# Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

# Оглавление

# Глава 1

# Многомерный анализ

## 1.1 Сведения из линейной алгебры

**Определение.** $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — *пространство линейных отображений* из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$

**Определение.** Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются *операторами*

**Определение.** *Нормой* на множестве $X$ называется отображение $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = 0$

ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \, \|\mathbf{x}\|$

iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

**Определение.** *Нормированным пространством* называется пара $\langle X, \| \ \| \rangle$

**Замечание.** Отображение, задаваемое формулой $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

**Теорема 1.1.1.** (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)
Пусть $V$ — конечномерное линейное пространство, а $\| \ \|_1$ и $\| \ \|_2$ — нормы на $V$. Тогда

$$\exists c, C > 0\colon \ c\,\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant C\,\|\mathbf{x}\|_1$$

*Доказательство.* Пусть $\|x\| = \|c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n\| \overset{def}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$.

i) $\| \ \|$ — норма.

- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2} \geqslant 0$ — очевидно
- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha c_i)^2} = \alpha\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$ — очевидно

· $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$ — неравенство Минковского

ii) Проверим теперь, что все нормы на $V$ эквивалентны $\|\ \|$.

$$\|x_1e_1+\ldots+x_ne_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|x_ie_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|e_i\|_1 \leqslant_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|_1^2} = c\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

тогда

$$|\,\|\mathbf{x}\|_1-\|\mathbf{y}\|_1\,| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 \leqslant c\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

Поэтому $\|\ \|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$
$$c_2 := \max_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$

Ни $c_1$, ни $c_2$ не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1\|\mathbf{x}\| \geqslant c_1\,\|\mathbf{x}\|$$
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1\|\mathbf{x}\| \leqslant c_2\,\|\mathbf{x}\|$$

что и доказывает утверждение теоремы.

■

**Определение.** *Нормой оператора* называется отображение $\|\ \|: L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$

$$\|\mathcal{A}\| \overset{def}{=} \sup_{\mathbf{x}\in S^m}\|\mathcal{A}x\|_{\mathbb{R}^n}$$

**Замечание.** $\sup\limits_{\|x\|=1}\mathcal{A}\mathbf{x} = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\mathcal{A}\mathbf{x}$

**Теорема 1.1.2.** (Пространство линейных операторов)
$\|\ \|: L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ — действительно норма.

*Доказательство.*

$$\|\mathcal{A}(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{x}|\,\|\mathcal{A}e_i\| \leqslant_{\text{КБШ}} \|\mathbf{x}\|\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{A}e_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|\mathcal{A}\|=0 \iff \forall\mathbf{x}\in S^n\ \mathcal{A}\mathbf{x}=0 \iff \mathcal{A}=0$. Неотрицательность очевидна.

ii) $\|\alpha\mathcal{A}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \|\alpha\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} |\alpha| \, \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \alpha \, \|\mathcal{A}\|$

iii) $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x}+\mathcal{B}\mathbf{x} \leqslant \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\mathbf{x}$

■

**Теорема 1.1.3.** (Липшицевость линейных опрераторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{A}$ — липшицево

*Доказательство.*

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{A}\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| = \left\| \mathcal{A}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right) \right\| \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

■

**Теорема 1.1.4.** (О произведении линейных операторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leqslant \|\mathcal{B}\| \, \|\mathcal{A}\|$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x}) \\ &= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \left( \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right)\right) \\ &\leqslant \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right) \\ &\leqslant \|A\| \, \|B\| \end{aligned}$$

■

**Определение.** $\Omega_m$ — пространство обратимых линейных операторов на $\mathbb{R}^m$

**Лемма 1.1.5.** (Критерий обратимости линейного оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

*Доказательство.* Линейная алгебра. ■

**Лемма 1.1.6.** (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\Longleftrightarrow \exists c > 0 \ \forall \mathbf{x} \ \ \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathbf{x}\|$, причем $\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}$

*Доказательство.* $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c\,\|\mathbf{x}\| \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ обратим.
$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c\,\|\mathbf{x}\| \Longleftrightarrow \|\mathbf{y}\| \geqslant c\left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \Longleftrightarrow \left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}\,\|\mathbf{y}\|$ ■

**Теорема 1.1.7.** (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)
$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A}-\mathcal{B}\| < \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

ii) $\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|}$

iii) $\left\|\mathcal{A}^{-1}-\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|}\|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|$

*Доказательство.*

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A}-\mathcal{B})\mathbf{x}\| \geqslant \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|\right)\|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \left\|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\|$$

Далее по лемме получаем обратимость $\mathcal{B}$ и оценку на его норму.

iii)

$$\mathcal{A}^{-1}-\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathcal{B}^{-1}$$

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}-\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|\|\mathcal{B}-\mathcal{A}\|\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant_{\text{i)}} \frac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|}\|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|$$

■

**Следствие 1.1.8.** Множество $\Omega_m$ открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\ \ \|\rangle$

## 1.2 Дифференцируемость и дифференциал отображений

**Определение.** Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

**Определение.** Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega$ — область в $\mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $r : \Omega \to \mathbb{R}^n$, такие что

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

Где $r(\mathbf{h})$ удовлетворяет уловию

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

или, что то же самое

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|$$

Где $\alpha(\mathbf{h})$ бесконечно малое, то есть

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \alpha(\mathbf{h}) = 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

**Замечание.** Функции $\alpha$, $r$ из определения дифференцируемости зависят не только от $\mathbf{h}$, но и от $\mathbf{x}$.

**Определение.** Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом $f$ в точке* $\mathbf{x}$ и обозначать $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \mathcal{A}$.

**Замечание.** Отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f$, действующее из $\mathbb{R}^m$ в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом $f$*.

**Определение.** Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения $f$ в точке* $\mathbf{x}$.

**Теорема 1.2.1.** (Единственность производной)
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $f$ дифференцируема в $\mathbf{x}$, тогда существует единственный производный оператор $f$ в точке $\mathbf{x}$.

*Доказательство.* Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(t\mathbf{z})\,\|t\mathbf{z}\|,\ t\mathbf{z} \to 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t),\ t \to 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t),\ t \to 0 \Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t}$$

■

**Утверждение 1.2.2.** (Производный оператор линейного отображения)
Пусть $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда $\mathcal{A}$ дифференцируемо в каждой точке и $\mathrm{d}_\mathbf{x}\mathcal{A} = \mathcal{A}$

*Доказательство.*

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

**Утверждение 1.2.3.** (Линейность производного оператора)
Пусть $f,\ g\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в $\mathbf{x}$. Тогда отображение $\alpha f + \beta g$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_\mathbf{x}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathrm{d}_\mathbf{x} f + \beta \mathrm{d}_\mathbf{x} g$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}&(\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x})\\ &= [(\alpha f)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\alpha f)(\mathbf{x})] + [(\beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - (\beta g)(\mathbf{x})]\\ &= [\mathrm{d}_\mathbf{x} f + o] + [\mathrm{d}_\mathbf{x} g + o] = \mathrm{d}_\mathbf{x} f + \mathrm{d}_\mathbf{x} g + o\end{aligned}$$

■

**Теорема 1.2.4.** (Дифференцируемость композиции)
Пусть $f\colon \Omega \to \Omega_1$, $g\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^k$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в $\mathbf{x}$, тогда $F = g \circ f$ дифференцируема в $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_\mathbf{x} F = \mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g \cdot \mathrm{d}_\mathbf{x} f$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned}g(f(\mathbf{x}+\mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{x}) + [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h}))\\ &= \{\mathbf{v} = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h})\}\\ &= g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x})) + [\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]\mathbf{v} + \widetilde{r}(\mathbf{v})\\ &= g(f(\mathbf{x})) + [\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g][\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{h} + [\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Осталось показать, что $[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{h}\|)$.

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v})\right\| \leqslant \left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]\frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}\,\|r(\mathbf{h})\|\right\| + \widetilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|)\,\|\mathbf{v}\|$$

Обозначим $\mathbf{w} = \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$, причем $\|\mathbf{w}\| = 1$. Из определения нормы оператора получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]\mathbf{w}\right\| \leqslant \left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g\right\|$$

Кроме того, $\|\mathbf{v}\| \leqslant \|\mathrm{d}_\mathbf{x} f\|\,\mathbf{h} + \alpha(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$. Окончательно получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g]r(\mathbf{h}) + \widetilde{r}(\mathbf{v})\right\| \leqslant \left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})} g\right\|\,\|r(\mathbf{h})\| + \widetilde{\alpha}(\|\mathrm{d}_\mathbf{x} f\| \cdot \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \cdot \|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{v}\| \leqslant \beta(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой $\beta(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. ■

**Определение.** Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$, тогда отображения

$$f_i(x) \stackrel{def}{=} \langle f(x), \mathbf{u}_i \rangle$$

где $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, называются *координатными функциями*.

**Теорема 1.2.5.** (Дифференцируемость координатных функций)
Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$f \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x} \iff \forall i \ f_i \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x}$$

причем

$$\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f_n \end{pmatrix}$$

*Доказательство.*

$\Longleftarrow$
$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{n} g_i(f_i(\mathbf{x}))$$

где $g_i(t) = t\mathbf{u}_i$ — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда $f$ дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

$\Longrightarrow$ $f_i$ дифференцируемы как композиции $f$ и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

**Определение.** Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$ — область, тогда *производной по направлению* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}$ называется

$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{t \to 0 \\ \mathbf{x}+t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует.

