Математический анализ I

Конспект основан на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

0.1 Введение

Определение. *Отображением* из множества X в множество Y называется отношение $F \subseteq X \times Y$, для которого

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Y:\ (x, y) \in F$$

Обозначается $F: X \to Y$ или $X \xrightarrow{F} Y$. Сам факт того, что $(x, y) \in F$ обозначается $f(x) = y$. X называют *областью определения*, а Y — *областью значений* f.

Определение. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется *инъективным*, если для него выполняется

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Иначе говорят, что f — *1-1 отображение*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{1-1} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным*, если для него выполняется

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения называют отображениями *на*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называют *биекцией*, если оно одновременно сюръективно и инъективно, иначе говоря

$$\forall y \in Y\ \exists! x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения, по аналогии с предыдущими определениями, называют *1-1 на отображениями*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow[\text{на}]{1-1} Y$.

Определение. *Образом* множества $A \subseteq X$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f(A) \stackrel{def}{=} \{f(x) \mid x \in A\}$$

Определение. *Прообразом* множества $B \subseteq Y$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f^{-1}(B) \stackrel{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Определение. *Обратимым* называется отображение $f: X \to Y$, для которого существует обратное относительно композиции отображение $f^{-1}: Y \to X$, для которого выполняется

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

Теорема 0.1.1 (Свойства прообраза)**.** Пусть $f: X \to Y$, $A, B \subseteq X$. Тогда справедливо

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Доказательство. Без доказательства (очевидно). ■

Теорема 0.1.2. f биективно $\Longleftrightarrow f$ обратимо

Доказательство. Без доказательства (тривиально). ■

Определение. *Полем* называется тройка $\langle X, +: X\times X\to X, \cdot: X\times X\to X\rangle$, где X — множество, удовлетворяющая аксиомам поля:

+G1 $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

+G2 $\exists 0\in X:\ \alpha+0=0+\alpha=\alpha$

+G3 $\exists -\alpha:\ \alpha+-\alpha=0$

+G4 $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

·G1 $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$

·G2 $\exists 1\in X:\ 1\alpha=\alpha 1=\alpha$

·G3 $\alpha\neq 0\Rightarrow \exists\alpha^{-1}:\ \alpha\alpha^{-1}=1$

·G4 $\alpha\beta=\beta\alpha$

D $(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$

Для любых $\alpha,\beta,\gamma\in X$. Аксиомы +G1-4 задают на X структуры абелевой группы по +, аксиомы ·G1-4 задают на $X\setminus\{0\}$ структуру абелевой группы по ·, аксиома дистрибутивности D связывает + и ·.

Примеры.

1. $\mathbb{R}$ — поле. В дальнейшем можно под произвольным полем понимать $\mathbb{R}$, общность от этого сильно не пострадает.
2. $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда поле, когда p — простое.

Определение. *Векторным (линейным) пространством над полем K* называют тройку $\langle V, +_V: V\times V\to V, \cdot_V: V\times K\to V\rangle$, где V — множество, удовлетворяющую аксиомам:

$+_V$G1 $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$

$+_V$G2 $\exists\mathbf{0}\in X:\ \mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$

$+_V$G3 $\exists -\mathbf{x}:\ \mathbf{x}+-\mathbf{x}=\mathbf{0}$

$+_V$G4 $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{z}$

V1 $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$

V2 $(\alpha\beta)\mathbf{x}=\alpha(\beta\mathbf{x})$

V3 $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$

V4 $1_K\mathbf{x}=\mathbf{x}$

Для любых $\alpha,\beta\in K$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$.

Пример. $K^n \overset{def}{=} \underbrace{K \oplus K \oplus \ldots \oplus K}_{n}$ — векторное пространство, которому изоморфны все векторные пространства над полем K размерности n. Мы ограничимся рассмотрением $\mathbb{R}^n$.

