпуклая область, $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m \in C^1$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V потенциально.

Доказательство. Зафиксируем точку $A \in \mathcal{O}$. Положим

$$\begin{gathered}\gamma_{\mathbf{x}}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m \\ t \mapsto A + t(\mathbf{x} - A) \in \mathcal{O}\end{gathered}$$

Проверим, что $f(\mathbf{x}) = I(V, \gamma_{\mathbf{x}})$ — потанциал V. Поскольку $V \in C^1$, можно использовать правило Лейбница:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot (\mathbf{x}_i - A_i)\, dt \\
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \left(V_j(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_j}(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot t \cdot (\mathbf{x}_i - A_i) \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(V_j(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_i}(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot t \cdot (\mathbf{x}_i - A_i) \right) dt
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(t \cdot V_j(A + t(\mathbf{x} - A))\right)'_t = t \cdot V_j(A + t(\mathbf{x} - A))\Big|_0^1 = V_j(\mathbf{x})$$

■

Определение. Поле $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ называется *локально потенциальным*, если оно потенциально в некоторой окрестности любой точки.

Следствие 3.3.3. (Лемма Пуанкаре)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто в $\mathbb{R}^m$, $V \in C^1(\mathcal{O})$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V локально потенциально.

3.4 Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути

Лемма 3.4.1. (О гусенице)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, для всех $\mathbf{x}$ задана окрестность $U(\mathbf{x})$, $\gamma : [a, b] \to \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$, тогда существует такое дробление пути $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и такие шары $B_k = B_k(\mathbf{x}_k, r_k) \subseteq U(\mathbf{x}_k)$, что $\forall k \ \operatorname{Im} \gamma\big|_{[t_k-1, t_k]} \subseteq B_k$.

Доказательство. Зафиксируем за каждой точкой $c \in [a, b]$ шар $B_c = B(\gamma(c), r_c)$ такой, чтобы $B_c \subseteq U(\gamma(c))$. Теперь вычислим для всех точек величины:

$$\widetilde{\alpha}_c = \inf_{\alpha \in [a,b]} \{\, \alpha \mid \operatorname{Im} \gamma\big|_{[\alpha, c]} \subseteq B_c \,\}$$
$$\widetilde{\beta}_c = \sup_{\beta \in [a,b]} \{\, \beta \mid \operatorname{Im} \gamma\big|_{[c, \beta]} \subseteq B_c \,\}$$

Далее сузим $(\widetilde{\alpha}_c, \widetilde{\beta}_c)$:

$$\widetilde{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \widetilde{\beta}_c$$

Теперь $\forall c \ \operatorname{Im} \gamma\big|_{(\alpha_c, \beta_c)} \subseteq B_c$. Кроме того:

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{c \in [a,b]} (\alpha_c, \beta_c) \Longrightarrow \exists c_i : \ [a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_{c_i}, \beta_{c_i})$$

Далее для краткости вместо c_i будет использоваться просто i. Уберем из покрытия множества, которые можно покрыть другими множествами (это можно следать, поскольку покрытие конечное). Теперь на каждом интервале (α_i, β_i) есть точка d_i, не принадлежащая ни одному интервалу, кроме i-го. Выберем t_1 так, чтобы оно лежало сразу в 1 и 2 множествах. Тогда $a = t_0 < d_1 < t_1$, и

$$d_1 \in [t_0, t_1] \subseteq (\alpha_1, \beta_1) \Longrightarrow \operatorname{Im} \gamma\big|_{[t_0, t_1]} \subseteq B_1$$

Продолжая аналогичный процесс далее, получаем нужное дробление пути. ■

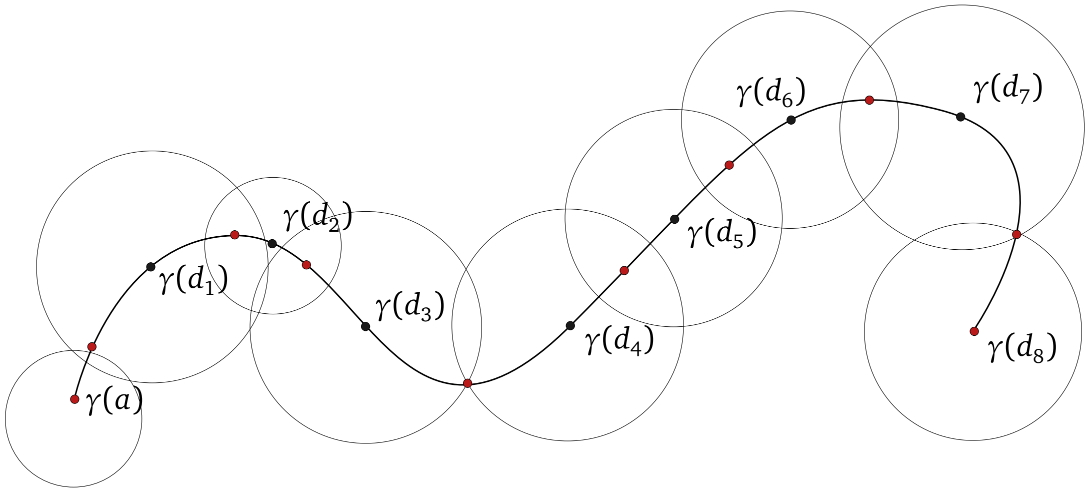

Рис. 3.2: Теорема о гусенице

Определение. Объект из последней теоремы, для которого окрестности $U(\mathbf{x})$ соответствуют окрестностям, на которых V локально потенциально, будем называть V-гусеницей.

Определение. Пути $\gamma_1, \gamma_2 \colon [a,b] \to \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$ будем называть *похожими*, если у них есть общая V-гусеница. При этом ограничение идем именно на гусеницу, то есть наборы t_k могут быть разными.

Лемма 3.4.2. Пусть V — локально потенциальное векторное поле, γ_1, γ_2 — похожие кусочно-гладкие пути, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, тогда $I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$.

