

Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

1	Многомерный анализ	2
1.1	Сведения из линейной алгебры	2
1.2	Дифференцируемость и дифференциал функций нескольких перемен- ных	6

Глава 1

Многомерный анализ

1.1 Сведения из линейной алгебры

Определение. $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ — пространство линейных отображений из \mathbb{R}^m в \mathbb{R}^n

Определение. Элементы $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называются операторами

Определение. Нормой на множестве X называется отображение $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющее свойствам

i) $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Определение. Нормированным пространством называется пара $\langle X, \| \cdot \| \rangle$

Замечание. Отображение, задаваемое формулой $d(x, y) = \|x - y\|$ является метрикой. Поэтому все нормированные пространства сразу можно считать и метрическими.

Теорема 1.1.1. (Об эквивалентности норм в конечномерных пространствах)

Пусть V — конечномерное линейное пространство, а $\| \cdot \|_1$ и $\| \cdot \|_2$ — нормы на V . Тогда

$$\exists c, C > 0: c \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1$$

Доказательство. Пусть $\|x\| = \|c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$.

i) $\| \cdot \|$ — норма.

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \geq 0$ — очевидно

· $\sqrt{\sum_{i=1}^n (\alpha c_i)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$ — очевидно

$$\cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (c_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \text{ — неравенство Минковского}$$

ii) Проверим теперь, что все нормы на V эквивалентны $\| \cdot \|$.

$$\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|_1 \leq_{\text{КБШ}} \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \|e_i\|_1^2} = c \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

тогда

$$| \|x\|_1 - \|y\|_1 | \leq \|x - y\|_1 \leq c \|x - y\|$$

Поэтому $\| \cdot \|_1$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Раз так, найдем максимум и минимум этого отображения на сфере (компакт, поэтому максимум и минимум реализуются). Пусть

$$c_1 := \min_{x \in S^n} \|x\|_1$$

$$c_2 := \max_{x \in S^n} \|x\|_1$$

Ни c_1 , ни c_2 не равны нулю (потому что норма равна нулю только на нулевом векторе, который сфере не принадлежит). Тогда

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \geq c_1 \|x\| \\ \|x\|_1 &= \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_1 \|x\| \leq c_2 \|x\| \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение теоремы. ■

Определение. Нормой оператора называется отображение $\| \cdot \| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in S^m} \|Ax\|_{\mathbb{R}^n}$$

Замечание. $\sup_{\|x\|=1} Ax = \sup_{\|x\| \leq 1} Ax$

Теорема 1.1.2. (Пространство линейных операторов)
 $\| \cdot \| : L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ — действительно норма.

Доказательство.

$$\|A(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|Ae_i\| \leq_{\text{КБШ}} \|x\| \sum_{i=1}^n \|Ae_i\|$$

Поэтому супремум конечен для всех элементов $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, то есть отображение определено корректно. Проверим свойства нормы:

i) $\|A\| = 0 \iff \forall x \in S^n \ Ax = 0 \iff A = 0$. Неотрицательность очевидна.

$$\text{ii) } \|\alpha \mathcal{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\alpha \mathcal{A} \mathbf{x}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} |\alpha| \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| = \alpha \|\mathcal{A}\|$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| = \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x} + \mathcal{B} \mathbf{x}\| \leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| + \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B} \mathbf{x}\|$$

■

Теорема 1.1.3. (Липшицевость линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \implies \mathcal{A}$ — липшицево

Доказательство.

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x} - \mathcal{A} \mathbf{y}\| = \|\mathcal{A}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| = \left\| \mathcal{A} \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right) \right\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.4. (О произведении линейных операторов)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$, тогда $\mathcal{B}\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$, причем $\|\mathcal{B}\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{B}\| \|\mathcal{A}\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}\mathcal{A}\| &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{B}(\mathcal{A} \mathbf{x})\| \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left(\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \|\mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right)\| \right) \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \cdot \sup_{\mathbf{x} \in S^n} \left\| \mathcal{B} \left(\frac{\mathcal{A} \mathbf{x}}{\|\mathcal{A} \mathbf{x}\|} \right) \right\| \\ &\leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■

Определение. Ω_m — пространство обратимых линейных операторов на \mathbb{R}^m

Лемма 1.1.5. (Критерий обратимости линейного оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ обратим тогда и только тогда, когда $m = n$ и $\text{Ker}(\mathcal{A}) = 0$

Доказательство. Линейная алгебра.

