Математический анализ I

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

0.1 Введение

Определение. *Отображением* из множества X в множество Y называется отношение $F \subseteq X \times Y$, для которого

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Y:\ (x,y) \in F$$

Обозначается $F: X \to Y$ или $X \xrightarrow{F} Y$. Сам факт того, что $(x,y) \in F$ обозначается $f(x) = y$. X называют *областью определения*, а Y — *областью значений* f.

Определение. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется *инъективным*, если для него выполняется

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Иначе говорят, что f — *1-1 отображение*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{1-1} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным*, если для него выполняется

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения называют отображениями *на*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называют *биекцией*, если оно одновременно сюръективно и инъективно, иначе говоря

$$\forall y \in Y\ \exists! x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения, по аналогии с предыдущими определениями, называют *1-1 на отображениями*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow[\text{на}]{1-1} Y$.

Определение. *Образом* множества $A \subseteq X$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f(A) \overset{def}{=} \{ f(x) \mid x \in A \}$$

Определение. *Прообразом* множества $B \subseteq Y$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{ x \in X \mid f(x) \in B \}$$

Определение. *Обратимым* называется отображение $f: X \to Y$, для которого существует обратное относительно композиции отображение $f^{-1}: Y \to X$, для которого выполняется

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

Теорема 0.1.1 (Свойства прообраза)**.** Пусть $f: X \to Y$, $A, B \subseteq X$. Тогда справедливо

i) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

ii) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Доказательство. Без доказательства (очевидно). ■

Теорема 0.1.2. f биективно $\Longleftrightarrow$ f обратимо

Доказательство. Без доказательства (тривиально). ■

Определение. *Полем* называется тройка $\langle X, +\colon X\times X\to X, \cdot\colon X\times X\to X\rangle$, где X — множество, удовлетворяющая аксиомам поля:

+G1 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

+G2 $\exists 0\in X\colon\ \alpha+0=0+\alpha=\alpha$

+G3 $\exists -\alpha\colon\ \alpha+-\alpha=0$

+G4 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

·G1 $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$

·G2 $\exists 1\in X\colon\ 1\alpha=\alpha 1=\alpha$

·G3 $\alpha\neq 0\Rightarrow\exists\alpha^{-1}\colon\ \alpha\alpha^{-1}=1$

·G4 $\alpha\beta=\beta\alpha$

D $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$

Для любых $\alpha,\beta,\gamma\in X$. Аксиомы +G1-4 задают на X структуры абелевой группы по +, аксиомы ·G1-4 задают на $X\setminus\{0\}$ структуру абелевой группы по ·, аксиома дистрибутивности D связывает + и ·.

Примеры.

i) $\mathbb{R}$ — поле. В дальнейшем можно под произвольным полем понимать $\mathbb{R}$, общность от этого сильно не пострадает.

ii) $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда поле, когда p — простое.

Определение. *Векторным (линейным) пространством над полем K* называют тройку $\langle V, +_V\colon V\times V\to V, \cdot_V\colon V\times K\to V\rangle$, где V — множество, удовлетворяющюю аксиомам:

$+_V$G1 $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$

$+_V$G2 $\exists\mathbf{0}\in X\colon\ \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$

$+_V$G3 $\exists-\mathbf{x}\colon\ \mathbf{x}+-\mathbf{x}=\mathbf{0}$

$+_V$G4 $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$

V1 $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$

V2 $(\alpha\beta)\mathbf{x}=\alpha(\beta\mathbf{x})$

V3 $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$

V4 $1_K\mathbf{x}=\mathbf{x}$

Для любых $\alpha,\beta\in K$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$.

Пример. $K^n \overset{def}{=} \underbrace{K \oplus K \oplus \ldots \oplus K}_{n}$ — векторное пространство, которому изоморфны все векторные пространства над полем K размерности n. Мы ограничимся рассмотрением $\mathbb{R}^n$.