**Определение.** Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^m$, тогда *частной производной $f$ по $k$ -й переменной* называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} f'_k \stackrel{def}{=} D_k f(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

**Утверждение 1.2.6.** Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\exists D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u}$$

*Доказательство.* Для любых $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} &= \frac{[\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f](t\mathbf{u}) + r(t\mathbf{u})}{t} \\ &= [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} + \frac{r(t\mathbf{u})}{t} \leqslant [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} + \frac{\alpha(\mathbf{u})\,\|t\mathbf{u}\|}{t} = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u})\,\|\mathbf{u}\|\end{aligned}$$

■

**Теорема 1.2.7.** (Вид матрицы Якоби) Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$\mathrm{d}_\mathbf{x} f = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_1 f_n(\mathbf{x}) & D_2 f_n(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

*Доказательство.* Пусть $(\mathbf{e}_i)$ — базис $\mathbb{R}^m$, $(\tilde{\mathbf{e}}_i)$ — базис $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\begin{aligned}[]
[\mathrm{d}_\mathbf{x} f]_{i,j} = \langle [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = \left\langle \frac{[\mathrm{d}_\mathbf{x} f](t\mathbf{e}_i)}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle \\
= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i) - f_j(\mathbf{x})}{t} = D_i f_j(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

■

**Утверждение 1.2.8.** Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

*Доказательство.*

$$D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{u} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

■

**Утверждение 1.2.9.** (Необходимое условие дифференцируемости)
Если $f$ дифференцируемо в $\mathbf{x}$, то существуют все частные производные в точке $\mathbf{x}$, причем матрица Якоби $f$ в точке $\mathbf{x}$ совпадает с матрицей, составленной из матриц якоби $f_i$ в точке $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{d}_\mathbf{x} f = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}(\mathbf{x}) \right)$$

*Доказательство.* Подставим в определение дифференцируемости $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) &= f(\mathbf{x}) + [\mathrm{d}_\mathbf{x} f](t\mathbf{e}_k) + \alpha(\mathbf{h})\,||\mathbf{h}|| \\
&= f(\mathbf{x}) + t[\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{e}_k + \alpha(\mathbf{h})\,||\mathbf{h}||
\end{aligned}$$

Отсюда по определению частной производной получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t} = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{e}_k$$

■

**Теорема 1.2.10.** (Достаточное условие дифференцируемости)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $B(\mathbf{a}) \subseteq \Omega$, В $B(\mathbf{a})$ существуют все частные производные, причем они непрерывны в точке $\mathbf{a}$. Тогда $f$ дифференцируемо в точке $\mathbf{a}$.

*Доказательство.* Докажем теорему для случая $m = 2$. Схема, примененная в доказательстве тривиально обобщается на произвольные $m$.

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)-f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2) &= (f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)-f(\mathbf{a}_1,\mathbf{x}_2))+(f(\mathbf{a}_1,\mathbf{x}_2)-f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)) \\
&\overset{\text{Лагранж}}{=} f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1,\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)+f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1,\tilde{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2-\mathbf{a}_2) \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)+f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2-\mathbf{a}_2) \\
&+\left[\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1,\mathbf{x}_2)-f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2))}_{\to 0\text{ по непрерывности}}\frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}+\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1,\tilde{\mathbf{x}}_2)-f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2))}_{\to 0\text{ по непрерывности}}\frac{\mathbf{x}_2-\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\right]\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)+f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2-\mathbf{a}_2)+\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{a})\,\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|
\end{aligned}
$$

■

**Теорема 1.2.11.** Пусть $f,g:\Omega\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, $\lambda:\Omega\to\mathbb{R}$, $\mathbf{a}\in\Omega$, $f,g,\lambda$ дифференцируемы в $\mathbf{a}$. Тогда $\lambda f$, $\langle f,g\rangle$ дифференцируемы в $\mathbf{a}$, причем

- $[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}(\lambda f)]\mathbf{h}=[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\lambda]\mathbf{h}\cdot f(\mathbf{a})+\lambda(\mathbf{a})\cdot[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h}$
- $[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\langle f,g\rangle]\mathbf{h}=\langle[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h},g(\mathbf{a})\rangle+\langle f(\mathbf{a}),[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}g]\mathbf{h}\rangle$

*Доказательство.*

- Докажем покоординатно:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda f_i)(\mathbf{a}+\mathbf{h})-(\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&=\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{h})\cdot f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h})-(\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&=(\lambda(\mathbf{a})+\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\lambda\mathbf{h}+\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|)\cdot(f_i(\mathbf{a})+\mathrm{d}_{\mathbf{a}}f_i\mathbf{h}+\beta(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|)-(\lambda f_i)(\mathbf{a}) \\
&=[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\lambda]\cdot f_i(\mathbf{a})+\lambda(\mathbf{a})\cdot[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h}+o(\mathbf{h})
\end{aligned}
$$

- 

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\langle f,g\rangle]\mathbf{h}&=\mathrm{d}_{\mathbf{a}}\left[\sum_{i=1}^{n}f_i\cdot g_i\right]\mathbf{h}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}_{\mathbf{a}}[f_i\cdot g_i]\mathbf{h}=\sum_{i=1}^{n}([\mathrm{d}_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h}\cdot g_i(\mathbf{a})+f_i(\mathbf{a})\cdot[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}g_i]\mathbf{h}) \\
&=\sum_{i=1}^{n}([\mathrm{d}_{\mathbf{a}}f_i]\mathbf{h}\cdot g_i(\mathbf{a}))+\sum_{i=1}^{n}(f_i(\mathbf{a})\cdot[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}g_i]\mathbf{h})=\langle[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}f]\mathbf{h},g(\mathbf{a})\rangle+\langle f(\mathbf{a}),[\mathrm{d}_{\mathbf{a}}g_i]\mathbf{h}\rangle
\end{aligned}
$$

■

**Определение.** Пусть $f:\Omega\subseteq\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$, $\mathbf{x}\in\Omega$. Тогда *градиентом* $\varphi$ в точке $\mathbf{x}$ наывается вектор

$$
\operatorname{grad}f(\mathbf{x})\overset{def}{=}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\\ \vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x})\end{pmatrix}
$$

**Теорема 1.2.12.** (Экстремальное свойство градиента)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $f$ дифференцируемо в $\mathbf{x}$, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq 0$ Тогда

$$\mathbf{l} = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$$

— направление наибольшего возрастания $f$, то есть

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{h}\| = 1 \Longrightarrow D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) \leqslant D_{\mathbf{l}} f(\mathbf{x})$$

*Доказательство.*

$$D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{h} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \leqslant \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \, \|\mathbf{h}\| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|$$

■

## 1.3 Теоремы Лагранжа для отображений

**Теорема 1.3.1.** (Лагранжа для векторнозначных функций)
Пусть $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$, дифференцируемо на $(a,b)$. Тогда

$$\exists c \in (a,b):\ \ \|f(b)-f(a)\| \leqslant \left\|f'(c)\right\| |b-a|$$

*Доказательство.* При $f(a)=f(b)$ утверждение тривиально. Положим $\varphi(x)=\langle f(b)-f(a), f(t)-f(a)\rangle$. Тогда

$$\varphi(a)=0, \varphi(b)=\langle f(b)-f(a), f(b)-f(a)\rangle = \|f(b)-f(a)\|^2$$

Применим теорему Лагранжа для $\varphi$:

$$\begin{aligned}\exists c \in (a,b):\ \ \|f(b)-f(a)\|^2 = \varphi(b)-\varphi(a) &\underset{\text{Лагранж}}{=} \varphi'(c)|b-a| = \langle f(b)-f(a), f'(c)\rangle \cdot |b-a| \\ &\underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \|f(b)-f(a)\| \cdot \left\|f'(c)\right\| |b-a| \Longrightarrow \|f(b)-f(a)\| \leqslant \left\|f'(c)\right\| |b-a|\end{aligned}$$

■

**Теорема 1.3.2.** (Лагранжа для отображений)
Пусть $f:\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, дифференцируемо на $\Omega$, $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subseteq \Omega$, тогда

$$\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$$

*Доказательство.* $g = f(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))$ для $t \in [0,1]$ — дифференцируемо как композиция дифференцируемых функций. По предыдущей теореме

$$\begin{aligned}\exists t_0 \in (0,1):\ \ \|g(1)-g(0)\| &\leqslant \left\|g'(t_0)\right\| = \left\|f'(\mathbf{a}+t_0(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\right\| \\ &\leqslant \left\|f'(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\right\| \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\end{aligned}$$

■

## 1.4 Формула Тейлора

**Определение.** Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\Omega$ — область, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Определим частные производные высшего порядка по индукции:

$$D_{i_1,\ldots,i_k} f \overset{def}{=} D_{i_k}(D_{i_1,\ldots,i_{k-1}} f)$$

**Теорема 1.4.1.** (О независимости ч.п. от порядка дифференцирования)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\Omega$ — область, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\exists B((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega$, причем в $B((x_0, y_0), r)$ существуют $D_{12} f$ и $D_{21} f$, непрерывные в точке $(x_0, y_0)$. Тогда $D_{12} f(x_0, y_0) = D_{21} f(x_0, y_0)$

*Доказательство.*

$$\alpha(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда $\alpha(0) = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) &\underset{\text{Лагранж}}{=} \alpha'(\tilde{h})h = [f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0)]h \\ &\underset{\text{Лагранж}}{=} f''_{xy}(x_0 + \tilde{h}, y_0 + \tilde{k})hk \end{aligned}$$

Аналогично введем $\beta(k)$:

$$\beta(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \beta(k) = \beta(k) - \beta(0) &\underset{\text{Лагранж}}{=} \beta'(\bar{k})k = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \bar{k}) - f'_y(x_0, y_0 + \bar{k})]k \\ &\underset{\text{Лагранж}}{=} f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk \end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha(h) = \beta(k)$. Осталось перейти к пределу при $(h, k) \to (0, 0)$ и воспользоваться непрерывностью частных производных в точке $(x_0, y_0)$. ■

**Следствие 1.4.2.** Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\exists B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, причем в $B(\mathbf{x}, r)$ для любой перестановки индексов $\pi \in S_k$ существуют и непрерывны в $\mathbf{x}$ частные производные $D_{i_{\pi_1},\ldots,i_{\pi_k}} f$. Тогда все они совпадают в точке $\mathbf{x}$.