Доказательство. Пусть Γ — общая V-гусеница путей, f_k потенциал в B_k. Подгоняя константы, следаем потенциалы одинаковыми на стыках шаров:

$$f_k = f_{k+1} \text{ на } B_k \cap B_{k+1}$$

Теперь посчитаем ингеграл по γ_1:

$$I(V,\gamma_1) = \sum_{k=1}^{n} I\left(V, \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\gamma(t_k)) - f_{k-1}(\gamma(t_{k-1})) = f_n(\gamma(b)) - f_0(\gamma(a))$$

Аналогично вычисляем второй интеграл: получится такая же формула. ■

Лемма 3.4.3. Пусть B открыто, $A \subseteq B$ — компакт. Тогда $\exists \delta > 0\colon\ U(A,\delta) \subseteq B$, где $U(A,\delta) \overset{def}{=} \{\, x \mid \rho(x,A) < \delta \,\}$

Доказательство. Пусть

$$r = \operatorname{dist}(A, \operatorname{Fr}(B)) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in \operatorname{Fr}(B)}} \rho(a,b)$$

Инфимум реализуется, так как dist вычисляется на прямом произведении компактов (т.е. на компакте). Поэтому $r > 0$ (иначе A зашло бы на границу B, чего быть не может, т.к. $A \subseteq B$ и B открыто). Выберем $\delta = \dfrac{r}{2}$. ■

Лемма 3.4.4. (О трёх путях)
$C([a,b]) \ni \gamma\colon [a,b] \to \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O}$ — область, тогда $\exists \delta > 0$:
Если $\gamma_1, \gamma_2\colon [a,b] \to \mathcal{O}\colon\ \forall t \in [a,b]\ |\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \delta$, $|\gamma(t) - \gamma_2(t)| < \delta$, тогда $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ похожи друг на друга.

Доказательство. Множества $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ компакты, B_k открыты, поэтому

$$\forall k\ \exists \delta_k\colon\ U(\gamma([t_{k-1}, t_k]), \delta_k) \subseteq B_k$$

Выберем тогда $\delta = \min \delta_k$. В таком случае все три пути окажутся в δ-окрестности по условию, то есть будут заключены в шары B_k. ∎

Определение. (Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути)
Пусть γ — непрерывный путь, γ' — любой кусочно-гладкий путь, удовлетворяющий предыдущей лемме. тогда положим $I(V, \gamma) = I(V, \gamma')$

Лемма 3.4.5. (О корректности определения интеграла по непрерывному пути)

Доказательство.

- Если таких путей γ' найдется несколько, то интегралы по ним совпадут по лемме об интегралах по похожим путям.
- Такой путь γ' всегда найдется. Для доказательства предъявим такой путь. Из соображений равномерной непрерывности,

$$\delta > 0 \Longrightarrow \exists \alpha > 0\colon\ \forall t, t'\colon |t - t'| < \alpha\quad \left\|\gamma(t) - \gamma(t')\right\| < \frac{\delta}{2}$$

  Тогда разобъём $[a,b]$ на отрезки длины α и построим кусочно-линейный путь $\widetilde{\gamma}$; проверим условие похожести:

$$\begin{aligned}\|\gamma(t) - \widetilde{\gamma}(t)\| &\leqslant \|\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})\| + \|\gamma(t_{i-1}) - \widetilde{\gamma}(t)\| \\ &\leqslant \|\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})\| + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leqslant \delta\end{aligned}$$

∎

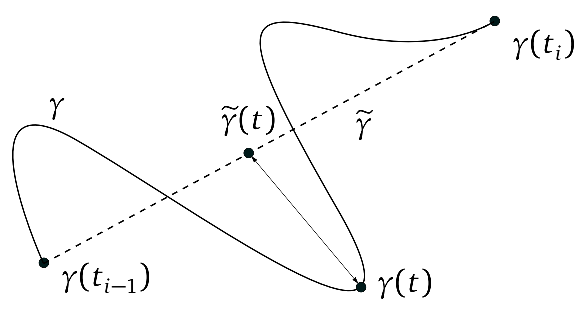

Рис. 3.3: Лемма о корректности определения интеграла по непрерывному пути

3.5 Гомотопия

Определение. Рассмотрим два пути $\gamma_0, \gamma_1\colon [a,b] \to \mathcal{O}$. *Гомотопией* путей γ_0, γ_1 называется отображение $\Gamma\colon [a,b]\times[0,1] \to \mathcal{O} \in C$, такое, что $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$ и $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$.

Определение. Гомотопия наывается *связанной*, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

Определение. Гомотопия называется *петельной*, если $\forall u \in [0,1]\ \ \Gamma(a,u) = \Gamma(b,u)$.

Лемма 3.5.1. Локально постоянное отображение связного компакта постоянно на нём.

Доказательство. (нестрогое)
Выберем конечное покрытие K окрестностями, на которых $f : K \to X$ постоянно. Вручную установим равенство f на стыках окрестностей (их конечное число), а значит автоматически и на объединении окрестностей из одной компоненты связности. Поскольку K связно, компонента одна, а значит f постоянно. ■

Теорема 3.5.2. (Интегралы по связанно гомотопным путям)
V — локально потенциальное поле, γ_0, γ_1 — связянно гомотопные пути. Тогда $I(V,\gamma_0) = I(V,\gamma_1)$.

Доказательство.

- Пусть Γ — гомотопия путей γ_0 и γ_1. Введем отображение $\varphi(u) = I(V,\gamma_u)$. Наша цель — показать, что φ локально постоянно на $[0,1]$, или, что то же самое:

  $$\forall u_0 \in [0,1]\ \exists U(u_0)\colon \forall u \in U(u_0)\cap[0,1]\ \ \varphi(u_0) = \varphi(u)$$

  В таком случае по предыдущей лемме оно окажется постоянным на $[0,1]$, что и докажет утверждение теоремы.

- Пусть δ взято из леммы о трёх путях. Γ непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывно на нем:

  $$\exists \sigma > 0\colon\ \forall u,t\colon \begin{cases} |u-u_0| < \sigma \\ |t-t_0| < \sigma \end{cases} \qquad \|\Gamma(t,u) - \Gamma(t_0,u_0)\| < \frac{\delta}{2}$$

  Поэтому, в частности,

  $$\left\|\gamma_u(t) - \gamma_{u_0}(t)\right\| < \frac{\delta}{2}$$

  то есть пути γ_u и γ_{u_0} похожи. Но они не кусочно-гладкие, поэтому похожести недостаточно.

- Придется искать похожие пути. Пользуясь технологией из доказательства леммы о корректности определения интеграла по непрерывному пути, построим пути $\widetilde{\gamma}_u$ и $\widetilde{\gamma}_{u_0}$ так, чтобы они попадали в $\frac{\delta}{4}$-окрестность путей γ_u и γ_{u_0} соответственно. Тогда

  $$\left\|\widetilde{\gamma}_u - \widetilde{\gamma}_{u_0}\right\| \leqslant \|\widetilde{\gamma}_u - \gamma_u\| + \left\|\gamma_u - \gamma_{u_0}\right\| + \left\|\gamma_{u_0} - \widetilde{\gamma}_{u_0}\right\| \leqslant \delta$$

То есть пути $\widetilde{\gamma}_u$ и $\widetilde{\gamma}_{u_0}$ похожи. Но они кусочно-гдадкие, поэтому получается, что:

$$I(V,\gamma_u) \stackrel{def}{=} I(V,\widetilde{\gamma}_u) \stackrel{\text{похож. к.-г.}}{=} I(V,\widetilde{\gamma}_{u_0}) \stackrel{def}{=} I(V,\gamma_{u_0})$$

■

Определение. Область называется *односвязной* если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному.

