Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — *пространство линейных отображений* из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются *операторами*

Определение. *Нормой* на множестве X называется отображение $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = 0$

ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$

iii) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Определение. *Нормированным пространством* называется пара $\langle X, \|\ \|\rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)
Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ — нормы на V. Тогда

$$\exists c, C > 0\colon\ c\,\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant C\,\|\mathbf{x}\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n\| \overset{def}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$.

i) $\|\ \|$ — норма.

- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2} \geqslant 0$ — очевидно

- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha c_i)^2} = \alpha\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$ — очевидно

- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$ — неравенство Минковского

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\|\ \ \|$.

$$\|x_1e_1+\ldots+x_ne_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|x_ie_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|e_i\|_1 \leqslant_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|_1^2} = c\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

тогда

$$|\,\|\mathbf{x}\|_1-\|\mathbf{y}\|_1\,| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 \leqslant c\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

Поэтому $\|\ \ \|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$
$$c_2 := \max_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$

Ни c_1, ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1 \|\mathbf{x}\| \geqslant c_1\,\|\mathbf{x}\|$$
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1 \|\mathbf{x}\| \leqslant c_2\,\|\mathbf{x}\|$$

что и доказывает утверждение теоремы.

∎

Определение. *Нормой оператора* называется отображение $\|\ \ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{A}\| \overset{def}{=} \sup_{\mathbf{x}\in S^m}\|\mathcal{A}x\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup\limits_{\|x\|=1}\mathcal{A}\mathbf{x} = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\mathcal{A}\mathbf{x}$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)
$\|\ \ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{x}|\,\|\mathcal{A}e_i\| \leqslant_{\text{КБШ}} \|\mathbf{x}\|\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{A}e_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|\mathcal{A}\| = 0 \iff \forall\mathbf{x}\in S^n\ \mathcal{A}\mathbf{x} = 0 \iff \mathcal{A} = 0$. Неотрицательность очевидна.

ii) $\|\alpha\mathcal{A}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \|\alpha\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} |\alpha|\,\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \alpha\,\|\mathcal{A}\|$

iii) $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x} \leqslant \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\mathbf{x}$

■

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных опрераторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{A}\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| = \left\|\mathcal{A}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right)\right\| \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathcal{A}\|\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leqslant \|\mathcal{B}\|\,\|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x}) \\
&= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \left(\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right)\right) \\
&\leqslant \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right) \\
&\leqslant \|A\|\,\|B\|
\end{aligned}$$

■

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на $\mathbb{R}^m$

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра. ■

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\Longleftrightarrow \exists c > 0\ \forall \mathbf{x}\ \ \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathbf{x}\|$, причем $\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}$

Доказательство. $\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c\,\|\mathbf{x}\| \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = 0 \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ обратим.
$\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c\,\|\mathbf{x}\| \Longleftrightarrow \|\mathbf{y}\| \geqslant c\left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \Longleftrightarrow \left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}\|\mathbf{y}\|$ ■

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)
$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A}-\mathcal{B}\| < \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

ii) $\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|}$

iii) $\left\|\mathcal{A}^{-1}-\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|}\|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A}-\mathcal{B})\mathbf{x}\| \geqslant \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|\right)\|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \left\|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\|$$

Далее по лемме получаем обратимость $\mathcal{B}$ и оценку на его норму.

iii)

$$\mathcal{A}^{-1}-\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathcal{B}^{-1}$$

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}-\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \|\mathcal{B}-\mathcal{A}\| \left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant_{\text{i)}} \frac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|}\|\mathcal{A}-\mathcal{B}\|$$

■

Следствие 1.1.8. Множество Ω_m открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\ \ \|\rangle$

1.2 Дифференцируемость функций нескольких переменных

Определение. Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω — область в $\mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — бесконечно малое в точке $\mathbf{x}$, такие что

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|,\ \mathbf{h} \to 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Замечание. Функция α из определения дифференцируемости зависит не только от $\mathbf{h}$, но и от $\mathbf{x}$.

Определение. Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом f в точке* $\mathbf{x}$ и обозначать $\mathrm{d}_\mathbf{x} f = \mathcal{A}$.

Замечание. Отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{d}_\mathbf{x} f$, действующее из $\mathbb{R}^m$ в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом*.

Определение. Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения f в точке* $\mathbf{x}$.

Теорема 1.2.1. (Единственность производной)
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируема в $\mathbf{x}$, тогда существует единственный производный оператор f в точке $\mathbf{x}$.

Доказательство. Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(\|t\mathbf{z}\|)\,\|t\mathbf{z}\|,\ t\mathbf{z} \to 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t),\ t \to 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t),\ t \to 0 \Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

■