*Доказательство.* Доказательство сводится к координатным функциям, поэтому считаем, что $n = 1$. Предыдущая теорема дает возможность менять местами пары индексов. Осталось заметить, что группа перестановок порождается транспозициями. ■

**Определение.** Множество функций $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, у которых все частные производные порядка не более $r$ существуют и непрерывны на $\Omega$, будем обозначать $C^r(\Omega)$

**Определение.** Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$, тогда набор $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ будем называть *мультииндексом*. Используются обозначения $|k| = k_1 + \ldots + k_m$,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f \stackrel{def}{=} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} f$$

**Лемма 1.4.3.** (Полиномиальная формула)

$$(a_1 + \ldots + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{m} \cdots \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_r} = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$$

*Доказательство.* Первое равенство очевидно по правилам раскрытия скобок. Докажем второе равенство индукцией по $r$.

- Для $r = 1$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + \ldots + a_m)^{r+1} = (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (a_1 + \ldots + a_m)^r \\
&= (a_1 + \ldots + a_m) \cdot \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1+1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m+1} \\
&= [\text{переобозначим } k_i = k_i + 1 \text{ в } i\text{-й сумме}] \\
&= \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_1 \geqslant 1}} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_m \geqslant 1}} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= [\text{добавим все пропущенные слагаемые с } k_i = 0] \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot (k_1 + k_2 \ldots + k_m)}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}
\end{aligned}$$

■

**Лемма 1.4.4.** (О дифференцировании сдвига)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\Omega$ — область, $f \in C^r(\Omega)$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \in [-1, 1]$ $\ \mathbf{a} + t\mathbf{h} \in \Omega$, тогда для отображения $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ и для $k \leqslant r$ выполнено

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} \mathbf{h}^j \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(\mathbf{a})$$

*Доказательство.* Для доказательства этого факта достаточно показать, что

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^k \cdot f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

Докажем по индукции:

- Для $k = 0$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(t) = (\varphi^{(k-1)}(t))' &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\right)' \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\end{aligned}$$

■

**Теорема 1.4.5.** (Формула Тейлора в форме Лагранжа)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, $\Omega$ — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0, 1) \colon \; f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leqslant r} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + \sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k$$

*Доказательство.* Пусть $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ для $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Выпишем формулу Тейлора в форме Лагранжа для $\varphi$:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}$$

Пользуясь леммой о дифференцировании сдвига, получаем искомое равенство. ■

**Теорема 1.4.6.** (Формула Тейлора в форме Пеано)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, $\Omega$ — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0, 1) \colon \; f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leqslant r} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

*Доказательство.* Достаточно показать, что

$$\sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Проверим это:

$$\sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r} = \sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1} \ldots (\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r}$$

$$= \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \dots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$$

Все дроби вида

$$\frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{a}_i)^{k_i}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_i}}$$

меньше единицы, выражения вида

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))$$

постоянны. Поэтому

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_1}} \dots \frac{(\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0$$

При $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0$. ■

## 1.5 Диффеоморфизмы

**Определение.** *Областью* называют открытое связное множество.

**Определение.** Топологические пространства $X$, $Y$ *гомеоморфны*, если существует обратимое и в обе стороны непрерывное $f : X \to Y$. $f$ называют *гомеоморфизмом*.

**Определение.** *Диффеоморфизмом* гладких многообразий $M, N$ называется обратимое и в обе стороны гладкое отображение $f : M \to N$.

**Определение.** Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$. Тогда отображение $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ называется *диффеоморфизмом*, если оно обратимо и в обе стороны дифференцируемо.

**Лемма 1.5.1.** (О почти локальной инъективности)
Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, $f$ дифференцируемо в $x_0$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists c, \delta > 0$ такие, что $\forall \mathbf{h}\colon\ \|\mathbf{h}\| < \delta \quad \|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x})\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$

*Доказательство.* TBD ■

**Теорема 1.5.2.** (О сохранении области)
Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \det f'(\mathbf{x}) \neq 0$, тогда $f$ открыто.

*Доказательство.* TBD ■

**Следствие 1.5.3.** Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{l \leqslant m}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \operatorname{rank} f'(\mathbf{x}) = l$, тогда $f$ открыто.

*Доказательство.* TBD ■

**Теорема 1.5.4.** (О гладкости обратного отображения)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, $f \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \det f'(\mathbf{x}) \neq 0$, $f$ обратимо, тогда $f^{-1} \in C^r$ и $(f^{-1})'(\mathbf{y}_0) = (f'(\mathbf{x}_0))^{-1}$, при $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0)$.

*Доказательство.* TBD ■

**Лемма 1.5.5.** (О приближении оботражения его линеаризацией)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, тогда $\forall \mathbf{h}$

$$\left\| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| \leqslant M\,\|\mathbf{h}\|$$

где

$$M = \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\|$$

*Доказательство.* TBD ■

**Теорема 1.5.6.** (О локальной обратимости)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists U(\mathbf{x}_0)$ такая, что $f\big|_U$ — диффеоморфизм.

*Доказательство.* TBD ■

**Теорема 1.5.7.** (О неявном отображении)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \underset{f}{\mapsto} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $f \in C^r$,
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{O}\colon\ f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, $\det f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, тогда

- $\exists U(\mathbf{a})$, $\exists U(\mathbf{b})$, $\exists! \varphi\colon U(\mathbf{a}) \to U(\mathbf{b}) \in C^r$ такое, что $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a})\ f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0$
- $\varphi'(\mathbf{x}) = -(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})))^{-1} \cdot f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$

*Доказательство.* TBD ■

**Определение.** $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *$k$-мерным многообразием* в $\mathbb{R}^m$, если оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, $\forall \mathbf{x} \in M\ \exists U(\mathbf{x})\ \exists \varphi$ — гомеоморфизм: $U(\mathbf{x}) \underset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}^k$.

**Определение.** $k$-мерное многообразие $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *простым*, если оно гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, в предыдущем определении можно выбрать $U(\mathbf{x}) = M$.

**Определение.** Пара $\langle U(\mathbf{x}), \varphi \rangle$ из определения называется *картой*, или *параметризацией* многообразия в точке $\mathbf{x}$. Набор карт, который покрывает все $M$, называется *атласом*.

**Определение.** Простое $k$-мерное многобразие $M$ называют *$C^r$-гладким*, если $\varphi \in C^r$ — параметризация $M$ и $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}$ $\operatorname{rank} f'(\mathbf{x}) \neq 0$.

**Теорема 1.5.8.** (О задании гладкого многообразия системой уравнений)
Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant k < m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, тогда $\forall \mathbf{p} \in M$ эквивалентны утверждения:

- $\exists U(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap U$ — простое $k$-мерное $C^r$-гладкое многообразие.
- $\exists \tilde{U}(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap \tilde{U}$ можно задать системой $C^r$-гладких уравнений, иначе говоря: $\exists f_1, \ldots, f_{m-k}\colon \tilde{U} \to \mathbb{R} \in C^r$ такие, что $\mathbf{x} \in M \cap \tilde{U} \iff \forall i\ f_i(\mathbf{x}) = 0$, причем $\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независимы.

*Доказательство.* TBD ■

**Следствие 1.5.9.** (О двух параметризациях)
Пусть $M$ — $k$-мерное простое $C^r$-гладкое многообразие, $\mathbf{p} \in M$, причем $C^r \ni \varphi_1\colon \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$, $C^r \ni \varphi_2\colon \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$ — параметризации $U(\mathbf{p}) \cap M$. Тогда $\varphi_1$ и $\varphi_2$ отличаются на диффеоморфизм, а именно, $\exists \psi\colon \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ — диффеоморфизм, причем $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$.

*Доказательство.* TBD ■

**Определение.** Пусть $M$ — $C^r$-гладкое $k$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{p} \in M$, $\varphi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация окрестности $U(\mathbf{p})$, причем $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$. Тогда *касательным пространством* к $M$ в точке $\mathbf{p}$ называется $T_p(M) = \operatorname{Im} \varphi'(\mathbf{a})$.

**Теорема 1.5.10.** (О корректности определения касательного пространства)
Касательное пространство не зависит от выбора параметризации.

*Доказательство.* TBD ■

**Теорема 1.5.11.** (О касательном пространстве к гладкому пути)
Пусть $M$ — гладкое многообразие. Тогда $\mathbf{v} \in T_p(M) \iff \exists$ гладкий путь $\gamma\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^m\colon\ \gamma([-1, 1]) \subseteq M$ такой, что $\gamma(0) = p$ и $\gamma'(0) = v$.

