

**Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska**

Sterowanie Procesami

Sprawozdanie z projektu nr 1, zadanie nr 11

Michał Paradowski

Warszawa, 2025

Spis treści

1. Zadanie obowiązkowe	2
1.1. Analizowany proces dynamiczny	2
1.2. Podpunkt 1	2
1.2.1. Przejście od transmitancji do modelu w przestrzeni stanu	2
1.2.2. Reprezentacja graficzna systemu w przestrzeni stanów	3
1.3. Podpunkt 2	3
1.3.1. Przejście od modelu w przestrzeni stanu do transmitancji	3
1.4. Podpunkt 3	4
1.4.1. Reprezentacja graficzna modelu z regulatorem liniowym	5
1.4.2. Symulacja procesu z regulatorami różnych biegunów	5
1.5. Podpunkt 4	9
1.5.1. Obserwator pełnego rzędu	9
1.5.2. Wyliczanie współczynników obserwatora pełnego rzędu	9
1.5.3. Struktura obserwatora pełnego rzędu	10
1.6. Podpunkt 5	11
1.6.1. Struktura modelu procesu z obserwatorem oraz regulatorem liniowym korzystającym ze stanu mierzonego	11
1.6.2. Symulacja procesu z obserwatorami pełnego rzędu różnych biegunów	11
1.7. Podpunkt 6	15
1.7.1. Struktura modelu procesu z obserwatem oraz regulatorem liniowym korzystającym ze stanu obserwowanego	15
1.7.2. Symulacja procesu z regulatorem i obserwatem dla dwóch różnych stanów początkowych	15
2. Zadanie dodatkowe	19
2.1. Projekt regulatora ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem	19
2.1.1. Dobór parametrów regulatora ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem	19
2.1.2. Struktura modelu procesu z regulatorem ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem	20
2.1.3. Symulacja procesu z regulatorem ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem	20
2.2. Symulacja procesu z regulatorem ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem ze zmodyfikowaną macierzą B	24

1. Zadanie obowiązkowe

1.1. Analizowany proces dynamiczny

Proces dynamiczny analizowany w pierwszym rozdziale poniższego sprawozdania, opisany jest transmitancją ciągłą (stałe czasowe w sekundach)

$$G(x) = \frac{(s + 1,5)}{(s - 0,5)(s + 3)(s + 2)(s + 4)} \quad (1.1)$$

1.2. Podpunkt 1

1.2.1. Przejście od transmitancji do modelu w przestrzeni stanu

Rozwinięto mianownik transmitancji do postaci

$$G(s) = \frac{(s + 1,5)}{(s^4 + 8,5s^3 + 21,5s^2 + 11s - 12)} \quad (1.2)$$

Następnie za pomocą funkcji

```
[A, B, C, D] = tf2ss([1 1.5], [1 8.5 21.5 11 -12]);
```

otrzymano macierze reprezentujące proces w przestrzeni stanu

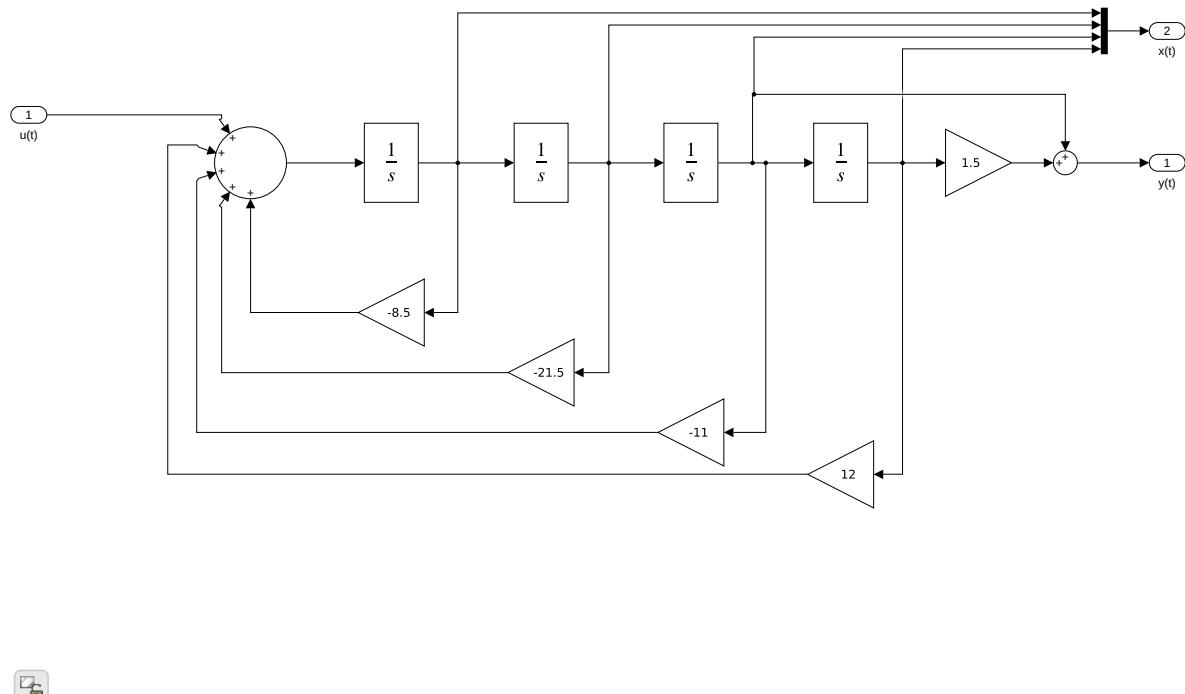
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$A = \begin{bmatrix} -8,5 & -21,5 & -11 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1,5 \end{bmatrix} \quad D = 0 \quad (1.4)$$

Reprezentują one układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -8,5x_1(t) - 21,5x_2(t) - 11x_3(t) + 12x_4(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_4(t) &= x_3(t) \\ y(t) &= x_3(t) + 1,5x_4(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

1.2.2. Reprezentacja graficzna systemu w przestrzeni stanów



Rys. 1.1. model procesu (Simulink)

1.3. Podpunkt 2

1.3.1. Przejście od modelu w przestrzeni stanu do transmitancji

Skorzystano z metody przejścia od modelu w przestrzeni stanu do transmitancji opisanej wzorem

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (1.6)$$

Macierz $s\mathbf{I} - \mathbf{A}$:

```
s*eye(3)-A
```

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s + 8,5 & 21,5 & 11 & -12 \\ -1 & s & 0 & 0 \\ 0 & -1 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \end{bmatrix}$$

Wyznacznik $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$:

```
det(s*eye(4)-A)
```

$$\det(sI - \mathbf{A}) = s^4 + 8,5s^3 + 21,5s^2 + 11s - 12 \quad (1.7)$$

Macierz dopełnień $\text{adj}(sI - \mathbf{A})$:

```
adjoint(s*eye(4)-A)
```

$$\text{adj}(sI - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s^3 & -\frac{43s^2}{2} - 11s + 12 & 12s - 11s^2 & 12s^2 \\ s^2 & \frac{s^2(2s+17)}{2} & 12 - 11s & 12s \\ s & \frac{s(2s+17)}{2} & s^3 + \frac{17s^2}{2} + \frac{43s}{2} & 12 \\ 1 & s + \frac{17}{2} & s^2 + \frac{17s}{2} + \frac{43}{2} & s^3 + \frac{17s^2}{2} + \frac{43s}{2} + 11 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

Obliczenie transmitancji:

```
C*adjoint(s*eye(4)-A)/det(s*eye(4)-A)*B+D
```

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1,5 \end{bmatrix} \frac{\text{adj}(sI - \mathbf{A})}{\det(sI - \mathbf{A})} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = \frac{s + 1,5}{s^4 + 8,5s^3 + 21,5s^2 + 11s - 12} \quad (1.9)$$

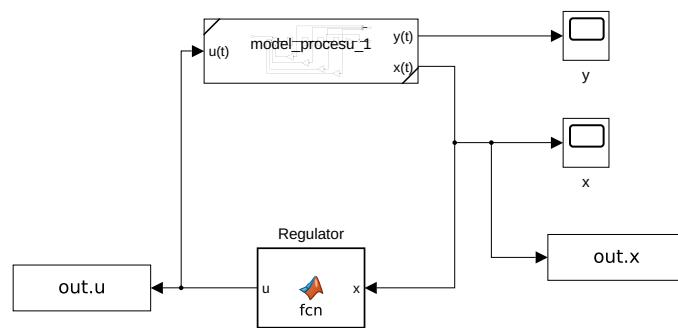
Otrzymano tę samą transmitancję co we wzorze (1.1).

