

Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

0.1 Дiffeоморфизмы	2
------------------------------	---

0.1 Диффеоморфизмы

Определение. Областью называют открытое связное множество.

Определение. Топологические пространства X, Y гомеоморфны, если существует обратимое и в обе стороны непрерывное $f : X \rightarrow Y$. f называют гомеоморфизмом.

Определение. Диффеоморфизмом гладких многообразий M, N называется обратимое и в обе стороны гладкое отображение $f : M \rightarrow N$.

Определение. Пусть \mathcal{O} — область в \mathbb{R}^m . Тогда отображение $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется диффеоморфизмом, если оно обратимо и в обе стороны дифференцируемо.

Лемма 0.1.1. (О почти локальной инъективности)

Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, f дифференцируемо в \mathbf{x}_0 , $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists c, \delta > 0$ такие, что $\forall \mathbf{h} : \|\mathbf{h}\| < \delta \quad \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geq c \|\mathbf{h}\|$

Доказательство.

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\| \geq \|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| - \|\alpha(\mathbf{h})\| \geq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|$$

Последнее неравенство выполнено по следующим причинам:

- $\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| \geq c \|\mathbf{h}\|$, так как $f'(\mathbf{x}_0)$ обратим
- $\|\alpha(\mathbf{h})\| \leq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|$ при достаточно малых \mathbf{h} , так как $\alpha(\mathbf{h})$ — бесконечно малое.

■

Теорема 0.1.2. (О сохранении области)

Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \quad \det f'(\mathbf{x}) \neq 0$, тогда f открыто.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда \mathcal{O} открыто. Тогда нужно показать, что $f(\mathcal{O})$ открыто. Зафиксируем $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ и $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in f(\mathcal{O})$. По лемме о почти локальной инъективности имеем $c, \delta > 0$ такие, что

$$\forall \mathbf{h} \in \overline{B(0, \delta)} \quad \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geq c \|\mathbf{h}\|$$

Положим

$$r = \frac{1}{2} \text{dist}(\mathbf{y}_0, f(S(\mathbf{x}_0, \delta)))$$

Поскольку f непрерывно, а сфера — компакт, имеем, что $f(S(\mathbf{x}_0, \delta))$ — компакт. В свою очередь, ρ является метрикой, то есть непрерывно. Тогда ρ достигает минимума, то есть r реализуется, а значит, не равно нулю (см. оценку выше). Раз $r > 0$, то $B(\mathbf{y}_0, r)$ — полноправный шар, проверим, что он входит в образ f целиком, что и закончит доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$. Положим $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$ на $\overline{B(\mathbf{x}_0, \delta)}$; g непрерывно, поэтому достигает минимума. Попробуем этот минимум найти:

- Рассмотрим поведение $g(\mathbf{x})$ на $S(\mathbf{x}_0, \delta)$:

$$g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| \geq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| - \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| \geq 2r - r = r$$

- $g(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| < r$, так как $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$

Тогда понятно, что минимум достигается не на границе. Раз так, он достигается во внутренности. Отображение $l: \mathbf{x} \mapsto g^2(\mathbf{x})$ достигает минимума в той же точке, что и g , при этом $l'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$. Из невырожденности производного оператора следует, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, что и требовалось. ■