Теорема 3.5.3. Пусть $\mathcal{O}$ — односвязная область в $\mathbb{R}^m$, V — локально потенциальное векторное поле в $\mathcal{O}$, тогда V потенциально в $\mathcal{O}$.

Доказательство. Область односвязная, значит любая петля в ней гомотопна постоянному пути, то есть интеграл по любой петле равен нулю. Это — критерий потенциальности поля. ■

Следствие 3.5.4. (Теорема Пуанкаре для односвязной области)
$\mathcal{O}$ — односвязная область, $V \in C^1$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V потенциально.

Теорема 3.5.5. (О резиночке) Область $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ не является односвязной.

Доказательство. Рассмотрим петлю:

$$\begin{aligned} \gamma : [0,2\pi] &\to \mathcal{O} \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

И векторное поле $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$:

$$V(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся *(нет)* что $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$. Отсюда делаем вывод, что V — локально-потенциально (теорема Пуанкаре). Проинтегрируем по петле:

$$I(V,\gamma) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin(t)}{1} \cdot (-\sin(t)) + \frac{\cos(t)}{1} \cdot \cos(t) \right) \, dt = 2\pi \neq 0$$

Значит, γ — нестягиваемая петля. ■

Глава 4

Теория меры

4.1 Системы множеств

Определение. *Полукольцом подмножеств* множества X называют $\mathcal{P} \subseteq 2^X$, удовлетворяющее условиям

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$.
2. $A, B \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}\ \exists B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{P}\colon\ A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} B_i$.

Определение. *Ячейкой* в $\mathbb{R}^m$ называется множество вида

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{a}_i \leqslant \mathbf{x}_i < \mathbf{b}_i \,\}$$

Теорема 4.1.1. (Свойства полуколец)

1. $A \in \mathcal{P} \not\Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{P}$
2. $A, A' \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A \mathbin{@} A' \in \mathcal{P}$, $@ \in \{\cup, \setminus, \triangle\}$
3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigsqcup\limits_{fin} D_j$

Определение. *Алгеброй подмножеств* множества X называется множество $\mathcal{A} \in 2^X$ такое, что выполнены аксиомы:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Теорема 4.1.2. (Свойства алгебр)

1. $\varnothing = X \setminus X \in \mathcal{A}$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

3. $\overline{A} = X \setminus A \in \mathcal{A}$

4. $A \cup B \in \mathcal{A}$
$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

5. $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

6. Алгебра подмножеств является полукольцом подмножеств

Определение. *σ-Алгеброй подмножеств* множества X называется алгебра подмножеств $\mathcal{A}$, удовлетворяющая дополнительной аксиоме:
$\{A_n\} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Лемма 4.1.3. (О нарезке)
Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n \subseteq X$. Тогда набор множеств
$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right), \ldots$$
дизъюнктен, причем
$$\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Лемма 4.1.4. (О минимальной алгебре)
Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо. Положим $\mathcal{A}_0$ — система подмножеств, состоящая из всевозможных конечных объединений множеств из $\mathcal{P}$, а так же из их дополнений. Тогда

- $\mathcal{A}_0$ — алгебра подмножеств.
- Для любой алгебры $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{P}$ верно, что $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0$

4.2 Объём

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, $\mu \colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *конечно-аддитивной*, если

1. μ принимает не более одного значения из $\{+\infty, -\infty\}$

2. $\mu(\varnothing) = 0$

3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$, $A_i \cap A_{j \neq i} = \varnothing$, тогда если оказалось, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}$, то
$\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Определение. Пусть $\mu \colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *объёмом*, если

1. μ конечно-аддитивна

2. $\mu \geqslant 0$

Определение. Объём называется *конечным*, если $\mu(X) < +\infty$.

Определение. *Классическим объёмом* в $\mathbb{R}^m$ называется объём, заданный на полукольце ячеек в $\mathbb{R}^m$, вычисляющийся по формуле $\mu([\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \prod\limits_{k=1}^{m} (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k)$.

Лемма 4.2.1. (Монотонность объёма)
Для объёма μ, $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subseteq B$ выполено $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Доказательство.

$$B = A + B \setminus A = A + \bigsqcup D_i \Longrightarrow \mu(B) = \mu(A) + \sum \mu(D_i) \geqslant \mu(A)$$

■

Теорема 4.2.2. (Свойства объёма)

1. $\forall A$, дизъюнктных $A_1 \ldots, A_n \in \mathcal{P}$: $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$
   (усиленная монотонность)

2. $\forall A, A_1 \ldots, A_n \in \mathcal{P}$: $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
   (конечная полуаддитивность)

3. $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P} \Longrightarrow \mu(A \setminus B) \geqslant \mu(A) - \mu(B)$

Доказательство.

1. $$A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{k} D_i \Longrightarrow A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i\right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} D_i\right)$$
   $$\Longrightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)) + \sum_{i=1}^{k} \mu(D_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

2. Сейчас будет использован стандартный прием, смысл которого заключается в переходе от простого объединения к дизъюнктному. Пусть $B_k = A \cap A_k$. Тогда $A = \bigcup B_k$. Теперь *нарежем* B_k:
   $$C_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$$
   При $k > 1$ и $C_1 = B_1$. Набор C_k получился дизъюнктным:
   $$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$$

Сами множетсва C_k могут и не быть в $\mathcal{P}$, но $B_k \in \mathcal{P}$ как пересечения множеств из $\mathcal{P}$. Из определения C_k имеем, что,

$$C_k = \bigsqcup_{i=1}^{j_k} D_{ki}$$

Тогда можно вычислить объём A:

$$\mu(A) = \sum_{k,i} \mu(D_{ki})$$

Теперь воспользуемся монотонностью объёма: $C_k \subseteq B_k \subseteq A_k$:

$$\sum_j D_{kj} \leqslant \mu(B_k) \leqslant \mu(A_k)$$

Поэтому

$$\mu(A) = \sum_k \sum_j D_{kj} \leqslant \sum_k \mu(A_k)$$

3.

(a)

$$B \subseteq A \Longrightarrow \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) \Longrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$$

(b)

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \Longrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \geqslant \mu(A) - \mu(B)$$

■

4.3 Мера

Определение. *Мерой* называется объём $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$, обладающий свойством счётной аддитивности.

Теорема 4.3.1. Пусть $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивен
2. μ счетно-полуаддитивен

Доказательство. Импликация $1 \Longrightarrow 2$ доказывается практически так же, как второй пункт предыдущей теоремы (используется нарезка). Докажем $2 \Longrightarrow 1$. Для этого воспользуемся усиленной монотонностью объёма (A_i дизъюнктны):

$$\forall N \ \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$$

Добавляя к этому посылку:

$$\forall N \ \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) \leqslant \mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

И переходя к пределу при $N \to +\infty$, получаем требуемое. ■

Теорема 4.3.2. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивно

2. μ *непрерывно снизу*, то есть $A,\ A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \subset A_2 \subset \ldots ; A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \Longrightarrow$ $\mu(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_i)$

Доказательство.