Теорема 0.1.3. (Закон Де-Моргана) Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство множеств, и Y — множество. Тогда справедливо

$$Y \setminus \Big(\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in A}\big(Y \setminus X_\alpha\big)$$

Доказательство. Докажем, что z принадлежит левой части $\Longleftrightarrow$ z принадлежит правой части:

$$z \in Y \setminus \Big(\bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha\Big) \Longleftrightarrow z \in Y \wedge z \notin \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha \Longleftrightarrow z \in Y \wedge \forall\alpha \in A\; z \notin X_\alpha \Longleftrightarrow$$
$$\forall\alpha \in A\; z \in Y \wedge z \notin X_\alpha \Longleftrightarrow z \in \bigcap_{\alpha\in A}\big(Y \setminus X_\alpha\big)$$

■

Теорема 0.1.4. (Неравенство Бернулли) $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ при $x \geqslant -1$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство.

i) База индукции при $n=1$: $1+x \geqslant 1+x$

ii) Индукционный переход:

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} \geqslant (1+x)(1+(n-1)x) =$$
$$1+x+(n-1)x+(n-1)x^2 = 1+nx+(n-1)x^2 \geqslant 1+nx$$

■

Теорема 0.1.5. (Неравенство КБШ)

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Доказательство.

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^n (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^n (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_k b_k) =$$
$$\frac{1}{2}\left[\Big(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{k=1}^n b_k^2\Big) + \Big(\sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{k=1}^n a_k^2\Big) - 2\Big(\sum_{i=1}^n a_i b_i\Big)\Big(\sum_{k=1}^n a_k b_k\Big)\right] =$$
$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^n a_i b_i\Big)^2$$

■

0.2 Мощность множеств

Определение. *Мощностью конечного множества* называют количество его различных элементов.

Определение. Множества A и B *равномощны*, если сущесвует $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$ — биекция

Лемма 0.2.1. Равномощность — отношение эквивалентности

Доказательство.

- $A \sim B \Longrightarrow \exists f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B \Longrightarrow f^{-1} : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A \Longrightarrow B \sim A$
- $A \sim B \wedge B \sim C \Longrightarrow \exists f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B, g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} C \Longrightarrow g \circ f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} C \Longrightarrow A \sim C$
- $id_A : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A \Longrightarrow A \sim A$

■

Определение. *Булеаном* множества A называют множество всех подмножеств A. Обозначают $\mathcal{P}(A)$ или 2^A

Лемма 0.2.2. $\mathcal{P}(A) \not\sim A$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathcal{P}(A)$. Рассмотрим

$$X = \{ a \in A \mid a \notin f(a) \} \subseteq A$$

Тогда существует $x \in A$: $f(x) = X$. Но тогда

$$x \in X \Longleftrightarrow x \notin f(x) \Longleftrightarrow x \notin X$$

Противоречие. ■

Определение. Будем говорить, что множество A по *мощности не превосходит* множество B, если A равномощно некоторому подмножеству B. Обозначается $A \preccurlyeq B$

Определение. Будем говорить, что множество A по *мощности не превосходит* множество B, если существует инъекция $f : A \xrightarrow{1-1} B$

Замечание. Эти два определения эквивалентны.

Теорема 0.2.3. Для произвольных A, B выполнено

i) $A \sim B \Longrightarrow A \preccurlyeq B$

ii) $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq C \Longrightarrow A \preccurlyeq C$

Доказательство. Без доказательства (тривиально). ■

Теорема 0.2.4. (Кантор-Бернштейн) $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \Longleftrightarrow A \sim B$

Доказательство.

$\Longleftarrow$ Предыдущая теорема.

$\Longrightarrow$ Положим $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} f(A)$ и $g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} g(B)$. Тогда $g \circ f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} g(f(A))$
Обозначим

$$A_0 := A$$
$$A_0' := g(B)$$
$$A_1 := g(f(A_0))$$

Тогда по построению $A_0 \supseteq A_0' \supseteq A_1$. Кроме того, посредством $g \circ f$ получаем $A_0 \sim A_1$, и по условию $B \sim A_0'$ Тогда по транзитивности достаточно показать, что $A_0 \sim A_0'$.

$$A_1' := g(f(A_0')) \sim A_0'$$

Потому что $A_0' \subseteq A$ и $g \circ f$ — биекция (получается своего рода двустороннее сужение $g \circ f$, которое сохраняет его биективность). В том же духе продолжим

$$A_{n+1} := g(f(A_n)) \sim A_n$$
$$A_{n+1}' := g(f(A_n')) \sim A_n'$$

причём для всех n выполнено (аналогично первому шагу)

$$A_n \supseteq A_n' \supseteq A_{n+1}$$

Обозначим

$$D := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$
$$M_n := A_n \setminus A_n'$$
$$M_n' := A_n' \setminus A_{n+1}$$