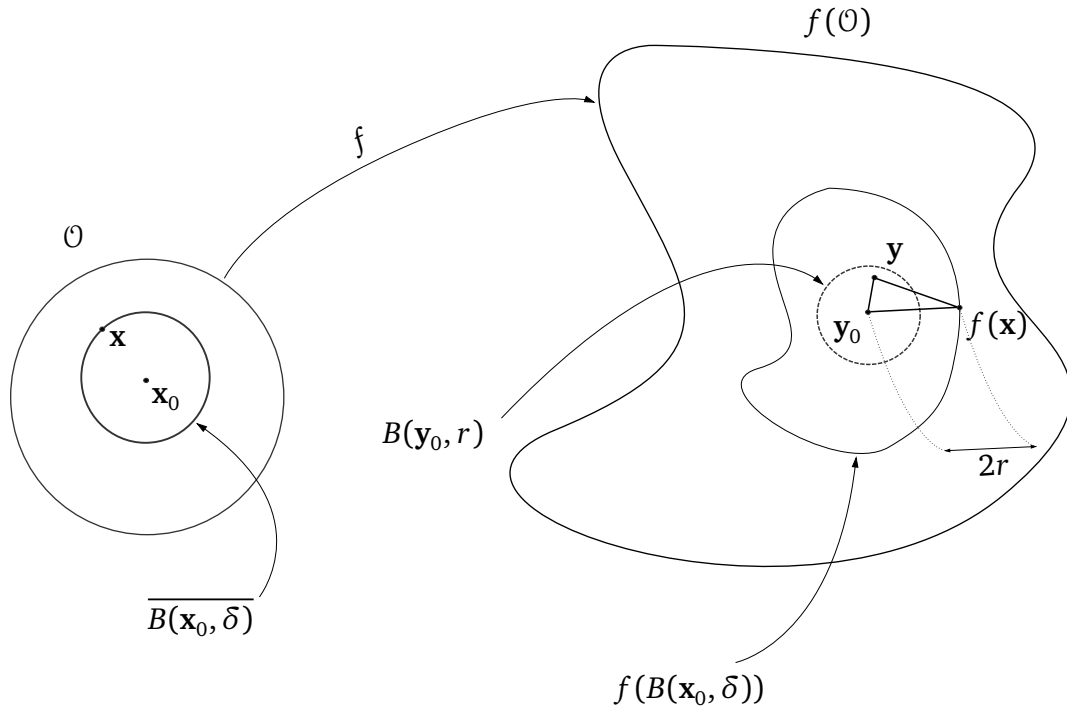


Рис. 1: Теорема о сохранении области

Следствие 0.1.3. Пусть $f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{l \leq m}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \text{ rank } f'(\mathbf{x}) = l$, тогда f открыто.

Доказательство. Построим отображение $\tilde{f}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i &= f_i, \quad 1 \leq i \leq l \\ \tilde{f}_i &= x_i, \quad \text{иначе} \end{aligned}$$

Производный оператор тогда будет выглядеть так:

$$\tilde{f}' = \begin{pmatrix} & & f' & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Где первая сверху единица стоит на $l + 1$ -м месте. Тогда отображение \tilde{f} тоже дифференцируемо, и его производный оператор невырожден. Применяя предыдущую

теорему, получаем, что $\tilde{f}(A)$ открыто, если множество A открыто. Тогда $f(A)$ тоже открыто. ■

Теорема 0.1.4. (О гладкости обратного отображения)

Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, $T \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \det T'(\mathbf{x}) \neq 0$, T обратимо, тогда $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(\mathbf{y}_0) = (T'(\mathbf{x}_0))^{-1}$, при $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$.

Доказательство. Докажем теорему по индукции. В качестве базы рассмотрим случай $r = 1$. Обозначим $S = T^{-1}$, $S: T(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}^m$ непрерывно, так как по теореме о сохранении области T открыто. Зафиксируем $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$ и проверим дифференцируемость S в точке \mathbf{y}_0 .

- По теореме о почти локальной инъективности имеем

$$\exists c, \delta > 0: \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \quad \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \geq c \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

- Воспользуемся дифференцируемостью T :

$$T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

Здесь $A = T'(\mathbf{x}_0)$. Положим $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = A(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) + \alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) \|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$

Перепишем это равенство в виде, похожем на определение дифференцируемости S :

$$S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) \|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$

Если мы поймем, что $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) \|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$ — бесконечно малое при $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0$, то мы получим определение дифференцируемости S в точке \mathbf{y}_0 . Проверим это:

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) &\leq \|A^{-1}\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &\leq \|A^{-1}\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c} \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \\ &= \|A^{-1}\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c} \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\| \end{aligned}$$

S непрерывно, поэтому $\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} 0$, тогда $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \xrightarrow{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0} 0$.