1.4. Podpunkt 3

Zaprojektowano regulator liniowy sprowadzający proces do stanu zerowego. Wykorzystano 4 rzeczywiste biegundy układu zamkniętego, wszystkie równe s_b . Parametry regulatora liniowego wyznaczoną, na podstawie macierzy \mathbf{A} oraz \mathbf{B} , za pomocą funkcji

```
K = acker(A, B, [s_b s_b s_b s_b]);
```

1.4.1. Reprezentacja graficzna modelu z regulatorem liniowym



Rys. 1.2. model z regulatorem (Simulink)

Zawartość bloku fcn:

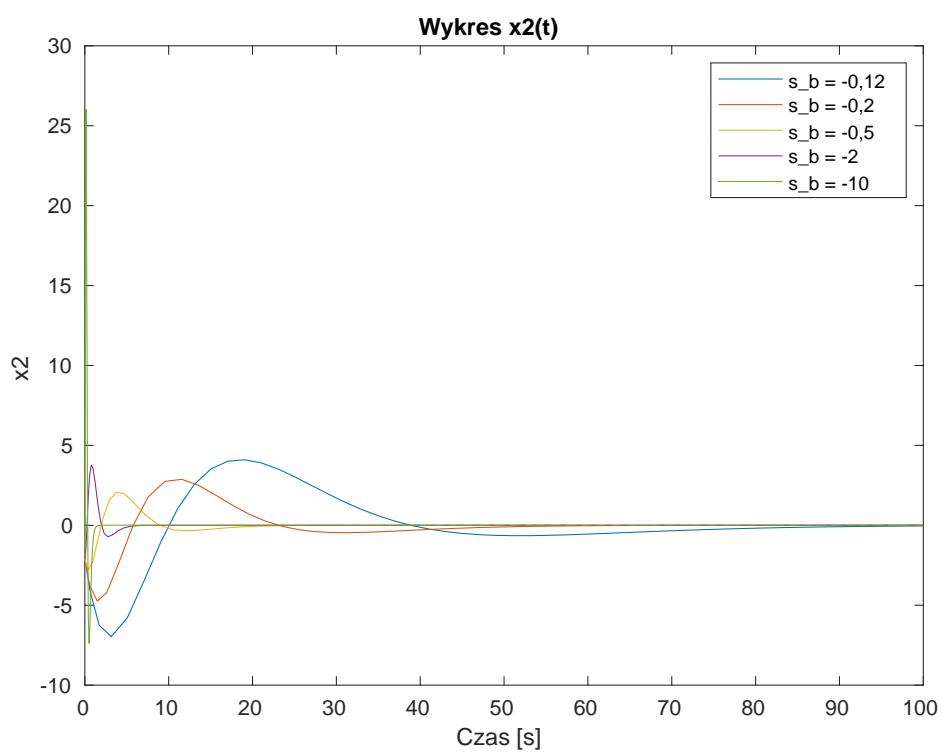
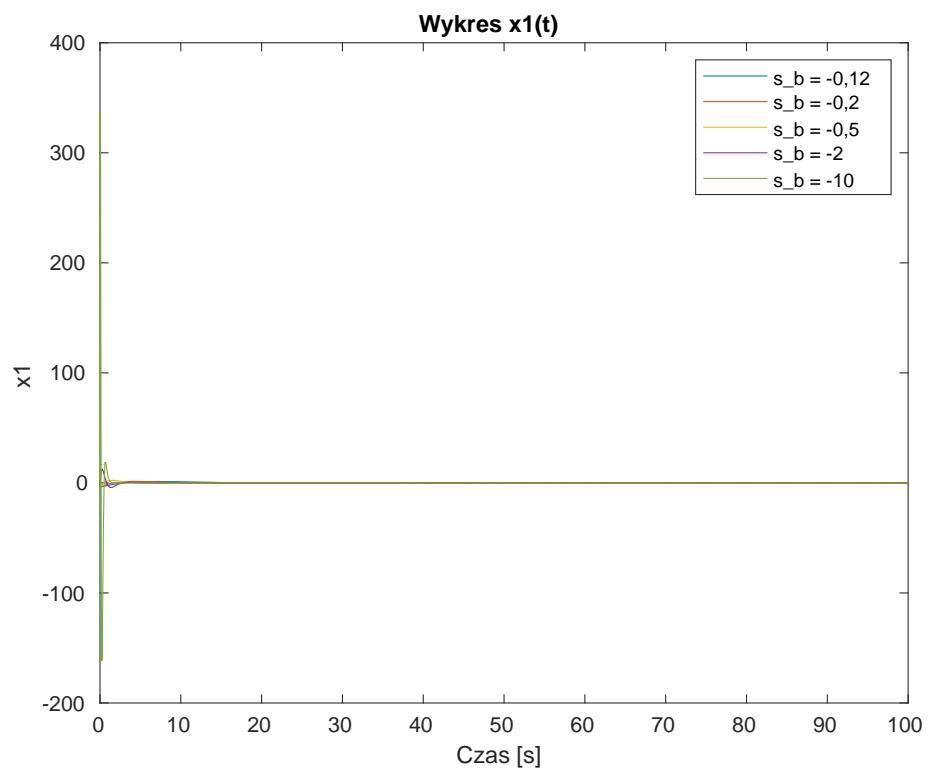
$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (1.10)$$

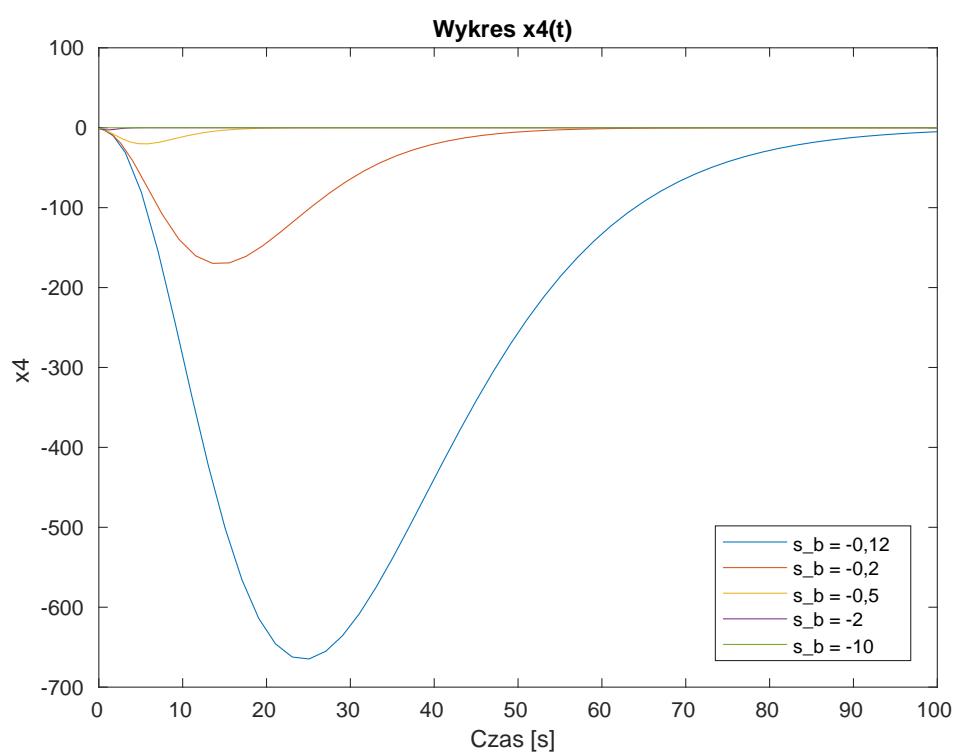
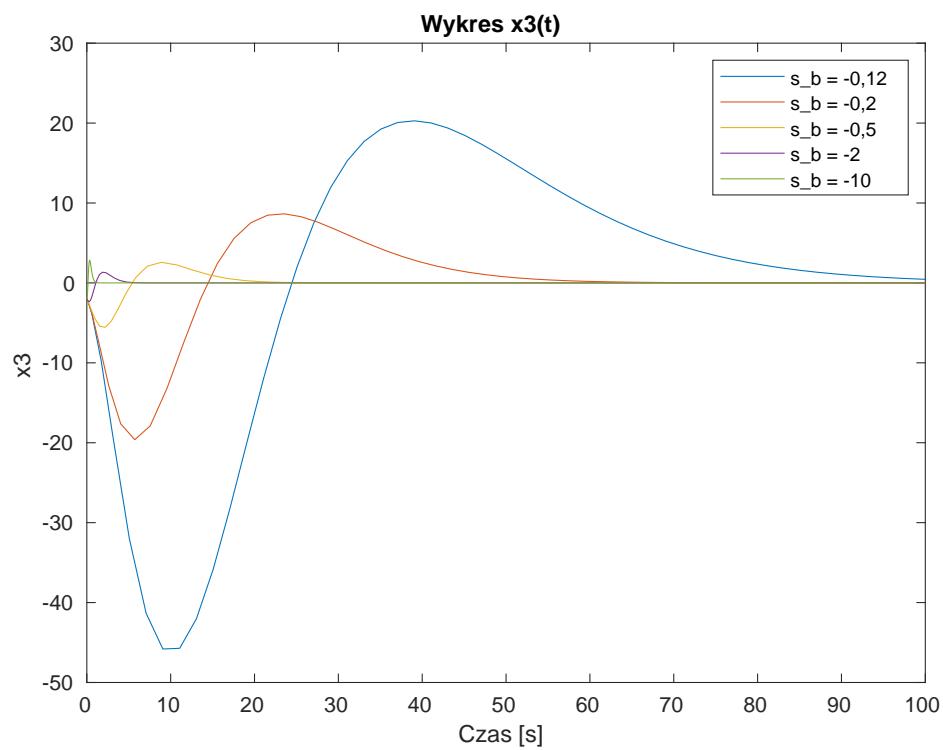
1.4.2. Symulacja procesu z regulatorami różnych biegunków