Все эти множества попарно не пересекаются. При этом

$$A_0 = D \sqcup M_0 \sqcup M_0' \sqcup M_1 \sqcup \ldots$$
$$A_0' = D \qquad \sqcup M_0' \sqcup M_1 \sqcup \ldots$$

Нетрудно понять, что $g(f(M_n)) = M_{n+1}$ и $g(f(M_n')) = M_{n+1}'$. Тогда построим искомое соответствие следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d] & M_0 \arrow[drr] & M_0' \arrow[d] & M_1 \arrow[drr] & M_1' \arrow[d] & \cdots \\
D & & M_0' & M_1 & M_1' & M_2 \cdots
\end{tikzcd}$$

Где все диагональные стрелки — сужения $g \circ f$, а вертикальные — тождественные отображения.

■

Определение. *Множествами счетной мощности* называют множества, лежащие в одном классе эквивалентности по $\sim$ с $\mathbb{N}$.

Теорема 0.2.5. (Свойства счетных множеств)

i) Любое бесконечное множество сожержит счетное подмножество

ii) Объединение двух счетных множеств счетно

iii) A — бесконечно, $B \sim \mathbb{N} \Longrightarrow A \cup B \sim A$

Доказательство.

i) Пусть A бесконечно. Тогда оно не пусто, то есть $\exists a \in A$. Рассмотрим $A \setminus \{a\}$. Если оно пусто, то множество A не было бесконечным. Продолжим этот процесс и получим счетное подмножество A: $\{a_1, a_2, \dots\}$.

ii) Пусть A и B — счетные. Получим биекции этих множеств с $\mathbb{N}$: $A = \{a_1, \dots\}$ и $B = \{b_1, \dots\}$. Построим биекцию $(A \cup B)^* \to \mathbb{N}$: $A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, \dots\}$, считая совпадающие элементы из разных множеств разными. Тогда выполнено $\mathbb{N} \sim A \preccurlyeq A \cup B \preccurlyeq \mathbb{N}$, то есть $A \cup B \sim \mathbb{N}$ (теорема Кантора- Бернштейна).

iii) В A найдется счетное подмножество $C \subseteq A$.

$$A = A' \cup C$$
$$A \cup B = A' \cup (C \cup B)$$

Причем $C \cup B$ счетно, то есть $C \cup B \sim C$. Тогда построим соответствие:

$$\begin{array}{ccc} A' & & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & & (C \cup B) \end{array}$$

■

Теорема 0.2.6. (Счетность множества рациональных чисел) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

Доказательство. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ■

Определение. Bin — множество всех последовательностей из нулей и единиц.

Теорема 0.2.7. $Bin \sim [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

Доказательство. Для доказательства теоремы разобъем $Bin = Bin^{\infty} \sqcup Bin^{0}$ — множества последовательностей бесконечной и конечной длинной (конечной в том смысле, что с конечного места в последовательности идут только нули) соответственно.

i) $Bin^0 = \bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} B_k$, где B_k - – множество последовательностей длины k — счетное объединение конечных множеств. Поэтому Bin^0 счетно.

ii) Отождествим элементы Bin^∞ с числами полуинтервала $(0,1]$ как их двоичную запись. Поскольку любой элемент $(0,1]$ представим в двоичной записи бесконечной длины (тривиально), получаем, что $Bin^\infty \sim (0,1]$.

iii) Теперь $Bin = Bin^0 \sqcup Bin^\infty \sim Bin^\infty \sim (0,1] \sim [0,1]$.

$\blacksquare$

Теорема 0.2.8. Все промежутки вида $\langle a,b\rangle$, $a \neq b$ в $\mathbb{R}$ равномощны.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением открытых интервалов. Добавление граничной точки не меняет мощность множества.
Докажем, что $\forall a \neq b,\ c \neq d\ (a,b) \sim (c,d)$. Для этого построим биекцию между этими двумя множествами:

$$f : (a,b) \to (c,d)$$
$$x \longmapsto \frac{(d-c)(x-a)}{b-a}$$

$\blacksquare$

Теорема 0.2.9. $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$

Доказательство. Построим биекцию меджу $\mathbb{R}^n$ и Bin, что и докажет утверждение. Пусть $\psi : \mathbb{R} \to Bin$ — функция, сопоставляющая числу его двоичную запись. Тогда

$$\phi : \mathbb{R}^n \to Bin$$
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longmapsto (\psi(x_1)_1, \psi(x_2)_1, \ldots, \psi(x_1)_2, \psi(x_2)_2, \ldots)$$