*Доказательство.* TBD ■

**Теорема 1.5.12.** (О касательном пространстве к графику функции)
Касательное пространство к графику $C^r \ni f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ задается уравнением

$$y - f(\mathbf{x}_0) = f_1'(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) + \ldots + f_m'(\mathbf{x}_m)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_m)$$

*Доказательство.* TBD ■

**Теорема 1.5.13.** (О касательном пространстве к поверхности уровня)
Касательное пространство к поверхности уровня функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задается уравнением

$$f_x'(x_0)(x - x_0) + f_y'(y_0)(y - y_0) + f_z'(z_0)(z - z_0) = 0$$

*Доказательство.* TBD ■

## 1.6 Относительный экстремум

**Определение.** Пусть $f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $\phi: E \to \mathbb{R}^n$, $M_\phi = \{\mathbf{x} \in E \mid \phi(\mathbf{x}) = 0\}$, $\mathbf{x}_0 \in E$, $\phi(\mathbf{x}_0) = 0$ называется точкой локального *относительного* экстремума, если $x_0$ — точка локального экстремума $f\big|_{M_\phi}$.

**Теорема 1.6.1.** (Необходимое условие относительного экстремума)
Пусть $C^1 \ni f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $C^1 \ni \phi: E \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in E$, $\phi(\mathbf{x}_0) = 0$, $\operatorname{rank} \phi'(\mathbf{x}_0) = n$, $\mathbf{x}_0$ — точка локального экстремума, тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} f'(\mathbf{x}_0) - \lambda \cdot \phi'(\mathbf{x}_0) = 0 \\ \phi(\mathbf{x}_0) = 0 \end{cases}$$

*Доказательство.* TBD ∎

**Теорема 1.6.2.** (Достаточное условие относительного экстремума)
Пусть $C^1 \ni f: E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $C^1 \ni \phi: E \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in E$, $\phi(\mathbf{x}_0) = 0$, $\operatorname{rank} \phi'(\mathbf{x}_0) = n$, выполнено необходимое условие относительного экстремума, то есть $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} f'(\mathbf{x}_0) - \lambda \cdot \phi'(\mathbf{x}_0) = 0 \\ \phi(\mathbf{x}_0) = 0 \end{cases}$$

кроме того, пусть $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_x \in \mathbb{R}^m, \mathbf{h}_y \in \mathbb{R}^n)$. Тогда, так как $\operatorname{rank} \phi'(\mathbf{x}_0)$, по $\mathbf{h}_x$ можно однозначно восстановить $\mathbf{h}_y$ такой, что $\phi'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = 0$. Тогда рассмотрим квадратичную форму

$$Q(\mathbf{h}_x) = \mathrm{d}^2_{\mathbf{x}_0} G(\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y)$$

Где $G = f - \lambda \cdot \phi$ — функция Лагранжа. В зависимости от определенности $Q$ можно сделать вывод о наличии экстремума в точке $x_0$:

- $Q$ положительно определена $\Longrightarrow \mathbf{x}_0$ — точка относительного локального минимума.
- $Q$ отрицательно определена $\Longrightarrow \mathbf{x}_0$ — точка относительного локального максимума.
- $Q$ неопределена $\Longrightarrow \mathbf{x}_0$ — не точка экстремума.
- В остальных случаях требуется более детальное исследование.

*Доказательство.* TBD ∎

**Теорема 1.6.3.** (Вычисление нормы линейного опреатора)
Пусть $A \in Lin(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $S$ — множество собственных чисел $A^T A$. Тогда

$$||A|| = \max_{\lambda \in S} \sqrt{\lambda}$$

# Глава 2

# Функциональные последовательности и ряды

## 2.1 Поточечная и равномерная сходимости последовательностей функций

**Замечание.** *Здесь и далее запись вида $f \to \perp$ будет означать, что $f$ сходится. Знак $\perp$ используется, если не важно (или не известно), к чему сходится $f$.*

**Определение.** $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *сходится поточечно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на $E$, если

$$\forall x_0 \in E \;\; f_n(x_0) \to f(x_0)$$

иными словами, раскрывая определение сходимости последовательности:

$$\forall x_0 \in E \;\; [\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\; \forall n > N \;\; |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \to f$.

**Примеры.** TBD

**Определение.** $f_n\colon E \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на $E$, если

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

или, раскрывая описание супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\; \forall n > N \; [\forall x \in E \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Обозначение: $f_n \rightrightarrows f$.

**Замечание.** Из равномерной сходимости очевидным образом следует поточечная:

$$f_n \rightrightarrows f \implies f_n \to f$$

*Про сходимость мы значем очень многое для случая метрических пространств. А нельзя ли переформулировать новые определения так, чтобы они оказались обычной сходимостью, просто в хитром метрическом пространстве?*

**Предложение.** (Метрическое пространство ограниченных функций)
Положим
$$\mathcal{F} \overset{def}{=} \{X \to \mathbb{R} \mid f \text{ ограничено}\}$$
На этом множестве тривиально задается структура линейного пространства:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$
Оказывается, можно ввести **метрику** на $\mathcal{F}$, сходимость по которой есть равномерная сходимость. Для $f, g \in \mathcal{F}$ положим
$$\rho(f,g) \overset{def}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$
Проверим, что это — метрика на $\mathcal{F}$

i) Неотрицательность очевидна. Равенство нулю может выполнится только для равных функций.

ii) Симметричность очевидна.

iii) Проверим неравенство треугольника. Применим техническое описание супремума для $\rho(f_1, f_2)$:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x\colon\ \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)|$$
Далее
$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0\ \exists x\colon\ \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)| &\leqslant |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \\ &\leqslant \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_3(y)| + \sup_{y \in X} |f_2(y) - f_3(y)| \\ &= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)\end{aligned}$$
Получаем
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \rho(f_1, f_2) - \varepsilon \leqslant \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$
Откуда непосредственно следует
$$\rho(f_1, f_2) \leqslant \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Осталось только понять, что теперь означает сходимость по этой метрике. Пусть $(f_n)$ — последовательность в $\mathcal{F}$, сходящаяся к $f$ по метрике $\rho$:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \ \rho(f_n, f) < \varepsilon$$
Раскроем значение $\rho$:
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\colon\ \forall n > N\ \ [\forall x \in X\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$
А это — обычное определение равномерной сходимости!

*Подобную конструкцию, по всей видимости, не получится ввести для поточечной сходимости. Зато, можно построить хаусдорфово топологическое пространство, в котором сходимость будет означать поточечную сходимость.*

**Предложение.** (Топологическое пространство ограниченных функций)
Введем на $\mathcal{F}$ топологию, порожденную следующими множествами:

$$U_\varepsilon(f)_{x_1,\dots,x_n} \overset{def}{=} \{g : X \to \mathbb{R} \mid \forall i \;\; |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon\}$$

Поймем теперь, что означает сходимость в этом топологическом пространстве:

$$f_n \to f \iff \forall U_\varepsilon(f)_{x_1,\dots,x_n} \exists N \in \mathbb{N}\colon \;\forall n > N \;\; f_n \in U_\varepsilon(f)_{x_1,\dots,x_n}$$

Что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N}\colon \;\forall n > N \;\;\forall i \;\; |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Что как раз и есть поточечная сходимость! Просто запись вида

$$[\forall x_0 \in X \;\forall \varepsilon > 0] \;\exists N \in \mathbb{N}\colon \;\forall n > N \;\; |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

В этом пространстве обретает вид

$$[\forall U_\varepsilon(f)_{x_0}] \;\exists N \in \mathbb{N}\colon \;\forall n > N \;\; |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

**Теорема 2.1.1.** (Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости)

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N}\colon \;\forall n, m > N \;[\forall x \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

*Доказательство.*

$\Longrightarrow$ Обычное свойство всех последовательностей, сходящихся по метрике (если все $f_n$ и $f$ лежат в $\mathcal{F}$). Общее доказательство такое:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longleftarrow$ Зафиксируем $x$. Тогда $f_n(x)$ — обычная фундаментальная вещественная последовательность. Тогда, так как $\mathbb{R}$ — полное, получаем

$$\forall x \;\exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Посмотрим на фундаментальность $f_n$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N}\colon \;\forall n, m > N \;\; [\forall x \; |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

и перейдем к пределу $m \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N \in \mathbb{N}\colon \;\forall n > N \;\; [\forall x \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Что и есть определение равномерной сходимости.

■

**Примеры.** TBD

## 2.2 Теоремы о равномерно сходящихся функциональных последовательностях

**Теорема 2.2.1.** (Стокс-Зейдель)
Пусть $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, $X$ — топологическое пространство, $f_n$ непрерывны в $c \in E$, и $f_n \rightrightarrows f$ на $X$. Тогда $f$ непрерывна в $c$.

*Доказательство.* Для любых $n$ выполнено

$$|f(x)-f(y)| \leqslant |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(y)|+|f_n(y)-f(y)|$$

Воспользуемся равномерной сходимостью: выберем $n$ таким, чтобы

$$|f(x)-f_n(x)| < \varepsilon$$
$$|f_n(y)-f(y)| < \varepsilon$$

Теперь воспользуемся непрерывностью $f_n$: выберем такую окрестность $U(c)$, чтобы $\forall x, y \in U(c)$

$$|f_n(x)-f_n(y)| < \varepsilon$$

Тогда

$$|f(x)-f(y)| < 3\varepsilon$$

что и означает непрерывность $f$ в точке $c$. ∎

**Определение.** Будем говорить, что $f_n$ сходится *локально равномерно* к $f$ на $X$, если

$$\forall x \in X \ \exists U(x): \ f_n \rightrightarrows f \text{ на } U(x)$$

**Замечание.** Для выполнения условия теоремы Стокса-Зейделя достаточно равномерной сходимости на некоторой окрестности $c$.

**Замечание.** Для того, чтобы $f$ было непрерывным на $X$, достаточно, чтобы $f_n$ локально равномерно на $X$ сходилось к $f$.