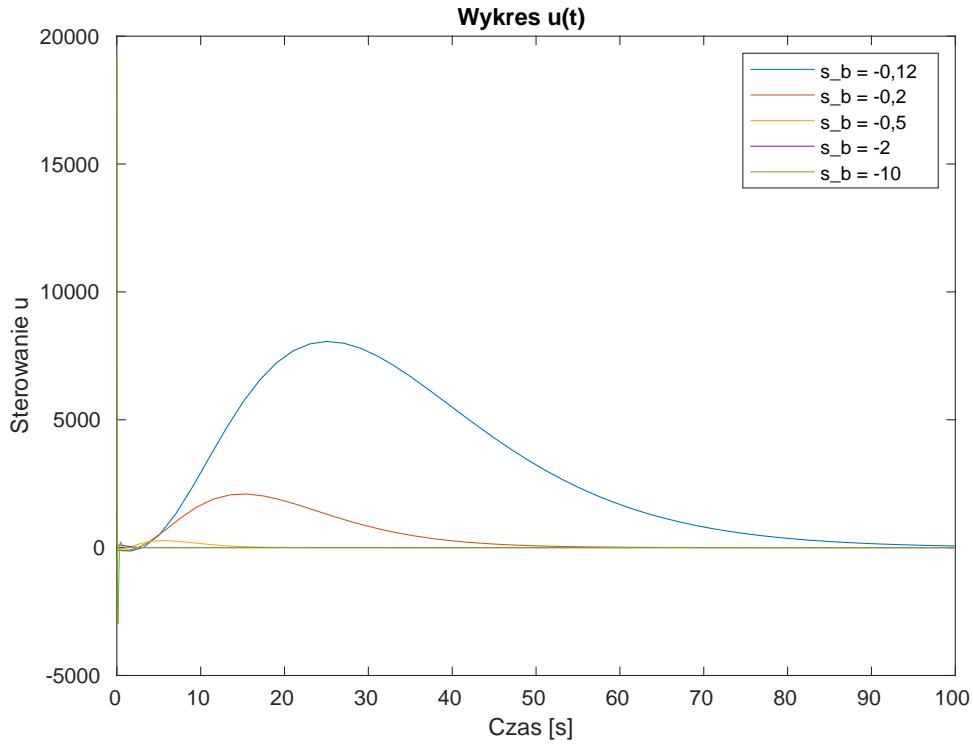
Zasymulowano pięć regulatorów z eksperymentalnie dobranymi biegunkami ciągłymi układu zamkniętego:

- „bardzo wolny”: $s_b = -0,12$,
- „wolny”: $s_b = -0,2$,
- „średni”: $s_b = -0,5$,
- „szybki”: $s_b = -2$,
- „bardzo szybki”: $s_b = -10$.

We wszystkich przypadkach, czas symulacji (t_{konec}) ustalono na 100 sekund. Na następnych stronach zamieszczono przebiegi zmiennych stanów oraz sygnału sterującego dla wszystkich pięciu regulatorów.







Do wyceny jakości przebiegów wyznaczono wartości wskaźników jakości zdefiniowanych wzorami

$$J_x = \int_0^{t_{\text{konc}}} (|x_1(t)| + |x_2(t)| + |x_3(t)| + |x_4(t)|) dt, \quad J_u = |\max(u) - \min(u)| \quad (1.11)$$

Tab. 1.1. Wartości J_x i J_u dla różnych biegunów s_b

s_b	J_x	J_u
-0,12	$2,62 \cdot 10^4$	$8,19 \cdot 10^3$
-0,2	$4,22 \cdot 10^3$	$2,20 \cdot 10^3$
-0,5	$2,47 \cdot 10^2$	$3,50 \cdot 10^2$
-2	$2,78 \cdot 10^1$	$1,01 \cdot 10^2$
-10	$8,91 \cdot 10^1$	$2,22 \cdot 10^4$

Na podstawie przebiegów oraz wartości wskaźników wybrano regulator „szybki” ($s_b = -2$) jako optymalny. Jest to najszybszy spośród zbadanych regulatorów, dla którego wartości obu wskaźników są dopuszczalne.

1.5. Podpunkt 4

1.5.1. Obserwator pełnego rzędu

Obserwator przybliża nieznany stan obiektu przy użyciu równania

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (1.12)$$

1.5.2. Wyliczanie współczynników obserwatora pełnego rzędu

Wektor L wyznaczono korzystając z równania charakterystycznego obserwatora. Wykorzystano skrypt matlab.

```
syms L1 L2 L3 L4 s s_o

L = [L1; L2; L3; L4];
Mat = s*eye(4) - A + L * C;
char_eq = det(Mat);

desired_char_eq = expand((s - s_o)^4);

char_coeffs = coeffs(char_eq, s, 'All');
desired_coeffs = coeffs(desired_char_eq, s, 'All');

eqns = char_coeffs == desired_coeffs;
sol = solve(eqns, [L1, L2, L3, L4]);

L_sol = [sol.L1; sol.L2; sol.L3; sol.L4];
```

Otrzymano

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{5503s_o}{20} - \frac{1443s_o^2}{20} - \frac{47s_o^3}{5} - \frac{9s_o^4}{10} - \frac{58049}{160} \\ \frac{3s_o^4}{5} + \frac{18s_o^3}{5} + \frac{141s_o^2}{10} + \frac{481s_o}{10} + \frac{5503}{80} \\ -\frac{47s_o}{5} - \frac{27s_o^2}{5} - \frac{12s_o^3}{5} - \frac{2s_o^4}{5} - \frac{481}{40} \\ \frac{4s_o^4}{15} + \frac{8s_o^3}{5} + \frac{18s_o^2}{5} + \frac{18s_o}{5} + \frac{47}{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

Wzory na elementy wektora $\dot{\hat{x}}$ również wyznaczono przy pomocy skryptu matlab.

```
syms xh1 xh2 xh3 xh4 l1 l2 l3 l4 u y

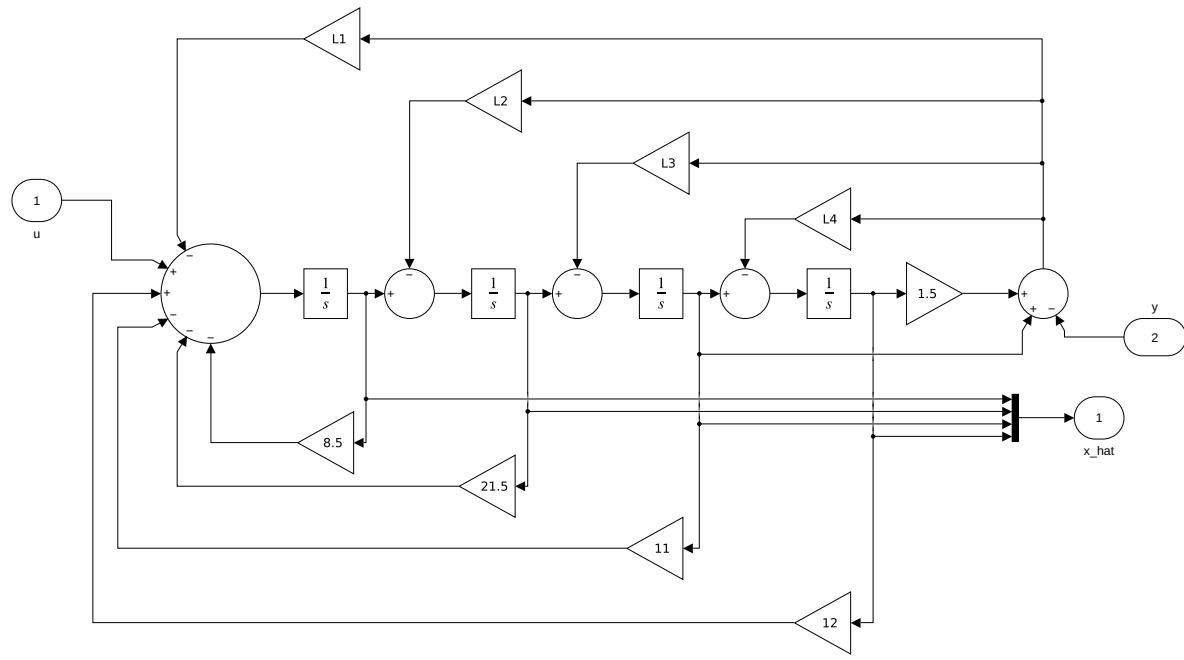
xh = [xh1; xh2; xh3; xh4];
L = [l1; l2; l3; l4];

xh_dot = A * xh + B * u + L * (y - C * xh);
```

Otrzymano

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1(t) &= u(t) - 8,5\hat{x}_1(t) - 21,5\hat{x}_2(t) - 11\hat{x}_3(t) + 12\hat{x}_4(t) - l_1(\hat{x}_3(t) + 1,5\hat{x}_4(t) - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= \hat{x}_1(t) - l_2(\hat{x}_3(t) + 1,5\hat{x}_4(t) - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_3(t) &= \hat{x}_2(t) - l_3(\hat{x}_3(t) + 1,5\hat{x}_4(t) - y(t)) \\ \dot{\hat{x}}_4(t) &= \hat{x}_3(t) - l_4(\hat{x}_3(t) + 1,5\hat{x}_4(t) - y(t)) \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.5.3. Struktura obserwatora pełnego rzędu

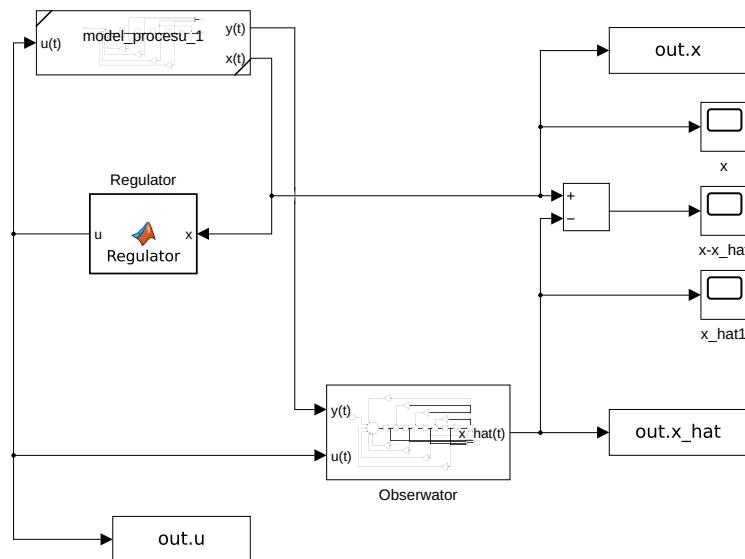


Rys. 1.3. model obserwatora (Simulink)

1.6. Podpunkt 5

Zasymulowano układ obiektu, regulatora liniowego wykorzystującego stan mierzony oraz obserwatora pełnego rzędu.