осуществляет требуемое соответствие. $\blacksquare$

Теорема 0.2.10. $\mathbb{R}^n$ несчетно

Доказательство. $\mathbb{R}^n \sim Bin \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \nsim \mathbb{N}$ $\blacksquare$

Теорема 0.2.11. *Множеством мощности континуум* называют множество, равномощное $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$

Глава 1

Основы топологии

1.1 Метрическое пространство

Определение. *Метрикой* на множестве X называют $\rho : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам метрики:

i) $\rho(x) \geqslant 0$

ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

iii) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

Определение. Пару $\langle X, \rho \rangle$, где ρ — метрика на X, называют *метрическим пространством*

Примеры.

i) Стандартная метрика на $\mathbb{R}^n$: $\rho(x, y) = |x, y|_2$, где $d_k(x, y) \stackrel{def}{=} |x, y|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^k}$

ii) $|.,.|_k$ является метрикой на $\mathbb{R}$ при любых $k \geqslant 1$

iii) $|x, y|_\infty = \max_{i=1}^{n}(x_i - y_i)$ — метрика на $\mathbb{R}$

iv) $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, y) = 0$ иначе — метрика, порождающая дискретное пространство.

Далее, если не указано, речь идет о метрическом пространстве X

Определение. *Шаром* радиуса r с центром в точке x называется

$$B_r(x) \stackrel{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) < r \,\}$$

Определение. *Замкнутым шаром* радиуса r с центром в точке x называется

$$\overline{B_r}(x) \stackrel{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r \,\}$$

Определение. *Расстоянием* от точки x до множества A называется

$$\rho(x, A) \stackrel{def}{=} \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

Определение. *Диаметром* множества A называется

$$\operatorname{diam}(A) = \sup \{ \rho(x, y) \mid x, y \in A \}$$

Определение. В метрическом пространстве *открытыми* называют множества A такие, что

$$\forall x \in A \, \exists B_r(x) \subset A$$

Иначе говоря, любая точка открытого множества входит в него с некоторым шаром.

Определение. Множество A называют *ограниченным*, если $\operatorname{diam}(A) < +\infty$

Теорема 1.1.1. Множество A ограниченно $\Longleftrightarrow$ его можно вписать в шар

Доказательство.

$\Longrightarrow$ $m := \operatorname{diam}(A)$. Покажем, что A можно вписать в шар радиуса $m+1$. Возьмем произвольную точку $x \in A$. Тогда $\forall y \in A \ \rho(x, y) \leqslant m < m+1 \Longrightarrow y \in B_{m+1}(x)$

$\Longleftarrow$ Пусть $y, z \in A$ и A можно вписать в шар $B_r(x)$. Тогда $2r > \rho(x, y) + \rho(x, z) \geqslant \rho(y, z) \Longrightarrow \rho(y, z) < 2r \Longrightarrow A$ ограничено.

∎

Теорема 1.1.2.

i) Произольное объединение открытых множеств открыто

ii) Пересечение двух (а значит, и произвольного конечного числа) открытых множеств открыто.

Доказательство.

i) Пусть $\{ G_\alpha \}_{\alpha \in A}$ — семейство открытых множеств. Тогда

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha \Longrightarrow x \in G_\alpha \Longrightarrow \exists U(x) \subset G_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$$

ii) Пусть A и B — открытые множества. Тогда

$$\begin{gathered} x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Longrightarrow \\ \exists B_{r_1}(x) \subset A \ \wedge \ B_{r_2}(x) \subset B \Longrightarrow \\ x \in B_{\min(r_1, r_2)}(x) \subset A \cap B \end{gathered}$$

∎

Определение. *Липшицево эквивалентными* называют отображения f и g в $\mathbb{R}$, такие, что $\exists c_1, c_2 \colon \ c_1 f \leqslant g \leqslant c_2 f$

Пример. В $\mathbb{R}^n$ метрики d_1 и d_2 липшицево эквивалентны

1.2 Топологическое пространство

Определение. *Топологией* на множестве X называют $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

i) $\varnothing, X \in \Omega$

ii) $A, B \in \Omega \Longrightarrow A \cap B \in \Omega$

iii) $\{X_\alpha \in \Omega\}_{\alpha \in A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_a \in \Omega$

Иными словами, топология замкнута относительно конечных пересечений и произвольных объединений её элементов.

