Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

1 Многомерный анализ **2**

1.1 Сведения из линейной алгебры 2

1.2 Дифференцируемость и дифференциал отображений 6

1.3 Теоремы Лагранжа для отображений 12

1.4 Формула Тейлора 13

1.5 Диффеоморфизмы 17

1.6 Относительный экстремум 29

2 Функциональные последовательности и ряды **32**

2.1 Сходимость фукнциональных последовательностей 32

2.2 Сходимость функциональных рядов 38

2.3 Степенные ряды 43

2.4 Ряды тейлора 48

2.5 Суммирование по Чезаро 49

3 Криволинейные интегралы **51**

3.1 Интеграл по кусочно-гладкому пути 51

3.2 Потенциальные векторные поля 53

3.3 Локально потенциальные векторные поля 55

3.4 Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути . . . 56

3.5 Гомотопия 59

4 Теория меры **61**

4.1 Системы множеств 61

4.2 Объём 62

4.3 Мера 64

4.4 О стандартном продолжении меры 66

4.5 Мера Лебега 67

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — *пространство линейных отображений* из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются *операторами*

Определение. *Нормой* на множестве X называется отображение $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0$

ii) $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$

iii) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Определение. *Нормированным пространством* называется пара $\langle X, \|\ \|\rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)
Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_2$ — нормы на V. Тогда

$$\exists c, C > 0\colon\ c\,\|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant C\,\|\mathbf{x}\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ne_n\| \overset{def}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$.

i) $\|\ \|$ — норма.

- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2} \geqslant 0$ — очевидно
- $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha c_i)^2} = \alpha\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i^2}$ — очевидно

$\cdot$ $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(c_i+b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}c_i^2} + \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}$ — неравенство Минковского

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\| \ \|$.

$$\|x_1e_1+\ldots+x_ne_n\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\|x_ie_i\|_1 = \sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|e_i\|_1 \leqslant_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|_1^2} = c\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$$

тогда

$$|\,\|\mathbf{x}\|_1 - \|\mathbf{y}\|_1\,| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_1 \leqslant c\,\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

Поэтому $\| \ \|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$
$$c_2 := \max_{\mathbf{x}\in S^n}\|\mathbf{x}\|_1$$

Ни c_1, ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1 \|\mathbf{x}\| \geqslant c_1\,\|\mathbf{x}\|$$
$$\|\mathbf{x}\|_1 = \left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right\|_1 \|\mathbf{x}\| \leqslant c_2\,\|\mathbf{x}\|$$

что и доказывает утверждение теоремы.

■

Определение. *Нормой оператора* называется отображение $\| \ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$

$$\|\mathcal{A}\| \overset{def}{=} \sup_{\mathbf{x}\in S^m}\|\mathcal{A}x\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup\limits_{\|x\|=1}\mathcal{A}\mathbf{x} = \sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\mathcal{A}\mathbf{x}$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)
$\| \ \| : L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}(x_1e_1+\ldots+x_ne_n)\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\mathbf{x}|\,\|\mathcal{A}e_i\| \leqslant_{\text{КБШ}} \|\mathbf{x}\|\sum_{i=1}^{n}\|\mathcal{A}e_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|\mathcal{A}\| = 0 \iff \forall \mathbf{x}\in S^n\ \mathcal{A}\mathbf{x} = 0 \iff \mathcal{A} = 0$. Неотрицательность очевидна.

ii) $\|\alpha\mathcal{A}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \|\alpha\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} |\alpha| \, \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| = \alpha \, \|\mathcal{A}\|$

iii) $\|\mathcal{A}+\mathcal{B}\| = \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{x} \leqslant \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{A}\mathbf{x} + \sup\limits_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\mathbf{x}$

■

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных опрераторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A}\mathbf{x} - \mathcal{A}\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| = \left\|\mathcal{A}\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}\right)\right\| \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \, \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leqslant \|\mathcal{B}\| \, \|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}(\mathcal{A}\mathbf{x}) \\
&= \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \left(\|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right)\right) \\
&\leqslant \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x}\in S^n} \mathcal{B}\left(\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}}{\|\mathcal{A}\mathbf{x}\|}\right) \\
&\leqslant \|A\| \, \|B\|
\end{aligned}$$

■

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на $\mathbb{R}^m$

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра. ■

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)
$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\Longleftrightarrow \exists c > 0 \; \forall \mathbf{x} \;\; \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant c \, \|\mathbf{x}\|$, причем $\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{c}$

Доказательство.

$$\left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{y}\right\| \leqslant \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \|\mathbf{y}\| \Longrightarrow \|\mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| \geqslant \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} \|\mathbf{x}\|$$

■

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)
$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| < \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

ii) $\left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|}$

iii) $\left\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \dfrac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geqslant \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| \geqslant \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|\right) \|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \left\|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\| \leqslant \|\mathcal{A}\| \left\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\right\|$$

Далее по лемме получаем обратимость $\mathcal{B}$ и оценку на его норму.

iii)

$$\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathcal{B}^{-1}$$

$$\left\|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant \left\|\mathcal{A}^{-1}\right\| \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| \left\|\mathcal{B}^{-1}\right\| \leqslant_{\text{i)}} \frac{\left\|\mathcal{A}^{-1}\right\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$$

■

Следствие 1.1.8. Множество Ω_m открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\ \ \|\rangle$

1.2 Дифференцируемость и дифференциал отображений

Определение. Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, Ω — область в $\mathbb{R}^m$ называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $r : \Omega \to \mathbb{R}^n$, такие что

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + r(\mathbf{h})$$

Где $r(\mathbf{h})$ удовлетворяет уловию

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|r(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

или, что то же самое

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|$$

Где $\alpha(\mathbf{h})$ бесконечно малое, то есть

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \alpha(\mathbf{h}) = 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Замечание. Функции α, r из определения дифференцируемости зависят не только от $\mathbf{h}$, но и от $\mathbf{x}$.

Определение. Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом f в точке* $\mathbf{x}$ и обозначать $\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f = \mathcal{A}$.

Замечание. Отображение $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{d}_{\mathbf{x}} f$, действующее из $\mathbb{R}^m$ в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом f*.

Определение. Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения f в точке* $\mathbf{x}$.

Теорема 1.2.1. (Единственность производной)
$f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируема в $\mathbf{x}$, тогда существует единственный производный оператор f в точке $\mathbf{x}$.

Доказательство. Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(t\mathbf{z})\,\|t\mathbf{z}\|,\ t\mathbf{z} \to 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x}+t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t),\ t \to 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t),\ t\to 0 \Longleftrightarrow$$

$$\mathcal{A}\mathbf{z} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{z})-f(\mathbf{x})}{t}$$

■

Утверждение 1.2.2. (Производный оператор линейного отображения)
Пусть $\mathcal{A}\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, тогда $\mathcal{A}$ дифференцируемо в каждой точке и $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}\mathcal{A}=\mathcal{A}$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h})-\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

Утверждение 1.2.3. (Линейность производного оператора)
Пусть $f,\ g:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, дифференцируемы в $\mathbf{x}$. Тогда отображение $\alpha f+\beta g$ дифференцируемо в точке $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}(\alpha f+\beta g) = \alpha\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f+\beta\mathrm{d}_{\mathbf{x}}g$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&(\alpha f+\beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h})-(\alpha f+\beta g)(\mathbf{x})\\
&=[(\alpha f)(\mathbf{x}+\mathbf{h})-(\alpha f)(\mathbf{x})]+[(\beta g)(\mathbf{x}+\mathbf{h})-(\beta g)(\mathbf{x})]\\
&=[\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f+o]+[\mathrm{d}_{\mathbf{x}}g+o]=\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f+\mathrm{d}_{\mathbf{x}}g+o
\end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.4. (Дифференцируемость композиции)
Пусть $f:\Omega\to\Omega_1$, $g:\Omega_1\to\mathbb{R}^k$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^m$, $\Omega_1\subseteq\mathbb{R}^n$ дифференцируемы в $\mathbf{x}$, тогда $F=g\circ f$ дифференцируема в $\mathbf{x}$, причем $\mathrm{d}_{\mathbf{x}}F=\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g\cdot\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
g(f(\mathbf{x}+\mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{x})+[\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h}+r(\mathbf{h}))\\
&=\{\mathbf{v}=[\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h}+r(\mathbf{h})\}\\
&=g(f(\mathbf{x})+\mathbf{v})=g(f(\mathbf{x}))+[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{v}+\widetilde{r}(\mathbf{v})\\
&=g(f(\mathbf{x}))+[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g][\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h}+[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h})+\widetilde{r}(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Осталось показать, что $[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h})+\widetilde{r}(\mathbf{v})=o(\|\mathbf{h}\|)$.

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h})+\widetilde{r}(\mathbf{v})\right\|\leqslant\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]\frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}\,\|r(\mathbf{h})\|\right\|+\widetilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|)\,\|\mathbf{v}\|$$

Обозначим $\mathbf{w}=\frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$, причем $\|\mathbf{w}\|=1$. Из определения нормы оператора получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{w}\right\|\leqslant\left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g\right\|$$

Кроме того, $\|\mathbf{v}\|\leqslant\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f\|\,\mathbf{h}+\alpha(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$. Окончательно получаем

$$\left\|[\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h})+\widetilde{r}(\mathbf{v})\right\|\leqslant\left\|\mathrm{d}_{f(\mathbf{x})}g\right\|\,\|r(\mathbf{h})\|+\widetilde{\alpha}(\|\mathrm{d}_{\mathbf{x}}f\|\cdot\|\mathbf{h}\|+\alpha(\|\mathbf{h}\|)\cdot\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{v}\|\leqslant\beta(\|\mathbf{h}\|)\,\|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой $\beta(t)\xrightarrow[t\to 0]{}0$. ■

Определение. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^n$, тогда отображения

$$f_i(x) \stackrel{def}{=} \langle f(x), \mathbf{u}_i \rangle$$

где $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, называются *координатными функциями*.

Теорема 1.2.5. (Дифференцируемость координатных функций)
Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$f \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x} \iff \forall i \ f_i \text{ дифференцируемо в } \mathbf{x}$$

причем

$$\mathrm{d}_\mathbf{x} f = \begin{pmatrix} \mathrm{d}_\mathbf{x} f_1 \\ \vdots \\ \mathrm{d}_\mathbf{x} f_n \end{pmatrix}$$

Доказательство.

$\Longleftarrow$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(\mathbf{x}))$$

где $g_i(t) = t\mathbf{u}_i$ — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда f дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

$\Longrightarrow$ f_i дифференцируемы как композиции f и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$ — область, тогда *производной по направлению* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ в точке $\mathbf{x}$ называется

$$D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} \lim_{\substack{t \to 0 \\ \mathbf{x}+t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует.

Определение. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис $\mathbb{R}^m$, тогда *частной производной f по k -й переменной* называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} f'_k \stackrel{def}{=} D_k f(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

Утверждение 1.2.6. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$\exists D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u}$$

Доказательство. Для любых $t \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t} &= \frac{[\mathrm{d}_\mathbf{x} f](t\mathbf{u}) + r(t\mathbf{u})}{t} \\ &= [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u} + \frac{r(t\mathbf{u})}{t} \leqslant [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u} + \frac{\alpha(\mathbf{u})\,\|t\mathbf{u}\|}{t} = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u} + \alpha(\mathbf{u})\,\|\mathbf{u}\| \end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.7. (Вид матрицы Якоби) Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

$$\mathrm{d}_\mathbf{x} f = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\mathbf{x}) & D_2 f_1(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_1(\mathbf{x}) \\ D_1 f_2(\mathbf{x}) & D_2 f_2(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_1 f_n(\mathbf{x}) & D_2 f_n(\mathbf{x}) & \cdots & D_m f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Доказательство. Пусть $(\mathbf{e}_i)$ — базис $\mathbb{R}^m$, $(\tilde{\mathbf{e}}_i)$ — базис $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\begin{aligned}[]
[\mathrm{d}_\mathbf{x} f]_{i,j} &= \langle [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j \rangle = \left\langle \frac{[\mathrm{d}_\mathbf{x} f](t\mathbf{e}_i)}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \left\langle \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle \\
&= \lim_{t\to 0} \left\langle \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{t}, \tilde{\mathbf{e}}_j \right\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{f_j(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_i) - f_j(\mathbf{x})}{t} = D_i f_j(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

■

Утверждение 1.2.8. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Тогда

$$D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

Доказательство.

$$D_\mathbf{u} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{u} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{u} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{u} \rangle$$

■

Утверждение 1.2.9. (Необходимое условие дифференцируемости)
Если f дифференцируемо в $\mathbf{x}$, то существуют все частные производные в точке $\mathbf{x}$, причем матрица Якоби f в точке $\mathbf{x}$ совпадает с матрицей, составленной из матриц якоби f_i в точке $\mathbf{x}$:

$$\mathrm{d}_\mathbf{x} f = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_1}(\mathbf{x}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_m}(\mathbf{x}) \right)$$

Доказательство. Подставим в определение дифференцируемости $\mathbf{h} = t\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) &= f(\mathbf{x}) + [\mathrm{d}_\mathbf{x} f](t\mathbf{e}_k) + \alpha(\mathbf{h})\,||\mathbf{h}|| \\
&= f(\mathbf{x}) + t[\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{e}_k + \alpha(\mathbf{h})\,||\mathbf{h}||
\end{aligned}$$

Отсюда по определению частной производной получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}+t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})}{t} = [\mathrm{d}_\mathbf{x} f]\mathbf{e}_k$$

■

Теорема 1.2.10. (Достаточное условие дифференцируемости)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $B(\mathbf{a}) \subseteq \Omega$, В $B(\mathbf{a})$ существуют все частные производные, причем они непрерывны в точке $\mathbf{a}$. Тогда f дифференцируемо в точке $\mathbf{a}$.

Доказательство. Докажем теорему для случая $m = 2$. Схема, примененная в доказательстве тривиально обобщается на произвольные m.

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)-f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2) &= (f(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)-f(\mathbf{a}_1,\mathbf{x}_2))+(f(\mathbf{a}_1,\mathbf{x}_2)-f(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2))\\
&\overset{\text{Лагранж}}{=} f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1,\mathbf{x}_2)(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)+f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1,\tilde{\mathbf{x}}_2)(\mathbf{x}_2-\mathbf{a}_2)\\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)+f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2-\mathbf{a}_2)\\
&+\left[\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_1}(\tilde{\mathbf{x}}_1,\mathbf{x}_2)-f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2))}_{\to 0 \text{ по непрерывности}}\frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}+\underbrace{(f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1,\tilde{\mathbf{x}}_2)-f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2))}_{\to 0 \text{ по непрерывности}}\frac{\mathbf{x}_2-\mathbf{a}_2}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|}\right]\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|\\
&= f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)+f'_{\mathbf{x}_2}(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2)(\mathbf{x}_2-\mathbf{a}_2)+\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{a})\,\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|
\end{aligned}
$$

■

Теорема 1.2.11. Пусть $f,g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\lambda : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \Omega$, f,g,λ дифференцируемы в $\mathbf{a}$. Тогда λf, $\langle f, g\rangle$ дифференцируемы в $\mathbf{a}$, причем

- $[\mathrm{d}_\mathbf{a}(\lambda f)]\mathbf{h} = [\mathrm{d}_\mathbf{a}\lambda]\mathbf{h}\cdot f(\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{a})\cdot[\mathrm{d}_\mathbf{a} f]\mathbf{h}$
- $[\mathrm{d}_\mathbf{a}\langle f, g\rangle]\mathbf{h} = \langle[\mathrm{d}_\mathbf{a} f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a})\rangle + \langle f(\mathbf{a}), [\mathrm{d}_\mathbf{a} g]\mathbf{h}\rangle$

Доказательство.