1.6.1. Struktura modelu procesu z obserwatorem oraz regulatorem liniowym korzystającym ze stanu mierzonego



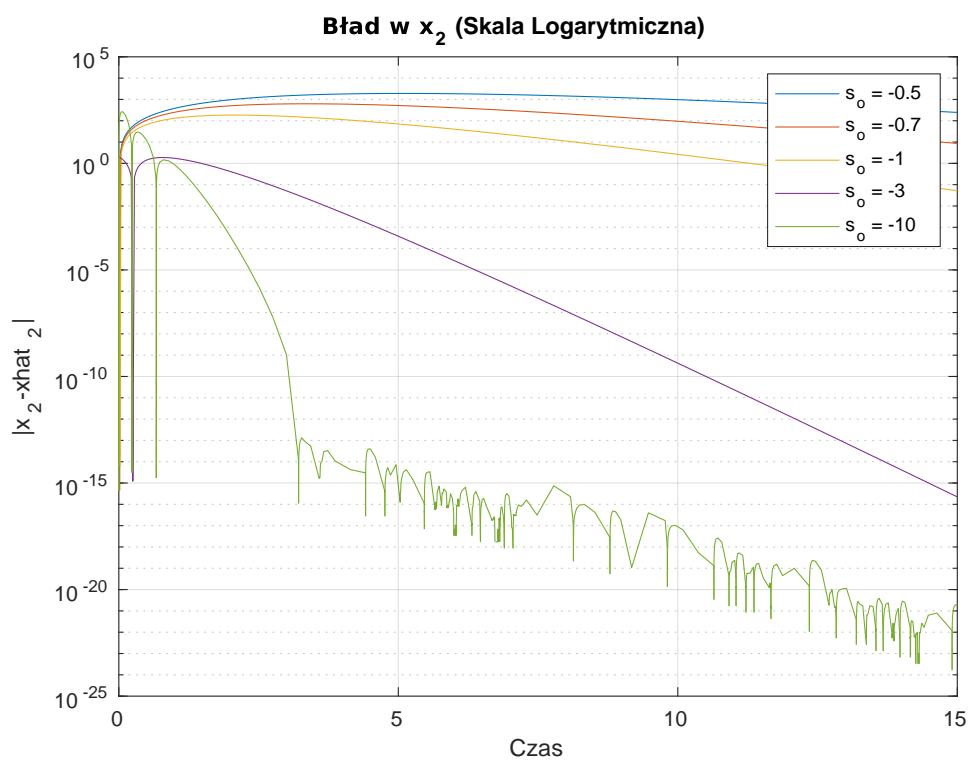
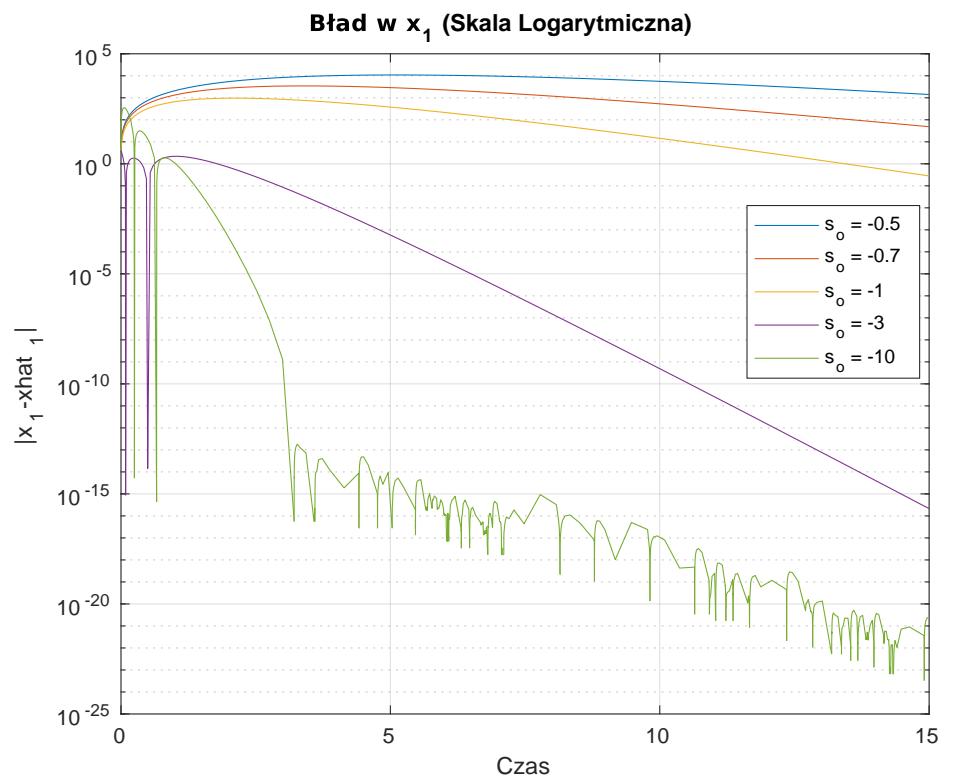
Rys. 1.4. regulatorem ze stanu mierzonego i obserwatorem (Simulink)

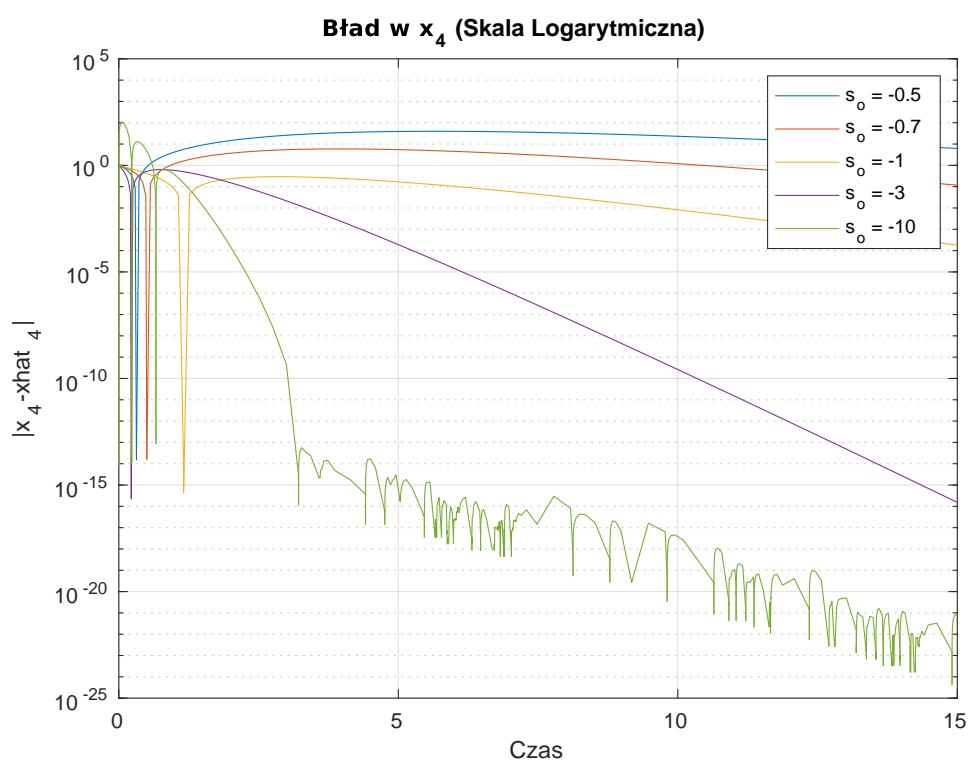
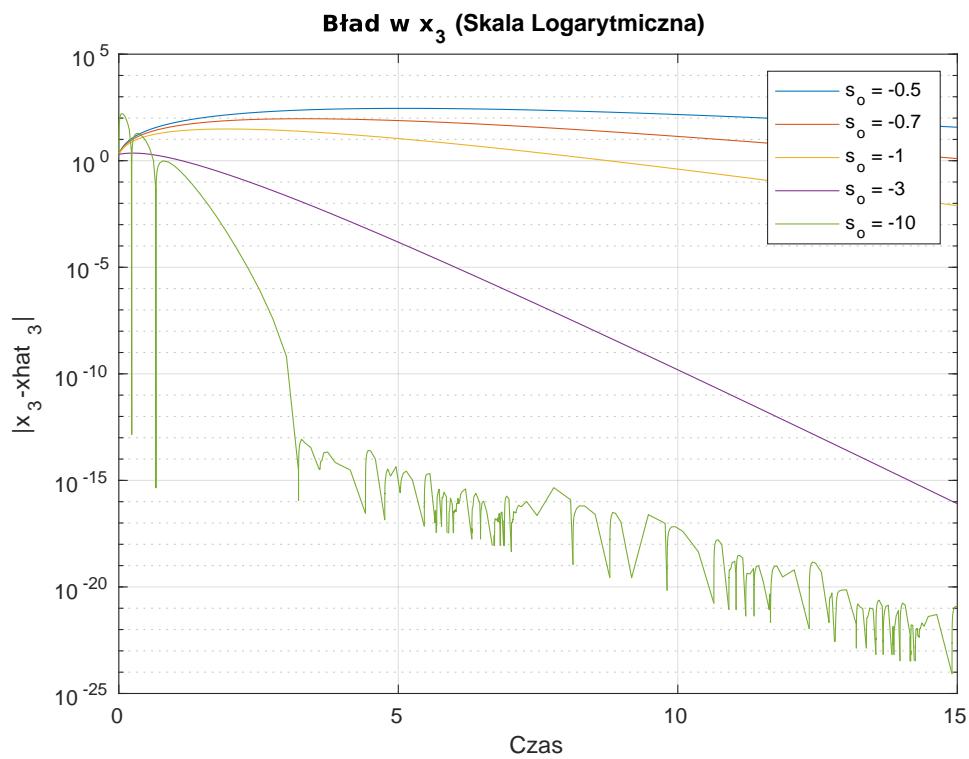
1.6.2. Symulacja procesu z obserwatorami pełnego rzędu różnych biegunków