Теорема 0.1.3. (Закон Де-Моргана) Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство множеств, и Y — множество. Тогда справедливо

$$Y \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha \in A} \big(Y \setminus X_\alpha\big)$$

Доказательство. Докажем, что z принадлежит левой части $\Longleftrightarrow$ z принадлежит правой части:

$$z \in Y \setminus \Big(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\Big) \Longleftrightarrow z \in Y \wedge z \notin \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \Longleftrightarrow z \in Y \wedge \forall \alpha \in A\; z \notin X_\alpha \Longleftrightarrow$$
$$\forall \alpha \in A\; z \in Y \wedge z \notin X_\alpha \Longleftrightarrow z \in \bigcap_{\alpha \in A} \big(Y \setminus X_\alpha\big)$$

■

Теорема 0.1.4. (Неравенство Бернулли) $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x \geqslant -1$, $n \in \mathbb{N}$

Доказательство.

i) База индукции при $n = 1$: $1 + x \geqslant 1 + x$

ii) Индукционный переход:

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} \geqslant (1+x)(1+(n-1)x) =$$
$$1 + x + (n-1)x + (n-1)x^2 = 1 + nx + (n-1)x^2 \geqslant 1 + nx$$

■

Теорема 0.1.5. (Неравенство КБШ)

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Доказательство.

$$0 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} (a_i^2 b_k^2 + a_k^2 b_i^2 - 2a_i b_i a_k b_k) =$$
$$\frac{1}{2}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big) - 2\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)\Big] =$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2$$

■

0.2 Мощность множеств

Определение. *Мощностью конечного множества* называют количество его различных элементов.

Определение. Множества A и B *равномощны*, если сущесвует $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B$ — биекция

Лемма 0.2.1. Равномощность — отношение эквивалентности

Доказательство.

i) $A \sim B \Longrightarrow \exists f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B \Longrightarrow f^{-1} : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A \Longrightarrow B \sim A$

ii) $A \sim B \wedge B \sim C \Longrightarrow \exists f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} B, g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} C \Longrightarrow f \circ g : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} C \Longrightarrow A \sim C$

iii) $id_A : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} A \Longrightarrow A \sim A$

■

Определение. *Булеаном* множества A называют множество всех подмножеств A. Обозначают $\mathcal{P}(A)$ или 2^A

Лемма 0.2.2. $\mathcal{P}(A) \nsim A$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} \mathcal{P}(A)$. Рассмотрим

$$X = \{\, a \in A \mid a \notin f(a) \,\} \subseteq A$$

Тогда существует $x \in A$: $f(x) = X$. Но тогда

$$x \in X \Longleftrightarrow x \notin f(x) \Longleftrightarrow x \notin X$$

Противоречие. ■

Определение. Будем говорить, что множество A по *мощности не превосходит* множество B, если A равномощно некоторому подмножеству B. Обозначается $A \preccurlyeq B$

Определение. Будем говорить, что множество A по *мощности не превосходит* множество B, если существует инъекция $f : A \xrightarrow{1-1} B$

Замечание. Эти два определения эквивалентны.

Теорема 0.2.3. Для произвольных A, B выполнено

i) $A \sim B \Longrightarrow A \preccurlyeq B$

ii) $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq C \Longrightarrow A \preccurlyeq C$

Доказательство. Без доказательства (тривиально). ■

Теорема 0.2.4. (Кантор-Бернштейн) $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A \Longleftrightarrow A \sim B$

Доказательство.

$\Longleftarrow$ Предыдущая теорема.

