Математический анализ III

Конспект *основан* на лекциях Константина Петровича Кохася

Оглавление

Глава 1

Теория меры

1.1 Системы множеств

Определение. *Полукольцом подмножеств* множества X называют $\mathcal{P} \subseteq 2^X$, удовлетворяющее условиям

1. $\varnothing \in \mathcal{P}$.

2. $A, B \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$.

3. $\forall A, B \in \mathcal{P}\ \exists B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{P}\colon\ A \setminus B = \bigsqcup\limits_{i=1}^{k} B_i$.

Определение. *Ячейкой* в $\mathbb{R}^m$ называется множество вида

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{a}_i \leqslant \mathbf{x}_i < \mathbf{b}_i \,\}$$

Теорема 1.1.1. (Свойства полуколец)

1. $A \in \mathcal{P} \nRightarrow \bar{A} \in \mathcal{P}$

2. $A, A' \in \mathcal{P} \nRightarrow A\ @\ A' \in \mathcal{P}$, $@ \in \{\, \cup, \setminus, \triangle \,\}$

3. $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P} \Longrightarrow A \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \right) = \bigsqcup\limits_{fin} D_j$

Определение. *Алгеброй подмножеств* множества X называется множество $\mathcal{A} \in 2^X$ такое, что выполнены аксиомы:

1. $X \in \mathcal{A}$

2. $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

Теорема 1.1.2. (Свойства алгебр)

1. $\varnothing = X \setminus X \in \mathcal{A}$

2. $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$

3. $\overline{A} = X \setminus A \in \mathcal{A}$

4. $A \cup B \in \mathcal{A}$

5. $A_1, \dots A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}, \ \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

6. Алгебра подмножеств является полукольцом подмножеств

Определение. *σ-Алгеброй подмножеств* множества X называется алгебра подмножеств $\mathcal{A}$, удовлетворяющая дополнительной аксиоме:
$\{A_n\} \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

1.2 Объём

Определение. Пусть $\mathcal{P}$ — полукольцо, $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *конечно-аддитивной*, если

1. μ принимает не более одного значения из $\{+\infty, -\infty\}$

2. $\mu(\varnothing) = 0$

3. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}$, $A_i \cap A_{j \neq i} = \varnothing$, тогда если оказалось, что $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{P}$, то

   $\mu(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

Определение. Пусть $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ называется *объёмом*, если

1. μ конечно-аддитивна

2. $\mu \geqslant 0$

Определение. Объём называется *конечным*, если $\mu(X) < +\infty$.

Определение. *Классическим объёмом* в $\mathbb{R}^m$ называется объём, заданный на полукольце ячеек в $\mathbb{R}^m$, вычисляющийся по формуле $\mu([\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \prod\limits_{k=1}^{m} (\mathbf{b}_k - \mathbf{a}_k)$.

Лемма 1.2.1. (Монотонность объёма) Для объёма μ, $A, B \in \mathcal{P}$, $A \subseteq B$ выполено $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.

Теорема 1.2.2. (Свойства объёма)

1. $\forall A$, дизъюнктных $A_1 \dots, A_n \in \mathcal{P}$: $\bigsqcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leqslant \mu(A)$
   (усиленная монотонность)

2. $\forall A, A_1 \dots, A_n \in \mathcal{P}$: $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(A_i)$
   (конечная полуаддитивность)

1.3 Мера

Определение. *Мерой* называется объём $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$, обладающий свойством счётной аддитивности.

Теорема 1.3.1. Пусть $\mu\colon \mathcal{P} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивен
2. μ счетно-полуаддитивен

Теорема 1.3.2. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивно
2. μ *непрерывно снизу*, то есть $A,\ A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \subset A_2 \subset \ldots;\ A = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \Longrightarrow$ $\mu(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_i)$

Теорема 1.3.3. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — **конечный** объём. Тогда эквивалентны утверждения:

1. μ счетно-аддитивен
2. μ непрерывно снизу
3. μ *непрерывно сверху*, то есть $A,\ A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{A} : A_1 \supset A_2 \supset \ldots;\ A = \bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i \Longrightarrow$ $\mu(A) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu(A_i)$

1.4 О стандартном продолжении меры

Определение. *Пространством с мерой* называется тройка $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$, где $\mathcal{A}$ — σ-алгебра, $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ — мера.

Определение. $\langle X, \mathcal{A}, \mu\rangle$ называется *полным* (соответственно мера называется *полной*), если $\forall E \in \mathcal{A}\colon\ \mu(E) = 0 \Longrightarrow \forall A \subseteq E\ A \in \mathcal{A}$ и $\mu(A) = 0$.

Определение. $\langle X, \mathcal{P}, \mu\rangle$ называется *σ-конечным* (соответственно мера называется *σ-конечной*), если $X = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} B_k$, где $\mu(B_k) < +\infty$.