$1 \Longrightarrow 2$ Нарежем множетсва:

$$B_1 = A_1, \ldots, B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)$$

Как всегда, B_k дизъюнктны, причем $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_k$. Тогда, пользуясь счетной аддитивностью, имеем:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_i) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(B_i) = \lim_{N\to+\infty} \mu(A_k)$$

$2 \Longrightarrow 1$ Пусть есть дизъюнктные A_k. Сделаем из них C_k:

$$C_k = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i$$

Тогда $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$. Воспользуемся непрерывностью снизу:

$$\mu(A) = \mu(C) = \lim_{N\to+\infty} \mu(C_k) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$$

■

Теорема 4.3.3. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **конечный** объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивен

2. μ *непрерывно сверху*

$$A,\ A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \supset A_2 \supset \ldots ;\ A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \Longrightarrow \mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_i)$$

3. μ *непрерывно сверху на пустом множестве*, то есть при условии, что $A = \varnothing$.

Доказательство.

$1 \Longrightarrow 2$ Будем пользоваться непрерывностью снизу, но для этого нужна подготовка:

$$B_1 = A_1 \setminus A, \ldots, B_k = A_1 \setminus A_k$$

Тогда $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$; $B = \bigcup B_k$:

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(B) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_1) - \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k)$$

Откуда

$$\mu(A) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k)$$

$2 \Longrightarrow 3$ Очевидно.

$3 \Longrightarrow 1$ Пусть C_k дизъюнктны. Положим

$$A_k = \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} C_k$$

Тогда $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$; $A = \bigcap A_k = \varnothing$. Вообще говоря, $A_k \notin \mathcal{A}$. Но в нашем случае

$$A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \in \mathcal{A}$$

Далее надо как-то воспользоваться непрерывностью сверху:

$$C = A_k \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} C_k\right) \Longrightarrow \mu(C) = \mu(A_k) + \sum_{i=1}^{k} \mu(C_k)$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$, получаем требуемое.

■

4.4 О стандартном продолжении меры

Определение. *Пространством с мерой* называется тройка $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$, где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера.

Определение. $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$ называется *полным* (соответственно мера называется *полной*), если $\forall E \in \mathcal{A}\colon\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \forall A \subseteq E\ A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = 0$.

Определение. $\langle X, \mathcal{P}, \mu\rangle$ называется *σ-конечным* (соответственно мера называется *σ-конечной*), если $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k$, где $\mu(B_k) < +\infty$.

Теорема 4.4.1. (О стандартном продолжении меры)
$\langle X, \mathcal{P}, \mu_0\rangle$, μ_0 — σ-конечный объём. Тогда $\exists$ σ-алгебра $\mathcal{A}$ и мера $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$:

1. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$, $\mu\big|_{\mathcal{P}} = \mu_0$

2. μ полная

3. Если $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{P}$, $\mu'\big|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, μ' — полная, тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ и $\mu'\big|_{\mathcal{A}} = \mu$

4. Если $\mathcal{P}'$ — полукольцо, μ' — мера на $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{A}$, тогда $\mu' = \mu\big|_{\mathcal{P}'}$

5. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mu(A) = \inf\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu_0(P_k)\ \middle|\ A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}\right)$

4.5 Мера Лебега

Теорема 4.5.1. Классический объём в $\mathbb{R}^m$ является σ-конечной мерой.

Доказательство. σ-конечность очевидна. Докажем счетную полуаддитивность. Пусть $[a,b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n)$. Наша цель — показать, что $\mu[a,b) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu[a_n, b_n)$. Выберем $b' < b$ таким образом, чтобы

$$\mu[a,b) - \varepsilon < \mu[a,b') < \mu[a,b)$$

И $a_n' < a_n$ так, чтобы

$$\forall n\ \mu[a_n, b_n) < \mu[a_n', b_n) < \mu[a_n, b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Теперь отрезок $[a, b']$ накрыт счетным объедиением интервалов (a_n', b_n). Выберем из этого покрытия конечное:

$$[a, b'] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (a_n', b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} [a_n', b_n)$$

Воспользуемся конечной полуаддитивностью:

$$\mu[a, b') \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n', b_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left(\mu[a_n, b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n, b_n) + \varepsilon$$

С другой стороны:

$$\mu[a,b) - \varepsilon < \mu[a,b') \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n, b_n) + \varepsilon$$

Откуда и следует требуемое. ■

Определение. *Мерой Лебега* называется стандартное продолжение классического объёма.

Определение. Алгебра, на которой определена мера Лебега, обозначается $\mathfrak{M}$.

Определение. *Измеримыми по Лебегу* называются множества $A \in \mathfrak{M}$.

Теорема 4.5.2. (Свойства меры Лебега)

1. Объединения и пересечения измеримых множеств измеримы.

2. Все открытые и замкнутые множества измеримы.

Лемма 4.5.3. (О структуре открытых множеств)

1. $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто $\Longrightarrow$ $\exists Q_i$ — ячейки в $\mathbb{R}^m$ такие, что $\mathcal{O} = \bigsqcup\limits_i Q_i$, причем можно дополнительно считать, что выполнено что-либо из нижеперечисленного:

   (a) Ячейки имеют рациональные (двоично-рациональные) координаты

   (b) $\mathrm{Cl}(Q_i) \subseteq \mathcal{O}$

   (c) Q_i — кубы

2. Пусть E измеримо в $\mathbb{R}^m$, $\lambda(E) = 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q_i$ — ячейки в $\mathbb{R}^m$ такие, что

$$E \subseteq \bigcup_i Q_i \text{ и } \sum_i \mu(Q_i) < \varepsilon$$

причем можно потребовать свойства (a)—(c) и дизъюнктность набора ячеек.

Доказательство.