- Докажем покоординатно:

$$
\begin{aligned}
&(\lambda f_i)(\mathbf{a}+\mathbf{h})-(\lambda f_i)(\mathbf{a})\\
&=\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{h})\cdot f_i(\mathbf{a}+\mathbf{h})-(\lambda f_i)(\mathbf{a})\\
&=(\lambda(\mathbf{a})+\mathrm{d}_\mathbf{a}\lambda\mathbf{h}+\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|)\cdot(f_i(\mathbf{a})+\mathrm{d}_\mathbf{a} f_i\mathbf{h}+\beta(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|)-(\lambda f_i)(\mathbf{a})\\
&=[\mathrm{d}_\mathbf{a}\lambda]\cdot f_i(\mathbf{a})+\lambda(\mathbf{a})\cdot[\mathrm{d}_\mathbf{a} f_i]\mathbf{h}+o(\mathbf{h})
\end{aligned}
$$

-

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{d}_\mathbf{a}\langle f,g\rangle]\mathbf{h} &= \mathrm{d}_\mathbf{a}\left[\sum_{i=1}^n f_i\cdot g_i\right]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}_\mathbf{a}[f_i\cdot g_i]\mathbf{h} = \sum_{i=1}^n([\mathrm{d}_\mathbf{a} f_i]\mathbf{h}\cdot g_i(\mathbf{a})+f_i(\mathbf{a})\cdot[\mathrm{d}_\mathbf{a} g_i]\mathbf{h})\\
&= \sum_{i=1}^n([\mathrm{d}_\mathbf{a} f_i]\mathbf{h}\cdot g_i(\mathbf{a}))+\sum_{i=1}^n(f_i(\mathbf{a})\cdot[\mathrm{d}_\mathbf{a} g_i]\mathbf{h}) = \langle[\mathrm{d}_\mathbf{a} f]\mathbf{h}, g(\mathbf{a})\rangle+\langle f(\mathbf{a}),[\mathrm{d}_\mathbf{a} g_i]\mathbf{h}\rangle
\end{aligned}
$$

■

Определение. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Тогда *градиентом* φ в точке $\mathbf{x}$ наывается вектор

$$
\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x})\\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}
$$

Теорема 1.2.12. (Экстремальное свойство градиента)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируемо в $\mathbf{x}$, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq 0$ Тогда

$$\mathbf{l} = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$$

— направление наибольшего возрастания f, то есть

$$\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^m, \|\mathbf{h}\| = 1 \Longrightarrow D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) \leqslant D_{\mathbf{l}} f(\mathbf{x})$$

Доказательство.

$$D_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = [\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f]\mathbf{h} = [\operatorname{grad} f(\mathbf{x})]\mathbf{h} = \langle \operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle \leqslant \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \, \|\mathbf{h}\| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|$$

■

1.3 Теоремы Лагранжа для отображений

Теорема 1.3.1. (Лагранжа для векторнозначных функций)
Пусть $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$, дифференцируемо на (a,b). Тогда

$$\exists c \in (a,b): \quad \|f(b)-f(a)\| \leqslant \left\|f'(c)\right\| |b-a|$$

Доказательство. При $f(a)=f(b)$ утверждение тривиально. Положим $\varphi(x) = \langle f(b)-f(a), f(t)-f(a)\rangle$. Тогда

$$\varphi(a)=0, \varphi(b) = \langle f(b)-f(a), f(b)-f(a)\rangle = \|f(b)-f(a)\|^2$$

Применим теорему Лагранжа для φ:

$$\exists c \in (a,b): \quad \|f(b)-f(a)\|^2 = \varphi(b)-\varphi(a) \underset{\text{Лагранж}}{=} \varphi'(c)|b-a| = \langle f(b)-f(a), f'(c)\rangle \cdot |b-a|$$
$$\underset{\text{КБШ}}{\leqslant} \|f(b)-f(a)\| \cdot \left\|f'(c)\right\| |b-a| \Longrightarrow \|f(b)-f(a)\| \leqslant \left\|f'(c)\right\| |b-a|$$

■

Теорема 1.3.2. (Лагранжа для отображений)
Пусть $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, дифференцируемо на Ω, $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subseteq \Omega$, тогда

$$\|f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a})\| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$$

Доказательство. $g = f(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))$ для $t \in [0,1]$ — дифференцируемо как композиция дифференцируемых функций. По предыдущей теореме

$$\exists t_0 \in (0,1): \quad \|g(1)-g(0)\| \leqslant \left\|g'(t_0)\right\| = \left\|f'(\mathbf{a}+t_0(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\right\|$$
$$\leqslant \left\|f'(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}))\right\| \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\| \leqslant \sup_{\mathbf{x}\in[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \|\mathrm{d}_{\mathbf{x}} f\| \cdot \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$$

■

1.4 Формула Тейлора

Определение. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, Ω — область, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$. Определим частные производные высшего порядка по индукции:

$$D_{i_1,\dots,i_k} f \overset{def}{=} D_{i_k}(D_{i_1,\dots,i_{k-1}} f)$$

Теорема 1.4.1. (О независимости ч.п. от порядка дифференцирования)
Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Ω — область, $(x_0, y_0) \in \Omega$, $\exists B((x_0, y_0), r) \subseteq \Omega$, причем в $B((x_0, y_0), r)$ существуют $D_{12}f$ и $D_{21}f$, непрерывные в точке (x_0, y_0). Тогда $D_{12}f(x_0, y_0) = D_{21}f(x_0, y_0)$

Доказательство.

$$\alpha(h) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда $\alpha(0) = 0$:

$$\begin{aligned}\alpha(h) = \alpha(h) - \alpha(0) &\underset{\text{Лагранж}}{=} \alpha'(\tilde{h})h = [f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \tilde{h}, y_0)]h \\ &\underset{\text{Лагранж}}{=} f''_{xy}(x_0 + \tilde{h}, y_0 + \tilde{k})hk\end{aligned}$$

Аналогично введем $\beta(k)$:

$$\beta(k) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\beta(k) = \beta(k) - \beta(0) &\underset{\text{Лагранж}}{=} \beta'(\bar{k})k = [f'_y(x_0 + h, y_0 + \bar{k}) - f'_y(x_0, y_0 + \bar{k})]k \\ &\underset{\text{Лагранж}}{=} f''_{yx}(x_0 + \bar{h}, y_0 + \bar{k})hk\end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha(h) = \beta(k)$. Осталось перейти к пределу при $(h, k) \to (0, 0)$ и воспользоваться непрерывностью частных производных в точке (x_0, y_0). ■

Следствие 1.4.2. Пусть $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $\exists B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, причем в $B(\mathbf{x}, r)$ для любой перестановки индексов $\pi \in S_k$ существуют и непрерывны в $\mathbf{x}$ частные производные $D_{i_{\pi_1},\dots,i_{\pi_k}} f$. Тогда все они совпадают в точке $\mathbf{x}$.

Доказательство. Доказательство сводится к координатным функциям, поэтому считаем, что $n = 1$. Предыдущая теорема дает возможность менять местами пары индексов. Осталось заметить, что группа перестановок порождается транспозициями. ■

Определение. Множество функций $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, у которых все частные производные порядка не более r существуют и непрерывны на Ω, будем обозначать $C^r(\Omega)$

Определение. Пусть $k_1, k_2, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$, тогда набор $k = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ будем называть *мультииндексом*. Используются обозначения $|k| = k_1 + \ldots + k_m$,

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} f \overset{def}{=} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}} f$$

Лемма 1.4.3. (Полиномиальная формула)

$$(a_1 + \ldots + a_m)^r = \sum_{n_1=1}^{m} \sum_{n_2=1}^{m} \ldots \sum_{n_r=1}^{m} a_{n_1} a_{n_2} \ldots a_{n_r} = \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}$$

Доказательство. Первое равенство очевидно по правилам раскрытия скобок. Докажем второе равенство индукцией по r.

- Для $r = 1$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned}
&(a_1 + \ldots + a_m)^{r+1} = (a_1 + \ldots + a_m) \cdot (a_1 + \ldots + a_m)^r \\
&= (a_1 + \ldots + a_m) \cdot \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1+1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m+1} \\
&= [\text{переобозначим } k_i = k_i + 1 \text{ в } i\text{-й сумме}] \\
&= \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_1 \geqslant 1}} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{\substack{|k|=r+1 \\ k_m \geqslant 1}} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= [\text{добавим все пропущенные слагаемые с } k_i = 0] \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_1}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} + \ldots + \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot k_m}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{r! \cdot (k_1 + k_2 \ldots + k_m)}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m} \\
&= \sum_{|k|=r+1} \frac{(r+1)!}{k_1! \ldots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \ldots a_m^{k_m}
\end{aligned}$$

∎

Лемма 1.4.4. (О дифференцировании сдвига)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, Ω — область, $f \in C^r(\Omega)$, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, $\forall t \in [-1, 1]$ $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in \Omega$, тогда для отображения $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ и для $k \leqslant r$ выполнено

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{|j|=k} \frac{k!}{j!} \mathbf{h}^j \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(\mathbf{a})$$

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно показать, что

$$\varphi^{(k)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^k \cdot f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

Докажем по индукции:

- Для $k = 0$ утверждение очевидно.
- Переход:

$$\begin{aligned}\varphi^{(k)}(t) = (\varphi^{(k-1)}(t))' &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\right)' \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^{k-1} f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{h}_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}\mathbf{h}_m\right)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})\end{aligned}$$

■

Теорема 1.4.5. (Формула Тейлора в форме Лагранжа)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0,1):\ f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leqslant r} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + \sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k$$

Доказательство. Пусть $\varphi(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$ для $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{h}$, $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$. Выпишем формулу Тейлора в форме Лагранжа для φ:

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}$$

Пользуясь леммой о дифференцировании сдвига, получаем искомое равенство. ■

Теорема 1.4.6. (Формула Тейлора в форме Пеано)
$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f \in C^{r+1}(\Omega)$, Ω — область, $\mathbf{a} \in \Omega$, $\mathbf{x} \in B(\mathbf{x}, r) \subseteq \Omega$, тогда

$$\exists \theta \in (0,1):\ f(\mathbf{x}) = \sum_{|k| \leqslant r} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k = o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r)$$

Проверим это:

$$\sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^k}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r} = \sum_{|k| = r+1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a} + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{a}))\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1)^{k_1} \ldots (\mathbf{x}_m - \mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^r}$$

$$= \sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_1}} \dots \frac{(\mathbf{x}_m-\mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|$$

Все дроби вида

$$\frac{(\mathbf{x}_i-\mathbf{a}_i)^{k_i}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_i}}$$

меньше единицы, выражения вида

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{a}))$$

постоянны. Поэтому

$$\sum_{|k|=r+1} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(\mathbf{a}+\theta(\mathbf{x}-\mathbf{a})) \frac{(\mathbf{x}_1-\mathbf{a}_1)^{k_1}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_1}} \dots \frac{(\mathbf{x}_m-\mathbf{a}_m)^{k_m}}{\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^{k_m}} \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \to 0$$

При $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| \to 0$. ■

1.5 Диффеоморфизмы

Определение. *Областью* называют открытое связное множество.

Определение. Топологические пространства X, Y *гомеоморфны*, если существует обратимое и в обе стороны непрерывное $f : X \to Y$. f называют *гомеоморфизмом*.

Определение. *Диффеоморфизмом* гладких многообразий M, N называется обратимое и в обе стороны гладкое отображение $f : M \to N$.

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$. Тогда отображение $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ называется *диффеоморфизмом*, если оно обратимо и в обе стороны дифференцируемо.

Лемма 1.5.1. (О почти локальной инъективности)
Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, f дифференцируемо в $\mathbf{x}_0$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists c, \delta > 0$ такие, что $\forall \mathbf{h}\colon\ \|\mathbf{h}\| < \delta\ \ \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$

Доказательство.

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \left\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\right\| \geqslant \left\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\right\| - \|\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\| \geqslant \frac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|$$

Последнее неравенство выполнено по следующим причинам:

- $\|f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$, так как $f'(\mathbf{x}_0)$ обратим
- $\|\alpha(\mathbf{h})\,\|\mathbf{h}\|\| \leqslant \dfrac{c}{2}\,\|\mathbf{h}\|$ при достаточно малых $\mathbf{h}$, так как $\alpha(\mathbf{h})$ — бесконечно малое.

■

Теорема 1.5.2. (О сохранении области)
Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \ \det f'(\mathbf{x}) \neq 0$, тогда f открыто.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathcal{O}$ открыто. Тогда нужно показать, что $f(\mathcal{O})$ открыто. Зафиксируем $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$ и $\mathbf{y}_0 = f(\mathbf{x}_0) \in f(\mathcal{O})$. По лемме о почти локальной инъективности имеем $c, \delta > 0$ такие, что

$$\forall \mathbf{h} \in \overline{B(0,\delta)}\ \ \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{h}\|$$

Положим

$$r = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\mathbf{y}_0, f(S(\mathbf{x}_0, \delta)))$$

Поскольку f непрерывно, а сфера — компакт, имеем, что $f(S(\mathbf{x}_0, \delta))$ — компакт. В свою очередь, ρ является метрикой, то есть непрерывно. Тогда ρ достигает минимума, то есть r реализуется, а значит, не равно нулю (см. оценку выше). Раз $r > 0$, то $B(\mathbf{y}_0, r)$ — полноправный шар, проверим, что он входит в образ f целиком, что и закончит доказательство. Пусть $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$. Положим $g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\|$ на $\overline{B(\mathbf{x}_0, \delta)}$; g непрерывно, поэтому достигает минимума. Попробуем этот минимум найти:

- Рассмотрим поведение $g(\mathbf{x})$ на $S(\mathbf{x}_0, \delta)$:

$$g(\mathbf{x}) = \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}\| \geqslant \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0\| - \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| \geqslant 2r - r = r$$

- $g(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}\| < r$, так как $\mathbf{y} \in B(\mathbf{y}_0, r)$

Тогда понятно, что минимум достигается не на границе. Раз так, он достигается во внутренности. Отображение $l\colon \mathbf{x} \mapsto g^2(\mathbf{x})$ достигает минимума в той же точке, что и g, при этом $l'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})(f(\mathbf{x}) - \mathbf{y})$. Из невырожденности производного оператора следует, что $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, что и требовалось. ■

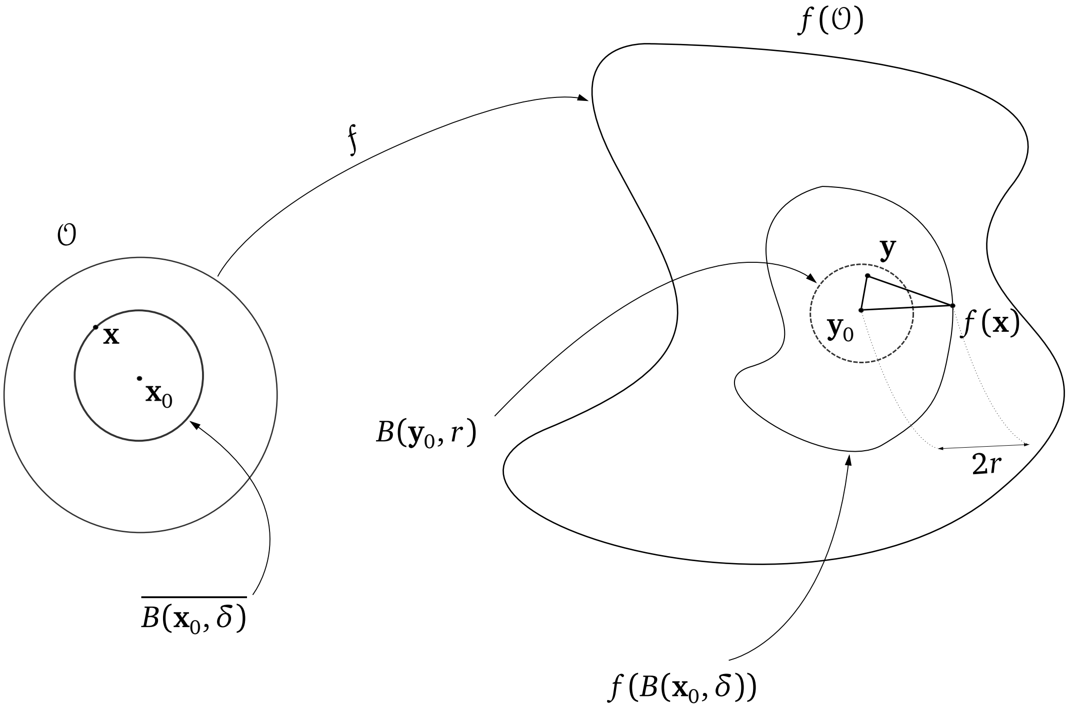

Рис. 1.1: Теорема о сохранении области

Следствие 1.5.3. Пусть $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{l \leqslant m}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}$ $\operatorname{rank} f'(\mathbf{x}) = l$, тогда f открыто.

Доказательство. Построим оторбражение $\tilde{f} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\tilde{f}_i = f_i,\ 1 \leqslant i \leqslant l$$
$$\tilde{f}_i = x_i,\ \text{иначе}$$

Производный оператор тогда будет выглядеть так:

$$\tilde{f}' = \begin{pmatrix} & & f' & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Где первая сверху единица стоит на $l+1$-м месте. Тогда отображение $\tilde{f}$ тоже дифференцируемо, и его производный оператор невырожден. Применяя предыдущую теорему, получаем, что $\tilde{f}(A)$ открыто, если множество A открыто. Тогда $f(A)$ тоже открыто. ■

Теорема 1.5.4. (О гладкости обратного отображения)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, $T \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \det T'(\mathbf{x}) \neq 0$,
T обратимо, тогда $T^{-1} \in C^r$ и $(T^{-1})'(\mathbf{y}_0) = (T'(\mathbf{x}_0))^{-1}$, при $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$.

Доказательство. Докажем теорему по индукции. В качестве базы рассмотрим случай $r = 1$. Обозначим $S = T^{-1}$, $S\colon T(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно, так как по теореме о сохранении области T открыто. Зафиксируем $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$ и проверим дифференцируемость S в точке $\mathbf{y}_0$.

- По теореме о почти локальной инъективности имеем

$$\exists c, \delta > 0\colon\ \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta)\ \|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \geqslant c\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

- Воспользуемся дифференцируемостью T:

$$T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0) = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

  Здесь $A = T'(\mathbf{x}_0)$. Положим $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_0 = A(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)) + \alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$

  Перепишем это равенство в виде, похожем на определение дифференцируемости S:

$$S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0) = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$$

  Если мы поймем, что $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = A^{-1}\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\,\|S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0)\|$ — бесконечно малое при $\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0$, то мы получим определение дифференцируемости S в точке $\mathbf{y}_0$. Проверим это:

$$\begin{aligned}
\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) &\leqslant \left\|A^{-1}\right\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\
&\leqslant \left\|A^{-1}\right\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c}\,\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\| \\
&= \left\|A^{-1}\right\| \|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \cdot \frac{1}{c}\,\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_0\|
\end{aligned}$$

  S непрерывно, поэтому $\|\alpha(S(\mathbf{y}) - S(\mathbf{y}_0))\| \xrightarrow[\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0]{} 0$, тогда $\beta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \xrightarrow[\mathbf{y} \to \mathbf{y}_0]{} 0$.

Теперь нужно доказать непрерывность S'. Из доказанного уже известно, что $S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1}$:

$$\mathbf{y} \mapsto S(\mathbf{y}) = T^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \mapsto T'(\mathbf{x}) \mapsto (T'(\mathbf{x}))^{-1} = S'(\mathbf{y})$$

Эту схему можно переписать в привычном виде:

$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$

Таким образом получаем, что S' — композиция непрерывных отображений, то есть непрерывно (в частности, отображение $GL(\mathbb{R}^m) \ni A \mapsto A^{-1}$ непрерывно). Таким образом, база доказана.

Для доказательства индукционного перехода нужно показать только гладкость S. Пусть $T \in C^n$, $S \in C^n$, покажем, что тогда если вдруг $T \in C^{n+1}$, то и $S \in C^{n+1}$. Для этого достаточно, чтобы $S' \in C^n$:

$$S'(\mathbf{y}) = (T'(\mathbf{x}))^{-1} = (T'(S(\mathbf{y})))^{-1}$$

$S \in C^n$ по предположению индукции, $T' \in C^n$ потому, что $T \in C^{n+1}$, обращение матрицы — вообще класса C^∞, то есть переход доказан. ■

Лемма 1.5.5. (О приближении оботражения его линеаризацией)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, тогда $\forall \mathbf{h}$

$$\left\| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| \leqslant M \|\mathbf{h}\|$$

где

$$M = \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\|$$

Доказательство. Положим $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x})$, тогда $F'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0)$. Применим теорему Лагранжа к F:

$$\begin{aligned} \left\| f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| = \|F(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - F(\mathbf{x}_0)\| &\leqslant \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| F'(\mathbf{z}) \right\| \cdot \|\mathbf{h}\| \\ &= \sup_{\mathbf{z} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{h}]} \left\| f'(\mathbf{z}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\| \cdot \|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

■

Теорема 1.5.6. (О локальной обратимости)
Пусть $f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{O}$, $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$, тогда $\exists U(\mathbf{x}_0)$ такая, что $f\big|_U$ — диффеоморфизм.