**Теорема 2.2.2.** (О предельном переходе под знаком интеграла)
Пусть $f_n \in C([a,b])$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, shift left=0.5ex] \arrow[r, shift right=0.5ex] \arrow[d, "\int"] & f \arrow[d, "\int"] \\ \int_a^b f_n \arrow[r, dashed, "n\to+\infty"] & \int_a^b f \end{tikzcd}$$

*Доказательство.* $f$ непрерывна на $[a,b]$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Тогда

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b-a|$$

Из равномерной сходимости имеем:

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

тогда

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b-a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

■

**Теорема 2.2.3.** (Правило Лейбница)
$f:[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\to\mathbb{R}$, $\exists f'_y$, $f'_y, f$ непрерывны. Пусть

$$\phi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx$$

Тогда $\phi$ дифференцируемо на $[y_1,y_2]$ и

$$\phi'(y) = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

*Доказательство.*

$$\frac{\phi(y+\frac{1}{n}) - \phi(y)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\int_{x_1}^{x_2}\left(f\left(x, y+\frac{1}{n}\right) - f(x,y)\right)dx \underset{\text{Лагранж}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f'_y\left(x, y+\frac{\theta}{n}\right)dx$$

Обозначим

$$g_n(x,y) = f'_y\left(x, y+\frac{\theta}{n}\right)$$

$f'_y$ непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывна на нём. Воспользуемся этим:

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall n\colon \frac{1}{n} < \delta\ \forall x\quad \left|f'_y\left(x, y+\frac{1}{n}\right) - f'_y(x,y)\right| < \varepsilon$$

Отсюда получаем по определению

$$g_n(x,y) \rightrightarrows f'_y(x,y) \text{ на } [x_1,x_2]$$

Воспользуемся теоремой о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_1}^{x_2} g_n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

Понятно, что вместо последовательности $\frac{1}{n}$ можно рассматривать любую последовательность $h_n$, сходящуюся к 0. То есть

$$\phi'(y) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\phi(y+h_n)-\phi(y)}{h_n} = \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

■

**Теорема 2.2.4.** (О предельном переходе под знаком производной)
$f_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$, $f_n \to f$ поточечно на $\langle a,b\rangle$, $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a,b\rangle$. Тогда

- $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$
- $f' = \varphi$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "n\to+\infty"] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & f \arrow[d, dashed, "\mathrm{d}"] \\ f'_n \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \varphi \end{tikzcd}$$

*Доказательство.* Пусть $x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle$, тогда $f'_n \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0,x_1]$. Тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} f'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Откуда

$$f(x_1)-f(x_0) \xleftarrow[n\to+\infty]{} f_n(x_1)-f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

То есть

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi = f(x_1)-f(x_0)$$

Тогда $f$ — первообразная $\varphi$. $\varphi$ непрерывна по теореме Стокса-Зейделя. Получаем, что $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ и $f' = \varphi$. ■

## 2.3 Равномерная сходимость функциональных рядов

**Определение.** Пусть $u_n\colon E \to \mathbb{R}$, тогда *функциональным рядом* будем называть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

**Определение.** Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *сходится поточечно* на $E$, если $S_N(x) \to S(x)$.

**Определение.** Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно* на $E$, если $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$.

**Замечание.** Из равномерной сходимости следует поточечная.

**Лемма 2.3.1.** (Об остатке функционального ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows 0 \iff R_N(x) \rightrightarrows 0$

*Доказательство.* $\sup\limits_{x\in E} |R_{N+1}(x)| = \sup\limits_{x\in E} |S(x) - S_N(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ ∎

**Лемма 2.3.2.** (Необходимое условие равномерной сходимости ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \implies u_n(x) \rightrightarrows 0$

*Доказательство.*

$$\sup_{x\in E} |u_N(x)| = \sup_{x\in E} |R_N(x) - R_{N+1}(x)| \leqslant \sup_{x\in E} |R_N(x)| + \sup_{x\in E} |R_{N+1}(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

∎

**Теорема 2.3.3.** (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
$u_n\colon E \to \mathbb{R}$, $\exists c_n\colon \forall n, x \;\; |u_n(x)| \leqslant c_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n \to \perp$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$.

*Доказательство.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \iff R_N(x) \rightrightarrows 0 \iff \sup_{x\in E} |R_N(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

$$\iff \sup_{x\in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right| \leqslant \sup_{x\in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

∎

**Теорема 2.3.4.** (Критерий Больцано-Коши сходимости функционального ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x) \iff \forall \varepsilon\; \exists N\colon\; \forall m, n > N \quad \sup\limits_{x\in E} |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$

*Доказательство.* Это обычный критерий Больцано-Коши для $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ ■

**Теорема 2.3.5.** (Стокс-Зейдель)
$u_n \colon E \to \mathbb{R}$, $u_n$ непрерывны в $x_0 \in E$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$, тогда $S(x)$ непрерывна в $x_0$.

*Доказательство.* $\forall N$ $S_N(x)$ непрерывна в $x_0$ как конечная сумма непрерывных функций. Тогда по теореме Стокса-Зейделя для функциональных последовательностей $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$, $S_N(x)$ непрерывны в $x_0 \Longrightarrow S(x)$ непрерывна в $x_0$. ■

**Теорема 2.3.6.** (Интегрирование функциональных рядов)
$u_n \in C([a,b])$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

иначе говоря:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

*Доказательство.* $S \in C([a,b])$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Применим аналогичную теорему для функциональных последовательностей к $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$:

$$\int_a^b S_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b S(x)\,dx$$

в левой части интеграл и сумму можно переставлять местами (так как сумма конечная). Поэтому

$$\sum_{n=1}^{N} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b S_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b S(x)\,dx$$

Слева стоят частичные суммы обычного числового ряда. Поэтому по определению сходимости чисового ряда имеем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

■

**Теорема 2.3.7.** (Дифференцирование функциональных рядов)
$u_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \to S(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a,b\rangle$,
тогда $S \in C^1(\langle a,b\rangle)$, причем $S'(x) = \varphi(x)$.

*Доказательство.* Введем функциональную последовательность: $S_N(x) \to S(x)$. Поскольку $S_N(x)$ — конечные суммы непрерывно дифференцируемых функций, $S_N(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$, причем $S'_N(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда по аналогичной теореме для функциональных последовательностей получаем требуемое. ■

**Теорема 2.3.8.** (О предельном переходе в функциональных рядах)
$u_n \colon E \to \mathbb{R}$, $x_0$ — предельная точка $E$, $\forall n\ \exists a_n = \lim\limits_{x \to x_0} u_n(x) \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$ на $E$.
Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{x \to x_0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Иначе говоря:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

*Доказательство.* Обозначим $S_N^a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Проверим критерий Больцано-Коши для $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leqslant |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

Поскольку $S_{n+p}^a$ и $S_{n+p}(x)$ просто конечные суммы, в них спокойно можно переставлять предел и сумму. Поэтому найдется такая окрестность точки $x_0$, что $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \varepsilon$. Аналогично поступим с третьим слагаемым. Из критерия Больцано-Коши получаем такое $N$, что для $\forall n, m > N$ $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Таким образом имеем:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| < 3\varepsilon$$

Мы доказали сходимость ряда $a_n$. Проверим второе утверждение теоремы. Положим

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \neq x_0 \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

Все $u_n$, очевидно, непрерывны в $x_0$. Если мы проверим, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E \cup \{x_0\}$, то по теореме Стокса-Зейделя $\tilde{S}$ будет непрерывной, что означает

$$\lim_{x \to x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

в левой части $x_0$ никогда не подставляется в $\tilde{S}$, поэтому

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \lim_{x \to x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Осталось проверить, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E \cup \{x_0\}$.

$$\sup_{x\in E\cup\{x_0\}}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}\tilde{u}_n(x)\right| \leqslant \sup_{x\in E}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}u_n(x)\right| + \sup_{x\in\{x_0\}}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}a_n\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

■

**Теорема 2.3.9.** (О предельном переходе в функциональных последовательностях) $f_n\colon E \subseteq X \to \mathbb{R}$, $X$ — метрическое пространство, $x_0$ — предельная точка $E$, $f_n \rightrightarrows f$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$, причем $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$. Иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, rightrightarrows] \arrow[d, "x\to x_0"] & f(x) \arrow[d, dashed, "x\to x_0"] \\
f_n(x_0) \arrow[r, "n\to+\infty"] & f(x_0)
\end{tikzcd}$$

или

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

*Доказательство.* Введем обозначения: $u_1 = f_1, u_2 = f_2 - f_1, \ldots, a_k = A_k - A_{k-1}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = f_n$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x)$ на $E$, причем $u_k(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a_k$. Пользуясь аналогичной теоремой для функциональных рядов, получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = A = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

— сходится. Кроме того имеем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

■

**Теорема 2.3.10.** (Признак Дирихле)
Пусть $a_n, b_n\colon X \to \mathbb{R}$, причем

- $\exists C_a\colon \forall N \forall x \in X \ \left|\sum\limits_{i=1}^{N} a_n(x)\right| \leqslant C_a$
- $b_n \rightrightarrows 0$, $\forall x \in X \ b_n$ монотонна по $n$.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \perp$

*Доказательство.* Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{N\leqslant k\leqslant M} a_k b_k = A_N b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

тогда

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=N}^{M} a_k(x) b_k(x)\right| &\leqslant |A_N b_M| + |A_{N-1} b_N| + \left|\sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k\right| \\ &\leqslant C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} |b_k - b_{k+1}|\end{aligned}$$

Все слагаемые в сумме одного знака. Считая, что $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$, имеем:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=N}^{M} a_k(x) b_k(x)\right| &\leqslant C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) \\ &\leqslant C_a \cdot (|b_M| + |b_N| + |b_M| + |b_N|) \xrightarrow[N,M\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

■

**Теорема 2.3.11.** (Признак Абеля)
Пусть $a_n, b_n : X \to \mathbb{R}$, причем

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \rightrightarrows \perp$
- $\exists C_b : \forall N \forall x \in X\ |b_n(x)| \leqslant C_b, \forall x \in X\ \ b_n(x)$ монотонна по $n$.

