

Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

1	Многомерный анализ	2
1.1	Сведения из линейной алгебры	2

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются операторами

Определение. Нормой на множестве X называется отображение $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Определение. Нормированным пространством называется пара $\langle X, \| \cdot \| \rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(x, y) = \|x - y\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)

Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ — нормы на V . Тогда

$$\exists c, C > 0: c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$.

i) $\| \cdot \|$ — норма.

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \geq 0$ — очевидно

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha c_i)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ — очевидно

$$\cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ — неравенство Минковского}$$

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\| \cdot \|$.

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_1 \leq_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|_1^2} = c \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

тогда

$$| \|x\|_1 - \|y\|_1 | \leq \|x - y\|_1 \leq c \|x - y\|$$

Поэтому $\| \cdot \|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{x \in S^n} \|x\|_1$$

$$c_2 := \max_{x \in S^n} \|x\|_1$$

Ни c_1 , ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \geq c_1 \|x\| \\ \|x\|_1 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \leq c_2 \|x\| \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы. ■

Определение. Нормой оператора называется отображение $\| \cdot \| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in S^m} \|Ax\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup_{\|x\|=1} Ax = \sup_{\|x\| \leq 1} Ax$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)
 $\| \cdot \| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|Ae_i\| \leq_{\text{КБШ}} \|x\| \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|A\| = 0 \iff \forall x \in S^n \ Ax = 0 \iff A = 0$. Неотрицательность очевидна.

$$\text{ii) } \|\alpha \mathcal{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\alpha \mathcal{A} \mathbf{x}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} |\alpha| \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| = \alpha \|\mathcal{A}\|$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{x}\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| + \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B} \mathbf{x}\|$$

■

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \implies \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x} - \mathcal{A} \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \left\| \mathcal{A} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \right\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{B}\| \|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x})\| \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left(\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \|\mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|} \right)\| \right) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left\| \mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|} \right) \right\| \\ &\leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на \mathbb{R}^m

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\text{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра.

■

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\iff \exists c > 0 \forall \mathbf{x} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\|$, причем $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство. $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \text{Ker}(\mathcal{A}) = 0 \iff \mathcal{A}$ обратим.

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \|\mathbf{y}\| \geq c \|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\| \iff \|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\| \leq \frac{1}{c} \|\mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)

$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

$$\text{ii) } \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|}$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geq \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| \geq \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \right) \|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\|$$

Далее по лемме получаем обратимость \mathcal{B} и оценку на его норму.

iii)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} &= \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathcal{B}^{-1} \\ \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| &\leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq_{\text{i)} } \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■