Доказательство. Если мы докажем, что f обратимо в некоторой окрестности $U(\mathbf{x}_0)$, то по теореме о гладкости обратного отображения мы получим требуемое (невырожденность определителя в окрестности $\mathbf{x}_0$ следует из его непрерывности и того, что $\det f'(\mathbf{x}_0) \neq 0$). Для начала заметим. что из невырожденности оператора в точке $\mathbf{x}_0$ следует, что

$$\exists c > 0: \ \left\| f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \right\| \geqslant c \|\mathbf{h}\|$$

Попробуем построить окрестность. Пусть она будет содержать точки такие, что одновременно выполнены условия:

- $\left\| f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0) \right\| \leqslant \dfrac{c}{4}$. Эти точки есть вблизи $\mathbf{x}_0$ по теореме о непрерывно дифференцируемых отображениях.
- $\det f'(\mathbf{x}) \neq 0$. Такие точки есть из непрерывности det.

Проверим, что в этой окрестности f не склеивает точки, что и будет означать его обратимость; пусть $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{h}$, тогда:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{y} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x})\mathbf{h}) + (f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_0))\mathbf{h} + f'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}$$

$$\|f(\mathbf{y})-f(\mathbf{x})\| \geqslant \underbrace{\left\|f'(\mathbf{x}_0)\right\| \|\mathbf{h}\|}_{\geqslant c\|\mathbf{h}\|} - \underbrace{\left\|f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x})\mathbf{h}\right\|}_{\leqslant M\|\mathbf{h}\| \leqslant \frac{c}{2}\|h\|} - \underbrace{\left\|f'(\mathbf{x})-f'(\mathbf{x}_0)\right\| \cdot \|\mathbf{h}\|}_{\leqslant \frac{c}{4}\|\mathbf{h}\|}$$
$$\geqslant \frac{c}{4}\|\mathbf{h}\|$$

Где $M\|\mathbf{h}\| \leqslant \frac{c}{2}\|\mathbf{h}\|$ потому, что:

$$M\|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\| \sup \left\|f'(\mathbf{z})-f'(\mathbf{x})\right\| \leqslant \sup\Big(\underbrace{\left\|f'(\mathbf{z})-f'(\mathbf{x}_0)\right\|}_{\leqslant \frac{c}{4}} + \underbrace{\|f(\mathbf{x}_0)-f(\mathbf{x})\|}_{\leqslant \frac{c}{4}}\Big) \leqslant \frac{c}{2}$$

■

Теорема 1.5.7. (О неявном отображении)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто, $f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$, $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \underset{f}{\mapsto} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $f \in C^r$,
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathcal{O}$: $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $\det f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \neq 0$, тогда

- $\exists U(\mathbf{a})$, $\exists U(\mathbf{b})$, $\exists! \varphi : U(\mathbf{a}) \to U(\mathbf{b}) \in C^r$ такое, что $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{a})$ $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$
- $\varphi'(\mathbf{x}) = -(f'_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})))^{-1} \cdot f'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$

Доказательство.

- Подготовим несколько объектов, полезных для доказательства. Положим
$$T : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^{m+n}$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$
Производный оператор этого отображения в блочном виде выглядит следующим образом:
$$T' = \begin{pmatrix} E & \mathbf{0} \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix}$$
Он обратим, так как $\det T' = 1 \cdot \det f'_y \neq 0$. Тогда по теореме о локальной обратимости $\exists U(\mathbf{a}, \mathbf{b})$: $T\big|_U$ — диффеоморфизм. Без ограничения общности будем считать, что $U = \tilde{P} \times Q$, где $\tilde{P} \subset \mathbb{R}^m$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ открыты и $\mathbf{a} \in \tilde{P}$, $\mathbf{b} \in Q$. Будем обозначать $S = T^{-1}$ и $V = T(U)$ — открыто в $\mathbb{R}^{m+n}$ так как T — диффеоморфизм. Заметим, что T не меняет первую координату, то есть S тоже её не меняет, а значит, имеет вид $S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$, где $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in C^r$, так как $S \in C^r$.
- Пусть $P = (\mathbb{R}^m \times \mathbf{0}_n) \cap V$ — открытое в $\mathbb{R}^m$ множество (само множество из $\mathbb{R}^{m+n}$, но нулевые координаты отбросим, см. рисунок). Предъявим требуемое отображение:
$$\varphi(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$
- Проверим, что φ подходит: $f \in C^r$, так как $H \in C^r$. Проверим $f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = 0$ и единственность:
$$(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))) = T(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = T(\mathbf{x}, H(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = T(S(\mathbf{x}, \mathbf{0})) = (\mathbf{x}, \mathbf{0})$$
С другой стороны, если $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, то:
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = S(T(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = S(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$
То есть $\mathbf{y} = H(\mathbf{x}, \mathbf{0})$, из чего следует, что φ единственно.

- Проверим второй пункт теоремы, вычислив производный оператор φ:

$$f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E \\ \varphi' \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

  Откуда получаем:

$$f'_x + f'_y \cdot \varphi' = \mathbf{0} \Longrightarrow \varphi' = -(f'_y)^{-1} f'_x$$

■

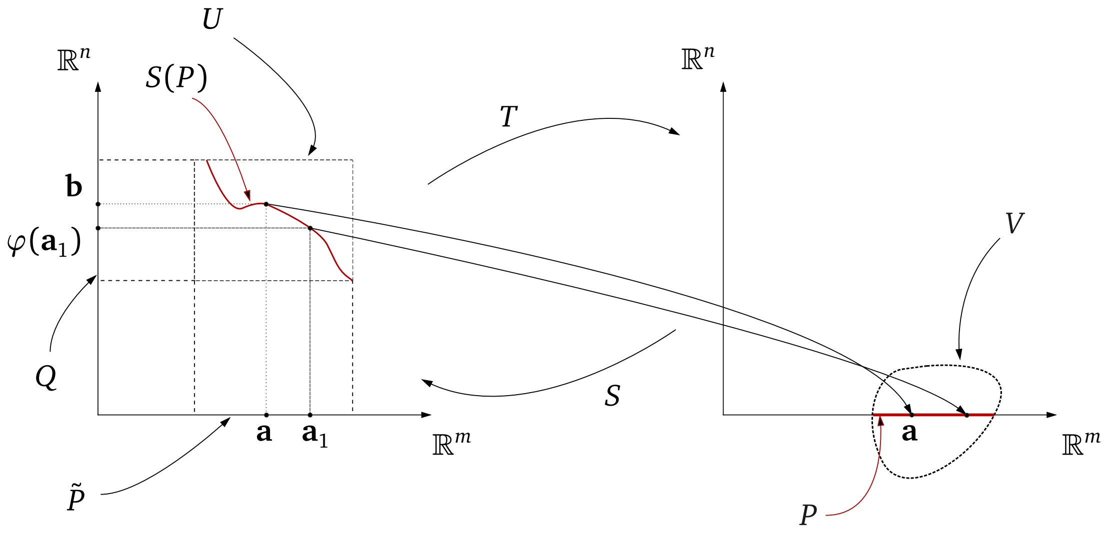

Рис. 1.2: Теорема о неявном отображении

Определение. $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *k-мерным многообразием* в $\mathbb{R}^m$, если оно локально гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, $\forall \mathbf{x} \in M\ \exists U(\mathbf{x})\ \exists \varphi$ — гомеоморфизм: $U(\mathbf{x}) \underset{\varphi}{\simeq} \mathbb{R}^k$.

Определение. k-мерное многообразие $M \subseteq \mathbb{R}^m$ называют *простым*, если оно гомеоморфно $\mathbb{R}^k$. Иными словами, в предыдущем определении можно выбрать $U(\mathbf{x}) = M$.

Определение. Пара $\langle U(\mathbf{x}), \varphi \rangle$ из определения называется *картой*, или *параметризацией* многообразия в точке $\mathbf{x}$. Набор карт, который покрывает все M, называется *атласом*.

Определение. Простое k-мерное многообразие M называют *C^r-гладким*, если $\varphi \in C^r$ — параметризация M и $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \operatorname{rank} \varphi'(\mathbf{x}) = k$.

Теорема 1.5.8. (О задании гладкого многообразия системой уравнений)
Пусть $M \subseteq \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant k < m$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, тогда $\forall \mathbf{p} \in M$ эквивалентны утверждения:

- $\exists U(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap U$ — простое k-мерное C^r-гладкое многообразие.

- $\exists \tilde{U}(\mathbf{p}) \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытое такое, что $M \cap \tilde{U}$ можно задать системой C^r-гладких уравнений, иначе говоря: $\exists f_1, \dots, f_{m-k} \colon \tilde{U} \to \mathbb{R} \in C^r$ такие, что $\mathbf{x} \in M \cap \tilde{U} \iff \forall i\ f_i(\mathbf{x}) = 0$, причем $\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независим.

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Пусть имеется параметризация $\varphi \colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m \in C^r$, которая задает $M \cap U(\mathbf{p})$. Зафиксируем точку $t_0 = \varphi(\mathbf{p})$. Параметризация C^r гладкая, поэтому $\operatorname{rank} \varphi' = k$. Будем считать, что ранг реализуется на первых k строках. Рассмотрим проекцию $L \colon \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$. Из того, что первые k столбцов φ' линейно независимы, имеем невырожденность производного оператора отображения $L \circ \varphi$. Тогда по теореме о локальной обратимости $\exists W(t_0) \colon (L \circ \varphi)\big|_W$ — диффеоморфизм. Обозначим $V = (L \circ \varphi)(W)$. Тогда (см. рисунок) удобно интерпретировать $\varphi(W)$ как график отображения, заданного на V; $H \colon V \to \mathbb{R}^{m-k}$. Положим $\psi = (L \circ \varphi)^{-1}$, $\psi \in C^r$ по теореме о гладкости обратного отображения. Тогда вернемся к интерпретации графиком и посмотрим на точку $\mathbf{x} \in V$:

$$(\mathbf{x}, H(\mathbf{x})) = \varphi(\psi(\mathbf{x}))$$

Тогда $H \in C^r$ как композиция C^r-гладких отображений. φ гомеоморфизм, поэтому $\varphi(W)$ открыто в M. Тогда $\exists \tilde{U}$ открытое в $\mathbb{R}^m$ такое, что $\varphi(W) = M \cap \tilde{U}$. Рассмотрим теперь набор функций:

$$\begin{aligned} &f_i \colon \tilde{U} \to \mathbb{R} \\ &\mathbf{x} \mapsto H_i(L(\mathbf{x})) - x_{k+i} \end{aligned}$$

для $i = 1 \dots m-k$. Тогда

$\forall i = 1 \dots m{-}k\ \ f_i(\mathbf{x}) = 0 \iff f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})){-}\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff H(L(\mathbf{x})) = \mathbf{x} \iff \mathbf{x} \in M{\cap}\tilde{U}$

Осталось показать, что $\{\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p})\}$ линейно независим. Для этого просто выпишем этот набор:

$$\operatorname{grad} f_i(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_1} & \cdots & \dfrac{\partial H_i}{\partial \mathbf{x}_k} & 0 & \cdots & -1_{k+i} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, он линейно независим.

$\Longleftarrow$ Пусть теперь имеется система уравнений f_i. Составим из f_i отображение $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m-k}$. Поскольку набор градиентов линейно независим (будем считать, что ранг реализуется на последних $m-k$ столбцах), можно применить теорему о неявном отображении: $\exists P(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k), Q(\mathbf{p}_{k+1}, \dots, \mathbf{p}_m)$ и $\exists H \colon P \to Q$ такое, что

$$\forall (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \in P\ \ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, H(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)) \text{ — решение уравнения } f = \mathbf{0}$$

Построим теперь искомую параметризацию:

$$\begin{aligned} &\varphi \colon P \to \mathbb{R}^m \\ &\mathbf{u} \mapsto (\mathbf{u}, H(\mathbf{u})) \end{aligned}$$

Понятно, что φ подходит в качестве параметризации $M \cap (P \times Q)$. ■

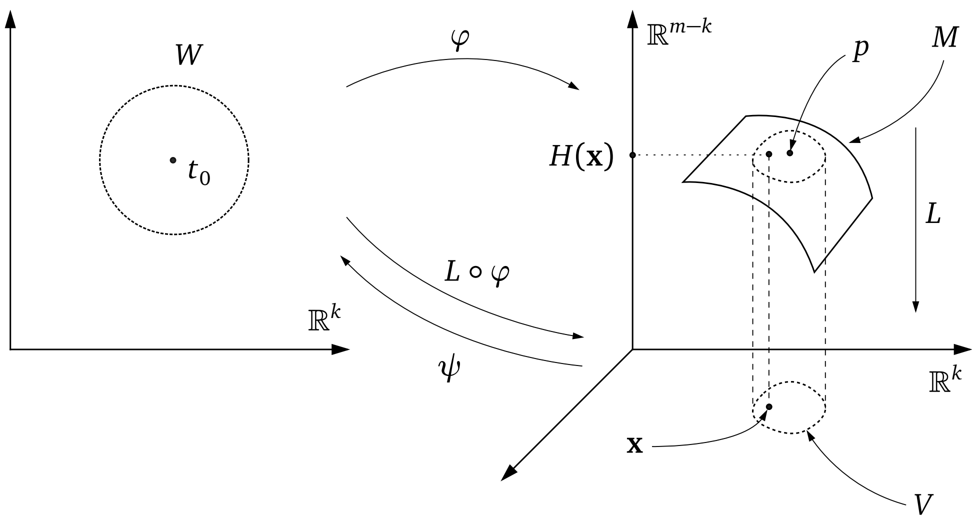

Рис. 1.3: Теорема о задании гладкого многообразия системой уравнений

Следствие 1.5.9. (О двух параметризациях)
Пусть M — k-мерное простое C^r-гладкое многообразие, $\mathbf{p} \in M$, причем $C^r \ni \varphi_1 : \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$, $C^r \ni \varphi_2 : \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^k \to U \cap M$ — параметризации $U(\mathbf{p}) \cap M$. Тогда φ_1 и φ_2 отличаются на диффеоморфизм, а именно, $\exists \psi : \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ — диффеоморфизм, причем $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$.

Доказательство. Будем считать, что невырожденность производных операторов параметризаций реализуется на первых k строках. Пусть L — проекция из доказательства предыдущей теоремы. Тогда, как и в предыдущей теореме, отображения $L \circ \varphi_1$, $L \circ \varphi_2$, и им обратные существуют и гладкие. Тогда заметим, что L обратимо (по крайней мере там, где обратимо $L \circ \varphi_1$). Положим тогда $\psi = (L \circ \varphi_2)^{-1} \circ (L \circ \varphi_1)$. В таком случае нетрудно видеть, что

$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ (L \circ \varphi_2)^{-1} \circ (L \circ \varphi_1) = \varphi_2 \circ (\varphi_2^{-1} \circ L^{-1}) \circ (L \circ \varphi_1) = \varphi_1$$

ψ обратим, потому что $\psi^{-1} = (L \circ \varphi_1)^{-1} \circ (L \circ \varphi_2)$. Гладкость ψ и ψ^{-1} следует из гладкости составных частей ψ. ■

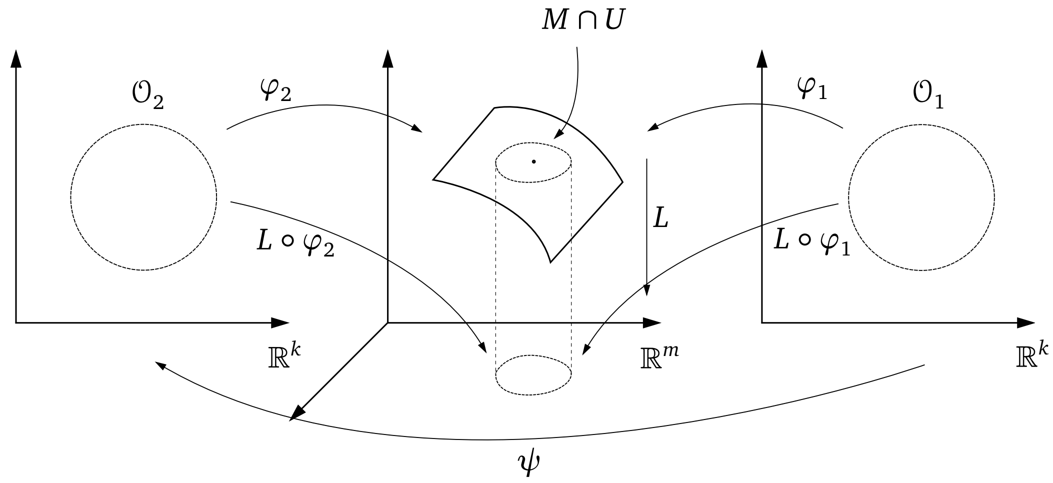

Рис. 1.4: Теорема о двух параметризациях

Определение. Пусть M — C^r-гладкое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{p} \in M$, $\varphi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — параметризация окрестности $U(\mathbf{p})$, причем $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{p}$. Тогда *касательным пространством* к M в точке $\mathbf{p}$ называется $T_{\mathbf{p}}(M) = \operatorname{Im} \varphi'(\mathbf{a})$.

Теорема 1.5.10. (О корректности определения касательного пространства)
Касательное пространство не зависит от выбора параметризации.

Доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — две параметризации $U(\mathbf{p})$. В таком случае по теореме о двух параметризациях $\exists C^r \ni \psi\colon \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ такое, что $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \psi$. В таком случае, поскольку ψ — диффеоморфизм, то есть имеет невырожденный производный оператор в $\mathbf{a}$, имеем $\operatorname{Im} \psi'(\mathbf{a}) = \mathbb{R}^k$. Тогда:

$$\operatorname{Im} \varphi_1'(\mathbf{a}) = \operatorname{Im} \varphi_2'(\mathbf{a}) \circ \psi'(\mathbf{a}) = \varphi_2'(\mathbf{a})(\mathbb{R}^k) = \operatorname{Im} \varphi_2'(\mathbf{a})$$

■

Теорема 1.5.11. (О касательном пространстве к гладкому пути)
Пусть M — гладкое многообразие. Тогда $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(M) \iff \exists$ гладкий путь $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^m\colon\ \gamma([-1,1]) \subseteq M$ такой, что $\gamma(0) = \mathbf{p}$ и $\gamma'(0) = \mathbf{v}$.

Доказательство.

- Подготовим среду для доказательства. Зафиксируем $C^r \ni \varphi\colon \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^k \to M$ — параметризация M в какой-нибуль окрестности (не умаляя общности, во всем M). Вспомним в очередной раз отображение $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ — проекцию первых k координат. Копируя рассуждения предыдущих теорем, приходим к выводу, что $L \circ \varphi$ и $\psi = (L \circ \varphi)^{-1}$ лежат в классе C^r.

$\Longrightarrow$ Пусть имеется вектор $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}(M)$, построим путь, проходящий через точку $\mathbf{p}$ со скоростью $\mathbf{v}$. Пусть $\mathbf{p} = \varphi(t_0)$, положим $u = (\varphi'(t_0))^{-1}(\mathbf{v})$. По смыслу это та скорость, с которой нужно двигаться в $\mathcal{O}$, чтобы получить скорость $\mathbf{v}$ в $\varphi(\mathcal{O})$ (то есть "*прообраз скорости*"). Построим сам путь:

$$\gamma(s) = \varphi(t_0 + su)$$

Проверим его свойства:

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= \varphi(t_0) = \mathbf{p} \\ \gamma'(s)\big|_{s=0} &= (\varphi'(t_0+su)\cdot u)\big|_{s=0} \\ &= \varphi'(t_0)\cdot u = (\varphi'(t_0)\cdot(\varphi'(t_0)^{-1})(\mathbf{v})) = \mathbf{v}\end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ Пусть теперь имеется гладкий путь $\gamma\colon [-1,1] \to M$ такой, что $\gamma(0) = \mathbf{p}$ и $\gamma'(0) = \mathbf{v}$. Поймем, почему вектор $\mathbf{v}$ лежит в $T_{\mathbf{p}}(M)$. Для этого воспользуемся подготовленным арсеналом и пустим путь "*по кругу*":

$$\gamma(s) = \varphi(\psi(L(\gamma(s))))$$

Проще всего понять это соотношение, внимательно посмотрев на картинку. Корректность же следует из свойств используемых отображений, в частности потому, что L обратимо (на том же множестве, где обратимо $L\circ\varphi$). Теперь:

$$\gamma'(0) = \varphi'(\psi(L(\gamma(0)))\cdot(\ldots) = \varphi'(\psi(L(\mathbf{p})))\cdot(\ldots) = \varphi'(t_0)\cdot(\ldots) \in T_{\mathbf{p}}(M)$$

■

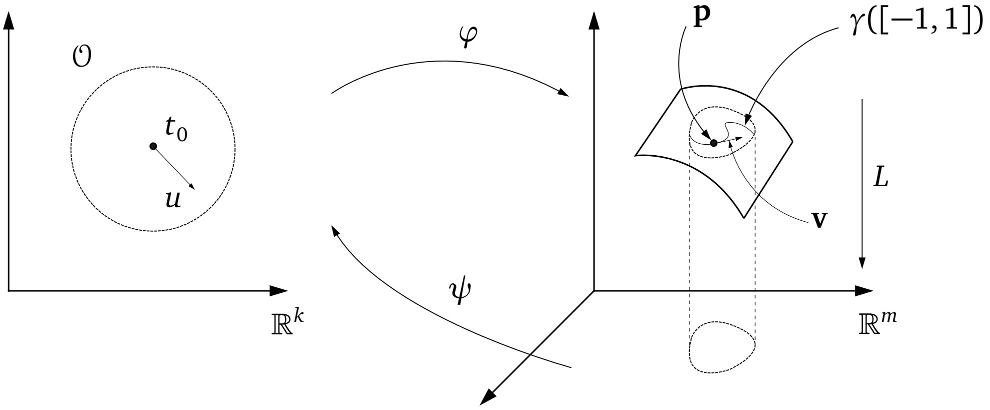

Рис. 1.5: Теорема о касательном пространстве к гладкому пути

Теорема 1.5.12. (О касательном пространстве к графику функции)
Афинное касательное пространство к графику $C^r \ni f : \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ задается уравнением

$$y - f(\mathbf{x}_0) = f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}_0^1) + \ldots + f'_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}_0^m)$$

Доказательство. Для доказательства построим параметризацию:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in C^r$$

Далее вычислим образ производного оператора $\varphi'(\mathbf{x}_0)$:

$$\varphi'(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ f'_{x_1}(\mathbf{x}_0) & f'_{x_2}(\mathbf{x}_0) & f'_{x_3}(\mathbf{x}_0) & \cdots & f'_{x_m}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы максимален и равен m. Рассмотрим образы стандартных базисных векторов:

$$\varphi'(\mathbf{x}_0)\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ f'_{x_k}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix}$$

Их m штук и они линейно независимы, поэтому составляют базис образа оператора. Тогда нетрудно понять, что касательное пространство задается уравнением

$$y = f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}^1 + \ldots + f'_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}^m$$

Тогда после сдвига на $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ получаем нужное афинное кп. ■

Теорема 1.5.13. (О касательном пространстве к поверхности уровня)
Афинное касательное пространство к поверхности уровня функции $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ задается уравнением

$$f'_x(x_0)(x - x_0) + f'_y(y_0)(y - y_0) + f'_z(z_0)(z - z_0) = 0$$

Доказательство. Поступим аналогично предыдущей теореме. Поверхность уровня задается уравнением:

$$f(x, y, z) = C$$

Предполагая, что $f'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, применим теорему о неявном отображении и получим $z = z(x, y)$ в некоторой окрестности (x_0, y_0). Тогда рассмотрим параметризацию:

$$\varphi(x, y) = (x, y, z(x, y))$$

Вычислим проиводный оператор:

$$\varphi'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z'_x(x_0, y_0) & z'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

На базисных векторах оператор принимает значения

$$\varphi'(x_0,y_0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\z'_x(x_0,y_0)\end{pmatrix}\quad\varphi'(x_0,y_0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\z'_y(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$

которые, очевидно, линейно независимы. Эти два вектора удовлетворяют уравнению

$$f'_x\cdot x+f'_y\cdot y+f'_z\cdot z=0$$

потому, что

$$\begin{aligned}f'_x\cdot 1+f'_y\cdot 0+f'_z\cdot z'_x&=f(x,y,z(x,y))'_x=C'_x=0\\ f'_x\cdot 0+f'_y\cdot 1+f'_z\cdot z'_y&=f(x,y,z(x,y))'_y=C'_y=0\end{aligned}$$

Значит, из соображений размерности, это уравнение и задает касательное пространство. Осталось только сместить его, чтобы получить афинное. ■

1.6 Относительный экстремум

Определение. Пусть $f : E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $\phi : E \to \mathbb{R}^n$, $M_\phi = \{\mathbf{x} \in E \mid \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$, $\mathbf{x}_0 \in E$, $\phi(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ называется точкой локального *относительного* экстремума, если x_0 — точка локального экстремума $f\big|_{M_\phi}$.

Теорема 1.6.1. (Необходимое условие относительного экстремума)
Пусть $C^1 \ni f : E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $C^1 \ni \phi : E \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in E$, $\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, $\operatorname{rank} \phi'(\mathbf{a}) = n$, $\mathbf{a}$ — точка локального экстремума, тогда $\exists \lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} f'(\mathbf{a}) - \lambda \cdot \phi'(\mathbf{a}) = 0 \\ \phi(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \end{cases}$$

Доказательство. Будем обозначать $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ Пусть ранг производного оператора $\phi'(\mathbf{a})$ реализуется на последних n столбцах. Тогда

$$\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}_{m+j}}(\mathbf{a})\right)_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \neq 0$$

Тогда можно применить теорему о неявном отображении:

$$\exists U(\mathbf{a}_x), U(\mathbf{a}_y)\ \exists C^r \ni \varphi : U(\mathbf{a}_x) \to U(\mathbf{a}_y) : \phi(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

Рассмотрим функцию $g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x}))$. Тогда $\mathbf{a}_x = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ является точкой обычного локального экстремума для функции g. Далее будут использованы не совсем обычные, но понятные обозначения для частных производных. Выпишем необходимое условие экстремума:

$$f'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a}_x, \varphi(\mathbf{a}_x)) + f'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}_x, \varphi(\mathbf{a}_x)) \cdot \varphi'(\mathbf{a}_x) = \underbrace{f'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a})}_{1\times m} + \underbrace{f'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a})}_{1\times n} \cdot \underbrace{\varphi'(\mathbf{a}_x)}_{n\times m} = 0$$

Кроме того, нам известно, что $\phi(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$, тогда:

$$\underbrace{\phi'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a})}_{n\times m} + \underbrace{\phi'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a})}_{n\times n} \cdot \underbrace{\varphi'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a}_x)}_{n\times m} = \mathbf{0} \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}^n \quad \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a}) + \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}) \cdot \varphi'_{\mathrm{x}}(\mathbf{a}_x) = 0$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$(f'_{\mathrm{x}} - \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{x}}) + (f'_{\mathrm{y}} - \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{y}})\varphi'_{\mathrm{x}} = 0$$

и положим

$$\lambda = f'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}) \cdot (\phi'_{\mathrm{y}}(\mathbf{a}))^{-1}$$

Убедимся в том, что λ подходит:

$$f'_{\mathrm{x}} - \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{x}} = f'_{\mathrm{x}} - f'_{\mathrm{y}} \cdot (\phi'_{\mathrm{y}})^{-1} \cdot \phi'_{\mathrm{x}} = f'_{\mathrm{x}} - f'_{\mathrm{y}} \cdot (\phi'_{\mathrm{y}})^{-1} \cdot (-\phi'_{\mathrm{y}} \cdot \varphi'_{\mathrm{x}}) = f'_{\mathrm{x}} + f'_{\mathrm{y}} \cdot \varphi'_{\mathrm{x}} = 0$$
$$f'_{\mathrm{y}} - \lambda \cdot \phi'_{\mathrm{y}} = f'_{\mathrm{y}} - f'_{\mathrm{y}} \cdot (\phi'_{\mathrm{y}})^{-1} \cdot \phi'_{\mathrm{y}} = 0$$

■

Определение. В терминах последней теоремы отображение

$$G = f - \lambda\phi$$

называется *функцией Лагранжа*.

Теорема 1.6.2. (Достаточное условие относительного экстремума)
Пусть $C^1 \ni f : E \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$, $C^1 \ni \phi : E \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \in E$, $\phi(\mathbf{a}) = 0$, $\operatorname{rank}\phi'(\mathbf{a}) = n$, выполнено необходимое условие относительного экстремума, то есть $\exists\lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} f'(\mathbf{a}) - \lambda \cdot \phi'(\mathbf{a}) = 0 \\ \phi(\mathbf{a}) = 0 \end{cases}$$

кроме того, пусть $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_x \in \mathbb{R}^m, \mathbf{h}_y \in \mathbb{R}^n)$. Тогда, так как $\operatorname{rank}\phi'(\mathbf{a}) = n$, то по $\mathbf{h}_x$ можно однозначно восстановить $\mathbf{h}_y$ такой, что $\phi'(\mathbf{a})\mathbf{h} = 0$. Тогда рассмотрим квадратичную форму

$$Q(\mathbf{h}_x) = \mathrm{d}^2_{\mathbf{a}} G(\mathbf{h}_x, \mathbf{h}_y)$$

Где $G = f - \lambda \cdot \phi$ — функция Лагранжа. В зависимости от определенности Q можно сделать вывод о наличии экстремума в точке $\mathbf{a}$:

- Q положительно определена $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}$ — точка относительного локального минимума.
- Q отрицательно определена $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}$ — точка относительного локального максимума.
- Q неопределена $\Longrightarrow$ $\mathbf{a}$ — не точка экстремума.
- В остальных случаях требуется более детальное исследование.

Лемма 1.6.3. Пусть A — матрица $m \times m$. Тогда

- $A^T A$ симметрична
- $\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = \langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$
- У $A^T A$ все собственные числа неотрицательны.

Доказательство.

- Помним, что $(A^T)^T = A$ и $(AB)^T = B^T A^T$

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

- $$\begin{aligned}\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle &= \sum_{i=1}^m (A\mathbf{x})_i^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\mathbf{x}_j\right)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\mathbf{x}_j\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^m a_{ik}\mathbf{x}_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m a_{ij} a_{ik}\mathbf{x}_k\right)\mathbf{x}_j = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m (A^T A\mathbf{x})_j \mathbf{x}_j \\ &= \langle A^T A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle\end{aligned}$$

•

$$\lambda\,\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \lambda\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \langle A^TA\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \langle A\mathbf{x},A\mathbf{x}\rangle = \|A\mathbf{x}\|^2 \geqslant 0$$

■

Теорема 1.6.4. (Вычисление нормы линейного опреатора)
Пусть $A \in Lin(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, S — множество собственных чисел A^TA. Тогда

$$\|A\| = \max_{\lambda\in S}\sqrt{\lambda}$$

Доказательство.

- Вычислим для начала максимум $f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ на сфере $\mathbf{x}_1^2+\ldots+\mathbf{x}_m^2 = 1$, где A — симметричная матрица.

  $$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = \sum a_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j \\ \mathbf{x}_1^2+\ldots+\mathbf{x}_m^2-1=0 \end{cases}$$

  Тогда функция Лагранжа имеет вид

  $$G = \sum a_{ij}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_j - \lambda\cdot\left(\sum_i \mathbf{x}_i^2 - 1\right)$$

  Продифференцируем её:

  $$G'_{\mathbf{x}_k} = 2\sum a_{kj}\mathbf{x}_j - 2\lambda\mathbf{x}_k$$

  Здесь мы воспользовались симметричностью матрицы. Решим систему уравнений $G' = \mathbf{0}$:

  $$\begin{cases} A\mathbf{x}-\lambda\mathbf{x}=0 \\ \mathbf{x}_1^2+\ldots+\mathbf{x}_m^2=1 \end{cases}$$

  Решениями этой системы могут быть пары из собственных векторов $\mathbf{x}$ и собственных чисел λ (причем все собственные числа попадут в пару). Вычислим f в собственных векторах матрицы A.

  $$f(\mathbf{x}) = \langle A\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \langle\lambda\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \lambda\,\|\mathbf{x}\| = \lambda$$

- Докажем утверждение теоремы.

  $$\|A\|^2 = \max_{\mathbf{x}\in S^{m-1}}\|A\mathbf{x}\|^2 = \max_{\mathbf{x}\in S^{m-1}}\langle A\mathbf{x},A\mathbf{x}\rangle = \max_{x\in S^{m-1}}\langle (A^TA)\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \max_{\lambda\in\sigma A^TA}\lambda$$

  По предыдущей лемме A^TA симмметрична, тогда:

  $$\max_{x\in S^{m-1}}\langle A^TA\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = \max_{\lambda\in\sigma A^TA}\lambda$$

  Но тогда, так как $\lambda\geqslant 0$, имеем:

  $$\|A\| = \max_{\lambda\in\sigma A^TA}\sqrt{\lambda}$$

■

Глава 2

Функциональные последовательности и ряды

2.1 Сходимость фукнциональных последовательностей

Замечание. *Здесь и далее запись вида $f \to \perp$ будет означать, что f сходится. Знак $\perp$ используется, если не важно (или не известно), к чему сходится f.*

Определение. $f_n : E \to \mathbb{R}$ *сходится поточечно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на E, если

$$\forall x_0 \in E \ \ f_n(x_0) \to f(x_0)$$

иными словами, раскрывая определение сходимости последовательности:

$$\forall x_0 \in E \ \left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \ \forall n > N \ \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon\right]$$

Обозначение: $f_n \to f$.

Примеры. TBD

Определение. $f_n : E \to \mathbb{R}$ *сходится равномерно* к $f : E \to \mathbb{R}$ на E, если

$$\sup_{\mathrm{x} \in E} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

или, раскрывая описание супремума

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \colon \ \forall n > N \ \left[\forall x \in E \ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\right]$$

Обозначение: $f_n \rightrightarrows f$.

Замечание. Из равномерной сходимости очевидным образом следует поточечная:

$$f_n \rightrightarrows f \Longrightarrow f_n \to f$$

Про сходимость мы значем очень многое для случая метрических пространств. А нельзя ли переформулировать новые определения так, чтобы они оказались обычной сходимостью, просто в хитром метрическом пространстве?

Предложение. (Метрическое пространство ограниченных функций)
Положим

$$\mathcal{F} \overset{def}{=} \{X \to \mathbb{R} \mid f \text{ограничено}\}$$

На этом множестве тривиально задается структура линейного пространства:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Оказывается, можно ввести **метрику** на $\mathcal{F}$, сходимость по которой есть равномерная сходимость. Для $f, g \in \mathcal{F}$ положим

$$\rho(f,g) \overset{def}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

Проверим, что это — метрика на $\mathcal{F}$

i) Неотрицательность очевидна. Равенство нулю может выполнится только для равных функций.

ii) Симметричность очевидна.

iii) Проверим неравенство треугольника. Применим техническое описание супремума для $\rho(f_1, f_2)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x\colon \; \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)|$$

Далее

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0 \; \exists x\colon \; \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_2(y)| - \varepsilon \leqslant |f_1(x) - f_2(x)| &\leqslant |f_1(x) - f_3(x)| + |f_3(x) - f_2(x)| \\ &\leqslant \sup_{y \in X} |f_1(y) - f_3(y)| + \sup_{y \in X} |f_2(y) - f_3(y)| \\ &= \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)\end{aligned}$$

Получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \rho(f_1, f_2) - \varepsilon \leqslant \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Откуда непосредственно следует

$$\rho(f_1, f_2) \leqslant \rho(f_1, f_3) + \rho(f_2, f_3)$$

Осталось только понять, что теперь означает сходимость по этой метрике. Пусть (f_n) — последовательность в $\mathcal{F}$, сходящаяся к f по метрике ρ:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \; \forall n > N \;\; \rho(f_n, f) < \varepsilon$$

Раскроем значение ρ:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \; \forall n > N \;\; [\forall x \in X \;\; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

А это — обычное определение равномерной сходимости!