Тогда $\displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \perp$

*Доказательство.* Применим критерий Коши к ряду $a_n$:

$$\forall \varepsilon \exists N : \forall n > N\ \forall p \geqslant 1\ \forall x \in X\ |A_{n,p}(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_n(x)\right| < \varepsilon$$

Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| &\leqslant |b_{n+p}(x) A_{n,p}(x)| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_{k+1}(x) - b_k(x)) A_{n,k}(x)\right| \\ &\leqslant C\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_{k+1}(x) - b_k(x)| \leqslant C\varepsilon + \varepsilon |b_{n+p}(x)| + \varepsilon |b_n(x)| \\ &\leqslant C\varepsilon + 2C_b\varepsilon\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались монотонностью и ограниченностью $b_n$. ■

## 2.4 Степенные ряды

**Определение.** *Степенным рядом* называется формальный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, где $z$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

**Теорема 2.4.1.** (О круге сходимости степенного ряда)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд. Тогда верно одно из трёх:

- Ряд сходится только при $z = z_0$
- Ряд сходится при любых $z$
- $\exists\ 0 < R < +\infty$ такое, что ряд сходится при $|z-z_0| < R$, и расходится при $|z-z_0| > R$. Поведение на границе не известно.

*Доказательство.* Изучим ряд на абсолютную сходимость, полуьзуясь признаком Коши: рассмотрим величину $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$:

- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, тогда ряд сходится, очевидно, только при $z = z_0$.
- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, тогда ряд сходится для любых $z$.
- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, +\infty)$, тогда
  a) при $|z-z_0| < \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд сходится.
  b) при $|z-z_0| > \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд расходится.

∎

**Следствие 2.4.2.** (Формула Адамара)
Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

**Следствие 2.4.3.** (О множестве сходимости степенного ряда)
Множеством сходимости степенного ряда является $B(z_0, R) \cup \Gamma$, где $\Gamma \subseteq \mathrm{Cl}\, B(z_0, R)$, а $R$ — радиус сходимости ряда.

**Теорема 2.4.4.** (О равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд, причем $0 < R \leqslant +\infty$. Тогда

- $\forall\ 0 < r < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{B(z_0, r)}$.

- $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \in C(B(z_0, R))$.

*Доказательство.*

- Применим признак Вейерштрасса: $|a_n(z - z_0)^n| \leqslant |a_n| \cdot r^n$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot r^n$ сходится абсолютно, потому что исходный ряд сходится при $z = z_0 + r$.

- Слагаемое непрерывно, есть равномерная сходимость на $\overline{B(z_0, r)} \Longrightarrow$ во всех точках $B(z_0, R)$ сумма непрерывна.

$\blacksquare$

**Лемма 2.4.5.** $w, w_0 \in \mathbb{C}, |w|, |w_0| \leqslant r$. Тогда $|w^n - w_0^n| \leqslant nr^{n-1}|w - w_0|$

*Доказательство.*

$|w^n - w_0^n| = |w - w_0| \cdot |w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \ldots + w_0^{n-1}| \leqslant |w - w_0| \cdot ||w|^{n-1} + \ldots + |w_0|^{n-1}| \leqslant |w - w_0| n r^{n-1}$

$\blacksquare$

**Лемма 2.4.6.** Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$ имеют одинаковый радиус сходимости.

*Доказательство.* Пусть $S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\widetilde{S}_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$, тогда $\widetilde{S}_N(x) = x S_N(x) \Longrightarrow$ $\lim\limits_{N \to +\infty} \widetilde{S}_N(x) = x \lim\limits_{N \to +\infty} S_N(x)$ — существуют на одном и том же множестве. $\blacksquare$

**Теорема 2.4.7.** (О дифференцировании степенного ряда)
Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$ — степенной ряд, причем $0 < R \leqslant +\infty$, и $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$.
Тогда

- $\varphi$ имеет тот же радиус сходимости, что и $f$.

- $f$ дифференцируемо на $B(z_0, R)$, причем $f'(z) = \varphi(z)$

*Доказательство.*

- Найдем радиус сходимости $\hat{R}$ ряда $\varphi$ по формуле Адамара и пользуясь последней леммой:
$$\hat{R} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

- Рассмотрим точку $a \in B(z_0,R)$ и покажем, что в этой точке существует производная ряда, причем она равна тому, что ожидается. Сузим круг до $B(z_0,r)$, где $r = \frac{R-|a-z_0|}{2}$. Положим $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)}$$

  Пусть $w = z-z_0 : |w| < r$, $w_0 = a-z_0 : |w_0| < r$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n-w_0^n}{w-w_0} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot nr^{n-1}$$

  Последний рад сходится по первому пукнту теоремы. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \dfrac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)}$ сходится равномерно. Зная это, воспользуемся теоремой о предельном переходе в сумме:

$$\begin{aligned} f'(z) = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} &= \lim_{z\to a}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(z-z_0)^n+(a-z_0)^n}{z-a} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{z\to a}\frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1} \end{aligned}$$

■

**Следствие 2.4.8.** $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \in C^\infty(B(z_0,R))$, причем все производные — почленные.

**Следствие 2.4.9.** (О почленном интегрировании степенного ряда)
Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ где $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in B(x_0,R)$, тогда

- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и $f$.
- Выполняется равенство

$$\int_{x_0}^{x}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{x_0}^{x} a_n(x-x_0)^n dx$$

**Определение.** *Экпонентой* называется функция $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такая, что $z \underset{\exp}{\mapsto} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

**Теорема 2.4.10.** (Свойства экспоненты)

- Радиус сходимости равен $+\infty$
- $\exp(0) = 1$
- $\overline{\exp}(z) = \exp(z)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$
- $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\exp(z) - 1}{z} = 1$
- $\exp(z + w) = \exp(z) + \exp(w)$

*Доказательство.* Докажем последние два утверждения. Остальные очевидны.

- $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{e^z - 1}{z - z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{e^z - e^0}{z - z_0} = (e^z)'\Big|_0 = 1$
- $$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!} \right) = \exp(z)\exp(w)\end{aligned}$$

■

**Теорема 2.4.11.** (Метод Абеля)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ — сходящийся ряд. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ при $|x| < 1$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \lim\limits_{x\to 1_-} f(x)$

*Доказательство.* Для начала отметим, что $f$ задана корректно: при $0 < x < 1$ ряд сходится равномерно по признаку Абеля. Так как $f$ — ряд, то область его сходимости симметрична, то есть для отрицательных $x$ $f$ тоже задана корректно. Раз $f$ — равномерно сходящийся ряд, причем $c_n x^n$ непрерывны, то по теореме Стокса-Зейделя $f$ непрерывна. Раз так, имеем

$$\lim_{x\to 1_-} = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

■

**Теорема 2.4.12.** (Формула Григори-Лейбница)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

*Доказательство.* Положим $f(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots$, тогда $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \dfrac{1}{1+x^2} = \arctan' x$. Тогда $f(x) = c + \arctan x$. Подставляя $x = 0$ убеждаемся, что $c = 0$. Получаем $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} \arctan x = \dfrac{\pi}{4}$. ■

**Следствие 2.4.13.** (О сходимости произведения рядов)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ сходится, причем $AB = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$.

*Доказательство.* Положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$,
$x \in [0,1]$. при $x < 1$ ряды сходятся абсолютно (вспомним теорему о круге сходимости: в ней мы доказывали абсолютную сходимость), поэтому по старой теореме о произведении рядов $f(x)g(x) = h(x)$. Осталось совершить предельный переход в этом равентсве, чтобы получить требуемое. ■

## 2.5 Ряды тейлора

**Определение.** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ разложима в степенной ряд в точке $x_0$, если $\exists U(x_0)\ \exists \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\colon\ \forall x\in U(x_0)\ \ f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$

**Теорема 2.5.1.** (Единственность разложения в ряд)
$f$ разложима в степенной ряд в $x_0 \Longrightarrow$ этот ряд единственный.

*Доказательство.* Для доказательства этого непосредственно вычислим $a_i$.