$\Longrightarrow$ Положим $f : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} f(A)$ и $g : B \xrightarrow[\text{на}]{1-1} g(B)$. Тогда $f \circ g : A \xrightarrow[\text{на}]{1-1} g(f(A))$
Обозначим

$$\begin{gathered} A_0 := A \\ A'_0 := g(B) \\ A_1 := g(f(A_0)) \end{gathered}$$

Тогда по построению $A_0 \supseteq A'_0 \supseteq A_1$. Кроме того, посредством $f \circ g$ получаем $A_0 \sim A_1$, и по условию $B \sim A'_0$ Тогда по транзитивности достаточно показать, что $A_0 \sim A'_0$.

$$A'_1 := g(f(A'_0)) \sim A'_0$$

Потому что $A'_0 \subseteq A$ и $f \circ g$ — биекция (получается своего рода двустороннее сужение $f \circ g$, которое сохраняет его биективность). В том же духе продолжим

$$\begin{gathered} A_{n+1} := g(f(A_n)) \sim A_n \\ A'_{n+1} := g(f(A'_n)) \sim A'_n \end{gathered}$$

причём для всех n выполнено (аналогично первому шагу)

$$A_n \supseteq A'_n \supseteq A_{n+1}$$

Обозначим

$$\begin{gathered} D := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \\ M_n := A_n \setminus A'_n \\ M'_n := A'_n \setminus A_{n+1} \end{gathered}$$

Все эти множества попарно не пересекаются. При этом

$$\begin{aligned} A_0 &= D \sqcup M_0 \sqcup M'_0 \sqcup M_1 \sqcup \ldots \\ A'_0 &= D \qquad\quad \sqcup M'_0 \sqcup M_1 \sqcup \ldots \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что $g(f(M_n)) = M_{n+1}$ и $g(f(M'_n)) = M'_{n+1}$. Тогда построим искомое соответствие следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[d] & M_0 \arrow[drr] & M'_0 \arrow[d] & M_1 \arrow[drr] & M'_1 \arrow[d] & \cdots \\
D & & M'_0 & M_1 & M'_1 & M_2 \cdots
\end{tikzcd}$$

Где все стрелки — сужения $f \circ g$.

$\blacksquare$

Определение. *Множествами счетной мощности* называют множества, лежащие в одном классе эквивалентности по $\sim$ с $\mathbb{N}$.

Теорема 0.2.5. (Свойства счетных множеств)

i) Любое бесконечное множество сожержит счетное подмножество

ii) Объединение двух счетных множеств счетно

iii) A — бесконечно, $B \sim \mathbb{N} \Longrightarrow A \cup B \sim A$

Доказательство.

i) Пусть A бесконечно. Тогда оно не пусто, то есть $\exists a \in A$. Рассмотрим $A \setminus \{ a \}$. Если оно пусто, то множество A не было бесконечным. Продолжим этот процесс и получим счетное подмножество A: $\{ a_1, a_2, \dots \}$.

ii) Пусть A и B — счетные. Получим биекции этих множеств с $\mathbb{N}$: $A = \{ a_1, \dots \}$ и $B = \{ b_1, \dots \}$. Построим биекцию $(A \cup B)^* \to \mathbb{N}$: $A \cup B = \{ a_1, b_1, a_2, \dots \}$, считая совпадающие элементы из разных множеств разными. Тогда выполнено $\mathbb{N} \sim A \preccurlyeq A \cup B \preccurlyeq \mathbb{N}$, то есть $A \cup B \sim \mathbb{N}$ (теорема Кантора- Бернштейна).

iii) В A найдется счетное подмножество $C \subseteq A$.

$$A = A' \cup C$$
$$A \cup B = A' \cup (C \cup B)$$

Причем $C \cup B$ счетно, то есть $C \cup B \sim C$. Тогда построим соответствие:

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[d] & C \arrow[d] \\
A' & (C \cup B)
\end{tikzcd}$$

$\blacksquare$

Теорема 0.2.6. (Счетность множества рациональных чисел) $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

Доказательство. $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ $\blacksquare$

Определение. Bin — множество всех последовательностей из нулей и единиц.