Подобную конструкцию, по всей видимости, не получится ввести для поточечной сходимости. Зато, можно построить хаусдорфово топологическое пространство, в котором сходимость будет означать поточечную сходимость.

Предложение. (Топологическое пространство ограниченных функций)
Введем на $\mathcal{F}$ топологию, порожденную следующими множествами:

$$U_\varepsilon(f)_{x_1,\ldots,x_n} \stackrel{def}{=} \{ g : X \to \mathbb{R} \mid \forall i \ \ |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \}$$

Поймем теперь, что означает сходимость в этом топологическом пространстве:

$$f_n \to f \iff \forall U_\varepsilon(f)_{x_1,\ldots,x_n} \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \ f_n \in U_\varepsilon(f)_{x_1,\ldots,x_n}$$

Что означает

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \ \forall i \ \ |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$$

Что как раз и есть поточечная сходимость! Просто запись вида

$$[\forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0] \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

В этом пространстве обретает вид

$$[\forall U_\varepsilon(f)_{x_0}] \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \ |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Теорема 2.1.1. (Критерий Больцано-Коши равномерной сходимости)

$$f_n \rightrightarrows f \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > N \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

Доказательство.

$\Longrightarrow$ Обычное свойство всех последовательностей, сходящихся по метрике (если все f_n и f лежат в $\mathcal{F}$). Общее доказательство такое:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Longleftarrow$ Зафиксируем x. Тогда $f_n(x)$ — обычная фундаментальная вещественная последовательность. Тогда, так как $\mathbb{R}$ — полное, получаем

$$\forall x \ \exists \lim_{n \to +\infty} f_n(x) =: f(x)$$

Покажем, что $f_n \rightrightarrows f$. Посмотрим на фундаментальность f_n:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n, m > N \ \ [\forall x \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$$

и перейдем к пределу $m \to +\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \ \ [\forall x \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Что и есть определение равномерной сходимости.

∎

Примеры. TBD

Теорема 2.1.2. (Стокс-Зейдель)
Пусть $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, X — топологическое пространство, f_n непрерывны в $c \in E$, и $f_n \rightrightarrows f$ на X. Тогда f непрерывна в c.

Доказательство. Для любых n выполнено

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Воспользуемся равномерной сходимостью: выберем n таким, чтобы

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$
$$|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Теперь воспользуемся непрерывностью f_n: выберем такую окрестность $U(c)$, чтобы $\forall x, y \in U(c)$

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$$

Тогда

$$|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$$

что и означает непрерывность f в точке c. ∎

Определение. Будем говорить, что f_n сходится *локально равномерно* к f на X, если

$$\forall x \in X \ \exists U(x) \colon \ f_n \rightrightarrows f \text{ на } U(x)$$

Замечание. Для выполнения условия теоремы Стокса-Зейделя достаточно равномерной сходимости на некоторой окрестности c.

Замечание. Для того, чтобы f было непрерывным на X, достаточно, чтобы f_n локально равномерно на X сходилось к f.

Теорема 2.1.3. (О предельном переходе под знаком интеграла)
Пусть $f_n \in C([a, b])$, $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b f_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f$$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd}
f_n \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "\int"] & f \arrow[d, "\int"] \\
\int_a^b f_n \arrow[r, dashed, "n \to +\infty"] & \int_a^b f
\end{tikzcd}$$

Доказательство. f непрерывна на $[a, b]$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Тогда

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f_n - f| \leqslant \max_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot |b - a|$$

Из равномерной сходимости имеем:

$$\max_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

тогда

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)|\cdot|b-a| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

■

Теорема 2.1.4. (Правило Лейбница)
$f:[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\to\mathbb{R}$, $\exists f'_y$, f'_y, f непрерывны. Пусть

$$\phi(y)=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx$$

Тогда ϕ дифференцируемо на $[y_1,y_2]$ и

$$\phi'(y)=\int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

Доказательство.

$$\frac{\phi(y+\frac{1}{n})-\phi(y)}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}\int_{x_1}^{x_2}\left(f\left(x,y+\frac{1}{n}\right)-f(x,y)\right)dx \underset{\text{Лагранж}}{=} \int_{x_1}^{x_2} f'_y\left(x,y+\frac{\theta}{n}\right)dx$$

Обозначим

$$g_n(x,y)=f'_y\left(x,y+\frac{\theta}{n}\right)$$

f'_y непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывна на нём. Воспользуемся этим:

$$\forall\varepsilon\ \exists\delta\ \forall n\colon \frac{1}{n}<\delta\ \forall x\quad \left|f'_y\left(x,y+\frac{1}{n}\right)-f'_y(x,y)\right|<\varepsilon$$

Отсюда получаем по определению

$$g_n(x,y)\rightrightarrows f'_y(x,y) \text{ на } [x_1,x_2]$$

Воспользуемся теоремой о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_1}^{x_2} g_n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

Понятно, что вместо последовательности $\frac{1}{n}$ можно рассматривать любую последовательность h_n, сходящуюся к 0. То есть

$$\phi'(y)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\phi(y+h_n)-\phi(y)}{h_n}=\int_{x_1}^{x_2} f'_y(x,y)dx$$

■

Теорема 2.1.5. (О предельном переходе под знаком производной)
$f_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$, $f_n \to f$ поточечно на $\langle a,b\rangle$, $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $\langle a,b\rangle$. Тогда

- $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$
- $f' = \varphi$

иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd} f_n \arrow[r, "n\to+\infty"] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & f \arrow[d, dashed, "\mathrm{d}"] \\ f_n' \arrow[r, Rightarrow] & \varphi \end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть $x_0, x_1 \in \langle a,b\rangle$, тогда $f_n' \rightrightarrows \varphi$ на $[x_0,x_1]$. Тогда по теореме о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\int_{x_0}^{x_1} f_n' \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

Откуда

$$f(x_1)-f(x_0) \xleftarrow[n\to+\infty]{} f_n(x_1)-f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{x_0}^{x_1} \varphi$$

То есть

$$\int_{x_0}^{x_1} \varphi = f(x_1)-f(x_0)$$

Тогда f — первообразная φ. φ непрерывна по теореме Стокса-Зейделя. Получаем, что $f \in C^1(\langle a,b\rangle)$ и $f' = \varphi$. ■

2.2 Сходимость функциональных рядов

Определение. Пусть $u_n\colon E \to \mathbb{R}$, тогда *функциональным рядом* будем называть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *сходится поточечно* на E, если $S_N(x) \to S(x)$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ *сходится равномерно* на E, если $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$.

Замечание. Из равномерной сходимости следует поточечная.

Лемма 2.2.1. (Об остатке функционального ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows 0 \Longleftrightarrow R_N(x) \rightrightarrows 0$

Доказательство. $\sup\limits_{x\in E} |R_{N+1}(x)| = \sup\limits_{x\in E} |S(x) - S_N(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ ∎

Лемма 2.2.2. (Необходимое условие равномерной сходимости ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \Longrightarrow u_n(x) \rightrightarrows 0$

Доказательство.

$$\sup_{x\in E} |u_N(x)| = \sup_{x\in E} |R_N(x) - R_{N+1}(x)| \leqslant \sup_{x\in E} |R_N(x)| + \sup_{x\in E} |R_{N+1}(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

∎

Теорема 2.2.3. (Признак Вейерштрасса равномерной сходимости)
$u_n\colon E \to \mathbb{R}$, $\exists c_n\colon \forall n, x \quad |u_n(x)| \leqslant c_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n \to \perp$, тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$.

Доказательство.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp \Longleftrightarrow R_N(x) \rightrightarrows 0 \Longleftrightarrow \sup_{x\in E} |R_N(x)| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$
$$\Longleftrightarrow \sup_{x\in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} u_n(x) \right| \leqslant \sup_{x\in E} \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} c_n \right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

∎

Теорема 2.2.4. (Критерий Больцано-Коши сходимости функционального ряда)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon\ \exists N\colon\ \forall m, n > N \quad \sup\limits_{x\in E} |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$

Доказательство. Это обычный критерий Больцано-Коши для $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$ ■

Теорема 2.2.5. (Стокс-Зейдель)
$u_n\colon E \to \mathbb{R}$, u_n непрерывны в $x_0 \in E$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$, тогда $S(x)$ непрерывна в x_0.

Доказательство. $\forall N$ $S_N(x)$ непрерывна в x_0 как конечная сумма непрерывных функций. Тогда по теореме Стокса-Зейделя для функциональных последовательностей $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$, $S_N(x)$ непрерывны в $x_0 \implies S(x)$ непрерывна в x_0. ■

Теорема 2.2.6. (Интегрирование функциональных рядов)
$u_n \in C([a,b])$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a,b]$, тогда

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

иначе говоря:

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

Доказательство. $S \in C([a,b])$ по теореме Стокса-Зейделя, поэтому интеграл имеет смысл. Применим аналогичную теорему для функциональных последовательностей к $S_N(x) \rightrightarrows S(x)$:

$$\int_a^b S_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b S(x)\,dx$$

в левой части интеграл и сумму можно переставлять местами (так как сумма конечная). Поэтому

$$\sum_{n=1}^{N} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b S_N(x)\,dx \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_a^b S(x)\,dx$$

Слева стоят частичные суммы обычного числового ряда. Поэтому по определению сходимости чисового ряда имеем:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx$$

■

Теорема 2.2.7. (Дифференцирование функциональных рядов)
$u_n \in C^1(\langle a,b\rangle)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \to S(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a,b\rangle$,
тогда $S \in C^1(\langle a,b\rangle)$, причем $S'(x) = \varphi(x)$.

Доказательство. Введем функциональную последовательность: $S_N(x) \to S(x)$. Поскольку $S_N(x)$ — конечные суммы непрерывно дифференцируемых функций, $S_N(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$, причем $S'_N(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $\langle a, b\rangle$. Тогда по аналогичной теореме для функциональных последовательностей получаем требуемое. ■

Теорема 2.2.8. (О предельном переходе в функциональных рядах)
$u_n\colon E \to \mathbb{R}$, x_0 — предельная точка E, $\forall n\ \exists a_n = \lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \rightrightarrows \perp$ на E. Тогда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ сходится, причем $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Иначе говоря:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

Доказательство. Обозначим $S_N^a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Проверим критерий Больцано-Коши для $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| \leqslant |S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| + |S_{n+p}(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n^a|$$

Поскольку S_{n+p}^a и $S_{n+p}(x)$ просто конечные суммы, в них спокойно можно переставлять предел и сумму. Поэтому найдется такая окрестность точки x_0, что $|S_{n+p}^a - S_{n+p}(x)| < \varepsilon$. Аналогично поступим с третьим слагаемым. Из критерия Больцано-Коши получаем такое N, что для $\forall n, m > N$ $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$. Таким образом имеем:

$$|S_{n+p}^a - S_n^a| < 3\varepsilon$$

Мы доказали сходимость ряда a_n. Проверим второе утверждение теоремы. Положим

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u_n(x), & x \neq x_0 \\ a_n, & x = x_0 \end{cases}$$

Все u_n, очевидно, непрерывны в x_0. Если мы проверим, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E \cup \{x_0\}$, то по теореме Стокса-Зейделя $\tilde{S}$ будет непрерывной, что означает

$$\lim_{x\to x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

в левой части x_0 никогда не подставляется в $\tilde{S}$, поэтому

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \tilde{S}(x) = \tilde{S}(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Осталось проверить, что $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\tilde{u}_n(x) \rightrightarrows \tilde{S}(x)$ на $E \cup \{x_0\}$.

$$\sup_{x\in E\cup\{x_0\}}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}\tilde{u}_n(x)\right| \leqslant \sup_{x\in E}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}u_n(x)\right| + \sup_{x\in\{x_0\}}\left|\sum_{n=N}^{+\infty}a_n\right| \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

■

Теорема 2.2.9. (О предельном переходе в функциональных последовательностях) $f_n\colon E \subseteq X \to \mathbb{R}$, X — метрическое пространство, x_0 — предельная точка E, $f_n \rightrightarrows f$, $f_n(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A_n$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A \in \mathbb{R}$, причем $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} A$. Иначе говоря, коммутативна следующая схема:

$$\begin{tikzcd}
f_n(x) \arrow[r, rightrightarrows] \arrow[d, "x\to x_0"] & f(x) \arrow[d, dashed, "x\to x_0"] \\
f_n(x_0) \arrow[r, "n\to+\infty"] & f(x_0)
\end{tikzcd}$$

или

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x)$$

Доказательство. Введем обозначения: $u_1 = f_1, u_2 = f_2 - f_1, \ldots, a_k = A_k - A_{k-1}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = f_n$, то есть $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n \rightrightarrows S(x)$ на E, причем $u_k(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} a_k$. Пользуясь аналогичной теоремой для функциональных рядов, получаем, что

$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = A = \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

— сходится. Кроме того имеем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$$

■

Теорема 2.2.10. (Признак Дирихле)
Пусть $a_n, b_n\colon X \to \mathbb{R}$, причем

- $\exists C_a\colon \forall N \forall x \in X \ \left|\sum\limits_{i=1}^{N} a_n(x)\right| \leqslant C_a$
- $b_n \rightrightarrows 0$, $\forall x \in X$ b_n монотонна по n.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \perp$

Доказательство. Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\sum_{N\leqslant k\leqslant M} a_k b_k = A_N b_M - A_{N-1} b_N + \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k$$

тогда

$$\left|\sum_{k=N}^{M} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant |A_N b_M| + |A_{N-1} b_N| + \left|\sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1}) A_k\right|$$
$$\leqslant C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} |b_k - b_{k+1}|$$

Все слагаемые в сумме одного знака. Считая, что $b_k - b_{k+1} \geqslant 0$, имеем:

$$\left|\sum_{k=N}^{M} a_k(x) b_k(x)\right| \leqslant C_a \cdot |b_M| + C_a \cdot |b_N| + C_a \cdot \sum_{k=N}^{M-1} (b_k - b_{k+1})$$
$$\leqslant C_a \cdot (|b_M| + |b_N| + |b_M| + |b_N|) \xrightarrow[N,M\to+\infty]{} 0$$

■

Теорема 2.2.11. (Признак Абеля)
Пусть $a_n, b_n : X \to \mathbb{R}$, причем

- $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \rightrightarrows \perp$
- $\exists C_b : \forall N \forall x \in X \ |b_n(x)| \leqslant C_b, \forall x \in X \ \ b_n(x)$ монотонна по n.

Тогда $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_n(x) b_n(x) \rightrightarrows \perp$

Доказательство. Применим критерий Коши к ряду a_n:

$$\forall \varepsilon \exists N : \forall n > N \ \forall p \geqslant 1 \ \forall x \in X \ |A_{n,p}(x)| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_n(x)\right| < \varepsilon$$

Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k\right| \leqslant |b_{n+p}(x) A_{n,p}(x)| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (b_{k+1}(x) - b_k(x)) A_{n,k}(x)\right|$$
$$\leqslant C\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_{k+1}(x) - b_k(x)| \leqslant C\varepsilon + \varepsilon |b_{n+p}(x)| + \varepsilon |b_n(x)|$$
$$\leqslant C\varepsilon + 2C_b \varepsilon$$

Здесь мы воспользовались монотонностью и ограниченностью b_n. ■

2.3 Степенные ряды

Определение. *Степенным рядом* называется формальный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$, где z, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Теорема 2.3.1. (О круге сходимости степенного ряда)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд. Тогда верно одно из трёх:

- Ряд сходится только при $z = z_0$
- Ряд сходится при любых z
- $\exists\ 0 < R < +\infty$ такое, что ряд сходится при $|z-z_0| < R$, и расходится при $|z-z_0| > R$. Поведение на границе не известно.

Доказательство. Изучим ряд на абсолютную сходимость, полуьзуясь признаком Коши: рассмотрим величину $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = |z-z_0| \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$:

- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, тогда ряд сходится, очевидно, только при $z = z_0$.
- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, тогда ряд сходится для любых z.
- $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \in (0, +\infty)$, тогда

  a) при $|z-z_0| < \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд сходится.

  b) при $|z-z_0| > \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ряд расходится.

∎

Следствие 2.3.2. (Формула Адамара)
Радиус сходимости степенного ряда можно вычислить по формуле

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Следствие 2.3.3. (О множестве сходимости степенного ряда)
Множеством сходимости степенного ряда является $B(z_0, R) \cup \Gamma$, где $\Gamma \subseteq \operatorname{Cl} B(z_0, R)$, а R — радиус сходимости ряда.

Теорема 2.3.4. (О равномерной сходимости и непрерывности степенного ряда)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд, причем $0 < R \leqslant +\infty$. Тогда

- $\forall\ 0 < r < R$ ряд сходится равномерно на $\overline{B(z_0, r)}$.

- $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \in C(B(z_0, R))$.

Доказательство.

- Применим признак Вейерштрасса: $|a_n(z-z_0)^n| \leqslant |a_n| \cdot r^n$. Ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot r^n$ сходится абсолютно, потому что исходный ряд сходится при $z = z_0 + r$.

- Слагаемое непрерывно, есть равномерная сходимость на $\overline{B(z_0, r)} \Longrightarrow$ во всех точках $B(z_0, R)$ сумма непрерывна.

■

Лемма 2.3.5. $w, w_0 \in \mathbb{C}, |w|, |w_0| \leqslant r$. Тогда $|w^n - w_0^n| \leqslant nr^{n-1}|w - w_0|$

Доказательство.

$|w^n - w_0^n| = |w - w_0| \cdot |w^{n-1} + w^{n-2}w_0 + \ldots + w_0^{n-1}| \leqslant |w - w_0| \cdot ||w|^{n-1} + \ldots + |w_0|^{n-1}| \leqslant |w - w_0| nr^{n-1}$

■

Лемма 2.3.6. Степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$ имеют одинаковый радиус сходимости.

