Математический анализ I

Конспект основан на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

0.1 Некоторые базовые понятия

Определение. *Отображением* из множества X в множество Y называется отношение $F \subseteq X \times Y$, для которого

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Y:\ (x,y) \in F$$

Обозначается $F: X \to Y$ или $X \xrightarrow{F} Y$. Сам факт того, что $(x,y) \in F$ обозначается $f(x) = y$. X называют *областью определения*, а Y — *областью значений* f.

Определение. Отображение $f: X \longrightarrow Y$ называется *инъективным*, если для него выполняется

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Иначе говорят, что f — *1-1 отображение*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{1-1} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называется *сюръективным*, если для него выполняется

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения называют отображениями *на*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow{\text{на}} Y$.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ называют *биекцией*, если оно одновременно сюръективно и инъективно, иначе говоря

$$\forall y \in Y\ \exists! x \in X:\ f(x) = y$$

Такие отображения, по аналогии с предыдущими определениями, называют *1-1 на отображениями*, и часто обозначают $f: X \xrightarrow[\text{на}]{1-1} Y$.

Определение. *Образом* множества $A \subseteq X$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f(A) \overset{def}{=} \{f(x) \mid x \in A\}$$

Определение. *Прообразом* множества $B \subseteq Y$ при отображении $f: X \to Y$ называют множество

$$f^{-1}(B) \overset{def}{=} \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Определение. *Обратимым* называется отображение $f: X \to Y$, для которого существует обратное относительно композиции отображение $f^{-1}: Y \to X$, для которого выполняется

$$f^{-1} \circ f = id_X$$

Теорема 0.1.1 (Свойства прообраза)**.** Пусть $f: X \to Y$, $A, B \subseteq X$. Тогда справедливо

1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

Доказательство. Без доказательства (очевидно). ■

Теорема 0.1.2. f биективно $\Longleftrightarrow$ f обратимо

Доказательство. Без доказательства (тривиально). ■

Определение. *Полем* называется тройка $\langle X, +: X \times X \to X, \cdot: X \times X \to X \rangle$, где X — множество, удовлетворяющая аксиомам поля:

+G1 $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$

+G2 $\exists 0 \in X:\ \alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$

+G3 $\exists -\alpha:\ \alpha + -\alpha = 0$

+G4 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

·G1 $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$

·G2 $\exists 1 \in X:\ 1\alpha = \alpha 1 = \alpha$

·G3 $\alpha \neq 0 \Rightarrow \exists \alpha^{-1}:\ \alpha\alpha^{-1} = 1$

·G4 $\alpha\beta = \beta\alpha$

D $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

Для любых $\alpha, \beta, \gamma \in X$. Аксиомы +G1-4 задают на X структуры абелевой группы по $+$, аксиомы ·G1-4 задают на $X \setminus \{0\}$ структуру абелевой группы по $\cdot$, аксиома дистрибутивности D связывает $+$ и $\cdot$.

Примеры.

1. $\mathbb{R}$ — поле. В дальнейшем можно под произвольным полем понимать $\mathbb{R}$, общность от этого сильно не пострадает.

2. $\mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда поле, когда p — простое.

Определение. *Векторным (линейным) пространством над полем K* называют тройку $\langle V, +_V: V \times V \to V, \cdot_V: V \times K \to V \rangle$, где V — множество, удовлетворяющую аксиомам:

$+_V$G1 $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

$+_V$G2 $\exists \mathbf{0} \in X:\ \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$

$+_V$G3 $\exists -\mathbf{x}:\ \mathbf{x} + -\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$+_V$G4 $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$

V1 $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

V2 $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$

V3 $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

V4 $1_K\mathbf{x} = \mathbf{x}$

Для любых $\alpha, \beta \in K$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

Пример. $K^n \overset{def}{=} \underbrace{K \oplus K \oplus \ldots \oplus K}_{n}$ — векторное пространство, которому изоморфны все векторные пространства над полем K размерности n. Мы ограничимся рассмотрением $\mathbb{R}^n$.