Теорема 0.2.7. $Bin \sim [0,1] \subseteq \mathbb{R}$

Доказательство. Для доказательства теоремы разобъем $Bin = Bin^{\infty} \sqcup Bin^0$ — множества последовательностей бесконечной и конечной длинной (конечной в том смысле, что с конечного места в последовательности идут только нули) соответственно.

i) $Bin^0 = \bigcap_{k=0}^{+\infty} B_k$, где B_k — множество последовательностей длины k — счетное объединение конечных множеств. Поэтому Bin^0 счетно.

ii) Отождествим элементы Bin^∞ с числами полуинтервала $(0,1]$ как их двоичную запись. Поскольку любой элемент $(0,1]$ представим в двоичной записи бесконечной длины (тривиально), получаем, что $Bin^\infty \sim (0,1]$.

iii) Теперь $Bin = Bin^0 \sqcup Bin^\infty \sim Bin^\infty \sim (0,1] \sim [0,1]$.

■

Теорема 0.2.8. Все промежутки вида $\langle a, b\rangle$, $a \neq b$ в $\mathbb{R}$ равномощны.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением открытых интервалов. Добавление граничной точки не меняет мощность множества.
Докажем, что $\forall a \neq b,\ c \neq d\ (a,b) \sim (c,d)$. Для этого построим биекцию между этими двумя множествами:

$$\begin{gathered} f : (a,b) \to (c,d) \\ x \longmapsto \frac{(d-c)(x-a)}{b-a} \end{gathered}$$

■

Теорема 0.2.9. $\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$

Доказательство. Построим биекцию меджу $\mathbb{R}^n$ и Bin, что и докажет утверждение. Пусть $\psi : \mathbb{R} \to Bin$ — функция, сопоставляющая числу его двоичную запись. Тогда

$$\begin{gathered} \phi : \mathbb{R}^n \to Bin \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (\psi(x_1)_1, \psi(x_2)_1, \dots, \psi(x_1)_2, \psi(x_2)_2, \dots) \end{gathered}$$

осуществляет требуемое соответствие. ■

Теорема 0.2.10. $\mathbb{R}^n$ несчетно

Доказательство. $\mathbb{R}^n \sim Bin \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}) \not\sim \mathbb{N}$ ■

Теорема 0.2.11. *Множеством мощности континуум* называют множество, равномощное $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$

Глава 1

Основы топологии

1.1 Метрическое пространство

Определение. *Метрикой* на множестве X называют $\rho : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую аксиомам метрики:

i) $\rho(x) \geqslant 0$

ii) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

iii) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$

Определение. Пару $\langle X, \rho \rangle$, где ρ — метрика на X, называют *метрическим пространством*

Примеры.

i) Стандартная метрика на $\mathbb{R}^n$: $\rho(x, y) = |x, y|_2$, где $d_k(x, y) \overset{def}{=} |x, y|_k = \sqrt[k]{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^k}$

ii) $|.,.|_k$ является метрикой на $\mathbb{R}$ при любых $k \geqslant 1$

iii) $|x, y|_\infty = \max_{i=1}^{n}(x_i - y_i)$ — метрика на $\mathbb{R}$

iv) $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, y) = 0$ иначе — метрика, порождающая дискретное пространство.

Далее, если не указано, речь идет о метрическом пространстве X

Определение. *Шаром* радиуса r с центром в точке x называется

$$B_r(x) \overset{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) < r \,\}$$

Определение. *Замкнутым шаром* радиуса r с центром в точке x называется

$$\overline{B_r}(x) \overset{def}{=} \{\, y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant r \,\}$$

Определение. *Расстоянием* от точки x до множества A называется

$$\rho(x, A) \overset{def}{=} \inf_{y \in A} \rho(x, y)$$

Определение. *Диаметром* множества A называется

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{\,\rho(x,y) \mid x, y \in A\}$$

Определение. В метрическом пространстве *открытыми* называют множества A такие, что

$$\forall x \in A\ \exists B_r(x) \subset A$$

Иначе говоря, любая точка открытого множества входит в него с некоторым шаром.