Доказательство. Пусть $S_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\widetilde{S}_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$, тогда $\widetilde{S}_N(x) = x S_N(x) \Longrightarrow \lim\limits_{N\to+\infty} \widetilde{S}_N(x) = x \lim\limits_{N\to+\infty} S_N(x)$ — существуют на одном и том же множестве. ■

Теорема 2.3.7. (О дифференцировании степенного ряда)
Пусть $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ — степенной ряд, причем $0 < R \leqslant +\infty$, и $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$.
Тогда

- φ имеет тот же радиус сходимости, что и f.

- f дифференцируемо на $B(z_0, R)$, причем $f'(z) = \varphi(z)$

Доказательство.

- Найдем радиус сходимости $\hat{R}$ ряда φ по формуле Адамара и пользуясь последней леммой:
$$\hat{R} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|n \cdot a_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

- Рассмотрим точку $a \in B(z_0, R)$ и покажем, что в этой точке существует производная ряда, причем она равна тому, что ожидается. Сузим круг до $B(z_0, r)$, где $r = \frac{R+|a-z_0|}{2}$. Положим $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$:

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)}$$

Пусть $w = z - z_0 : |w| < r$, $w_0 = a - z_0 : |w_0| < r$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{w^n - w_0^n}{w-w_0} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot nr^{n-1}$$

Последний рад сходится по первому пукнту теоремы. Тогда по признаку Вейерштрасса ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{(z-z_0)-(a-z_0)}$ сходится равномерно. Зная это, воспользуемся теоремой о предельном переходе в сумме:

$$\begin{aligned} f'(z) = \lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} &= \lim_{z\to a} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-z_0)^n+(a-z_0)^n}{z-a} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{z\to a} \frac{(z-z_0)^n-(a-z_0)^n}{z-a} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n n(z-z_0)^{n-1} \end{aligned}$$

■

Следствие 2.3.8. $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n \in C^\infty(B(z_0,R))$, причем все производные — почленные.

Следствие 2.3.9. (О почленном интегрировании степенного ряда)
Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ где $a_n, x, x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in B(x_0, R)$, тогда

- $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и f.
- Выполняется равенство

$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{x_0}^{x} a_n(x-x_0)^n dx$$

Определение. *Экпонентой* называется функция $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такая, что $z \underset{\exp}{\mapsto} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Теорема 2.3.10. (Свойства экспоненты)

- Радиус сходимости равен $+\infty$
- $\exp(0) = 1$
- $\overline{\exp}(z) = \exp(z)$
- $\exp'(z) = \exp(z)$
- $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\exp(z)-1}{z} = 1$
- $\exp(z+w) = \exp(z) + \exp(w)$

Доказательство. Докажем последние два утверждения. Остальные очевидны.

- $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{e^z-1}{z-z_0} = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{e^z-e^0}{z-z_0} = (e^z)'\Big|_0 = 1$
-

$$\begin{aligned}\exp(z+w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\cdot\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{w^n}{n!}\right) = \exp(z)\exp(w)\end{aligned}$$

■

Теорема 2.3.11. (Метод Абеля)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ — сходящийся ряд. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ при $|x| < 1$. Тогда $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n = \lim\limits_{x\to 1_-} f(x)$

Доказательство. Для начала отметим, что f задана корректно: при $0 < x < 1$ ряд сходится равномерно по признаку Абеля. Так как f — ряд, то область его сходимости симметрична, то есть для отрицательных x f тоже задана корректно. Раз f — равномерно сходящийся ряд, причем $c_n x^n$ непрерывны, то по теореме Стокса-Зейделя f непрерывна. Раз так, имеем

$$\lim_{x\to 1_-} = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

■

Теорема 2.3.12. (Формула Григори-Лейбница)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Доказательство. Положим $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$, тогда $f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{1}{1+x^2} = \arctan' x$. Тогда $f(x) = c + \arctan x$. Подставляя $x = 0$ убеждаемся, что $c = 0$. Получаем $\lim\limits_{x \to 1_-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1_-} \arctan x = \frac{\pi}{4}$. ■

Следствие 2.3.13. (О сходимости произведения рядов)
Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n = B$, $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$, тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$ сходится, причем $AB = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$.

Доказательство. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, $h(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $x \in [0,1]$. при $x < 1$ ряды сходятся абсолютно (вспомним теорему о круге сходимости: в ней мы доказывали абсолютную сходимость), поэтому по старой теореме о произведении рядов $f(x)g(x) = h(x)$. Осталось совершить предельный переход в этом равентсве, чтобы получить требуемое. ■

2.4 Ряды тейлора

Определение. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ разложима в степенной ряд в точке x_0, если $\exists U(x_0)\ \exists \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\colon\ \forall x \in U(x_0)\ \ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$

Теорема 2.4.1. (Единственность разложения в ряд)
f разложима в степенной ряд в $x_0 \Longrightarrow$ этот ряд единственный.

Доказательство. Для доказательства этого непосредственно вычислим a_i.

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots$$

Поэтому $f(x) \in C^\infty(U(x_0))$. Значит, можно дифференцировать. Подставим $x = x_0$: $a_0 = f(x_0)$. Этим мы однозначно определили a_0. Рассмотрим

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots$$

Подставим $x = x_0$: $a_1 = f'(x_0)$. Продолжая в том же духе, однозначно определим все a_i. ■

Определение. *Рядом Тейлора* $f \in C^\infty(U(x_0))$ в точке x_0 называется формальный ряд $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

Теорема 2.4.2. (Разложение бинома в ряд Тейлора)
Пусть $\sigma \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, тогда

$$(1+x)^\sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} x^n$$

Доказательство. Изучим ряд на абсолютную сходимость по признаку Даламбера:

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{x(\sigma-n)}{n+1}\right| = |x| < 1$$

Значит, при $|x| < 1$ ряд сходится абсолютно. Раз ряд степенной, то на круге сходимости он сходится и равномерно. Пусть $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\sigma}{n} x^n$. Заметим, что

$$S'(x)(1+x) = \sigma S(x)$$

Теперь положим $f(x) = \dfrac{S(x)}{(1+x)^\sigma}$. Достаточно показать, что $f(x) = 1$ при $|x| < 1$. Изучим производную f:

$$f'(x) = \frac{S'(x)(1+x)^\sigma + S(x)\sigma(1+x)^{\sigma-1}}{(1+x)^{2\sigma}} = \frac{S'(x)}{(1+x)^\sigma} + \frac{\sigma S(x)}{(1+x)^{\sigma-1}} = 0$$

Осталось проверить $f(x) = 1$ в каком-нибудь x:

$$f(0) = \frac{1}{1} = 1$$

■

Замечание. Пусть $|t| < 1$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)\cdot t^{n-m} = \frac{m!}{(1-t)^{m+1}}$$

Теорема 2.4.3. (Критерий разложимости в ряд Тейлора)
Пусть $f \in C^\infty([x_0-h, x_0+h])$. Тогда f разложима в ряд Тейлора в $U(x_0) \iff \exists \delta, C, A\colon\ \forall n\ \forall |x-x_0| < \delta\ \ |f^{(n)}(x)| < CA^n n!$

Доказательство.

($\Longleftarrow$) Оценим остаток в форме Лагранжа:

$$f(x) = T_n f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!}(x-x_0)^n$$
$$\left|\frac{f^{(n)}(\tilde{x})}{n!}(x-x_0)^n\right| \leqslant \frac{CA^n n!}{n!}|x-x_0|^n$$

Чтобы остаток стремился к нулю, нужно, чтобы $A|x-x_0| < 1$, откуда получаем $U(x_0)\colon\ |x-x_0| < \min(\delta, \frac{1}{A})$. Поскольку теперь остаток ряда стремится к нулю, то $\forall x \in U(x_0)\ T_n f(x) \to f(x)$, что и требовалось доказать.

($\Longrightarrow$) Пусть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ в $U(x_0)$. Ряд сходится, поэтому для (произвольного) $x = x_1 \neq x_0$ имеем

$$\exists C_1\colon\ \left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x_1-x_0)^n\right| \leqslant C_1 \Longrightarrow |f^{(n)}(x_0)| \leqslant C_1 n! \frac{1}{|x_1-x_0|^n}$$

Положим $B_n = \dfrac{1}{|x_1-x_0|^n}$. Проанализируем m-ю производную f:

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty}\left|\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m}\right| \leqslant \sum_{n=m}^{+\infty}\left|C_1\frac{B^n n!}{(n-m)!}(x-x_0)^{n-m}\right|$$
$$= B^m C_1 \sum_{n=m}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-m+1)\cdot|B(x-x_0)|^{n-m}$$
$$= C_1 B^m \frac{m!}{(1-|B(x-x_0)|)^{m+1}} \underset{x\colon\ B|x-x_0|<\frac{1}{2}}{\leqslant} \frac{C_1 m! B^m}{\frac{1}{2^{m+1}}} = C_1 m! B^m 2^{m+1} = (2C_1)m!(2B)^m$$

■

2.5 Суммирование по Чезаро

Теорема 2.5.1. (Коши о перманентности метода средних арифметических)
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S \Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \underset{c/a}{=} S$

Доказательство. Обозначим $\sigma_n = \dfrac{1}{n+1}(S_0 + \ldots + S_n)$. По определению

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \colon\ \forall N > N_1\ |S_N - S| < \varepsilon$$

Далее:

$$|\sigma_N - S| = \left|\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}(S_n - S)\right| \leqslant \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}|S_n - S| \underset{N>N_1}{=} \underbrace{\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N_1}|S_n - S|}_{=\frac{c}{N+1}\to 0}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{N+1}\sum_{n=N_1+1}^{N}|S_n - S|}_{<\varepsilon} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

■

Глава 3

Криволинейные интегралы

3.1 Интеграл по кусочно-гладкому пути

Определение. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто, тогда $V : E \to \mathbb{R}^m$ будем называть *векторным полем*. По умолчанию $V \in C(E)$.

Определение. (Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути)
Пусть V - векторное поле, $\gamma : [a, b] \to E$ — кусочно-гладкий путь, тогда *интегралом векторного поля по этому пути* называется

$$I(V,\gamma) \overset{def}{=} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

Замечание. Предыдущее определение можно переписать в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} I(V,\gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t))\ \gamma'(t) dt \\ &\underset{\gamma\to x}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(x(t))\ x_i'(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i dx_i \end{aligned}$$

Определение. Пусть $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ — пути, $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, тогда определим *произведение путей* $\gamma = \gamma_1\gamma_2 : [a, d] \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(t-b+c), t \in [b, b+d-c] \end{cases}$$

Определение. *Обратным путем* называется путь $\gamma^{-1} : t \mapsto \gamma(a+b-t)$.

Теорема 3.1.1. (О свойствах интеграла по кусочно-гладкому пути)

1. Линейность по полю: $I(\alpha U+\beta V,\gamma)=\alpha I(U,\gamma)+\beta I(V,\gamma)$ для любых полей U,V, любого к-г пути γ и любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
2. Аддитивность при дроблении пути: $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^m$, $a<c<b$, тогда $I(v,\gamma)=I(V,\gamma\big|_{[a,c]})+I(V,\gamma\big|_{[c,b]})$.
3. Замена параметра: пусть $\varphi\colon[p,q]\to[a,b]$ — сюрьекция, причем $\varphi(p)=a$, $\varphi(q)=b$, $\varphi\in C^1$, тогда $I(V,\gamma)=I(V,\gamma\circ\varphi)$.
4. Интеграл произведения путей: $I(V,\gamma_1\gamma_2)=I(V,\gamma_1)+I(V,\gamma_2)$.
5. $I(V,\gamma)=-I(V,\gamma^{-1})$.
6. $|I(V,\gamma)|\leqslant\max\limits_{x\in\gamma[a,b]}\|V(x)\|\cdot l(\gamma)$.

Доказательство.

3.
$$\begin{aligned}I(V,\gamma)=\int_a^b\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle\underset{t=\varphi(s)}{=}\int_p^q\langle V(\gamma(\varphi(s))),\gamma'(\varphi(s))\rangle\varphi'(s)\,ds\\=\int_p^q\langle V((\gamma\circ\varphi)(s)),(\gamma\circ\varphi)'(s)\rangle\,ds=I(V,\gamma\circ\varphi)\end{aligned}$$

Поскольку любые две параметризации гладкого многообразия отличаются на диффеоморфизм, интеграл зависит только от носителя пути.

5.
$$\begin{aligned}I(V,\gamma^{-1})&=\int_a^b\langle V(\gamma(a+b-t)),\gamma'(a+b-t)\rangle\cdot(-1)\,dt\\&\underset{\tau=a+b-t}{=}\int_a^b\langle V(\gamma(\tau)),\gamma'(\tau)\rangle\,d\tau=I(V,\gamma)\end{aligned}$$

6.
$$|I(V,\gamma)|\leqslant\int_a^b\left|\langle V(\gamma),\gamma'\rangle\right|\leqslant\int_a^b\|V(\gamma)\|\cdot\left\|\gamma'\right\|\leqslant\max_{\gamma}\|V(\gamma)\|\cdot\int_a^b\left\|\gamma'\right\|$$

∎

3.2 Потенциальные векторные поля

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$, $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m \in C$, тогда поле V называется *потенциальным*, если оно является градиентом какого-то отображения, то есть $\exists f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})\colon\ V = \operatorname{grad} f$.

Замечание. Пусть f_1, f_2 — отображения из определения потенциальности поля V. Тогда $f_1 - f_2 = c \in \mathbb{R}$.

Теорема 3.2.1. (Обобщенная формула Ньютона-Лейбница)
Пусть $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — потенциальное поле с потенциалом f, $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{O}$ — кусочно-гладкий путь, $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$. Тогда

$$I(V,\gamma) = f(B) - f(A)$$

Доказательство. Докажем теорему для гладкого (не кусочно) пути. Тогда кусочно-гладкий путь разобъем на гладкие пути и посчитаем интеграл как сумму интегралов по этим путям. Сумма будет телескопической, получится заявленная формула.
Пусть $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. Тогда

$$\varphi'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$$

То есть φ — первообразная подынтегрального выражения. Тогда работает обычная формула Ньютона-Лейбница. ■

Определение. Интеграл векторного поля *не зависит от пути* в $\mathcal{O}$, если $\forall A, B\ \forall \gamma_1, \gamma_2$ кусочно-гладких путей из A в B $\ I(V,\gamma_1) = I(V,\gamma_2)$.

Лемма 3.2.2. Пусть $\mathcal{O}$ — область, $A \in \mathcal{O}$, тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \exists \gamma_{\mathbf{x}}\colon A \rightsquigarrow \mathbf{x}$ — кусочно-гладкий.

Доказательство. Пусть $M_A = \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} \mid \exists \gamma_{\mathbf{x}}\}$, где $\gamma_{\mathbf{x}}$ — путь из формулировки. Тогда M_A открыто. Действительно, пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{O}\colon \exists \gamma_{\mathbf{x}}$. Тогда, поскольку $\mathcal{O}$ открыто, $\exists U(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{O}$. Но тогда $\forall \mathbf{y} \in U(\mathbf{x})\ \exists \gamma_{\mathbf{y}}$, получаемый произведением пути $\gamma_{\mathbf{x}}$ и прямого пути из $\mathbf{x}$ в $\mathbf{y}$.
Рассмотрим теперь множество $\mathcal{O} \setminus M_A$: оно тоже открыто, так как если до точки $\mathbf{x}$ нет пути, то и до ближайших точек его тоже нет, иначе можно было бы достроить путь и до $\mathbf{x}$.
Получается, мы разбили $\mathcal{O}$ на два открытых непересекающихся множества. Поскольку $\mathcal{O}$ связно, одно из них должно оказаться пустым. M_A не пустое, потому что совершенно очевидно, что $A \in M_A$. Поэтому $M_A = \mathcal{O}$, что и требовалось. ■

Теорема 3.2.3. (Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)
$V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$. Эквивалентны утверждения:

1. V — потенциальное
2. $I(V,\gamma)$ не зависит от пути

3. $\forall$ кусочно-гладкой петли γ $I(V,\gamma)=0$

Доказательство.

$1 \Longrightarrow 2$ см. обобщенную теорему Ньютона-Лейбница.

$2 \Longrightarrow 3$ Пусть A — точка на петле γ_0 и γ — постоянный путь в точке A. Тогда

$$I(V,\gamma_0) \overset{(2)}{=} I(V,\gamma)=0$$

$3 \Longrightarrow 2$ Пусть γ_1, γ_2 — пути из A в B. Тогда рассмотрим кусочно-гладкую петлю $\gamma_0=\gamma_1\gamma_2^{-1}$. Имеем:

$$0=I(V,\gamma_0)=I(V,\gamma_1\gamma_2^{-1})=I(V,\gamma_1)+I(V,\gamma_2^{-1})=I(V,\gamma_1)-I(V,\gamma_2)$$

$2 \Longrightarrow 1$ Построим потенциал. Зафиксируем точку $A \in \mathcal{O}$. Для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ зафиксируем кусочно-гладкий путь $\gamma_{\mathbf{x}}\colon A \rightsquigarrow \mathbf{x}$ (см. лемму). Проверим, что $f(\mathbf{x}) = I(V,\gamma_{\mathbf{x}})$ — потенциал V. Для этого докажем, что $f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x})$ (число 1 здесь не играет никакой роли). Рассмотрим путь $\gamma_0\colon t \mapsto \mathbf{x}+th\mathbf{u}_1$ для $t\in[0,1]$, где $\mathbf{u}_1$ — стандартный базисный вектор. Тогда путь $\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0\colon A \rightsquigarrow \mathbf{x}+h\mathbf{u}_1$ — тоже кусочно-гладкий. Из аддитивности интеграла по пути имеем:

$$f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1)-f(\mathbf{x})=I(V,\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0)-I(V,\gamma_{\mathbf{x}})=I(V,\gamma_0)$$

Здесь мы воспользовались (2) в первом переходе, позволив себе считать $f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1)$ не через $\gamma_{\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1}$, а через $\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0$. Далее

$$\begin{aligned} I(V,\gamma_0) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i\, d\mathbf{x}_i \underset{\substack{d\mathbf{x}_1=hdt\\ d\mathbf{x}_i=0,i\geqslant 2}}{=} \int_0^1 V_1(\mathbf{x}_1+th,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)h\,dt \\ &= V_1(\mathbf{x}_1+\theta h,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)h\cdot|1-0| \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1)-f(\mathbf{x})}{h}=V_1(\mathbf{x}_1+\theta h,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)\xrightarrow[h\to 0]{\text{непрер.}} V_1(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)$$

■

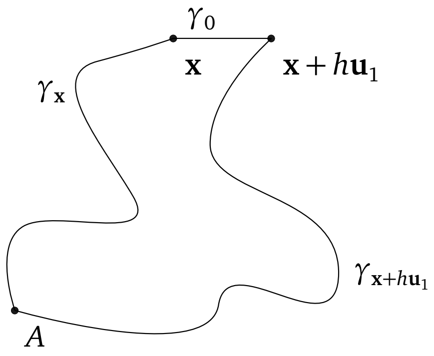

Рис. 3.1: Теорема о характеризации потенциальных векторных полей

3.3 Локально потенциальные векторные поля

Лемма 3.3.1. $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — гладкое потенциальное векторное поле. Тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \forall k, j\ \ \dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$

Определение. Пользуемся теоремой о независимотсти частных производных от порядка дифференцирования:

$$\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_k \mathbf{x}_j} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_j \mathbf{x}_k} = \frac{\partial V_j}{\partial \kappa_k}$$

Теорема 3.3.2. (Лемма Пуанкаре)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — выпуклая область, $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m \in C^1$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V потенциально.

