Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Криволинейные интегралы

1.1 Интеграл по кусочно-гладкому пути

Определение. Пусть $E \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто, тогда $V : E \to \mathbb{R}^m$ будем называть *векторным полем*. По умолчанию $V \in C(E)$.

Определение. (Интеграл векторного поля по кусочно-гладкому пути)
Пусть V - векторное поле, $\gamma : [a, b] \to E$ — кусочно-гладкий путь, тогда *интегралом векторного поля по этому пути* называется

$$I(V, \gamma) \overset{def}{=} \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

Замечание. Предыдущее определение можно переписать в нескольких эквивалентных формах:

$$\begin{aligned} I(V, \gamma) &= \int_a^b \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(\gamma(t))\ \gamma'(t) dt \\ &\underset{\gamma \to x}{=} \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i(x(t))\ x_i'(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^m V_i dx_i \end{aligned}$$

Определение. Пусть $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ — пути, $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, тогда определим *произведение путей* $\gamma = \gamma_1\gamma_2 : [a, d] \to \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), t \in [a, b] \\ \gamma_2(t - b + c), t \in [b, b + d - c] \end{cases}$$

Определение. *Обратным путем* называется путь $\gamma^{-1} : t \mapsto \gamma(a + b - t)$.

Теорема 1.1.1. (О свойствах интеграла по кусочно-гладкому пути)

1. Линейность по полю: $I(\alpha U+\beta V,\gamma)=\alpha I(U,\gamma)+\beta I(V,\gamma)$ для любых полей U,V, любого к-г пути γ и любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

2. Аддитивность при дроблении пути: $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^m$, $a<c<b$, тогда $I(v,\gamma)=I(V,\gamma\big|_{[a,c]})+I(V,\gamma\big|_{[c,b]})$.

3. Замена параметра: пусть $\varphi\colon[p,q]\to[a,b]$ — сюрьекция, причем $\varphi(p)=a$, $\varphi(q)=b$, $\varphi\in C^1$, тогда $I(V,\gamma)=I(V,\gamma\circ\varphi)$.

4. Интеграл произведения путей: $I(V,\gamma_1\gamma_2)=I(V,\gamma_1)+I(V,\gamma_2)$.

5. $I(V,\gamma)=-I(V,\gamma^{-1})$.

6. $|I(V,\gamma)|\leqslant\max\limits_{x\in\gamma[a,b]}\|V(x)\|\cdot l(\gamma)$.

Доказательство.

3.

$$\begin{aligned}I(V,\gamma)=\int_a^b\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\rangle \underset{t=\varphi(s)}{=}\int_p^q\langle V(\gamma(\varphi(s))),\gamma'(\varphi(s))\rangle\varphi'(s)\,ds\\ =\int_p^q\langle V((\gamma\circ\varphi)(s)),(\gamma\circ\varphi)'(s)\rangle\,ds=I(V,\gamma\circ\varphi)\end{aligned}$$

Поскольку любые две параметризации гладкого многообразия отличаются на диффеоморфизм, интеграл зависит только от носителя пути.

5.

$$\begin{aligned}I(V,\gamma^{-1})&=\int_a^b\langle V(\gamma(a+b-t)),\gamma'(a+b-t)\rangle\cdot(-1)\,dt\\ &\underset{\tau=a+b-t}{=}\int_a^b\langle V(\gamma(\tau)),\gamma'(\tau)\rangle\,d\tau=I(V,\gamma)\end{aligned}$$

6.

$$|I(V,\gamma)|\leqslant\int_a^b\left|\langle V(\gamma),\gamma'\rangle\right|\leqslant\int_a^b\|V(\gamma)\|\cdot\left\|\gamma'\right\|\leqslant\max_{\gamma}\|V(\gamma)\|\cdot\int_a^b\left\|\gamma'\right\|$$

■

1.2 Потенциальные векторные поля

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$, $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m \in C$, тогда поле V называется *потенциальным*, если оно является градиентом какого-то отображения, то есть $\exists f \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})\colon\ V = \operatorname{grad} f$.

Замечание. Пусть f_1, f_2 — отображения из определения потенциальности поля V. Тогда $f_1 - f_2 = c \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.2.1. (Обобщенная формула Ньютона-Лейбница)
Пусть $V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — потенциальное поле с потенциалом f, $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{O}$ — кусочно-гладкий путь, $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$. Тогда

$$I(V,\gamma) = f(B) - f(A)$$

Доказательство. Докажем теорему для гладкого (не кусочно) пути. Тогда кусочно-гладкий путь разобъем на гладкие пути и посчитаем интеграл как сумму интегралов по этим путям. Сумма будет телескопической, получится заявленная формула.
Пусть $\varphi(t) = f(\gamma(t))$. Тогда

$$\varphi'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

То есть φ — первообразная подынтегрального выражения. Тогда работает обычная формула Ньютона-Лейбница. ■

Определение. Интеграл векторного поля *не зависит от пути* в $\mathcal{O}$, если $\forall A, B\ \forall \gamma_1, \gamma_2$ кусочно-гладких путей из A в B $\ I(V,\gamma_1) = I(V,\gamma_2)$.