1. Всем точкам $\mathcal{O}$ сопоставим ячейку требуемого типа с рациональными параметрами. Таких ячеек не более чем счетное множество:

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \widetilde{Q}_i$$

Теперь надо сделать эти ячейки дизъюнктыми. Для этого воспользуемся тем, что их счетное число:

$$Q_1' = \widetilde{Q}_1, \dots, Q_k' = \widetilde{Q}_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \widetilde{Q}_i$$

$\forall i$ Q_i' выражается через дизъюнктное объединение ячеек нужного типа, так как полукольцо ячеек — полукольцо. Тогда:

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \widetilde{Q}_i = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} Q_i' = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} \bigsqcup_{j=1}^{k_i} D_{ij}$$

2. Пятый пункт теоремы о продолжении поставляет нам способ получить ячейки, удовлетворяющие всему, кроме дизъюнктности и $(a)-(c)$. Эти свойства придется добывать самостоятельно. Пусть множества $\widetilde{P}_i$ пришли из теоремы для $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$:

$$\sum \lambda(\widetilde{P}_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Немного расширим эти множества до открытых $P_i \supset \widetilde{P}_i$. Эти множества по первому пункту текущей леммы представляются в виде нужного нам объединения:

$$P_i = \bigsqcup D_{ij}$$

Потребуем (при выборе P_i):

$$\lambda(\widetilde{P}_i) < \lambda(P_i) < \lambda(\widetilde{P}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Тогда получается то, что нужно:

$$\sum \lambda(D_{ij}) = \sum \lambda(P_i) < \sum \left(\lambda(\widetilde{P}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \leqslant \varepsilon$$

■

Теорема 4.5.4. (Свойства меры Лебега)

3. Пример: канторово множество в $\mathbb{R}$. Строится итеративно:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{K}_0 &= [0,1] \\
\mathfrak{K}_1 &= \left[1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
\mathfrak{K}_2 &= \left[1, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
&\dots \\
\mathfrak{K} &= \bigcap_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{K}_i
\end{aligned}$$

Получившееся множество измеримо, потому что является пересечением измеримых множеств. Его мера равна нулю, потому что к нулю стремится мера $\mathfrak{K}_i$. С другой стороны, можно задать это же множество в другом виде:

$$\mathfrak{K} = \{\, 0.\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots_3 \mid \varepsilon_i \in \{0,2\}\,\}$$

По построению понятно, что из отрезка просто выкинули все точки, троичная запись которых содержит хотя бы одну единицу. Тогда $\mathfrak{K}$ континуально как множество бинарных последовательностей.

4. Пример: неизмеримое множество. Совершенно очевидно, что одними только пересечениями и объединениями не получится построить неизмеримое множество. Привлечем к борьбе с измеримостью фактормножества. Пусть $\sim$ — отношение, заданное на отрезке $[0,1]$ такое, что:

$$a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$$

Рассмотрим тогда фактормножество $A = [0,1] \,/\, \sim$. Предположим, что оно измеримо. В одной из следующих теорем будет доказано, что мера Лебега инвариантна относительно сдвига, то есть $\lambda(A) = \lambda(A+q)$. Пусть тогда

$$B = \bigsqcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (A+q)$$

Дизъюнктность объединяемых множеств очевидна. Тогда B тоже измеримо, причем

$$B \subseteq [-1,2], B \supseteq [0,1] \Longrightarrow 0 < \lambda(B) < +\infty$$

Но с другой стороны можно вычислить $\lambda(B)$ через $\lambda(A)$:

$$\lambda(B) = \sum_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda(A+q) = \begin{cases} 0, \ \lambda(A) = 0 \\ +\infty, \ \lambda(A) > 0 \end{cases}$$

Возникло противоречие, поэтому A неизмеримо.

5. – A ограничено, тогда $\lambda(A) < +\infty$
   – A открыто, тогда $\lambda(A) > 0$
   – $\lambda(A) = 0 \implies$ У A нет внутренних точек
6. A измеримо, тогда $\forall \varepsilon > 0$
   – $\exists G_\varepsilon$ открытое такое, что $A \subset G_\varepsilon$, $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
   – $\exists F_\varepsilon$ замкнутое такое, что $F_\varepsilon \subset A$, $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство.

5. Очевидно.
6. – (i) Пусть $\lambda(A) < +\infty$. Из последнего пункта теоремы о продолжении получаем набор P_i такой, что

$$\lambda(A) < \sum \lambda(P_i) < \lambda(A) + \varepsilon$$

Далее немного расширим P_i до открытого $\widetilde{P}_i$, которое наполовину замкнем до ячейки $\widetilde{\widetilde{P}}_i$:

$$P_i \subset \widetilde{P}_i \subset \widetilde{\widetilde{P}}_i \in \mathcal{P}$$

Расширим мы несильно, а именно:

$$\lambda\left(\widetilde{\widetilde{P}}_i\right) - \lambda(P_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

В таком случае положим

$$G_{2\varepsilon} = \bigcup \widetilde{P}_i$$

и проверим, что оно подходит:

$$\lambda(A) < \lambda(G_{2\varepsilon}) \leqslant \sum \lambda\left(\widetilde{\widetilde{P}}_i\right) \leqslant \lambda(A) + 2\varepsilon$$

$A \subset G_{2\varepsilon}$, поэтому:

$$\lambda(G_{2\varepsilon} \setminus A) = \lambda(G_{2\varepsilon}) - \lambda(A) < 2\varepsilon$$

(ii) $\lambda(A) = +\infty$. Воспользуемся σ-конечностью $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i \Longrightarrow A = \bigsqcup A \cap Q_i$$

Пользуясь (i), расширим $A \cap Q_i$ до открытого множества $(G_\varepsilon)_i$ так, чтобы

$$\lambda((G_\varepsilon)_i \setminus (A \cap Q_i)) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Пусть тогда $G_\varepsilon = \bigcup (G_\varepsilon)_i$. Проверим, что оно подходит:

$$\lambda(A) < \lambda(G_\varepsilon) \leqslant \sum \lambda((G_\varepsilon)_i) < \sum \lambda(A \cap Q_i) + \varepsilon = \lambda(A) + \varepsilon$$

– Переход к дополнению: A^c открыто, поэтому

$$\exists G_\varepsilon : \ \lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon \Longrightarrow \lambda(A \setminus G_\varepsilon^c) = \lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon$$

То есть $F_\varepsilon = G_\varepsilon^c$ подходит.

■

Определение. Пусть $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, тогда *борелевской оболочкой* множества $\mathcal{A}$ называют минимальную по включению σ-алгебру, содержащую $\mathcal{A}$.

Определение. *Борелевской σ-алгеброй* называется борелевская оболочка всех открытых множеств.

Следствие 4.5.5. A измеримо, тогда $\exists$ борелевские B, C: $B \subset A \subset C$ такие, что $\lambda(C \setminus B) = 0$.

Доказательство. Возьмем в качестве $B = \bigcup F_{\frac{1}{n}}$, $C = \bigcap G_{\frac{1}{n}}$. Имеем

$$F_{\frac{1}{n}} \subseteq A \subseteq G_{\frac{1}{n}}$$

И

$$\forall n \ \lambda(B \setminus A) < \lambda(G_{\frac{1}{n}} \setminus F_{\frac{1}{n}}) < \frac{2}{n}$$

Поэтому $\lambda(B \setminus A) = 0$. B, A борелевские, потому что являются пересечением и объединеием борелевских множеств. ■

Следствие 4.5.6. A измеримо, тогда $A = B \cup \mathfrak{N}$, B — борелевское, $\lambda(\mathfrak{N}) = 0$.