Доказательство. Зафиксируем точку $A \in \mathcal{O}$. Положим

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{x}}\colon [0,1] &\to \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto A + t(\mathbf{x} - A) \in \mathcal{O} \end{aligned}$$

Проверим, что $f(\mathbf{x}) = I(V, \gamma_{\mathbf{x}})$ — потанциал V. Поскольку $V \in C^1$, можно использовать правило Лейбница:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot (\mathbf{x}_i - A_i)\, dt \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \left(V_j(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial V_i}{\partial \mathbf{x}_j}(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot t \cdot (\mathbf{x}_i - A_i) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(V_j(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_i}(A + t(\mathbf{x} - A)) \cdot t \cdot (\mathbf{x}_i - A_i) \right) dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(t \cdot V_j(A + t(\mathbf{x} - A))\right)'_t = t \cdot V_j(A + t(\mathbf{x} - A))\Big|_0^1 = V_j(\mathbf{x})$$

■

Определение. Поле $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ называется *локально потенциальным*, если оно потенциально в некоторой окрестности любой точки.

Следствие 3.3.3. (Лемма Пуанкаре)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто в $\mathbb{R}^m$, $V \in C^1(\mathcal{O})$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V локально потенциально.

3.4 Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути

Лемма 3.4.1. (О гусенице)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, для всех $\mathbf{x}$ задана окрестность $U(\mathbf{x})$, $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$, тогда существует такое дробление пути $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и такие шары $B_k = B_k(\mathbf{x}_k, r_k) \subseteq U(\mathbf{x}_k)$, что $\forall k \ \operatorname{Im}\gamma\big|_{[t_k - 1, t_k]} \subseteq B_k$.

Доказательство. Зафиксируем за каждой точкой $c \in [a,b]$ шар $B_c = B(\gamma(c), r_c)$ такой, чтобы $B_c \subseteq U(\gamma(c))$. Теперь вычислим для всех точек величины:

$$\widetilde{\alpha}_c = \inf_{\alpha \in [a,b]} \{\, \alpha \mid \operatorname{Im}\gamma\big|_{[\alpha,c]} \subseteq B_c \,\}$$
$$\widetilde{\beta}_c = \sup_{\beta \in [a,b]} \{\, \beta \mid \operatorname{Im}\gamma\big|_{[c,\beta]} \subseteq B_c \,\}$$

Далее сузим $(\widetilde{\alpha}_c, \widetilde{\beta}_c)$:

$$\widetilde{\alpha}_c < \alpha_c < c < \beta_c < \widetilde{\beta}_c$$

Теперь $\forall c \ \operatorname{Im}\gamma\big|_{(\alpha_c,\beta_c)} \subseteq B_c$. Кроме того:

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{c \in [a,b]} (\alpha_c, \beta_c) \Longrightarrow \exists c_i\colon \ [a,b] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\alpha_{c_i}, \beta_{c_i})$$

Далее для краткости вместо c_i будет использоваться просто i. Уберем из покрытия множества, которые можно покрыть другими множествами (это можно следать, поскольку покрытие конечное). Теперь на каждом интервале (α_i, β_i) есть точка d_i, не принадлежащая ни одному интервалу, кроме i-го. Выберем t_1 так, чтобы оно лежало сразу в 1 и 2 множествах. Тогда $a = t_0 < d_1 < t_1$, и

$$d_1 \in [t_0, t_1] \subseteq (\alpha_1, \beta_1) \Longrightarrow \operatorname{Im}\gamma\big|_{[t_0,t_1]} \subseteq B_1$$

Продолжая аналогичный процесс далее, получаем нужное дробление пути. ■

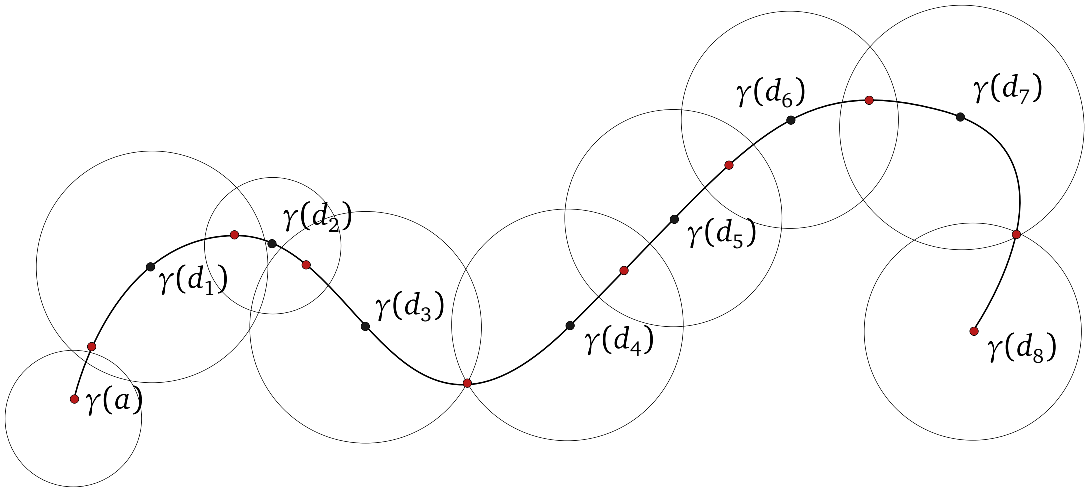

Рис. 3.2: Теорема о гусенице

Определение. Объект из последней теоремы, для которого окрестности $U(\mathbf{x})$ соответствуют окрестностям, на которых V локально потенциально, будем называть V-гусеницей.

Определение. Пути $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$ будем называть *похожими*, если у них есть общая V-гусеница. При этом ограничение идем именно на гусеницу, то есть наборы t_k могут быть разными.

Лемма 3.4.2. Пусть V — локально потенциальное векторное поле, γ_1, γ_2 — похожие кусочно-гладкие пути, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, тогда $I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$.

Доказательство. Пусть Г — общая V-гусеница путей, f_k потенциал в B_k. Подгоняя константы, следаем потенциалы одинаковыми на стыках шаров:

$$f_k = f_{k+1} \text{ на } B_k \cap B_{k+1}$$

Теперь посчитаем ингеграл по γ_1:

$$I(V, \gamma_1) = \sum_{k=1}^{n} I\left(V, \gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]}\right) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\gamma(t_k)) - f_{k-1}(\gamma(t_{k-1})) = f_n(\gamma(b)) - f_0(\gamma(a))$$

Аналогично вычисляем второй интеграл: получится такая же формула. ■

Лемма 3.4.3. Пусть B открыто, $A \subseteq B$ — компакт. Тогда $\exists \delta > 0\colon\ U(A, \delta) \subseteq B$, где $U(A, \delta) \overset{def}{=} \{\, x \mid \rho(x, A) < \delta \,\}$

Доказательство. Пусть

$$r = \operatorname{dist}(A, \operatorname{Fr}(B)) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in \operatorname{Fr}(B)}} \rho(a, b)$$

Инфимум реализуется, так как dist вычисляется на прямом произведении компактов (т.е. на компакте). Поэтому $r > 0$ (иначе A зашло бы на границу B, чего быть не может, т.к. $A \subseteq B$ и B открыто). Выберем $\delta = \dfrac{r}{2}$. ■

Лемма 3.4.4. (О трёх путях)
$C([a,b]) \ni \gamma\colon [a,b] \to \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O}$ — область, тогда $\exists \delta > 0$:
Если $\gamma_1, \gamma_2\colon [a,b] \to \mathcal{O}\colon\ \forall t \in [a,b]\ |\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \delta$, $|\gamma(t) - \gamma_2(t)| < \delta$, тогда $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ похожи друг на друга.

Доказательство. Множества $\gamma([t_{k-1}, t_k])$ компакты, B_k открыты, поэтому

$$\forall k\ \exists \delta_k\colon\ U(\gamma([t_{k-1}, t_k]), \delta_k) \subseteq B_k$$

Выберем тогда $\delta = \min \delta_k$. В таком случае все три пути окажутся в δ-окрестности по условию, то есть будут заключены в шары B_k. ∎

Определение. (Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути)
Пусть γ — непрерывный путь, γ' — любой кусочно-гладкий путь, удовлетворяющий предыдущей лемме. тогда положим $I(V, \gamma) = I(V, \gamma')$

Лемма 3.4.5. (О корректности определения интеграла по непрерывному пути)

Доказательство.

- Если таких путей γ' найдется несколько, то интегралы по ним совпадут по лемме об интегралах по похожим путям.

- Такой путь γ' всегда найдется. Для доказательства предъявим такой путь. Из соображений равномерной непрерывности,

$$\delta > 0 \Longrightarrow \exists \alpha > 0\colon\ \forall t, t'\colon |t - t'| < \alpha\ \ \left\|\gamma(t) - \gamma(t')\right\| < \frac{\delta}{2}$$

  Тогда разобъём $[a,b]$ на отрезки длины α и построим кусочно-линейный путь $\widetilde{\gamma}$; проверим условие похожести:

$$\begin{aligned}\|\gamma(t) - \widetilde{\gamma}(t)\| &\leqslant \|\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})\| + \|\gamma(t_{i-1}) - \widetilde{\gamma}(t)\| \\ &\leqslant \|\gamma(t) - \gamma(t_{i-1})\| + \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \leqslant \delta\end{aligned}$$

∎

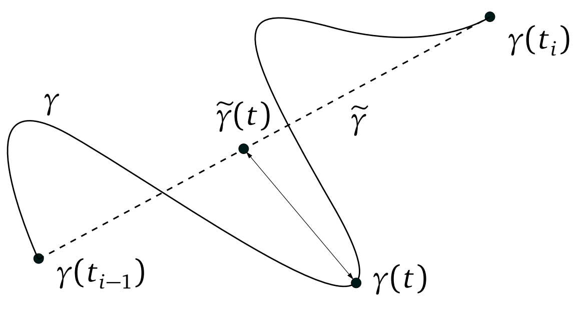

Рис. 3.3: Лемма о корректности определения интеграла по непрерывному пути

3.5 Гомотопия

Определение. Рассмотрим два пути $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a, b] \to \mathcal{O}$. *Гомотопией* путей γ_0, γ_1 называется отображение $\Gamma \colon [a, b] \times [0, 1] \to \mathcal{O} \in C$, такое, что $\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$ и $\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Определение. Гомотопия наывается *связанной*, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

Определение. Гомотопия называется *петельной*, если $\forall u \in [0, 1]\ \ \Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$.

Лемма 3.5.1. Локально постоянное отображение связного компакта постоянно на нём.

Доказательство. (нестрогое)
Выберем конечное покрытие K окрестностями, на которых $f : K \to X$ постоянно. Вручную установим равенство f на стыках окрестностей (их конечное число), а значит автоматически и на объединении окрестностей из одной компоненты связности. Поскольку K связно, компонента одна, а значит f постоянно. ■

Теорема 3.5.2. (Интегралы по связанно гомотопным путям)
V — локально потенциальное поле, γ_0, γ_1 — связянно гомотопные пути. Тогда $I(V, \gamma_0) = I(V, \gamma_1)$.

Доказательство.

- Пусть Γ — гомотопия путей γ_0 и γ_1. Введем отображение $\varphi(u) = I(V, \gamma_u)$. Наша цель — показать, что φ локально постоянно на $[0, 1]$, или, что то же самое:

  $$\forall u_0 \in [0, 1]\ \exists U(u_0) \colon \forall u \in U(u_0) \cap [0, 1]\ \ \varphi(u_0) = \varphi(u)$$

  В таком случае по предыдущей лемме оно окажется постоянным на $[0, 1]$, что и докажет утверждение теоремы.

- Пусть δ взято из леммы о трёх путях. Γ непрерывно на компакте, поэтому равномерно непрерывно на нем:

  $$\exists \sigma > 0 \colon\ \forall u, t \colon \begin{cases} |u - u_0| < \sigma \\ |t - t_0| < \sigma \end{cases} \qquad \|\Gamma(t, u) - \Gamma(t_0, u_0)\| < \frac{\delta}{2}$$

  Поэтому, в частности,

  $$\left\|\gamma_u(t) - \gamma_{u_0}(t)\right\| < \frac{\delta}{2}$$

  то есть пути γ_u и γ_{u_0} похожи. Но они не кусочно-гладкие, поэтому похожести недостаточно.

- Придется искать похожие пути. Пользуясь технологией из доказательства леммы о корректности определения интеграла по непрерывному пути, построим пути $\widetilde{\gamma}_u$ и $\widetilde{\gamma}_{u_0}$ так, чтобы они попадали в $\frac{\delta}{4}$-окрестность путей γ_u и γ_{u_0} соответственно. Тогда

  $$\left\|\widetilde{\gamma}_u - \widetilde{\gamma}_{u_0}\right\| \leqslant \|\widetilde{\gamma}_u - \gamma_u\| + \left\|\gamma_u - \gamma_{u_0}\right\| + \left\|\gamma_{u_0} - \widetilde{\gamma}_{u_0}\right\| \leqslant \delta$$

То есть пути $\widetilde{\gamma}_u$ и $\widetilde{\gamma}_{u_0}$ похожи. Но они кусочно-гдадкие, поэтому получается, что:

$$I(V,\gamma_u) \overset{def}{=} I(V,\widetilde{\gamma}_u) \overset{\text{похож. к.-г.}}{=} I(V,\widetilde{\gamma}_{u_0}) \overset{def}{=} I(V,\gamma_{u_0})$$

■

Определение. Область называется *односвязной* если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному.

Теорема 3.5.3. Пусть $\mathcal{O}$ — односвязная область в $\mathbb{R}^m$, V — локально потенциальное векторное поле в $\mathcal{O}$, тогда V потенциально в $\mathcal{O}$.

Доказательство. Область односвязная, значит любая петля в ней гомотопна постоянному пути, то есть интеграл по любой петле равен нулю. Это — критерий потенциальности поля. ■

Следствие 3.5.4. (Теорема Пуанкаре для односвязной области)
$\mathcal{O}$ — односвязная область, $V \in C^1$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V потенциально.

Теорема 3.5.5. (О резиночке) Область $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{0}$ не является односвязной.

Доказательство. Рассмотрим петлю:

$$\begin{aligned} \gamma\colon [0,2\pi] &\to \mathcal{O} \\ t &\mapsto (\cos(t),\sin(t)) \end{aligned}$$

И векторное поле $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^2$:

$$V(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся *(нет)* что $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$. Отсюда делаем вывод, что V — локально-потенциально (теорема Пуанкаре). Проинтегрируем по петле:

$$I(V,\gamma) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin(t)}{1}\cdot(-\sin(t)) + \frac{\cos(t)}{1}\cdot\cos(t)\right)\, dt = 2\pi \neq 0$$

Значит, γ — нестягиваемая петля. ■

Глава 4

Теория меры

4.1 Системы множеств

Определение. *Полукольцом подмножеств* множества X называют $\mathcal{P} \subseteq 2^X$, удовлетворяющее условиям

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$.

2. $A, B \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$.

3. $\forall A, B \in \mathcal{P}\ \exists B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{P}\colon\ A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} B_i$.

Определение. *Ячейкой* в $\mathbb{R}^m$ называется множество вида

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{a}_i \leqslant \mathbf{x}_i < \mathbf{b}_i \,\}$$

Теорема 4.1.1. (Свойства полуколец)

1. $A \in \mathcal{P} \not\Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{P}$

2. $A, A' \in \mathcal{P} \not\Rightarrow A \mathbin{@} A' \in \mathcal{P}$, $@ \in \{\cup, \setminus, \triangle\}$

3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigsqcup\limits_{fin} D_j$

Определение. *Алгеброй подмножеств* множества X называется множество $\mathcal{A} \in 2^X$ такое, что выполнены аксиомы:

1. $X \in \mathcal{A}$

2. $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Теорема 4.1.2. (Свойства алгебр)

1. $\varnothing = X \setminus X \in \mathcal{A}$

2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

3. $\overline{A} = X \setminus A \in \mathcal{A}$

4. $A \cup B \in \mathcal{A}$
$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

5. $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

6. Алгебра подмножеств является полукольцом подмножеств

Определение. *σ-Алгеброй подмножеств* множества X называется алгебра подмножеств $\mathcal{A}$, удовлетворяющая дополнительной аксиоме:
$\{A_n\} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Лемма 4.1.3. (О нарезке)
Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n \subseteq X$. Тогда набор множеств
$$B_1 = A_1,\ B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right), \ldots$$
дизъюнктен, причем
$$\bigsqcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Лемма 4.1.4. (О минимальной алгебре)
Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо. Положим $\mathcal{A}_0$ — система подмножеств, состоящая из всевозможных конечных объединений множеств из $\mathcal{P}$, а так же из их дополнений. Тогда

- $\mathcal{A}_0$ — алгебра подмножеств.
- Для любой алгебры $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{P}$ верно, что $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0$

4.2 Объём

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *конечно-аддитивной*, если

1. μ принимает не более одного значения из $\{+\infty, -\infty\}$

2. $\mu(\varnothing) = 0$

3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}$, $A_i \cap A_{j \neq i} = \varnothing$, тогда если оказалось, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}$, то
$\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Определение. Пусть $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *объёмом*, если

1. μ конечно-аддитивна

2. $\mu \geqslant 0$

Определение. Объём называется *конечным*, если $\mu(X) < +\infty$.