Zasymulowano pięć obserwatorów pełnego rzędu z eksperymentalnie dobranymi biegunkami:

- „bardzo wolny”: $s_o = -0,5$,
- „wolny”: $s_o = -7$,
- „średni”: $s_o = -1$,
- „szybki”: $s_o = -3$,
- „bardzo szybki”: $s_o = -10$.

We wszystkich przypadkach, czas symulacji (t_{konec}) ustalono na 15 sekund. Na następnych stronach zamieszczono przebiegi estymowanych zmiennych stanów oraz błędów estymacji dla wszystkich pięciu obserwatorów.





Do oceny jakości estymacji wyznaczono wartości wskaźnika jakości zdefiniowanego wzorem

$$J_o = \int_0^{t_{\text{konec}}} (|x_1(t) - \hat{x}_1(t)| + |x_2(t) - \hat{x}_2(t)| + |x_3(t) - \hat{x}_3(t)| + |x_4(t) - \hat{x}_4(t)|) dt \quad (1.15)$$

gdzie $\hat{x}_j(t_i)$ oznacza estymowaną wartość j -tej zmiennej stanu w chwili t_i .

Tab. 1.2. Wartości wskaźnika jakości J dla obserwatorów z różnymi biegunami s_o

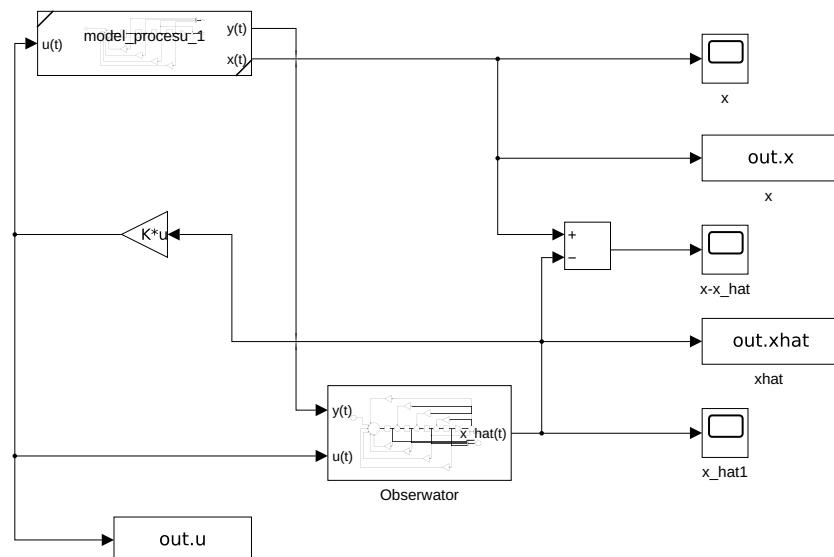
s_o	J
-0,5	$1,098\ 84 \cdot 10^5$
-0,7	$2,554\ 32 \cdot 10^4$
-1	$4,843\ 43 \cdot 10^3$
-3	9,310 90
-10	$1,353\ 69 \cdot 10^3$

Na podstawie przebiegów oraz wartości wskaźnika jakości wybrano obserwator „szybki” ($s_o = -3$) jako optymalny. Zapewnia on najlepszą dokładność estymacji przy zachowaniu stabilności układu. Obserwator z biegiem $s_o = -10$ wykazuje większą wrażliwość na zakłócenia, co skutkuje wyższym wskaźnikiem jakości mimo teoretycznie szybszej zbieżności.

1.7. Podpunkt 6

Zasymulowano układ obiektu, regulatora liniowego wykorzystującego stan obserwowany oraz obserwatora pełnego rzędu.

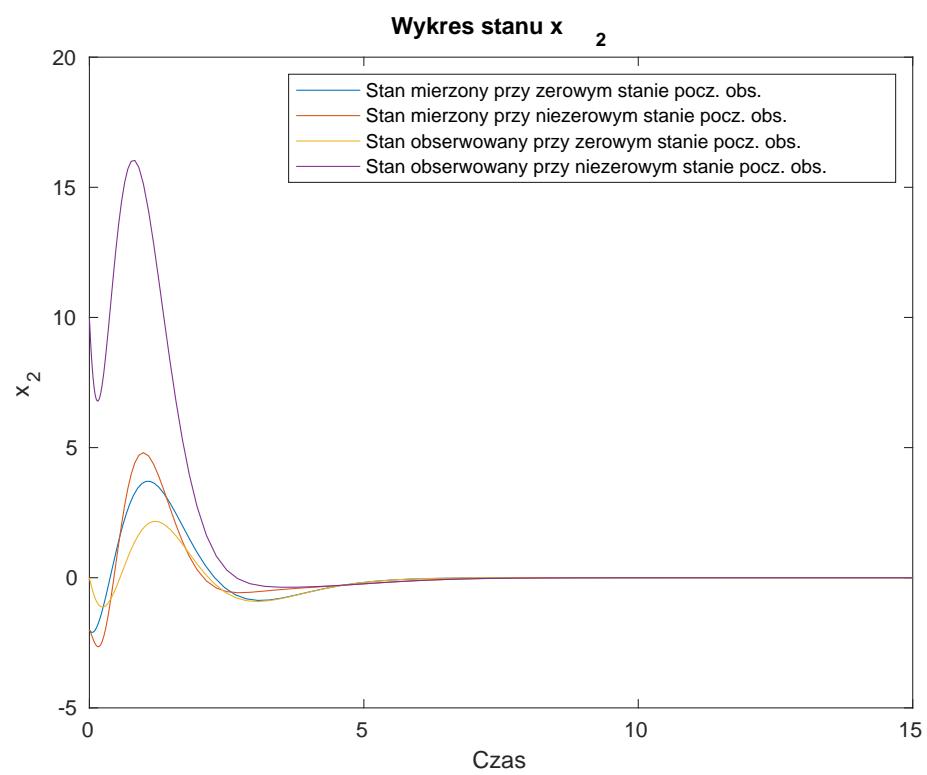
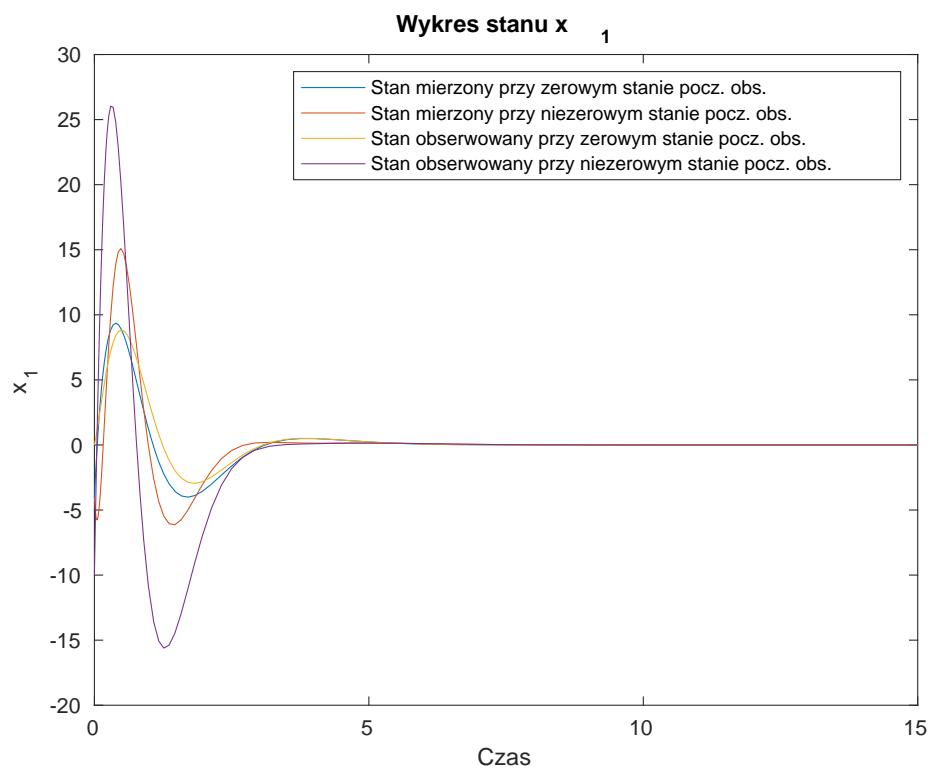
1.7.1. Struktura modelu procesu z obserwatorem oraz regulatorem liniowym korzystającym ze stanu obserwowanego