Лемма 1.2.2. Пусть $\mathcal{O}$ — область, $A \in \mathcal{O}$, тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \exists \gamma_{\mathbf{x}}\colon A \rightsquigarrow \mathbf{x}$ — кусочно-гладкий.

Доказательство. Пусть $M_A = \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} \mid \exists \gamma_{\mathbf{x}}\}$, где $\gamma_{\mathbf{x}}$ — путь из формулировки. Тогда M_A открыто. Действительно, пусть $\mathbf{x} \in \mathcal{O}\colon \exists \gamma_{\mathbf{x}}$. Тогда, поскольку $\mathcal{O}$ открыто, $\exists U(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{O}$. Но тогда $\forall \mathbf{y} \in U(\mathbf{x})\ \exists \gamma_{\mathbf{y}}$, получаемый произведением пути $\gamma_{\mathbf{x}}$ и прямого пути из $\mathbf{x}$ в $\mathbf{y}$.
Рассмотрим теперь множество $\mathcal{O} \setminus M_A$: оно тоже открыто, так как если до точки $\mathbf{x}$ нет пути, то и до ближайших точек его тоже нет, иначе можно было бы достроить путь и до $\mathbf{x}$.
Получается, мы разбили $\mathcal{O}$ на два открытых непересекающихся множества. Поскольку $\mathcal{O}$ связно, одно из них должно оказаться пустым. M_A не пустое, потому что совершенно очевидно, что $A \in M_A$. Поэтому $M_A = \mathcal{O}$, что и требовалось. ■

Теорема 1.2.3. (Характеризация потенциальных векторных полей в терминах интегралов)
$V\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$. Эквивалентны утверждения:

1. V — потенциальное
2. $I(V,\gamma)$ не зависит от пути

3. $\forall$ кусочно-гладкой петли γ $I(V,\gamma)=0$

Доказательство.

$1 \Longrightarrow 2$ см. обобщенную теорему Ньютона-Лейбница.

$2 \Longrightarrow 3$ Пусть A — точка на петле γ_0 и γ — постоянный путь в точке A. Тогда

$$I(V,\gamma_0) \overset{(2)}{=} I(V,\gamma)=0$$

$3 \Longrightarrow 2$ Пусть γ_1, γ_2 — пути из A в B. Тогда рассмотрим кусочно-гладкую петлю $\gamma_0=\gamma_1\gamma_2^{-1}$. Имеем:

$$0=I(V,\gamma_0)=I(V,\gamma_1\gamma_2^{-1})=I(V,\gamma_1)+I(V,\gamma_2^{-1})=I(V,\gamma_1)-I(V,\gamma_2)$$

$2 \Longrightarrow 1$ Построим потанциал. Зафиксируем точку $A \in \mathcal{O}$. Для каждой точки $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$ зафиксируем кусочно-гладкий путь $\gamma_{\mathbf{x}}\colon A \rightsquigarrow \mathbf{x}$ (см. лемму). Проверим, что $f(\mathbf{x})=I(V,\gamma_{\mathbf{x}})$ — потанциал V. Для этого докажем, что $f'_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{x})=V_1(\mathbf{x})$ (число 1 здесь не играет никакой роли). Рассмотрим путь $\gamma_0\colon t \mapsto \mathbf{x}+th\mathbf{u}_1$ для $t \in [0,1]$, где $\mathbf{u}_1$ — стандартный базисный вектор. Тогда путь $\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0\colon A \rightsquigarrow \mathbf{x}+h\mathbf{u}_1$ — тоже кусочно-гладкий. Из аддитивности интеграла по пути имеем:

$$f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1)-f(\mathbf{x})=I(V,\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0)-I(V,\gamma_{\mathbf{x}})=I(V,\gamma_0)$$

Здесь мы воспользовались (2) в первом переходе, позволив себе считать $f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1)$ не через $\gamma_{\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1}$, а через $\gamma_{\mathbf{x}}\gamma_0$. Далее

$$\begin{aligned} I(V,\gamma_0) &= \int_0^1 \sum_{i=1}^m V_i\, d\mathbf{x}_i \underset{\substack{d\mathbf{x}_1=h\,dt \\ d\mathbf{x}_i=0,\, i\geqslant 2}}{=} \int_0^1 V_1(\mathbf{x}_1+th,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)h\,dt \\ &= V_1(\mathbf{x}_1+\theta h,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)h\cdot|1-0| \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{f(\mathbf{x}+h\mathbf{u}_1)-f(\mathbf{x})}{h}=V_1(\mathbf{x}_1+\theta h,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_m)\xrightarrow[h\to 0]{\text{непрер.}} V_1(\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m)$$