Доказательство. Возьмем в качестве B множество B из предыдущего следствия, а в качестве $\mathfrak{N}$ — множество $A \setminus B$. Тогда $\lambda(\mathfrak{N}) \leqslant \lambda(C \setminus B) = 0$. ■

Следствие 4.5.7. (Регулярность меры Лебега)
Пусть A измеримо, тогда

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G \text{ открыто}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ замкнуто}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ компакт}}} \lambda(K)$$

Доказательство. Первые два пункта следуют из существования последовательностей открытых $G_{\frac{1}{n}}$ и замкнутых $F_{\frac{1}{n}}$, которые и дают нужный супремум или инфимум. Докажем последнее равенство.

- Пусть A ограничено. Тогда

$$\sup_{\substack{F\subset A\\ F\text{ замкнуто}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K\subset A\\ K\text{ компакт}}} \lambda(K)$$

  Левая часть равенства отличается от правой только тем, что там разрешены неограниченные множества; но неограниченных подмножеств ограниченного множества не бывает, поэтому получаем равенство.

- Пусть теперь A неограничено.

  – $\lambda(A) < +\infty$. Воспользуемся непрерывностью снизу:

$$\mathbb{R}^m = \bigcup B(0,n);\ A_n = A \cap B(0,n) \Longrightarrow A_1 \subset A_2 \subset \dots$$
$$\Longrightarrow \lim \lambda(A_n) = \lambda(A)$$

  Начиная с некоторого места, $\lambda(A_n) > \lambda(A) - \varepsilon$, при этом, A_n ограничены. Выберем тот компакт (он есть по первому пункту), для которого $\lambda(K) > \lambda(A_n) - \varepsilon$. Тогда, поскольку $K \subset A_n \subset A$, имеем, что

$$\lambda(A \setminus K) = \lambda((A \setminus A_n) \cup (A_n \setminus K)) < 2\varepsilon$$

  – $\lambda(A) = +\infty$. Доказывается аналогично, просто определение предела поменяется. Общий итог доказательства будет выглядеть так:

$$\forall R\ \exists A_n:\ \lambda(A_n) > R + 1\ \exists K \subset A_n:\ \lambda(K) > R$$

■

Лемма 4.5.8. Пусть $\langle X', \mathcal{A}', \mu' \rangle$ — пространство с мерой. $\langle X, \mathcal{A}, \_ \rangle$ — заготовка для пространства с мерой. $T: X \to X'$ — биекция, $\forall A \in \mathcal{A}\ T(A) \in \mathcal{A}'$, $T(\varnothing) = \varnothing$. Положим $\mu(A) = \mu'(T(A))$. Тогда μ — мера на $\mathcal{A}$.

Доказательство. Докажем счетную аддитивность. Пусть $A = \bigsqcup A_i$. Тогда:

$$\mu(A) = \mu'(T(A)) = \mu'\left(T\left(\bigcup A_i\right)\right) = \mu'\left(\bigcup T(A_i)\right) = \sum \mu'(T(A_i)) = \sum \mu(A_i)$$

Переход от образа объединения к объединению образов можно совершить из-за того, что T — биекция. ■

Лемма 4.5.9. Пусть A — измеримое по Лебегу множество. Тогда A представимо в виде

$$A = \bigcup K_i \cup \mathfrak{N}$$

Где K_i компакты и $\lambda(\mathfrak{N}) = 0$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству пункта (6) теоремы о свойствах меры Лебега за исключением того, что пересечь или объединить компакты не получится. ■

Лемма 4.5.10. $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall E \in \mathfrak{M}\ \lambda(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(T(E)) = 0$, тогда $\forall A \in \mathfrak{M}\ T(A) \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Пользуясь леммой, представим A в виде:

$$A = \bigcup K_i \cup \mathfrak{N}$$

Тогда

$$T(A) = \bigcup T(K_i) \cup T(\mathfrak{N})$$

$T(K_i)$ — непрерывный образ компакта, то есть компакт, а значит, борелевское множество, $T(\mathfrak{N})$ измеримо по условию, поэтому $T(A)$ измеримо как объединение измеримых множеств. ■

Пример. (Канторова лестница) Это — пример, показывающий, что для того, чтобы отображение сохраняло измеримость, непрерывности мало. Зададим f итеративно: на отрезке $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ положим $f(x) = \frac{1}{2}$. Будем повторять такой процесс рекурсивно в левой и правой трети отрезка $[0, 1]$, задавая на среднем отрезке значения, равные среднему арифметическому значений на соседних отрезках. Доопределим f на $[0, 1]$ так, чтобы f оказалась непрерывна (кстати, подобное продолжение единственно):

$$f(x) = \sup\left(f\left(\frac{m}{3^k}\right) \,\middle|\, \frac{m}{3^k} \leqslant x \right)$$

Заметим, что $f(\mathfrak{K}) = [0, 1]$, где $\mathfrak{K}$ — канторово множество. То есть, мы отобразили множество нулевой меры на целый отрезок. Возьмем теперь совершенно любое неизмеримое подмножество $A \subset [0, 1]$ (см. пример ранее). Поскольку $f(\mathfrak{K}) = [0, 1]$, существует множество $e \subseteq \mathfrak{K}$ такое, что $f(e) = A$, причем e измеримо по полноте меры Лебега. Получается, что мы отобразили измеримое множество на неизмеримое.

Теорема 4.5.11. Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — открыто, $\varphi: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — гладкое. Тогда φ сохраняет измеримость.

Доказательство. Достаточно проверить, что φ переводит множества нулевой меры в множества нулевой меры. Пусть $\mathcal{O} = \bigsqcup Q_i$, причем $\mathrm{Cl}(Q_i) \subseteq \mathcal{O}$ (лемма о структуре открытых множеств, п.1). Теперь из соображений счетной аддитивности достаточно проверить утверждение для подмножеств Q_i. По теореме Лагранжа:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{O}\ \ \|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \leqslant L \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

Где $L = \sup_{x \in \mathrm{Cl}(Q_i)} \|\varphi'(\mathbf{x})\| < +\infty$, потому что φ гладкое. Далее мы накроем наше множество нулевой меры E маленькими кубами (лемма о структуре открытых множеств, п.2), которые после пересадки дадут маленькие шары:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists D_i = D(\mathbf{x}_i, r_i) \text{ — кубы: } E \subseteq \bigcup D_i,\ \sum \lambda(D_i) < \varepsilon$$

Тогда посмотрим, насколько большим может оказаться образ E:

$$\varphi(E) = \bigcup \varphi(D_i) \subseteq \bigcup B(\varphi(\mathbf{x}_i), L \cdot r_i) \subseteq \bigcup K(\varphi(\mathbf{x}_i), \sqrt{m} \cdot L \cdot r_i)$$

Оценим меру получившегося образа:

$$\lambda(\varphi(E)) \leqslant \sum \lambda(K_i) = \sum (2\sqrt{m} \cdot L \cdot r_i)^m = (\sqrt{m} \cdot L)^m \cdot \sum \lambda(D_i) < (\sqrt{m} \cdot L)^m \cdot \varepsilon$$

■

Следствие 4.5.12. Мера Лебега инвариантна относительно сдвига.