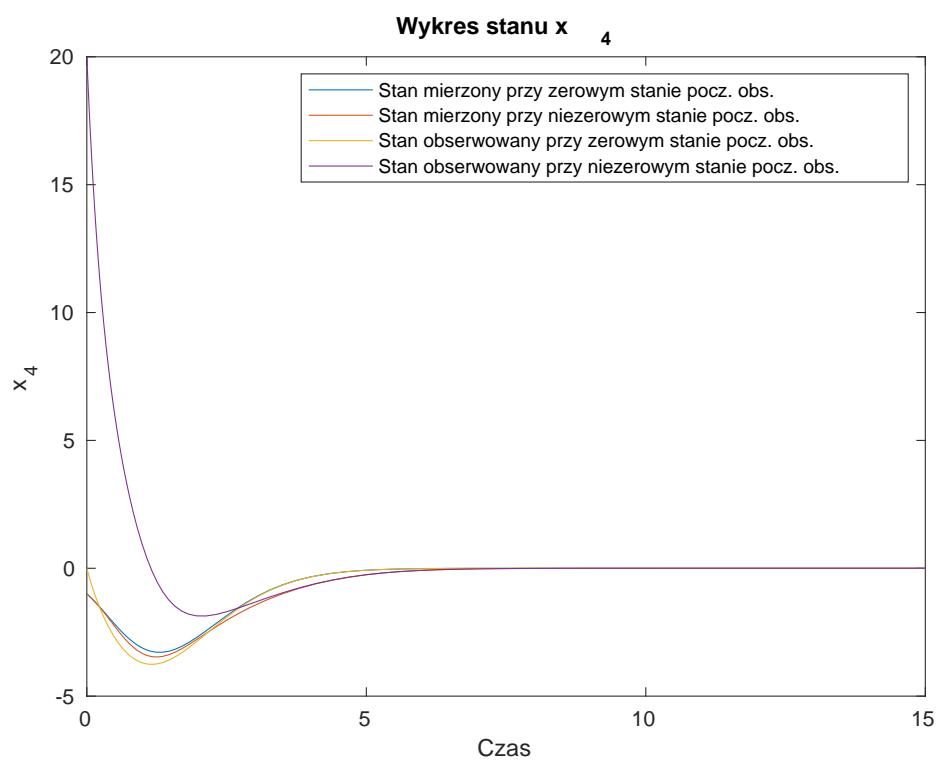
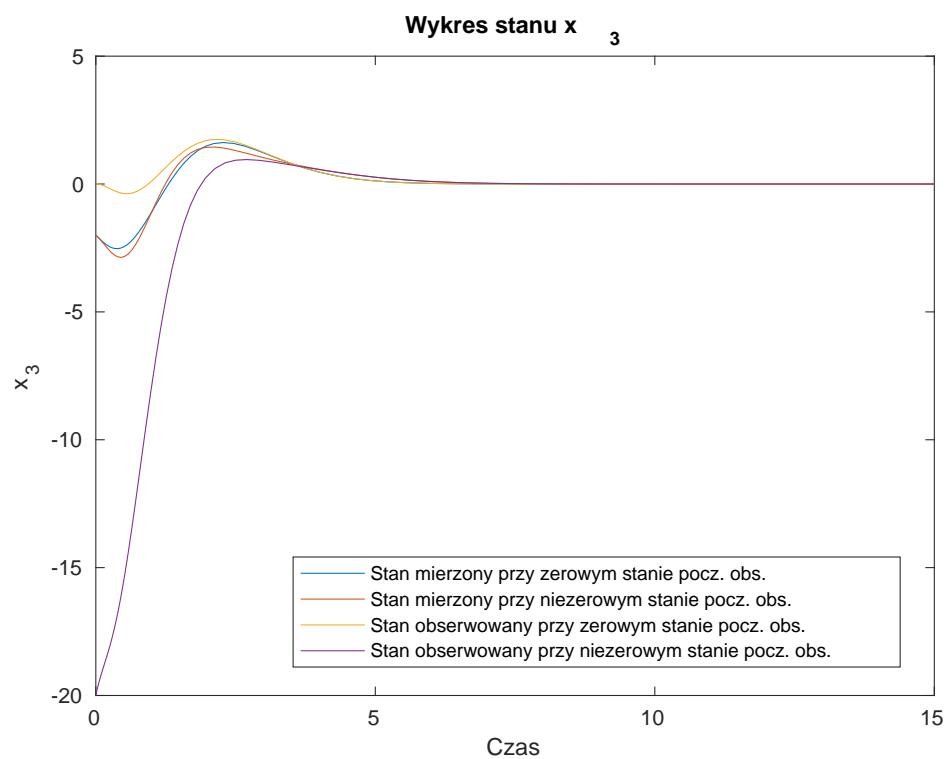


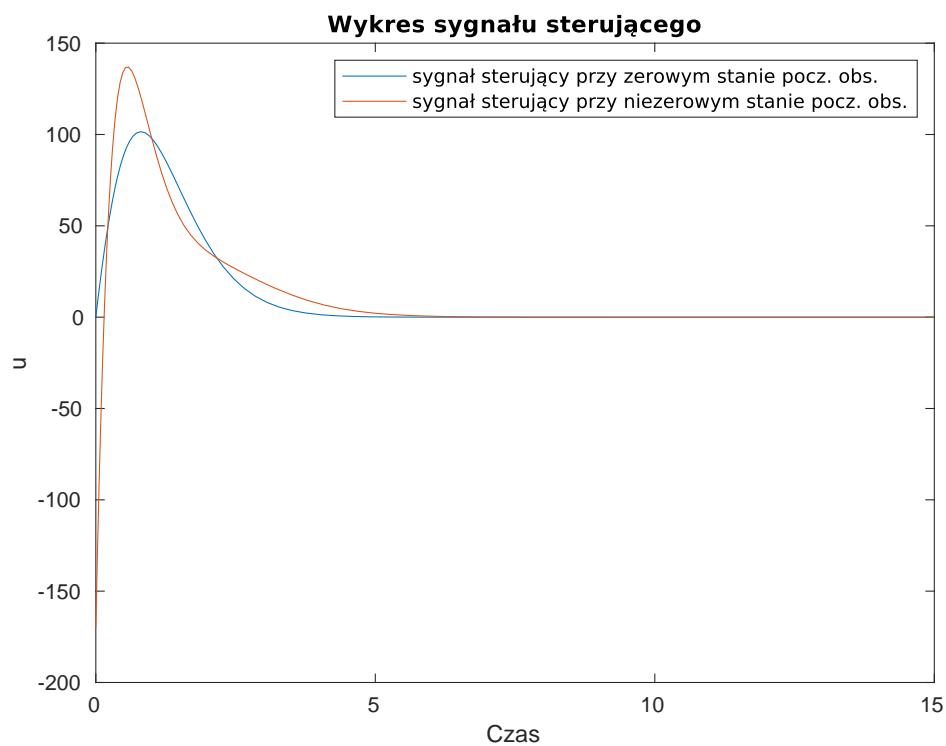
Rys. 1.5. model procesu z regulatorem ze stanu obserwowanego (Simulink)

1.7.2. Symulacja procesu z regulatorem i obserwatorem dla dwóch różnych stanów początkowych

Przeprowadzono symulację procesu z obserwatorem oraz regulatorem z wcześniej dobranymi biegunami $s_b = -2, s_o = -3$, stanem początkowym obiektu $\mathbf{x}(0) = [-4 \ -2 \ -2 \ -1]^T$ oraz dla dwóch różnych stanów początkowych obserwatora: $\hat{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ i $\hat{\mathbf{x}}(0) = [-10 \ 10 \ -20 \ 20]^T$. W obu przypadkach czas symulacji ustalono na 15 sekund. Na następnych stronach zamieszczono przebiegi zmiennych stanu oraz sygnału sterowania.







Zarówno obserwator jak i regulator sprawują się bardzo dobrze i w przeciągu około 7 sekund sprowadzają obiekt do stanu zerowego bez jego pomiaru.

Michał Paradowski, Warszawa, kwiecień 2025

2. Zadanie dodatkowe

2.1. Projekt regulatora ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem

Zaprojektowano regulator ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem. Na potrzeby regulatora definiuje się dodatkową zmienną stanu $x_e(t) = \int e dt$ której celem jest całkowanie uchybu. Innymi słowy

$$\dot{x}_e(t) = e(t) = y^{zad}(t) - y(t) = y^{zad}(t) - Cx(t) \quad (2.1)$$

Uzyskujemy rozszerzone równanie stanu, które ma postać

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{x}_e(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0_{n \times 1} \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} y^{zad}(t) \\ \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{x}_e(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{A}_r \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}_r u(t) + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} y^{zad}(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Prawo regulacji tego regulatora wyraża się wzorem

$$u(t) = -[\mathbf{K} \ K_e] \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} = [k_1 \ k_2 \ k_e] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

przy czym elementy wektora sprzężeń zwrotnych $\mathbf{K} = [\mathbf{K} \ K_e]$ oblicza się w taki sposób, aby $|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_r - \mathbf{B}_r\mathbf{K})| = 0$.