Теорема 1.4.1. (О стандартном продолжении меры)
$\langle X, \mathcal{P}, \mu_0\rangle$, μ_0 — σ-конечный объём. Тогда $\exists$ σ-алгебра $\mathcal{A}$ и мера $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$:

1. $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$, $\mu\big|_{\mathcal{P}} = \mu_0$
2. μ полная

3. Если $\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{P}$, $\mu'\big|_{\mathcal{P}} = \mu_0$, μ' — полная, тогда $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ и $\mu'\big|_{\mathcal{A}} = \mu$

4. Если $\mathcal{P}'$ — полукольцо, μ' — мера на $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}' \subseteq \mathcal{A}$, тогда $\mu' = \mu\big|_{\mathcal{P}'}$

5. $\forall A \in \mathcal{A}\ \mu(A) = \inf\left(\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mu_0(P_k) \;\middle|\; A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} P_k, P_k \in \mathcal{P}\right)$

1.5 Мера Лебега

Теорема 1.5.1. Классический объём в $\mathbb{R}^m$ является σ-конечной мерой.

Определение. *Мерой Лебега* называется стандартное продолжение классического объёма.

Определение. Алгебра, на которой определена мера Лебега, обозначается $\mathfrak{M}$.

Определение. *Измеримыми по Лебегу* называются множества $A \in \mathfrak{M}$.

Теорема 1.5.2. (Свойства меры Лебега)

1. Объединения и пересечения измеримых множеств измеримы.

2. Все открытые и замкнутые множества измеримы.

Лемма 1.5.3. (О структуре открытых множеств)

1. $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$ открыто $\implies$ $\exists Q_i$ — ячейки в $\mathbb{R}^m$ такие, что $\mathcal{O} = \bigsqcup\limits_i Q_i$, причем можно дополнительно считать, что выполнено что-либо из нижеперечисленного:
   (a) Ячейки имеют рациональные (двоично-рациональные) координаты
   (b) $\mathrm{Cl}(Q_i) \subseteq \mathcal{O}$
   (c) Q_i — кубы

2. Пусть E измеримо в $\mathbb{R}^m$, $\lambda(E) = 0$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists Q_i$ — ячейки в $\mathbb{R}^m$ такие, что $E \subseteq \bigcup\limits_i Q_i$ и $\sum\limits_i \mu(Q_i) < \varepsilon$.

Теорема 1.5.4. (Свойства меры Лебега)

3. [Канторово множество TBD]

4. [Пример неизмеримого множества TBD]

5. – A ограничено, тогда $\lambda(A) < +\infty$
   – A открыто, тогда $\lambda(A) > 0$
   – $\lambda(A) = 0 \implies$ У A нет внутренних точек

6. A измеримо, тогда $\forall \varepsilon > 0$

– $\exists G_\varepsilon$ открытое такое, что $A \subset G_\varepsilon$, $\lambda(G_\varepsilon \setminus A) < \varepsilon$
– $\exists F_\varepsilon$ замкнутое такое, что $F_\varepsilon \subset A$, $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$

Определение. Пусть $\mathcal{A} \subseteq 2^X$, тогда *борелевской оболочкой* множества $\mathcal{A}$ называют минимальную по включению σ-алгебру, содержащую $\mathcal{A}$.

Определение. *Борелевской σ-алгеброй* называется борелевская оболочка всех открытых множеств.

Следствие 1.5.5. A измеримо, тогда $\exists$ борелевские B, C: $B \subset A \subset C$ такие, что $\lambda(C \setminus B) = 0$.

Следствие 1.5.6. A измеримо, тогда $A = B \cup \mathfrak{N}$, B — борелевское, $\lambda(\mathfrak{N}) = 0$.

Следствие 1.5.7. (Регулярность меры Лебега)
Пусть A измеримо, тогда

$$\lambda(A) = \inf_{\substack{G \supset A \\ G \text{ открыто}}} \lambda(G) = \sup_{\substack{F \subset A \\ F \text{ замкнуто}}} \lambda(F) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ компакт}}} \lambda(K)$$

Лемма 1.5.8. Пусть $\langle X', \mathcal{A}', \mu' \rangle$ — пространство с мерой. $\langle X, \mathcal{A}, \_ \rangle$ — заготовка для пространства с мерой. $T : X \to X'$ — биекция, $\forall A \in \mathcal{A}$ $T(A) \in \mathcal{A}'$, $T(\varnothing) = \varnothing$. Положим $\mu(A) = \mu'(T(A))$. Тогда μ — мера на $\mathcal{A}$.

Лемма 1.5.9. $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \in C(\mathbb{R}^m)$, $\forall E \in \mathfrak{M}$ $\lambda(E) = 0 \Longrightarrow \lambda(T(E)) = 0$,
тогда $\forall A \in \mathfrak{M}$ $T(A) \in \mathfrak{M}$.