■

Лемма 1.1.6. (Об условиях, эквивалентных обратимости оператора)

$\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ обратим $\iff \exists c > 0 \forall \mathbf{x} \|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\|$, причем $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$

Доказательство. $\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \text{Ker}(\mathcal{A}) = 0 \iff \mathcal{A}$ обратим.

$$\|\mathcal{A} \mathbf{x}\| \geq c \|\mathbf{x}\| \iff \|\mathbf{y}\| \geq c \|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{y}\| \iff \|\mathcal{A}^{-1} \mathbf{y}\| \leq \frac{1}{c} \|\mathbf{y}\|$$

■

Теорема 1.1.7. (Об обратимости оператора, близкого к обратимому)

$\mathcal{A} \in \Omega_m$, $\mathcal{B} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| < \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|}$, тогда

i) $\mathcal{B} \in \Omega_m$

$$\text{ii) } \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|}$$

$$\text{iii) } \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| \leq \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|$$

Доказательство.

i, ii)

$$\|\mathcal{B}\mathbf{x}\| \geq \|\mathcal{A}\mathbf{x}\| - \|(\mathcal{A} - \mathcal{B})\mathbf{x}\| \geq \left(\frac{1}{\|\mathcal{A}^{-1}\|} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \right) \|\mathbf{x}\|$$

первое неравенство — неравенство треугольника, а второе выполнено потому, что

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}\|$$

Далее по лемме получаем обратимость \mathcal{B} и оценку на его норму.

iii)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1} &= \mathcal{A}^{-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathcal{B}^{-1} \\ \|\mathcal{A}^{-1} - \mathcal{B}^{-1}\| &\leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \|\mathcal{B} - \mathcal{A}\| \|\mathcal{B}^{-1}\| \leq_{\text{i)} } \frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|}{\|\mathcal{A}^{-1}\|^{-1} - \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\|} \|\mathcal{A} - \mathcal{B}\| \end{aligned}$$

■

Следствие 1.1.8. Множество Ω_m открыто в метрической топологии $\langle L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\| \rangle$

1.2 Дифференцируемость и дифференциал функций нескольких переменных

Определение. Непустое множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *областью*, если оно открыто и связно.

Определение. Отображение $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω — область в \mathbb{R}^m называется *дифференцируемым* в точке $\mathbf{x} \in \Omega$, если существуют $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $\alpha: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — бесконечно малое в точке \mathbf{x} , такие что

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \|\mathbf{h}\|, \mathbf{h} \rightarrow 0$$

или, что то же самое

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{\|f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \mathcal{A}\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Замечание. Функция α из определения дифференцируемости зависит не только от \mathbf{h} , но и от \mathbf{x} .

Определение. Оператор $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ из определения дифференцируемости будем называть *дифференциалом f в точке \mathbf{x}* и обозначать $d_{\mathbf{x}}f = \mathcal{A}$.

Замечание. Отображение $\mathbf{x} \mapsto d_{\mathbf{x}}f$, действующее из \mathbb{R}^m в $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ называют *дифференциалом f* .

Определение. Матрицу, соответствующую производному оператору называют *матрицей Якоби отображения f в точке \mathbf{x}* .

Теорема 1.2.1. (Единственность производной)

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, f дифференцируема в \mathbf{x} , тогда существует единственный производный оператор f в точке \mathbf{x} .

Доказательство. Проверим, что для любого $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ $\mathcal{A}\mathbf{z}$ задано однозначно. Пусть $\mathbf{h} = t\mathbf{z}$ при $t \in \mathbb{R}$:

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(t\mathbf{z}) + \alpha(\|t\mathbf{z}\|) \|t\mathbf{z}\|, t\mathbf{z} \rightarrow 0$$

Это эквивалентно

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}\mathbf{z} + t\alpha(t), t \rightarrow 0$$

Так как $\|\mathbf{z}\|$ — константа. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\mathbf{z} &= \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t} - \alpha(t), t \rightarrow 0 \iff \\ \mathcal{A}\mathbf{z} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{z}) - f(\mathbf{x})}{t} \end{aligned}$$

■

Утверждение 1.2.2. (Производный оператор линейного отображения)