Определение. Пара $\langle X, \Omega \rangle$, где Ω — топология на X, называется *топологическим пространством*.

Определение. Элементы топологии называются *открытыми множествами*. Дополнения открытых множеств называются *замкнутыми множествами*.

Примеры.

i) $\Omega = \mathcal{P}(X)$ — дискретная топология

ii) $\Omega = \{\varnothing, X\}$ — антидискретная топология

iii) Все метрические пространства являются топологическими пространствами, порожденными метрикой.

iv) $\Omega = \varnothing \cup \{$все дополнения конечных множеств$\}$

Определение. *Метризуемым* называется топологическое пространство, топология которого может быть порождена метрикой.

Примеры.

i) Дискретная топология метризуема

ii) Антидискретная топология не метризуема

Определение. *Окрестностью* точки x называют любое открытое множество, содержащее x. Далее окрестность точки x будет обозначаться $U(x)$.

Определение. Точка x называется *внутренней* для множества A, если она входит в него с некоторой окрестностью:

$$\exists U(x):\ U(x) \subset A$$

Определение. Точка x называется *граничной* точкой множества A, если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение как с A, так и с его дополнением:

$$\forall U(x)\ \ A \cap U(x) \neq \varnothing \wedge (X \setminus A) \cap U(x) \neq \varnothing$$

Определение. Точка x называется *предельной* точкой множества A, если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение с A:

$$\forall U(x) \ \ A \cap U(x) \neq \varnothing$$

Определение. Точка x называется *внешней* точкой A, если

$$\exists U(x) \ \ A \cap U(x) = \varnothing$$

Определение. Точка x называется *точкой прикосновения* множества A, если

$$\forall U(x) \ \ A \cap U(x) \neq \varnothing$$

Замечание. Точка прикосновения и внешняя точка — формальные отрицания друг друга.

Теорема 1.2.1.

i) $\varnothing$, X замкнуты

ii) A, B замкнуты $\Longrightarrow A \cup B$ замкнуто

iii) если C_α замнкнуты, то $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha$ замкнуто

Доказательство.

i) $X = X \setminus \varnothing$ — замкнуто по опделелению. Аналогично $\varnothing = X \setminus X$

ii) $A \cup B$ замкнуто $\Longleftrightarrow X \setminus (A \cap B)$ открыто $\Longleftrightarrow (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ открыто $\Longleftarrow (X \setminus A)$, $(X \setminus B)$ открыты $\Longleftrightarrow A$, B замкнуты.

iii) Аналогично ii

■

Теорема 1.2.2. A открыто, B замкнуто. Тогда

i) $A \setminus B$ открыто

ii) $B \setminus A$ замкнуто

Доказательство.

i) $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ — открыто

ii) $B \setminus A = B \cap (X \setminus A)$ — замкнуто

■

1.3 Внутренность и замыкание

Определение. *Внутренностью* множества A называют наибольшее по включению открытое множество, содержащееся в A, иначе говоря:

$$\operatorname{Int}(A) \overset{def}{=} \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} U$$

Определение. *Замыканием* множества A называют наименьшее по включению замкнутое множество, сожержащее A, иначе говоря:

$$\operatorname{Cl}(A) \overset{def}{=} \bigcap_{\substack{C \supseteq A \\ cl_X(C)}} C$$

Теорема 1.3.1. (Свойства Int)

i) $\operatorname{Int}(A)$ открыто

ii) $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$

iii) $open_X(B)$, $B \subseteq A \Longrightarrow B \subseteq \operatorname{Int}(A)$

iv) $\operatorname{Int}(A) = A \Longleftrightarrow open_X(A)$

v) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A)) = A$

vi) $A \subseteq B \Longrightarrow \operatorname{Int}(A) \subseteq \operatorname{Int}(B)$

vii) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$

viii) $\operatorname{Int}(A \cup B) \supseteq \operatorname{Int}(A) \cup \operatorname{Int}(B)$

Доказательство.

i) $\operatorname{Int}(A)$ открыто как объединение открытых

ii) В объединения входят только подмножества A, поэтому $\operatorname{Int}(A) \subseteq A$

iii) B по определению войдет в объединение

iv) $\Longrightarrow$ по пункту (i). $\Longleftarrow$ по пункту (iii)

v) см. пункт (iv)

vi) Все открытые подмножества A являются открытыми подмножествами B

vii) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B \Longrightarrow$
$\operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int}(A), \operatorname{Int}(B) \Longrightarrow \operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)$