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots$$

Поэтому $f(x)\in C^\infty(U(x_0))$. Значит, можно дифференцировать. Подставим $x=x_0$: $a_0=f(x_0)$. Этим мы однозначно определили $a_0$. Рассмотрим

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\dots$$

Подставим $x=x_0$: $a_1=f'(x_0)$. Продолжая в том же духе, однозначно определим все $a_i$. ■

**Определение.** *Рядом Тейлора* $f\in C^\infty(U(x_0))$ в точке $x_0$ называется формальный ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

**Теорема 2.5.2.** (Разложение бинома в ряд Тейлора)
Пусть $\sigma\in\mathbb{R}$, $|x|<1$, тогда

$$(1+x)^\sigma=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\sigma}{n}x^n$$

*Доказательство.* Изучим ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x(\sigma-n)}{n+1}\right|=|x|<1$$

Значит, при $|x|<1$ ряд сходится абсолютно. Раз ряд степенной, то на круге сходимости он сходится и равномерно. Пусть $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\sigma}{n}x^n$. Заметим, что

$$S'(x)(1+x)=\sigma S(x)$$

Теперь положим $f(x)=\dfrac{S(x)}{(1+x)^\sigma}$. Достаточно показать, что $f(x)=1$ при $|x|<1$. Изучим производную $f$:

$$f'(x)=\frac{S'(x)(1+x)^\sigma+S(x)\sigma(1+x)^{\sigma-1}}{(1+x)^{2\sigma}}=\frac{S'(x)}{(1+x)^\sigma}+\frac{\sigma S(x)}{(1+x)^{\sigma-1}}=0$$

Осталось проверить $f(x)=1$ в каком-нибудь $x$:

$$f(0)=\frac{1}{1}=1$$

■

**Замечание.** Пусть $|t| < 1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)\cdot t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}}$$

**Теорема 2.5.3.** (Критерий разложимости в ряд Тейлора)
Пусть $f \in C^{\infty}([x_0-h, x_0+h])$. Тогда $f$ разложима в ряд Тейлора в $U(x_0) \iff \exists \delta, C, A\colon\ \forall n\ \forall |x-x_0| < \delta\ \ |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$

*Доказательство.*

($\Longleftarrow$) Оценим остаток в форме Лагранжа:

$$f(x) = T_n f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!}(x-x_0)^n$$
$$\left|\frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!}(x-x_0)^n\right| \leqslant \frac{CA^n n!}{n!}|x-x_0|^n$$

Чтобы остаток стремился к нулю, нужно, чтобы $A|x-x_0| < 1$, откуда получаем $U(x_0)\colon\ |x-x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$. Поскольку теперь остаток ряда стремится к нулю, то $\forall x \in U(x_0)\ T_n f(x) \to f(x)$, что и требовалось доказать.

($\Longrightarrow$) Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ в $U(x_0)$. Ряд сходится, поэтому для (произвольного) $x = x_1 \neq 0$ имеем

$$\exists C_1\colon\ \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n\right| \leqslant C_1 \Longrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \leqslant C_1 n! \frac{1}{|x_1-x_0|^n}$$

Положим $B_n = \dfrac{1}{|x_1-x_0|^n}$. Проанализируем $m$-ю производную $f$:

$$\begin{aligned}
|f^{(m)}(x)| &\leqslant \sum_{n=m}^{+\infty}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m}\right| \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty}\left|C_1\frac{B^n n!}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m}\right| \\
&= B^m C_1 \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)\cdot |B(x-x_0)|^{n-m} \\
&= C_1 B^m \frac{m!}{(1-|B(x-x_0)|)^{m+1}} \underset{x\colon\ B|x-x_0|<\frac{1}{2}}{\leqslant} \frac{C_1 m! B^m}{\frac{1}{2^{m+1}}} = C_1 m! B^m 2^{m+1} = (2C_1)m!(2B)^m
\end{aligned}$$

■

## 2.6 Суммирование по Чезаро

**Теорема 2.6.1.** (Коши о перманентности метода средних арифметических)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \underset{c/a}{=} S$

*Доказательство.* Обозначим $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}(S_0 + \ldots + S_n)$. По определению

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \colon\ \forall N > N_1\ |S_N - S| < \varepsilon$$

Далее:

$$|\sigma_N - S| = \left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(S_n - S)\right| \leqslant \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}|S_n - S| \underset{N>N_1}{=} \underbrace{\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N_1}|S_n - S|}_{=\frac{c}{N+1}\to 0}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{N+1}\sum_{n=N_1+1}^{N}|S_n - S|}_{<\varepsilon} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

■

# Глава 3

# Криволинейные интегралы

## 3.1 Интеграл по кусочно-гладкому пути

**Определение.** Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто, тогда $V : E \to \mathbb{R}^m$ будем называть *векторным полем*. По умолчанию $V \in C(E)$.

**Определение.** (Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути)
Пусть $V$ - векторное поле, $\gamma : [a, b] \to E$ — кусочно-гладкий путь, тогда *интегралом векторного поля по этому пути* называется

$$I(V, \gamma) \overset{def}{=} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

**Замечание.** Предыдущее определение можно переписать в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t))\ \gamma'(t) dt \\ &\underset{\gamma \to x}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(x(t))\ x_i'(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i dx_i \end{aligned}$$

**Определение.** Пусть $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ — пути, $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, тогда определим *произведение путей* $\gamma = \gamma_1\gamma_2 : [a, d] \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

**Определение.** *Обратным путем* называется путь $\gamma^{-1} : t \mapsto \gamma(a + b - t)$.

**Теорема 3.1.1.** (О свойствах интеграла по кусочно-гладкому пути)

1. Линейность по полю: $I(\alpha U+\beta V,\gamma)=\alpha I(U,\gamma)+\beta I(V,\gamma)$ для любых полей $U,V$, любого к-г пути $\gamma$ и любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
2. Аддитивность при дроблении пути: $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^m$, $a<c<b$, тогда $I(v,\gamma)=I(V,\gamma\big|_{[a,c]})+I(V,\gamma\big|_{[c,b]})$.
3. Замена параметра: пусть $\varphi\colon[p,q]\to[a,b]$ — сюрьекция, причем $\varphi(p)=a$, $\varphi(q)=b$, $\varphi\in C^1$, тогда $I(V,\gamma)=I(V,\gamma\circ\varphi)$.
4. Интеграл произведения путей: $I(V,\gamma_1\gamma_2)=I(V,\gamma_1)+I(V,\gamma_2)$.
5. $I(V,\gamma)=-I(V,\gamma^{-1})$.
6. $|I(V,\gamma)|\leqslant\max\limits_{x\in\gamma[a,b]}\|V(x)\|\cdot l(\gamma)$.

## 3.2 Потенциальные векторные поля

**Определение.** Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$, $V\colon\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m\in C$, тогда поле $V$ называется *потенциальным*, если оно является градиентом какого-то отображения, то есть $\exists f\in C^1(\mathcal{O},\mathbb{R})\colon\ V=\operatorname{grad}f$.

**Лемма 3.2.1.** Пусть $f_1$, $f_2$ — отображения из определения потенциальности поля $V$. Тогда $f_1-f_2=c\in\mathbb{R}$.

**Теорема 3.2.2.** (Обобщенная формула Ньютона-Лейбница)
Пусть $V\colon\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$ — потенциальное поле с потенциалом $f$, $\gamma\colon[a,b]\to\mathcal{O}$ — кусочно-гладкий путь, $A=\gamma(a)$, $B=\gamma(b)$. Тогда

$$I(V,\gamma)=f(B)-f(A)$$

**Определение.** Интеграл векторного поля *не зависит от пути* в $\mathcal{O}$, если $\forall A,B\ \forall\gamma_1,\gamma_2$ кусочно-гладких путей из $A$ в $B$ $\ I(V,\gamma_1)=I(V,\gamma_2)$.

**Теорема 3.2.3.** (Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)
$V\colon\mathcal{O}\to\mathbb{R}^m$. эквивалентны утверждения:

- $V$ — потенциальное
- $I(V,\gamma)$ не зависит от пути
- $\forall$ кусочно-гладкой петли $\gamma$ $I(V,\gamma)=0$

## 3.3 Локально потенциальные векторные поля

**Лемма 3.3.1.** $V: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — гладкое потенциальное векторное поле. Тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \forall k, j\ \ \dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$

**Теорема 3.3.2.** (Лемма Пуанкаре)

Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — выпуклая область, $V: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m \in C^1$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда $V$ потенциально.

**Определение.** Поле $V: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ называется *локально потенциальным*, если оно потенциально в некоторой окрестности любой точки.

**Следствие 3.3.3.** (Лемма Пуанкаре)

Пусть $\mathcal{O}$ открыто в $\mathbb{R}^m$, $V \in C^1(\mathcal{O})$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда $V$ локально потенциально.

## 3.4 Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути

**Лемма 3.4.1.** (О гусенице)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, для всех $x$ задана окрестность $U(x)$, $\gamma: [a,b] \to \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$, тогда существует такое дробление пути $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и такие шары $B_k = B_k(x_k, r_k) \subseteq U(x_k)$, что $\forall k\ \operatorname{Im} \gamma\big|_{[t_k - 1, t_k]} \subseteq B_k$.

**Определение.** Объект из последней теоремы будем называть $V$-гусеницей.

**Определение.** Пути $\gamma_1, \gamma_2: [a,b] \to \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$ будем называть *похожими*, если у них есть общая $V$-гусеница. При этом ограничение идем именно на гусеницу, то есть наборы $t_k$ могут быть разными.

**Лемма 3.4.2.** Пусть $V$ — локально потенциальное векторное поле, $\gamma_1, \gamma_2$ — похожие кусочно-гладкие пути, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, тогда $I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$.

**Лемма 3.4.3.** $C([a,b]) \ni \gamma: [a,b] \to \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O}$ — область, тогда $\exists \delta > 0$:
Если $\gamma_1, \gamma_2: [a,b] \to \mathcal{O}$: $\forall t \in [a,b]\ |\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \delta$, $|\gamma(t) - \gamma_2(t)| < \delta$, тогда $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ похожи друг на друга.

**Определение.** (Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути)
Пусть $\gamma$ — непрерывный путь, $\gamma'$ — любой кусочно-гладкий путь, удовлетворяющий предыдущей лемме. тогда положим $I(V, \gamma) = I(V, \gamma')$

## 3.5 Гомотопия

**Определение.** Рассмотрим два пути $\gamma_0, \gamma_1: [a,b] \to \mathcal{O}$. *Гомотопией* путей $\gamma_0$, $\gamma_1$ называется отображение $\Gamma: [a,b] \times [0,1] \to \mathcal{O} \in C$, такое, что $\Gamma(t,0) = \gamma_0(t)$ и $\Gamma(t,1) = \gamma_1(t)$.