Доказательство. Сдвиг как отображение гладкий, поэтому измеримость сохраняется. Из теоремы о продолжении меры мы знаем, что мера Лебера вычисляется на основе мер ячеек. При сдвиге, очевидно, мера ячеек не изменяется, поэтому не изменяется и мера других множеств. ■

Теорема 4.5.13. (О других мерах) Пусть μ — мера на $\mathfrak{M}$, инвариантная относительно сдвига и конечная на ограниченных множествах. Тогда $\exists K \in [0, +\infty): \ \mu = K \cdot \lambda$.

Определение. Линейное отображение пространства $\mathbb{R}^m$, сохраняющее скалярное произведение, называется *ортогональным*.

Теорема 4.5.14. Линейное отображение конечномерных евклидовых пространств $f: X \to Y$ сохраняет скалярное произведение тогда и только тогда, когда f переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Доказательство. Очевидно. ■

Теорема 4.5.15. Линейное отображение $\mathcal{A}: X \to Y$, задаваемое в фиксированных ортонормированных базисах X и Y матрицей A сохраняет скалярное произведение тогда и только тогда, когда $A^T A = I$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$(A^T A)_{ij} = \langle f(\mathbf{u}_i), f(\mathbf{u}_j) \rangle$$

Откуда, пользуясь предыдущей теоремой, получаем требуемое. ■

Теорема 4.5.16. Пусть $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — ортогональное преобразование. Тогда T сохраняет меру Лебега.

Доказательство. T гладкое, поэтому измеримость сохраняется и $\lambda(T(A))$ — мера. Проверим, что эта мера совпадает с мерой Лебега. Для этого воспользуемся одной из предыдущих теорем: нужно проверить, что новая мера инванинтна относительно сдвигов, совпадает с мерой Лебега на каком-нибудь множестве и конечна на ограниченных множествах.

- Инвариантность относительно сдвига:

  $$\lambda(T(A + p)) = \lambda(T(A) + T(p)) = \lambda(T(A))$$

  Последний переход — инвариантность меры Лебега относительно сдвига.

- Покажем, что новая мера совпадает с Лебеговской на шаре $B(0,1)$:

$$\lambda(T(B(0,1))) = \lambda(B(x,1)) = \lambda(B(0,1))$$

  Первое равенство выплнено потому, что T не изменяет расстояния, поэтому шар переходит в шар такого же радиуса. Второе — инвариантность меры Лебега относительно сдвига.

- Поскольку образ шара — шар, T переводит ограниченные множества в ограниченные.

■

Теорема 4.5.17. (О структуре компактного оператора) Пусть $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное преобразование, $\det V \neq 0$. Тогда

- Существуют ортонормированные базисы g_i, h_i и числа s_i такие, что

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \; V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} (s_i \langle \mathbf{x}, g_i \rangle) h_i$$

- $|\det V| = s_1 \cdot \ldots \cdot s_m$.

Доказательство. Пусть $W = V^* V$ — самосопряженный оператор, потому что:

$$\langle \mathbf{x}, W\mathbf{y} \rangle = \langle V\mathbf{x}, V\mathbf{y} \rangle = \langle W\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Раз так, все его собственные числа вещественны и существует ортонормированный базис g_i состоящий из собственных чисел $c_1, \ldots, c_m$. Покажем, что $c_i > 0$:

$$\|V g_i\|^2 = \langle V g_i, V g_i \rangle = \langle W g_i, g_i \rangle = c_i \, \|g_i\|^2$$

$\ker V = 0 \Longrightarrow \|V g_i\| > 0 \Longrightarrow c_i > 0$. Раз так, пусть $s_i = \sqrt{c_i}$, $h_i = \dfrac{1}{s_i} V g_i$. Проверим:

$$\langle h_k, h_i \rangle = \frac{1}{s_k s_i} \langle V g_k, V g_i \rangle = \frac{1}{s_k, s_i} \langle W g_k, g_i \rangle = \frac{c_k}{s_k s_i} \langle g_k, g_i \rangle = \delta_{ki}$$

Значит, h_i — ортонормированный базис. Далее:

$$V\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{m} V(\langle \mathbf{x}, g_i \rangle g_i) = \sum_{i=1}^{m} \langle \mathbf{x}, g_i \rangle V(g_i) = \sum_{i=1}^{m} s_i \langle \mathbf{x}, g_i \rangle g_i$$

Проверим второй пункт теоремы:

$$c_1 \cdot \ldots \cdot c_m = \det W = \det V^* V = (\det V)^2$$

■

Лемма 4.5.18. (Мера собственного подпространства) Мера Лебега собственного подпространства равна нулю.

Доказательство. Не умаляя общности, можно рассматривать подпространство $\mathbb{R}^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$. Развернем это подпространство так, чтобы последняя координата его точек занулилась. Мера от этого не поменялась (ортогональное преобразование не меняет меру). Получившееся множество нетрудно накрыть сколь угодно малой меры параллелепипедами, откуда получаем, что $\forall \varepsilon > 0\ \lambda(\mathbb{R}^{m-1}) < \varepsilon$. ■

Теорема 4.5.19. Пусть $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное преобразование. Тогда

$$\forall A \in \mathfrak{M}^m\ T(A) \in \mathfrak{M}^m,\ \lambda(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda(A)$$

Доказательство.

- Пусть T вырождено, то есть $\det T = 0$. Тогда $\operatorname{Im} T$, а вместе с ним и любое множество в $\mathbb{R}^m$ отображается в пространство меньшей размерности. По лемме это означает, что $\forall A \subseteq \mathbb{R}^m\ \lambda(T(A)) = 0$.

- Пусть теперь $\det T \neq 0$. Абсолютно аналогично теореме об ортогональных преобразованиях доказывается, что $\lambda(T(A))$ — мера, инвариантная относительно сдвига. Кроме того, образ ограниченного множества под действием T ограничен (ограниченное множество можно вложить в замнкутый шар, который компактен и по непрерывности перейдет в компакт). Тогда по теореме о других мерах
$$\exists K \in [0, +\infty) :\ \lambda(T(A)) = K \cdot \lambda(A)$$
Все, что осталось — это понять, почему $K = \det T$. Для этого воспользуемся леммой о структуре компактного оператора: получим g_i и h_i. Вычислим K опираясь на то, куда T пересадит параллелепипед, натянутый на векторы g_i: $T(g_i) = h_i s_i$, поэтому параллелепипед G, натянутый на g_i перейдет в параллелепипед H, натянутый на $h_i s_i$:
$$\lambda(T(G)) = \prod \|h_i s_i\| = \prod s_i = |\det T| = |\det T| \cdot \lambda(G)$$

■

Глава 5

Интеграл

5.1 Измеримые функции

Определение. *Разбиением* множества E называется дизъюнктный набор множеств e_i такой, что $E = \bigsqcup e_i$.