Теперь нужно доказать непрерывность S' . Из доказанного уже известно, что $S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1}$:

$$\mathbf{y} \mapsto S(\mathbf{y}) = T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \mapsto T'(\mathbf{x}) \mapsto (T'(\mathbf{x}))^{-1} = S'(\mathbf{y})$$

Эту схему можно переписать в привычном виде:

$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$

Таким образом получаем, что S' — композиция непрерывных отображений, то есть непрерывно (в частности, отображение $GL(\mathbb{R}^m) \ni A \mapsto A^{-1}$ непрерывно). Таким образом, база доказана.

Для доказательства индукционного перехода нужно показать только гладкость S . Пусть $T \in C^n$, $S \in C^n$, покажем, что тогда если вдруг $T \in C^{n+1}$, то и $S \in C^{n+1}$. Для этого достаточно, чтобы $S' \in C^n$:

$$S'(y) = (T'(x))^{-1} = (T'(S(y)))^{-1}$$

$S \in C^n$ по предположению индукции, $T' \in C^n$ потому, что $T \in C^{n+1}$, обращение матрицы — вообще класса C^∞ , то есть переход доказан. ■

Лемма 0.1.5. (О приближении отображения его линеаризацией)

Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathcal{O}$, тогда $\forall h$

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| \leq M \|h\|$$

где

$$M = \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|f'(z) - f'(x_0)\|$$

Доказательство. Положим $F(x) = f(x) - f'(x_0)(x)$, тогда $F'(x) = f'(x) - f'(x_0)$. Применим теорему Лагранжа к F :

$$\begin{aligned} \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h\| &= \|F(x_0 + h) - F(x_0)\| \leq \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|F'(z)\| \cdot \|h\| \\ &= \sup_{z \in [x_0, x_0+h]} \|f'(z) - f'(x_0)\| \cdot \|h\| \end{aligned}$$

■

Теорема 0.1.6. (О локальной обратимости)

Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathcal{O}$, $\det f'(x_0) \neq 0$, тогда $\exists U(x_0)$ такая, что $f|_U$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Если мы докажем, что f обратимо в некоторой окрестности $U(x_0)$, то по теореме о гладкости обратного отображения мы получим требуемое (невыврожденность определителя в окрестности x_0 следует из его непрерывности и того, что $\det f'(x_0) \neq 0$). Для начала заметим, что из невырожденности оператора в точке x_0 следует, что

$$\exists c > 0: \|f'(x_0)h\| \geq c \|h\|$$

Попробуем построить окрестность. Пусть она будет содержать точки такие, что одновременно выполнены условия:

- $\|f'(x) - f'(x_0)\| \leq \frac{c}{4}$. Эти точки есть вблизи x_0 по теореме о непрерывно дифференцируемых отображениях.
- $\det f'(x) \neq 0$. Такие точки есть из непрерывности \det .

Проверим, что в этой окрестности f не склеивает точки, что и будет означать его обратимость; пусть $y = x + h$, тогда:

$$f(y) - f(x) = (f(y + h) - f(x) - f'(x)h) + (f'(x) - f'(x_0))h + f'(x_0)h$$

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| &\geq \underbrace{\|f'(\mathbf{x}_0)\| \|\mathbf{h}\|}_{\geq c \|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}\|}_{\leq M \|\mathbf{h}\| \leq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\|f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{h}\|}_{\leq \frac{c}{4} \|\mathbf{h}\|} \\ &\geq \frac{c}{4} \|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

Где $M \|\mathbf{h}\| \leq \frac{c}{2} \|\mathbf{h}\|$ потому, что:

$$M \|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\| \sup \|f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x})\| \leq \sup \left(\underbrace{\|f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0)\|}_{\leq \frac{c}{4}} + \underbrace{\|f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x})\|}_{\leq \frac{c}{4}} \right) \leq \frac{c}{2}$$

■

Теорема 0.1.7. (О неявном отображении)