**Определение.** Гомотопия наывается *связанной*, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

**Определение.** Гомотопия называется *петельной*, если $\forall u \in [0,1]\ \Gamma(a,u) = \Gamma(b,u)$.

**Теорема 3.5.1.** (Интегралы по связанно гомотопным путям)
$V$ — локально потенциальное поле, $\gamma_0$, $\gamma_1$ — связянно гомотопные пути. Тогда $I(V,\gamma_0) = I(V,\gamma_1)$.

**Определение.** Область называется *односвязной* если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному.

**Теорема 3.5.2.** Пусть $\mathcal{O}$ — односвязная область в $\mathbb{R}^m$, $V$ — локально потенциальное векторное поле в $\mathcal{O}$, тогда $V$ потенциально в $\mathcal{O}$.

**Следствие 3.5.3.** (Теорема Пуанкаре для односвязной области)
$\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}) \Longrightarrow$ поле потенциально.

# Глава 4

# Теория меры

## 4.1 Системы множеств

**Определение.** *Полукольцом подмножеств* множества $X$ называют $\mathcal{P} \subseteq 2^X$, удовлетворяющее условиям

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$.
2. $A, B \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$.
3. $\forall A, B \in \mathcal{P}\ \exists B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{P}\colon\ A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} B_i$.

**Определение.** *Ячейкой* в $\mathbb{R}^m$ называется множество вида

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{a}_i \leqslant \mathbf{x}_i < \mathbf{b}_i \,\}$$

**Теорема 4.1.1.** (Свойства полуколец)

1. $A \in \mathcal{P} \not\Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{P}$
2. $A, A' \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A \mathbin{@} A' \in \mathcal{P}$, $@ \in \{\cup, \setminus, \triangle\}$
3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigsqcup\limits_{fin} D_j$

**Определение.** *Алгеброй подмножеств* множества $X$ называется множество $\mathcal{A} \in 2^X$ такое, что выполнены аксиомы:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

**Теорема 4.1.2.** (Свойства алгебр)

1. $\varnothing = X \setminus X \in \mathcal{A}$
2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

3. $\overline{A} = X \setminus A \in \mathcal{A}$

4. $A \cup B \in \mathcal{A}$

5. $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

6. Алгебра подмножеств является полукольцом подмножеств

**Определение.** *$\sigma$-Алгеброй подмножеств* множества $X$ называется алгебра подмножеств $\mathcal{A}$, удовлетворяющая дополнительной аксиоме:
$\{A_n\} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

## 4.2 Объём

**Определение.** Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *конечно-аддитивной*, если

1. $\mu$ принимает не более одного значения из $\{+\infty, -\infty\}$

2. $\mu(\varnothing) = 0$

3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$, $A_i \cap A_{j \neq i} = \varnothing$, тогда если оказалось, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}$, то

   $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

**Определение.** Пусть $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *объёмом*, если

1. $\mu$ конечно-аддитивна

2. $\mu \geqslant 0$

**Определение.** Объём называется *конечным*, если $\mu(X) < +\infty$.

**Определение.** *Классическим объёмом* в $\mathbb{R}^m$ называется объём, заданный на полукольце ячеек в $\mathbb{R}^m$, вычисляющийся по формуле $\mu([\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \prod\limits_{k=1}^{m} (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k)$.

**Лемма 4.2.1.** (Монотонность объёма) Для объёма $\mu$, $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subseteq B$ выполено $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

**Теорема 4.2.2.** (Свойства объёма)

1. $\forall A$, дизъюнктных $A_1 \ldots, A_n \in \mathcal{P}$: $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$

   (усиленная монотонность)

2. $\forall A, A_1 \ldots, A_n \in \mathcal{P}$: $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

   (конечная полуаддитивность)

## 4.3 Мера

**Определение.** *Мерой* называется объём $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$, обладающий свойством счётной аддитивности.

**Теорема 4.3.1.** Пусть $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. $\mu$ счетно-аддитивен
2. $\mu$ счетно-полуаддитивен

**Теорема 4.3.2.** Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. $\mu$ счетно-аддитивно
2. $\mu$ *непрерывно снизу*, то есть $A$, $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \subset A_2 \subset \ldots;\ A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \Longrightarrow$ $\mu(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_i)$

**Теорема 4.3.3.** Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **конечный** объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. $\mu$ счетно-аддитивен
2. $\mu$ непрерывно снизу
3. $\mu$ *непрерывно сверху*, то есть $A$, $A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \supset A_2 \supset \ldots;\ A = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \Longrightarrow$ $\mu(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_i)$

## 4.4 О стандартном продолжении меры

**Определение.** *Пространством с мерой* называется тройка $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$, где $\mathcal{A}$ — $\sigma$-алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера.

**Определение.** $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$ называется *полным* (соответственно мера называется *полной*), если $\forall E \in \mathcal{A}\colon\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \forall A \subseteq E\ A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = 0$.

**Определение.** $\langle X, \mathcal{P}, \mu\rangle$ называется *$\sigma$-конечным* (соответственно мера называется *$\sigma$-конечной*), если $X = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} B_k$, где $\mu(B_k) < +\infty$.

**Теорема 4.4.1.** (О стандартном продолжении меры)
$\langle X, \mathcal{P}, \mu_0\rangle$, $\mu_0$ — $\sigma$-конечный объём. Тогда $\exists$ $\sigma$-алгебра $\mathcal{A}$ и мера $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$:

1. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$, $\mu\big|_{\mathcal{P}} = \mu_0$
2. $\mu$ полная

3. Если $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{P}$, $\mu'\big|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, $\mu'$ — полная, тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ и $\mu'\big|_{\mathcal{A}} = \mu$

4. Если $\mathcal{P}'$ — полукольцо, $\mu'$ — мера на $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{A}$, тогда $\mu' = \mu\big|_{\mathcal{P}'}$

5. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mu(A) = \inf\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu_0(P_k) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}\right)$

## 4.5 Мера Лебега

**Теорема 4.5.1.** Классический объём в $\mathbb{R}^m$ является $\sigma$-конечной мерой.

**Определение.** *Мерой Лебега* называется стандартное продолжение классического объёма.

**Определение.** Алгебра, на которой определена мера Лебега, обозначается $\mathfrak{M}$.

**Определение.** *Измеримыми по Лебегу* называются множества $A \in \mathfrak{M}$.

**Теорема 4.5.2.** (Свойства меры Лебега)

1. Объединения и пересечения измеримых множеств измеримы.

2. Все открытые и замкнутые множества измеримы.

**Лемма 4.5.3.** (О структуре открытых множеств)

1. $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто $\Longrightarrow$ $\exists Q_i$ — ячейки в $\mathbb{R}^m$ такие, что $\mathcal{O} = \bigsqcup\limits_i Q_i$, причем можно дополнительно считать, что выполнено что-либо из нижеперечисленного:

   (a) Ячейки имеют рациональные (двоично-рациональные) координаты

   (b) $\mathrm{Cl}(Q_i) \subseteq \mathcal{O}$

   (c) $Q_i$ — кубы

2. Пусть $E$ измеримо в $\mathbb{R}^m$, $\lambda(E) = 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists Q_i$ — ячейки в $\mathbb{R}^m$ такие, что $E \subseteq \bigcup\limits_i Q_i$ и $\sum\limits_i \mu(Q_i) < \varepsilon$.

**Теорема 4.5.4.** (Свойства меры Лебега)

3. [Канторово множество TBD]

4. [Пример неизмеримого множества TBD]

5. – $A$ ограничено, тогда $\lambda(A) < +\infty$
   – $A$ открыто, тогда $\lambda(A) > 0$
   – $\lambda(A) = 0 \Longrightarrow$ У $A$ нет внутренних точек

6. $A$ измеримо, тогда $\forall \varepsilon > 0$

- $\exists G_\varepsilon$ открытое такое, что $A \subset G_\varepsilon$, $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
- $\exists F_\varepsilon$ замкнутое такое, что $F_\varepsilon \subset A$, $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

**Определение.** Пусть $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, тогда *борелевской оболочкой* множества $\mathcal{A}$ называют минимальную по включению $\sigma$-алгебру, содержащую $\mathcal{A}$.

**Определение.** *Борелевской $\sigma$-алгеброй* называется борелевская оболочка всех открытых множеств.

**Следствие 4.5.5.** $A$ измеримо, тогда $\exists$ борелевские $B, C$: $B \subset A \subset C$ такие, что $\lambda(C \setminus B) = 0$.

**Следствие 4.5.6.** $A$ измеримо, тогда $A = B \cup \mathfrak{N}$, $B$ — борелевское, $\lambda(\mathfrak{N}) = 0$.

**Следствие 4.5.7.** (Регулярность меры Лебега)
Пусть $A$ измеримо, тогда

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G \text{ открыто}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ замкнуто}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ компакт}}} \lambda(K)$$

**Лемма 4.5.8.** Пусть $\langle X', \mathcal{A}', \mu' \rangle$ — пространство с мерой. $\langle X, \mathcal{A}, \_ \rangle$ — заготовка для пространства с мерой. $T : X \to X'$ — биекция, $\forall A \in \mathcal{A}\ T(A) \in \mathcal{A}'$, $T(\varnothing) = \varnothing$. Положим $\mu(A) = \mu'(T(A))$. Тогда $\mu$ — мера на $\mathcal{A}$.

**Лемма 4.5.9.** $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall E \in \mathfrak{M}\ \lambda(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(T(E)) = 0$,
тогда $\forall A \in \mathfrak{M}\ T(A) \in \mathfrak{M}$.