Пусть $\mathcal{A} \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, тогда \mathcal{A} дифференцируемо в каждой точке и $d_{\mathbf{x}}\mathcal{A} = \mathcal{A}$

Доказательство.

$$\mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x} + \mathbf{h} - \mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{h})$$

■

Утверждение 1.2.3. (Линейность производного оператора)

Пусть $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, дифференцируемы в \mathbf{x} . Тогда отображение $\alpha f + \beta g$ дифференцируемо в точке \mathbf{x} , причем $d_{\mathbf{x}}(\alpha f + \beta g) = \alpha d_{\mathbf{x}}f + \beta d_{\mathbf{x}}g$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f + \beta g)(\mathbf{x}) \\ &= [(\alpha f)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\alpha f)(\mathbf{x})] + [(\beta g)(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - (\beta g)(\mathbf{x})] \\ &= [d_{\mathbf{x}}f + o] + [d_{\mathbf{x}}g + o] = d_{\mathbf{x}}f + d_{\mathbf{x}}g + o \end{aligned}$$

■

Теорема 1.2.4. (Дифференцируемость композиции)

Пусть $f: \Omega \rightarrow \Omega_1$, $g: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ дифференцируемы в \mathbf{x} , тогда $F = g \circ f$ дифференцируема в \mathbf{x} , причем $d_{\mathbf{x}}F = d_{f(\mathbf{x})}g \cdot d_{\mathbf{x}}f$

Доказательство.

$$\begin{aligned} g(f(\mathbf{x} + \mathbf{h})) &= g(f(\mathbf{x}) + [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h})) \\ &= \{ \mathbf{v} = [d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + r(\mathbf{h}) \} \\ &= g(f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}) = g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{v} + \tilde{r}(\mathbf{v}) \\ &= g(f(\mathbf{x})) + [d_{f(\mathbf{x})}g][d_{\mathbf{x}}f]\mathbf{h} + [d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

Осталось показать, что $[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v}) = o(\|\mathbf{h}\|)$.

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \left\| [d_{f(\mathbf{x})}g] \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|} \|r(\mathbf{h})\| \right\| + \tilde{\alpha}(\|\mathbf{v}\|) \|\mathbf{v}\|$$

Обозначим $\mathbf{w} = \frac{r(\mathbf{h})}{\|r(\mathbf{h})\|}$, причем $\|\mathbf{w}\| = 1$. Из определения нормы оператора получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]\mathbf{w}\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\|$$

Кроме того, $\|\mathbf{v}\| \leq \|d_{\mathbf{x}}f\| \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$. Окончательно получаем

$$\|[d_{f(\mathbf{x})}g]r(\mathbf{h}) + \tilde{r}(\mathbf{v})\| \leq \|d_{f(\mathbf{x})}g\| \|r(\mathbf{h})\| + \tilde{\alpha}(\|d_{\mathbf{x}}f\| \|\mathbf{h}\| + \alpha(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{v}\| \leq \beta(\|\mathbf{h}\|) \|\mathbf{h}\|$$

Для некоторой $\beta(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

■

Определение. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис \mathbb{R}^n , тогда отображения

$$f_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle f(x), \mathbf{u}_i \rangle$$

где $f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, называются *координатными функциями*.

Теорема 1.2.5. (Дифференцируемость координатных функций)

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \Omega$, тогда

f дифференцируемо в $\mathbf{x} \iff \forall i f_i$ дифференцируемо в \mathbf{x}

Доказательство.

\Leftarrow

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^n g_i(f_i(\mathbf{x}))$$

где $g_i(t) = t \mathbf{u}_i$ — линейно, то есть дифференцируемо. Тогда f дифференцируемо как сумма композиций дифференцируемых функций.

$\Rightarrow f_i$ дифференцируемы как композиции f и соответствующей проекции (проекция линейна, то есть дифференцируема).

■

Определение. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область, тогда *производной по направлению* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ в точке \mathbf{x} называется

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ \mathbf{x} + t\mathbf{u} \in \Omega}} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

если он существует

Определение. Пусть $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ — стандартный базис \mathbb{R}^n , тогда *частной производной f по k -й переменной* называется

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} f'_k \stackrel{\text{def}}{=} D_k f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} D_{\mathbf{u}_k} f(\mathbf{x})$$

Утверждение 1.2.6. Если f дифференцируема в \mathbf{x} , то f_i дифференцируемы в \mathbf{x} .