$\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) \subseteq \operatorname{Int}(A) \subseteq A$, аналогично $\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) \subseteq B$, поэтому $\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) \subseteq A \cap B \Longrightarrow \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B)) = \operatorname{Int}(A \cap B) \Longrightarrow \operatorname{Int}(A) \cap \operatorname{Int}(B) \subseteq \operatorname{Int}(A \cap B)$

■

Теорема 1.3.2. (Свойства Cl)

i) $\text{Cl}(A)$ замкнуто

ii) $\text{Cl}(A) \supseteq A$

iii) $cl_X(B), B \supseteq A \Longrightarrow B \supseteq \text{Cl}(A)$

iv) $\text{Cl}(A) = A \Longleftrightarrow cl_X(A)$

v) $\text{Cl}(\text{Cl}(A)) = A$

vi) $A \subseteq B \Longrightarrow \text{Cl}(A) \subseteq \text{Cl}(B)$

vii) $\text{Cl}(A \cup B) = \text{Cl}(A) \cup \text{Cl}(B)$

viii) $\text{Cl}(A \cap B) \subseteq \text{Cl}(A) \cap \text{Cl}(B)$

Доказательство. Можно доказать аналогично предыдущей теореме, а можно доказать, пользуясь переходом к дополнению в предыдущей теореме. ■

Теорема 1.3.3. (Связь Int и Cl)

i) $X \setminus \text{Int}(A) = \text{Cl}(X \setminus A)$

i) $X \setminus \text{Cl}(A) = \text{Int}(X \setminus A)$

Доказательство.

i)

$$X \setminus \text{Int}(A) \stackrel{def}{=} X \setminus \Big(\bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} U \Big) = \bigcap_{\substack{U \subseteq A \\ open_X(U)}} X \setminus U \stackrel{def}{=} \text{Cl}(X \setminus A)$$

так как множества вида $X \setminus U$ суть замкнутые множества, содержащие A

ii) Аналогично

■

Определение. *Границей* множества A называется

$$\text{Fr}(A) \stackrel{def}{=} \text{Cl}(A) \setminus \text{Int}(A)$$

Теорема 1.3.4. (Свойства Fr)

i) $\text{Fr}(A)$ замкнуто

ii) $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(X \setminus A)$

iii) A замкнуто $\Longleftrightarrow \text{Fr}(A) \subseteq A$

iv) A открыто $\Longleftrightarrow \text{Fr}(A) \cap A = \varnothing$

Доказательство.

i, ii) Очевидно в свете предыдущих теорем

iii) A замкнуто $\iff \mathrm{Cl}(A) = A \iff \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A) \subseteq A$

iv) A открыто $\iff \mathrm{Int}(A) = A \iff \mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Cl}(A) \setminus A \iff \mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$

■

Теорема 1.3.5. (Характеризация внутренности)
$\mathrm{Int}(A)$ — множество всех внутренних точек A.

Доказательство. Докажем, что $x \in \mathrm{Int}(A) \iff x$ — внутренняя точка A

$\implies$ $x \in \mathrm{Int}(A)$ — открыто $\implies U(x) := \mathrm{Int}(A) \subseteq A \implies x$ — внутренняя точка A

$\impliedby$ x — внутренняя для $A \implies \exists U(x) \subseteq A \implies x \in \mathrm{Int}(A)$ так как по определению $\mathrm{Int}(A)$ — это объединение всех открытых множеств, содержащихся в A, в том числе и $U(x)$. ■

Следствие 1.3.6. A открыто $\iff \forall x \in A$ x — внутренняя точка A

Теорема 1.3.7. (Характеризация замыкания)
$\mathrm{Cl}(A)$ — множество всех точек прикосновения A.

Доказательство.

$$X \setminus \mathrm{Cl}(A) = \mathrm{Int}(X \setminus A) = \{\text{внешние точки } A\} = X \setminus \{\text{точки прикосновения } A\}$$

■

Определение. Множество A называется *всюду плотным*, если $\mathrm{Cl}(A) = X$.

Определение. Топологическое пространство X называют *сепарабельным*, если в нем существует не более чем счетное всюду плотное множество.