Определение. Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *ступенчатой*, если существует конечное разбиение $X = \bigsqcup e_i$ (в контексте мер множества e_i должны быть измеримыми, то есть $e_i \in \mathcal{A}$) такое, что на элементах разбиения f постоянно:

$$f\Big|_{e_i} = c_i$$

Разбиение e_i в таком случае называется *допустимым*.

Определение. *Характеристической функцией* множества E называется фукнция

$$\begin{aligned} \chi_E &: X \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases} \end{aligned}$$

Замечание. Если множество E измеримо, то его характеристическая функция является ступенчатой. Подойдет разбиение $X = E \bigsqcup \overline{E}$.

Замечание. Ступенчатую функцию можно представить в виде:

$$f(x) = \sum_i \chi_{e_i}(x) \cdot c_i$$

Лемма 5.1.1. (Свойства ступенчатых функций)

- Пусть f, g ступенчатые. Тогда существует общее допустимое разбиение.
- f, g ступенчатые, тогда $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ функции $f + g$, $f \cdot g$, αf, $\max(f, g)$, $|f|$, $\dfrac{f}{g}$ (при $g \neq 0$) ступенчатые.

Доказательство.

- Пусть a_i и b_i допустимые разбиения f и g соответственно. Тогда в качестве их общего допустимого разбиения, очевидно, подойдет разбиение $a_i \cap b_j$.
- Очевидно. Если фукнция составлена из двух, можно рассмотреть общее допустимое разбиение.

■

Контекст: $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ — пространство с мерой.

Определение. Пусть $f : E \subseteq X \to \overline{\mathbb{R}}$. Тогда *лебеговскими множествами* называются множества вида

$$E(f < a) \stackrel{def}{=} \{x \in E \mid f(x) < a\}$$

Где $a \in \mathbb{R}$.

Замечание.

- $E(f < a) = \overline{E(f \geqslant a)}$.
- $E(f \leqslant a) = \bigcap\limits_{b > a} E(f < b) = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} E\left(f < a + \dfrac{1}{n}\right)$

Определение. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, называется *измеримой на множестве $E \in \mathcal{A}$*, если

$$\forall a \in \mathbb{R} \;\; E(f < a) \in \mathcal{A}$$

Определение. f называется *измеримой*, если она измерима на множестве X.

Определение. f называется *измеримой по Лебегу*, если она измерима в контексте $\langle \mathbb{R}^m, \mathfrak{M}^m, \lambda_m \rangle$.

Замечание. В определении измеримости на множестве можно брать лебеговские множества любого вида (см. замечания выше: все эти множества измеримы или нет одновременно).

Лемма 5.1.2. (Измеримость непрерывных функций) Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ непрерывна. Тогда f измерима по Лебегу.

Доказательство. Имеем

$$E(f < a) = f^{-1}((-\infty, a))$$

Последнее множество открыто по определению непрерывности, а значит, измеримо. ■

Теорема 5.1.3. (Свойства измеримых функций)
Пусть f измерима на E. Тогда

- $\forall a \in \mathbb{R}$ $E(f = a)$ измеримо.
- $\forall \alpha > 0$ $\alpha \cdot f, -f$ измеримы.

- f измерима на $E_1, \ldots$ тогда f измерима на $E' = \bigcup E_i$.
- $E' \subseteq E$, E' измеримо, тогда f измерима на E'.
- $f \neq 0$, тогда $\dfrac{1}{f}$ измерима на E.
- $f \geqslant 0,\ \alpha > 0$, тогда f^{α} измерима на E.

Доказательство. Для доказательства всех пунктов просто преобразуем лебеговские множества так, чтобы все стало очевидно из определения:

- $E(f = a) = E(f \leqslant a) \cap E(f \geqslant a)$.
- $E(\alpha \cdot f < a) = E\left(f < \frac{a}{\alpha}\right)$.
- $E'(f < a) = \bigcup E_i(f < a)$.
- $E'(f < a) = E' \cap E(f < a)$.
- $$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{f} < a\right) &= \left(E\left(\frac{1}{f} < a\right) \cap E(f > 0)\right) \cup \left(E\left(\frac{1}{f} < a\right) \cap E(f < 0)\right) \\ &= \left(E\left(f > \frac{1}{a}\right) \cap E(f > 0)\right) \cap \left(E\left(f < \frac{1}{a}\right) \cap E(f < 0)\right) \end{aligned}$$
- Аналогично.

■

Теорема 5.1.4. (Измеримость пределов и супремумов)
Пусть f_n измеримы на E, тогда

- $\sup\limits_n f_n(x)$, $\inf\limits_n f_n(x)$ измеримы на E.
- $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, $\varliminf\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ измеримы на E.
- Если $\forall x\ \exists f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, то f измерима на E.

Доказательство.

- Пусть $g(x) = \sup\limits_n f_n(x)$. Рассмотрим лебеговы множества g:

  $$E(g > a) = \bigcup_n E(f_n > a)$$

  Из этого равенства очевидным образом следует первое утверждение. Докажем его подробно:

- $\subseteq$ Пусть $y \in E(g > a)$. Тогда $g(y) > a$:

$$a < g(y) = \sup_n f_n(y) \Longrightarrow \exists n\colon f_n(y) > a \Longrightarrow y \in E(f_n > a)$$

Действительно, если бы $\forall n\ f_n(y) \leqslant a$, то тогда $g(y) = \sup\limits_n f_n(y) \leqslant a$.

- $\supseteq$ Пусть теперь наоборот, $y \in E(f_n > a)$ для некоторого n. Тогда $f(y) > a$, поэтому:

$$g(y) = \sup_n f_n(y) \geqslant f_n(y) > a \Longrightarrow y \in E(g > a)$$

- Верхний и нижний пределы определялись в терминах огибающих. Воспользуемся этим (а еще вспомним, чему равен предел монотонной последовательности):

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geqslant n} f_k(x) = \inf_n \sup_k f_{n+k}(x)$$

Инфимум и супремум, как видно из первого пункта, измеримы.

- Если предел существует, то он совпадает и с верхним, и с нижним пределами, а значит, измерим.

■

Следствие 5.1.5. Если измеримы f, g, то измеримы:

- $\max(f, g)$, $\min(f, g)$.
- f_+, f_-.
- $|f|$.

Доказательство.

- $\max(f, g) = \sup(f, g, g, \ldots)$, $\min(f, g) = \inf(f, g, g, \ldots)$.
- $f_+ = \max(0, f)$, $f_- = \max(0, -f)$.
- $|f| = \max(f, -f)$.

■