2.1.1. Dobór parametrów regulatora ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem

Eksperymentalnie dobrano trzy różne biegunki s_b układu:

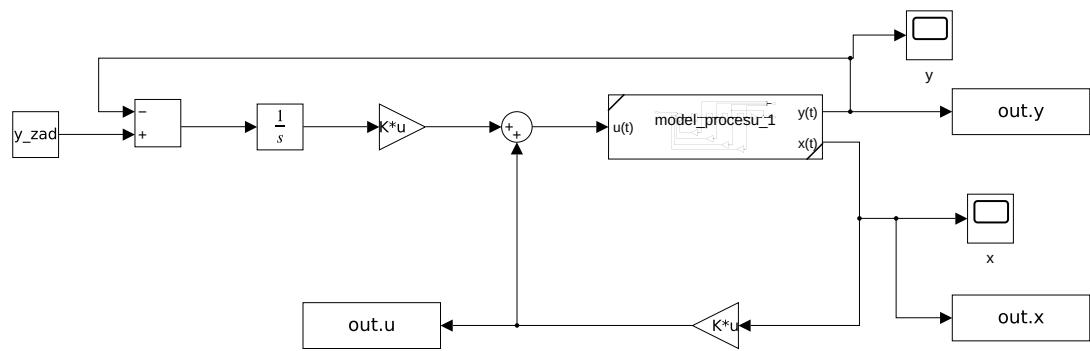
- „wolny”: $s_b = -1$
- „średni”: $s_b = -2$
- „szybki”: $s_b = -10$

Parametry $[\mathbf{K} \ K_e]$ wyliczono za pomocą prostego skryptu

```
n = size(A, 1);
KK_e = acker(A_r, B_r, s_b * ones(1, n + 1));
K = K_e(1, 1:n);
K_e = K_e(1, n+1);
```

Dla każdego z trzech otrzymanych zestawów parametrów regulatora przeprowadzano symulację trwającą 10 sekund.

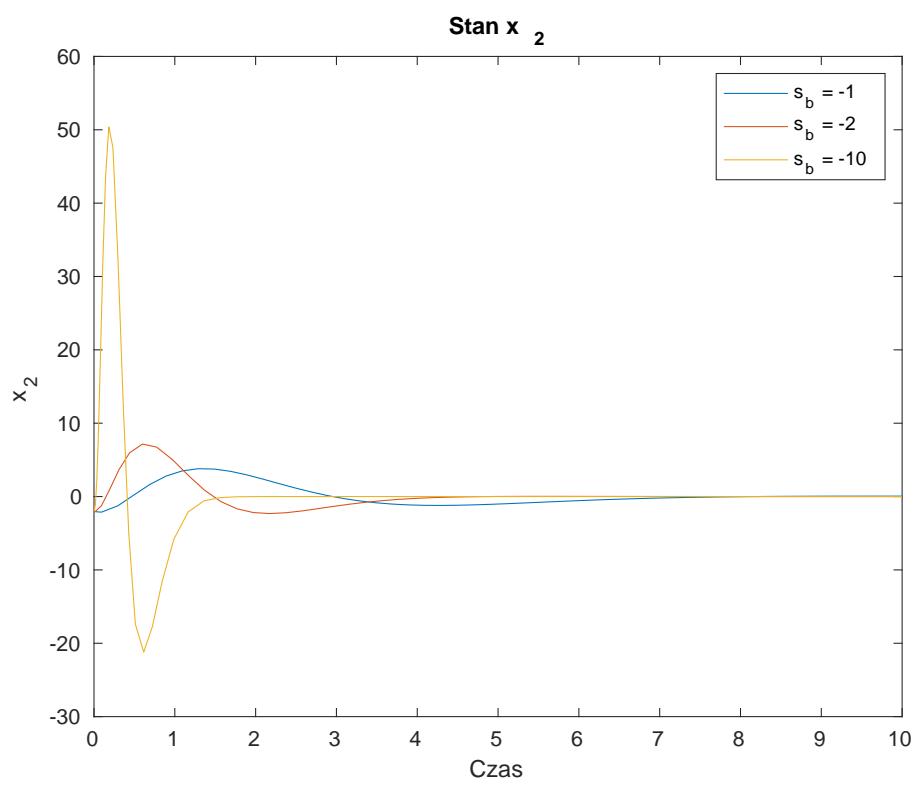
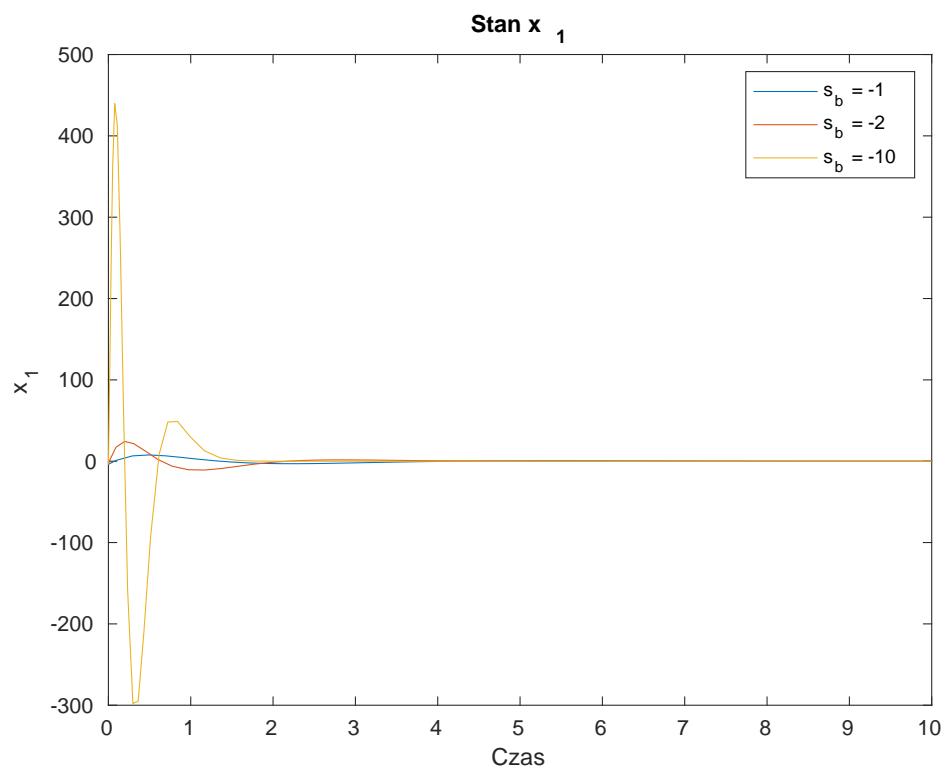
2.1.2. Struktura modelu procesu z regulatorem ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem

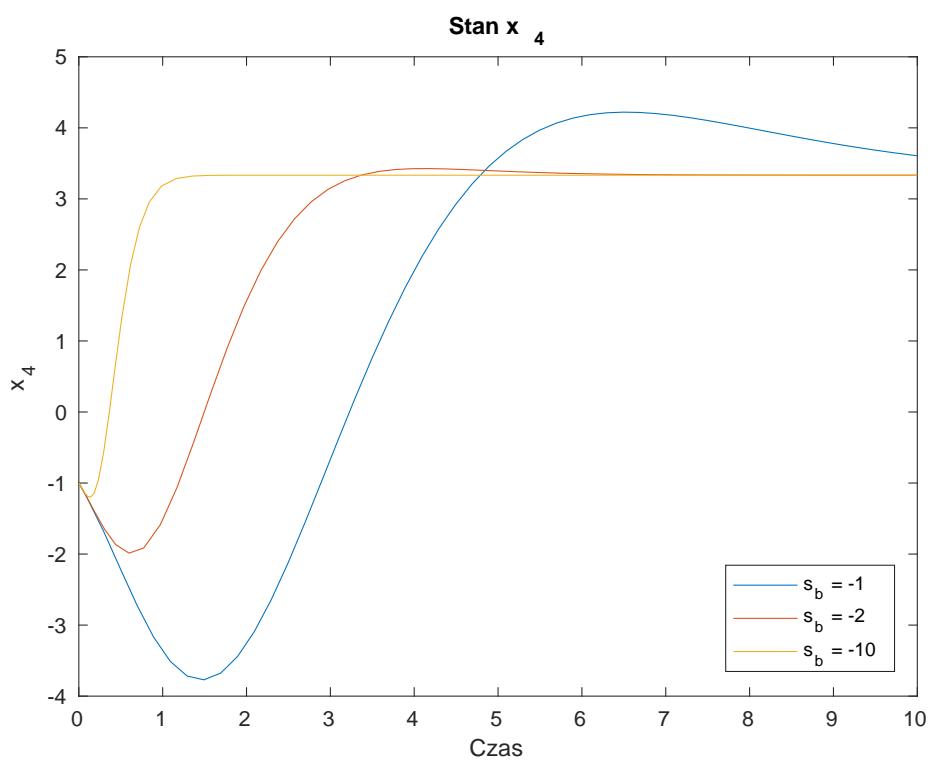
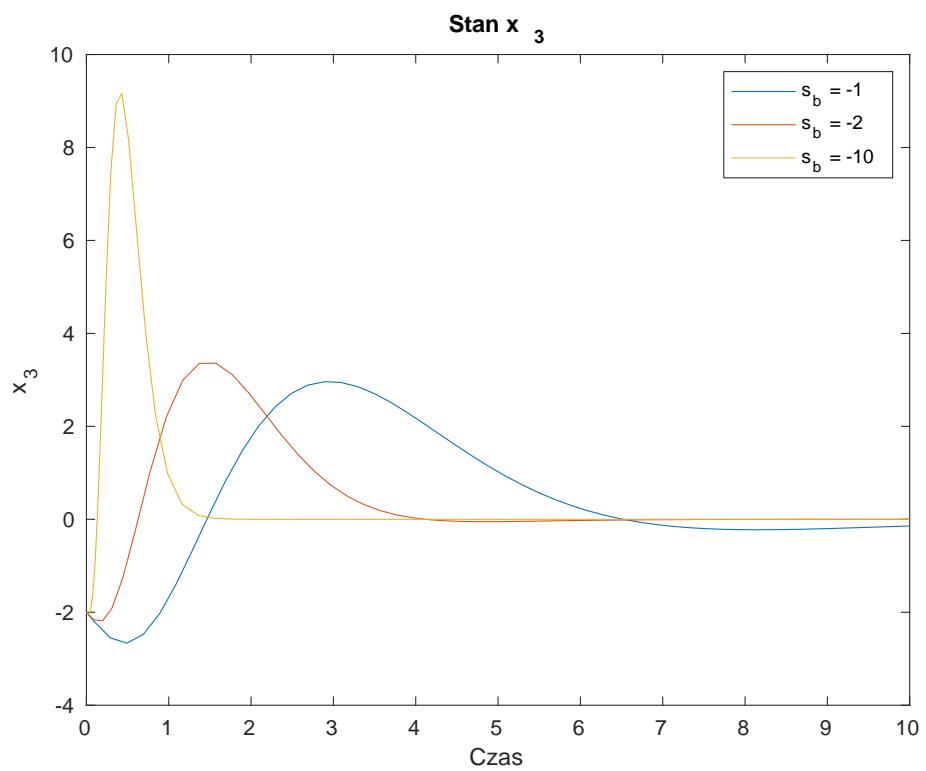