Определение. *Окрестностью* точки x называют любое открытое множество, содержащее x

Определение. Точка x называется *внутренней* для множества A, если она входит в него с некоторой окрестностью:

$$\exists U(x):\ U(x) \subset A$$

Определение. Точка x называется *граничной* точкой множества A, если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение как с A, так и с его дополнением:

$$\forall U(x) \quad A \cap U(x) \neq \varnothing \wedge (X \setminus A) \cap U(x) \neq \varnothing$$

Определение. Точка x называется *предельной* точкой множества A, если любая окрестность точки x имеет непустое пересечение с A:

$$\forall U(x) \quad A \cap U(x) \neq \varnothing$$

Определение. Множество A называют *ограниченным*, если $\operatorname{diam}(A) < +\infty$

Теорема 1.1.1. Множество A ограниченно $\Longleftrightarrow$ его можно вписать в шар

Доказательство.

- $\Longrightarrow$ $m := \operatorname{diam}(A)$. Покажем, что A можно вписать в шар радиуса $m+1$. Возьмем произвольную точку $x \in A$. Тогда $\forall y \in A\ \rho(x,y) \leqslant m < m+1 \Longrightarrow y \in B_{m+1}(x)$

- $\Longleftarrow$ Пусть $y, z \in A$ и A можно вписать в шар $B_r(x)$. Тогда $2r > \rho(x,y) + \rho(x,z) \geqslant \rho(y,z) \Longrightarrow \rho(y,z) < 2r \Longrightarrow A$ ограничено.

■

Теорема 1.1.2.

i) Произольное объединение открытых множеств открыто

ii) Пересечение двух (а значит, и произвольного конечного числа) открытых множеств открыто.

Доказательство.

i) Пусть $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство открытых множеств. Тогда

$$x \in \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \Longrightarrow x \in G_\alpha \Longrightarrow \exists U(x) \subset G_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$$

ii) Пусть A и B — открытые множества. Тогда

$$\begin{gathered} x \in A\cap B \Longrightarrow x \in A \ \wedge \ x \in B \Longrightarrow \\ \exists B_{r_1}(x) \subset A \ \wedge \ B_{r_2}(x) \subset B \Longrightarrow \\ x \in B_{\min(r_1,r_2)}(x) \subset A\cap B \end{gathered}$$

■

Определение. *Липшицево эквивалентными* называют отображения f и g в $\mathbb{R}$, такие, что $\exists c_1, c_2\colon\ c_1 f \leqslant g \leqslant c_2 f$

Пример. В $\mathbb{R}^n$ метрики d_1 и d_2 липшицево эквивалентны

1.2 Топологическое пространство

Определение. *Топологией* на множестве X называют $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

i) $\varnothing, X \in \Omega$

ii) $A, B \in \Omega \Longrightarrow A \cap B \in \Omega$

iii) $\{X_\alpha \in \Omega\}_{\alpha \in A} \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_a \in \Omega$

Иными словами, топология замкнута относительно конечных пересечений и произвольных объединений её элементов.

Определение. Пара $\langle X, \Omega \rangle$, где Ω — топология на X, называется *топологическим пространством*.

Определение. Элементы топологии называются *открытыми множествами*. Дополнения открытых множеств называются *замкнутыми множествами*.

Примеры.

i) $\Omega = \mathcal{P}(X)$ — дискретная топология

ii) $\Omega = \{\varnothing, X\}$ — антидискретная топология

iii) Все метрические пространства являются топологическими пространствами, порожденными метрикой.

iv) $\Omega = \varnothing \cup \{$ все дополнения конечных множеств $\}$

Определение. *Метризуемым* называется топологическое пространство, топология которого может быть порождена метрикой.

Примеры.

i) Дискретная топология метризуема ($\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$)

ii) Антидискретная топология не метризуема