Пусть \mathcal{O} открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $f \in C^r$,

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{O}$: $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $\det f'_y(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, тогда

- $\exists U(\mathbf{a}), \exists U(\mathbf{b}), \exists ! \varphi : U(\mathbf{a}) \rightarrow U(\mathbf{b}) \in C^r$ такое, что $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a}) f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0$
- $\varphi'(\mathbf{x}) = -(f'_y(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})))^{-1} \cdot f'_x(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$

Доказательство. TBD

■

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют k -мерным многообразием в \mathbb{R}^m , если оно локально гомеоморфно \mathbb{R}^k . Иными словами, $\forall \mathbf{x} \in M \exists U(\mathbf{x}) \exists \varphi$ — гомеоморфизм: $U(\mathbf{x}) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^k$.

Определение. k -мерное многообразие $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *простым*, если оно гомеоморфно \mathbb{R}^k . Иными словами, в предыдущем определении можно выбрать $U(\mathbf{x}) = M$.

Определение. Пара $\langle U(\mathbf{x}), \varphi \rangle$ из определения называется *картой*, или *параметризацией* многообразия в точке \mathbf{x} . Набор карт, который покрывает все M , называется *атласом*.

Определение. Простое k -мерное многообразие M называют C^r -гладким, если $\varphi \in C^r$ — параметризация M и $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O} \operatorname{rank} \varphi'(\mathbf{x}) = k$.

Теорема 0.1.8. (О задании гладкого многообразия системой уравнений)

Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \leq k < m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, тогда $\forall \mathbf{p} \in M$ эквивалентны утверждения:

- $\exists U(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap U$ — простое k -мерное C^r -гладкое многообразие.
- $\exists \tilde{U}(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap \tilde{U}$ можно задать системой C^r -гладких уравнений, иначе говоря: $\exists f_1, \dots, f_{m-k} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R} \in C^r$ такие, что $\mathbf{x} \in M \cap \tilde{U} \iff \forall i f_i(\mathbf{x}) = 0$, причем $\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независимы.

Доказательство. TBD

■

Следствие 0.1.9. (О двух параметризациях)

Пусть M — k -мерное простое C^r -гладкое многообразие, $\mathbf{p} \in M$, причем $C^r \ni \varphi_1: \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow U \cap M$, $C^r \ni \varphi_2: \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow U \cap M$ — параметризации $U(\mathbf{p}) \cap M$. Тогда φ_1 и φ_2 отличаются на диффеоморфизм, а именно, $\exists \psi: \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2$ — диффеоморфизм, причем $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$.

Доказательство. TBD ■

Определение. Пусть M — C^r -гладкое k -мерное многообразие в \mathbb{R}^m , $\mathbf{p} \in M$, $\varphi: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ — параметризация окрестности $U(\mathbf{p})$, причем $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$. Тогда касательным пространством к M в точке \mathbf{p} называется $T_p(M) = \text{Im } \varphi'(\mathbf{a})$.

Теорема 0.1.10. (О корректности определения касательного пространства)
Касательное пространство не зависит от выбора параметризации.

Доказательство. TBD ■

Теорема 0.1.11. (О касательном пространстве к гладкому пути)

Пусть M — гладкое многообразие. Тогда $\mathbf{v} \in T_p(M) \iff \exists$ гладкий путь $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m: \gamma([-1, 1]) \subseteq M$ такой, что $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

Доказательство. TBD ■

Теорема 0.1.12. (О касательном пространстве к графику функции)

Касательное пространство к графику $C^r \ni f: \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ задается уравнением

$$y - f(\mathbf{x}_0) = f'_1(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \dots + f'_m(\mathbf{x}_m)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)$$

Доказательство. TBD ■

Теорема 0.1.13. (О касательном пространстве к поверхности уровня)

Касательное пространство к поверхности уровня функции $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ задается уравнением

$$f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(y_0)(y - y_0) + f'_z(z_0)(z - z_0) = 0$$

Доказательство. TBD ■