Определение. *Классическим объёмом* в $\mathbb{R}^m$ называется объём, заданный на полукольце ячеек в $\mathbb{R}^m$, вычисляющийся по формуле $\mu([\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \prod\limits_{k=1}^{m} (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k)$.

Лемма 4.2.1. (Монотонность объёма)
Для объёма μ, $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subseteq B$ выполено $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Доказательство.

$$B = A + B \setminus A = A + \bigsqcup D_i \Longrightarrow \mu(B) = \mu(A) + \sum \mu(D_i) \geqslant \mu(A)$$

■

Теорема 4.2.2. (Свойства объёма)

1. $\forall A,$ дизъюнктных $A_1 \ldots, A_n \in \mathcal{P}$: $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$
(усиленная монотонность)

2. $\forall A, A_1 \ldots, A_n \in \mathcal{P}$: $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
(конечная полуаддитивность)

3. $A, B, A \setminus B \in \mathcal{P} \Longrightarrow \mu(A \setminus B) \geqslant \mu(A) - \mu(B)$

Доказательство.

1.
$$A \setminus \bigsqcup_{i=1}^{n} A_i = \bigsqcup_{i=1}^{k} D_i \Longrightarrow A = \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} A_i \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} D_i \right)$$
$$\Longrightarrow \mu(A) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)) + \sum_{i=1}^{k} \mu(D_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$$

2. Сейчас будет использован стандартный прием, смысл которого заключается в переходе от простого объединения к дизъюнктному. Пусть $B_k = A \cap A_k$. Тогда $A = \bigcup B_k$. Теперь *нарежем* B_k:
$$C_k = B_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} B_i$$
При $k > 1$ и $C_1 = B_1$. Набор C_k получился дизъюнктным:
$$A = \bigsqcup_{i=1}^{n} C_i$$

Сами множетсва C_k могут и не быть в $\mathcal{P}$, но $B_k \in \mathcal{P}$ как пересечения множеств из $\mathcal{P}$. Из определения C_k имеем, что,

$$C_k = \bigsqcup_{i=1}^{j_k} D_{ki}$$

Тогда можно вычислить объём A:

$$\mu(A) = \sum_{k,i} \mu(D_{ki})$$

Теперь воспользуемся монотонностью объёма: $C_k \subseteq B_k \subseteq A_k$:

$$\sum_j D_{kj} \leqslant \mu(B_k) \leqslant \mu(A_k)$$

Поэтому

$$\mu(A) = \sum_k \sum_j D_{kj} \leqslant \sum_k \mu(A_k)$$

3.

(a)

$$B \subseteq A \Longrightarrow \mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B) \Longrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$$

(b)

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \Longrightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) \geqslant \mu(A) - \mu(B)$$

∎

4.3 Мера

Определение. *Мерой* называется объём $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$, обладающий свойством счётной аддитивности.

Теорема 4.3.1. Пусть $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивен
2. μ счетно-полуаддитивен

Доказательство. Импликация $1 \Longrightarrow 2$ доказывается практически так же, как второй пункт предыдущей теоремы (используется нарезка). Докажем $2 \Longrightarrow 1$. Для этого воспользуемся усиленной монотонностью объёма (A_i дизъюнктны):

$$\forall N \ \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$$

Добавляя к этому посылку:

$$\forall N \ \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i) \leqslant \mu(A) \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_i)$$

И переходя к пределу при $N \to +\infty$, получаем требуемое. ∎

Теорема 4.3.2. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивно
2. μ *непрерывно снизу*, то есть $A,\ A_1,A_2\ldots \in \mathcal{A}\colon A_1 \subset A_2 \subset \ldots;\ A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \implies$ $\mu(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_i)$

Доказательство.

$1 \implies 2$ Нарежем множетсва:

$$B_1 = A_1, \ldots, B_k = A_k \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} A_i\right)$$

Как всегда, B_k дизъюнктны, причем $A = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} B_k$. Тогда, пользуясь счетной аддитивностью, имеем:

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(B_i) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{i=1}^{N} \mu(B_i) = \lim_{N\to+\infty} \mu(A_k)$$

$2 \implies 1$ Пусть есть дизъюнктные A_k. Сделаем из них C_k:

$$C_k = \bigsqcup_{i=1}^{k} A_i$$

Тогда $C_1 \subseteq C_2 \subseteq \ldots$. Воспользуемся непрерывностью снизу:

$$\mu(A) = \mu(C) = \lim_{N\to+\infty} \mu(C_k) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=1}^{k} \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$$

∎

Теорема 4.3.3. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **конечный** объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивен
2. μ *непрерывно сверху*

$$A,\ A_1,A_2\ldots \in \mathcal{A}\colon A_1 \supset A_2 \supset \ldots;\ A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i \implies \mu(A) = \lim_{n\to+\infty} \mu(A_i)$$

3. μ *непрерывно сверху на пустом множестве*, то есть при условии, что $A = \varnothing$.

Доказательство.

$1 \Longrightarrow 2$ Будем пользоваться непрерывностью снизу, но для этого нужна подготовка:

$$B_1 = A_1 \setminus A, \ldots, B_k = A_1 \setminus A_k$$

Тогда $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$; $B = \bigcup B_k$:

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(B) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_1) - \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k)$$

Откуда

$$\mu(A) = \lim_{k\to+\infty} \mu(A_k)$$

$2 \Longrightarrow 3$ Очевидно.

$3 \Longrightarrow 1$ Пусть C_k дизъюнктны. Положим

$$A_k = \bigsqcup_{i=k+1}^{+\infty} C_k$$

Тогда $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$; $A = \bigcap A_k = \varnothing$. Вообще говоря, $A_k \notin \mathcal{A}$. Но в нашем случае

$$A_k = C \setminus \bigsqcup_{i=1}^{k} C_i \in \mathcal{A}$$

Далее надо как-то воспользоваться непрерывностью сверху:

$$C = A_k \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} C_k \right) \Longrightarrow \mu(C) = \mu(A_k) + \sum_{i=1}^{k} \mu(C_k)$$

Переходя к пределу при $k \to +\infty$, получаем требуемое.

■

4.4 О стандартном продолжении меры

Определение. *Пространством с мерой* называется тройка $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$, где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера.

Определение. $\langle X, \mathcal{A}, \mu \rangle$ называется *полным* (соответственно мера называется *полной*), если $\forall E \in \mathcal{A}\colon\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \forall A \subseteq E\ A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = 0$.

Определение. $\langle X, \mathcal{P}, \mu \rangle$ называется *σ-конечным* (соответственно мера называется *σ-конечной*), если $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_k$, где $\mu(B_k) < +\infty$.

Теорема 4.4.1. (О стандартном продолжении меры)
$\langle X, \mathcal{P}, \mu_0 \rangle$, μ_0 — σ-конечный объём. Тогда $\exists$ σ-алгебра $\mathcal{A}$ и мера $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$:

1. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$, $\mu\big|_{\mathcal{P}} = \mu_0$

2. μ полная
3. Если $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{P}$, $\mu'\big|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, μ' — полная, тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ и $\mu'\big|_{\mathcal{A}} = \mu$
4. Если $\mathcal{P}'$ — полукольцо, μ' — мера на $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{A}$, тогда $\mu' = \mu\big|_{\mathcal{P}'}$
5. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mu(A) = \inf\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_0(P_k)\ \middle|\ A \subseteq \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}\right)$

4.5 Мера Лебега

Теорема 4.5.1. Классический объём в $\mathbb{R}^m$ является σ-конечной мерой.

Доказательство. σ-конечность очевидна. Докажем счетную полуаддитивность. Пусть $[a,b) \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n)$. Наша цель — показать, что $\mu[a,b) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu[a_n,b_n)$. Выберем $b' < b$ таким образом, чтобы

$$\mu[a,b) - \varepsilon < \mu[a,b') < \mu[a,b)$$

И $a_n' < a_n$ так, чтобы

$$\forall n\ \mu[a_n,b_n) < \mu[a_n',b_n) < \mu[a_n,b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

Теперь отрезок $[a,b']$ накрыт счетным объедиением интервалов (a_n', b_n). Выберем из этого покрытия конечное:

$$[a,b'] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (a_n', b_n) \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} [a_n', b_n)$$

Воспользуемся конечной полуаддитивностью:

$$\mu[a,b') \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n',b_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \left(\mu[a_n,b_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n,b_n) + \varepsilon$$

С другой стороны:

$$\mu[a,b) - \varepsilon < \mu[a,b') \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu[a_n,b_n) + \varepsilon$$

Откуда и следует требуемое. ■

Определение. *Мерой Лебега* называется стандартное продолжение классического объёма.

Определение. Алгебра, на которой определена мера Лебега, обозначается $\mathfrak{M}$.

Определение. *Измеримыми по Лебегу* называются множества $A \in \mathfrak{M}$.

Теорема 4.5.2. (Свойства меры Лебега)

1. Объединения и пересечения измеримых множеств измеримы.

2. Все открытые и замкнутые множества измеримы.

Лемма 4.5.3. (О структуре открытых множеств)

1. $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто $\implies$ $\exists Q_i$ — ячейки в $\mathbb{R}^m$ такие, что $\mathcal{O} = \bigsqcup\limits_i Q_i$, причем можно дополнительно считать, что выполнено что-либо из нижеперечисленного:
   (a) Ячейки имеют рациональные (двоично-рациональные) координаты
   (b) $\mathrm{Cl}(Q_i) \subseteq \mathcal{O}$
   (c) Q_i — кубы

2. Пусть E измеримо в $\mathbb{R}^m$, $\lambda(E) = 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q_i$ — ячейки в $\mathbb{R}^m$ такие, что
$$E \subseteq \bigcup_i Q_i \text{ и } \sum_i \mu(Q_i) < \varepsilon$$
   причем можно потребовать свойства $(a)-(c)$ и дизъюнктность набора ячеек.

Доказательство.

1. Всем точкам $\mathcal{O}$ сопоставим ячейку требуемого типа с рациональными параметрами. Таких ячеек не более чем счетное множество:
$$\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \widetilde{Q}_i$$
   Теперь надо сделать эти ячейки дизъюнктыми. Для этого воспользуемся тем, что их счетное число:
$$Q'_1 = \widetilde{Q}_1, \ldots, Q'_k = \widetilde{Q}_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \widetilde{Q}_i$$
   $\forall i$ Q'_i выражается через дизъюнктное объединение ячеек нужного типа, так как полукольцо ячеек — полукольцо. Тогда:
$$\mathcal{O} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \widetilde{Q}_i = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} Q'_i = \bigsqcup_{i=1}^{+\infty} \bigsqcup_{j=1}^{k_i} D_{ij}$$

2. Пятый пункт теоремы о продолжении поставляет нам способ получить ячейки, удовлетворяющие всему, кроме дизъюнктности и $(a)-(c)$. Эти свойства придется добывать самостоятельно. Пусть множества $\widetilde{P}_i$ пришли из теоремы для $\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$:
$$\sum \lambda(\widetilde{P}_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$
   Немного расширим эти множества до открытых $P_i \supset \widetilde{P}_i$. Эти множества по первому пункту текущей леммы представляются в виде нужного нам объединения:
$$P_i = \bigsqcup D_{ij}$$

Потребуем (при выборе P_i):

$$\lambda(\widetilde{P}_i) < \lambda(P_i) < \lambda(\widetilde{P}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Тогда получается то, что нужно:

$$\sum \lambda(D_{ij}) = \sum \lambda(P_i) < \sum \left(\lambda(\widetilde{P}_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) \leqslant \varepsilon$$

■

Теорема 4.5.4. (Свойства меры Лебега)

3. Пример: канторово множество в $\mathbb{R}$. Строится итеративно:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{K}_0 = [0,1] \\ &\mathfrak{K}_1 = \left[1, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ &\mathfrak{K}_2 = \left[1, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\ &\quad \ldots \\ &\mathfrak{K} = \bigcap_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{K}_i \end{aligned}$$

   Получившееся множество измеримо, потому что является пересечением измеримых множеств. Его мера равна нулю, потому что к нулю стремится мера $\mathfrak{K}_i$. С другой стороны, можно задать это же множество в другом виде:

$$\mathfrak{K} = \{\, 0.\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots_3 \mid \varepsilon_i \in \{\, 0, 2 \,\}\,\}$$

   По построению понятно, что из отрезка просто выкинули все точки, троичная запись которых содержит хотя бы одну единицу. Тогда $\mathfrak{K}$ континуально как множество бинарных последовательностей.

4. Пример: неизмеримое множество. Совершенно очевидно, что одними только пересечениями и объединениями не получится построить неизмеримое множество. Привлечем к борьбе с измеримостью фактормножества. Пусть $\sim$ — отношение, заданное на отрезке $[0,1]$ такое, что:

$$a \sim b \Longleftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$$

   Рассмотрим тогда фактормножество $A = [0,1] \,/\, \sim$. Предположим, что оно измеримо. В одной из следующих теорем будет доказано, что мера Лебега инвариантна относительно сдвига, то есть $\lambda(A) = \lambda(A + q)$. Пусть тогда

$$B = \bigsqcup_{q \in [-1,1] \cap \mathbb{Q}} (A + q)$$

   Дизъюнктность объединяемых множеств очевидна. Тогда B тоже измеримо, причем

$$B \subseteq [-1,2], B \supseteq [0,1] \Longrightarrow 0 < \lambda(B) < +\infty$$

Но с другой стороны можно вычислить $\lambda(B)$ через $\lambda(A)$:

$$\lambda(B) = \sum_{q\in[-1,1]\cap\mathbb{Q}} \lambda(A+q) = \begin{cases} 0, \ \lambda(A) = 0 \\ +\infty, \ \lambda(A) > 0 \end{cases}$$

Возникло противоречие, поэтому A неизмеримо.

5. – A ограничено, тогда $\lambda(A) < +\infty$
   – A открыто, тогда $\lambda(A) > 0$
   – $\lambda(A) = 0 \Longrightarrow$ У A нет внутренних точек

6. A измеримо, тогда $\forall \varepsilon > 0$
   – $\exists G_\varepsilon$ открытое такое, что $A \subset G_\varepsilon$, $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
   – $\exists F_\varepsilon$ замкнутое такое, что $F_\varepsilon \subset A$, $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Доказательство.

5. Очевидно.

6. – (i) Пусть $\lambda(A) < +\infty$. Из последнего пункта теоремы о продолжении получаем набор P_i такой, что

$$\lambda(A) < \sum \lambda(P_i) < \lambda(A) + \varepsilon$$

Далее немного расширим P_i до открытого $\widetilde{P}_i$, которое наполовину замкнем до ячейки $\widetilde{\widetilde{P}}_i$:

$$P_i \subset \widetilde{P}_i \subset \widetilde{\widetilde{P}}_i \in \mathcal{P}$$

Расширим мы несильно, а именно:

$$\lambda\left(\widetilde{\widetilde{P}}_i\right) - \lambda(P_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

В таком случае положим

$$G_{2\varepsilon} = \bigcup \widetilde{P}_i$$

и проверим, что оно подходит:

$$\lambda(A) < \lambda(G_{2\varepsilon}) \leqslant \sum \lambda\left(\widetilde{\widetilde{P}}_i\right) \leqslant \lambda(A) + 2\varepsilon$$

$A \subset G_{2\varepsilon}$, поэтому:

$$\lambda(G_{2\varepsilon} \setminus A) = \lambda(G_{2\varepsilon}) - \lambda(A) < 2\varepsilon$$

(ii) $\lambda(A) = +\infty$. Воспользуемся σ-конечностью $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbb{R}^m = \bigsqcup Q_i \Longrightarrow A = \bigsqcup A \cap Q_i$$

Пользуясь (i), расширим $A \cap Q_i$ до открытого множества $(G_\varepsilon)_i$ так, чтобы

$$\lambda((G_\varepsilon)_i \setminus (A \cap Q_i)) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Пусть тогда $G_\varepsilon = \bigcup (G_\varepsilon)_i$. Проверим, что оно подходит:

$$\lambda(A) < \lambda(G_\varepsilon) \leqslant \sum \lambda((G_\varepsilon)_i) < \sum \lambda(A \cap Q_i) + \varepsilon = \lambda(A) + \varepsilon$$

– Переход к дополнению: A^c открыто, поэтому

$$\exists G_\varepsilon: \ \lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon \Longrightarrow \lambda(A \setminus G_\varepsilon^c) = \lambda(G_\varepsilon \setminus A^c) < \varepsilon$$

То есть $F_\varepsilon = G_\varepsilon^c$ подходит.

■

Определение. Пусть $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, тогда *борелевской оболочкой* множества $\mathcal{A}$ называют минимальную по включению σ-алгебру, содержащую $\mathcal{A}$.

Определение. *Борелевской σ-алгеброй* называется борелевская оболочка всех открытых множеств.

Следствие 4.5.5. A измеримо, тогда $\exists$ борелевские B, C: $B \subset A \subset C$ такие, что $\lambda(C \setminus B) = 0$.

Следствие 4.5.6. A измеримо, тогда $A = B \cup \mathfrak{N}$, B — борелевское, $\lambda(\mathfrak{N}) = 0$.

Следствие 4.5.7. (Регулярность меры Лебега)
Пусть A измеримо, тогда

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G \text{ открыто}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ замкнуто}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ компакт}}} \lambda(K)$$

Лемма 4.5.8. Пусть $\langle X', \mathcal{A}', \mu' \rangle$ — пространство с мерой. $\langle X, \mathcal{A}, \_ \rangle$ — заготовка для пространства с мерой. $T : X \to X'$ — биекция, $\forall A \in \mathcal{A}\ T(A) \in \mathcal{A}'$, $T(\varnothing) = \varnothing$. Положим $\mu(A) = \mu'(T(A))$. Тогда μ — мера на $\mathcal{A}$.

Лемма 4.5.9. $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall E \in \mathfrak{M}\ \lambda(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(T(E)) = 0$,
тогда $\forall A \in \mathfrak{M}\ T(A) \in \mathfrak{M}$.