$\blacksquare$

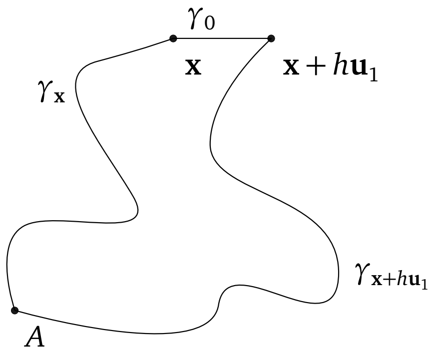

Рис. 1.1: Теорема о характеризации потенциальных векторных полей

1.3 Локально потенциальные векторные поля

Лемма 1.3.1. $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — гладкое потенциальное векторное поле. Тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{O}\ \forall k, j\ \ \dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$

Теорема 1.3.2. (Лемма Пуанкаре)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — выпуклая область, $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m \in C^1$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V потенциально.

Определение. Поле $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ называется *локально потенциальным*, если оно потенциально в некоторой окрестности любой точки.

Следствие 1.3.3. (Лемма Пуанкаре)
Пусть $\mathcal{O}$ открыто в $\mathbb{R}^m$, $V \in C^1(\mathcal{O})$, $\dfrac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \dfrac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x})$, тогда V локально потенциально.

1.4 Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути

Лемма 1.4.1. (О гусенице)
Пусть $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ — область, для всех x задана окрестность $U(x)$, $\gamma : [a, b] \to \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$, тогда существует такое дробление пути $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и такие шары $B_k = B_k(x_k, r_k) \subseteq U(x_k)$, что $\forall k\ \operatorname{Im} \gamma\big|_{[t_k - 1, t_k]} \subseteq B_k$.

Определение. Объект из последней теоремы будем называть V-гусеницей.

Определение. Пути $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathcal{O} \in C(\mathcal{O})$ будем называть *похожими*, если у них есть общая V-гусеница. При этом ограничение идем именно на гусеницу, то есть наборы t_k могут быть разными.

Лемма 1.4.2. Пусть V — локально потенциальное векторное поле, γ_1, γ_2 — похожие кусочно-гладкие пути, $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, тогда $I(V, \gamma_1) = I(V, \gamma_2)$.

Лемма 1.4.3. $C([a, b]) \ni \gamma : [a, b] \to \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathcal{O}$ — область, тогда $\exists \delta > 0$:
Если $\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathcal{O}$: $\forall t \in [a, b]$ $|\gamma(t) - \gamma_1(t)| < \delta$, $|\gamma(t) - \gamma_2(t)| < \delta$, тогда $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ похожи друг на друга.

Определение. (Интеграл локально потенциального поля по непрерывному пути)
Пусть γ — непрерывный путь, γ' — любой кусочно-гладкий путь, удовлетворяющий предыдущей лемме. тогда положим $I(V, \gamma) = I(V, \gamma')$

1.5 Гомотопия

Определение. Рассмотрим два пути $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to \mathcal{O}$. *Гомотопией* путей γ_0, γ_1 называется отображение $\Gamma : [a, b] \times [0, 1] \to \mathcal{O} \in C$, такое, что $\Gamma(t, 0) = \gamma_0(t)$ и $\Gamma(t, 1) = \gamma_1(t)$.

Определение. Гомотопия наывается *связанной*, если $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ и $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$.

Определение. Гомотопия называется *петельной*, если $\forall u \in [0, 1]$ $\Gamma(a, u) = \Gamma(b, u)$.

Теорема 1.5.1. (Интегралы по связанно гомотопным путям)
V — локально потенциальное поле, γ_0, γ_1 — связянно гомотопные пути. Тогда $I(V, \gamma_0) = I(V, \gamma_1)$.

Определение. Область называется *односвязной* если любой замкнутый путь в ней гомотопен постоянному.

Теорема 1.5.2. Пусть $\mathcal{O}$ — односвязная область в $\mathbb{R}^m$, V — локально потенциальное векторное поле в $\mathcal{O}$, тогда V потенциально в $\mathcal{O}$.

Следствие 1.5.3. (Теорема Пуанкаре для односвязной области)
$\frac{\partial V_k}{\partial \mathbf{x}_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V_j}{\partial \mathbf{x}_k}(\mathbf{x}) \Longrightarrow$ поле потенциально.