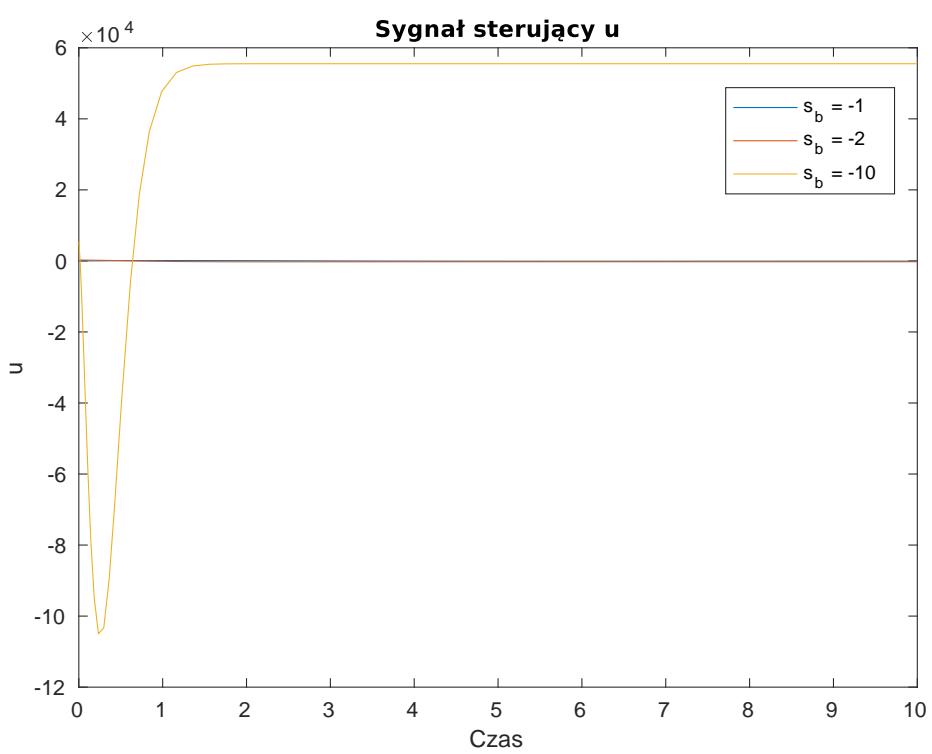
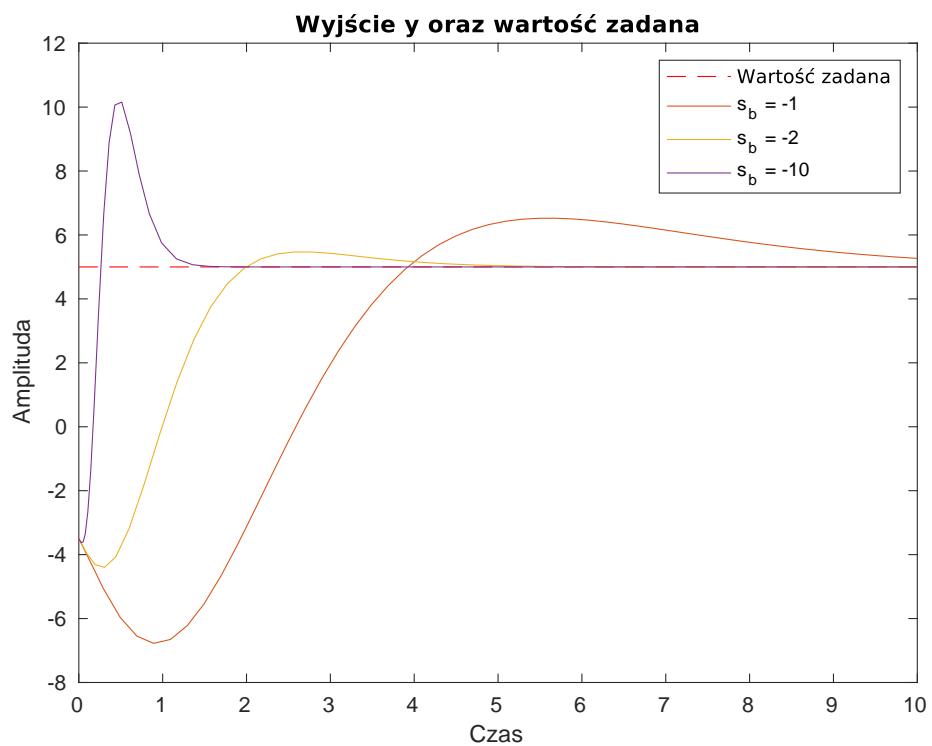
Rys. 2.1. model procesu z regulatorem ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem (Simulink)

2.1.3. Symulacja procesu z regulatorem ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem

Poniżej przedstawiono wyniki trzech przeprowadzonych symalcji





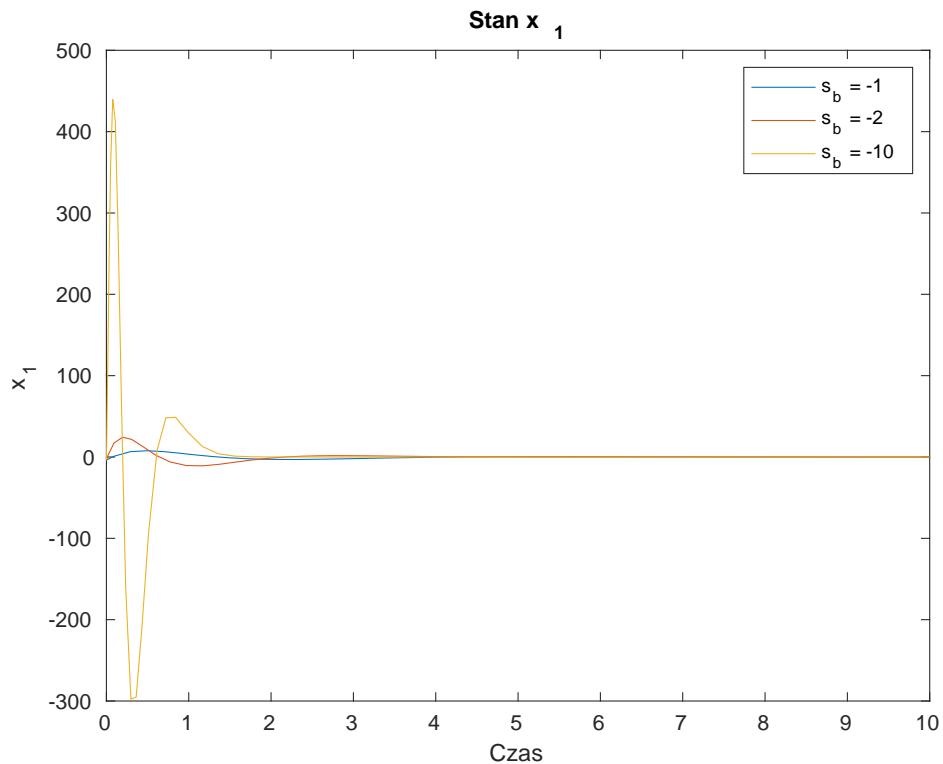


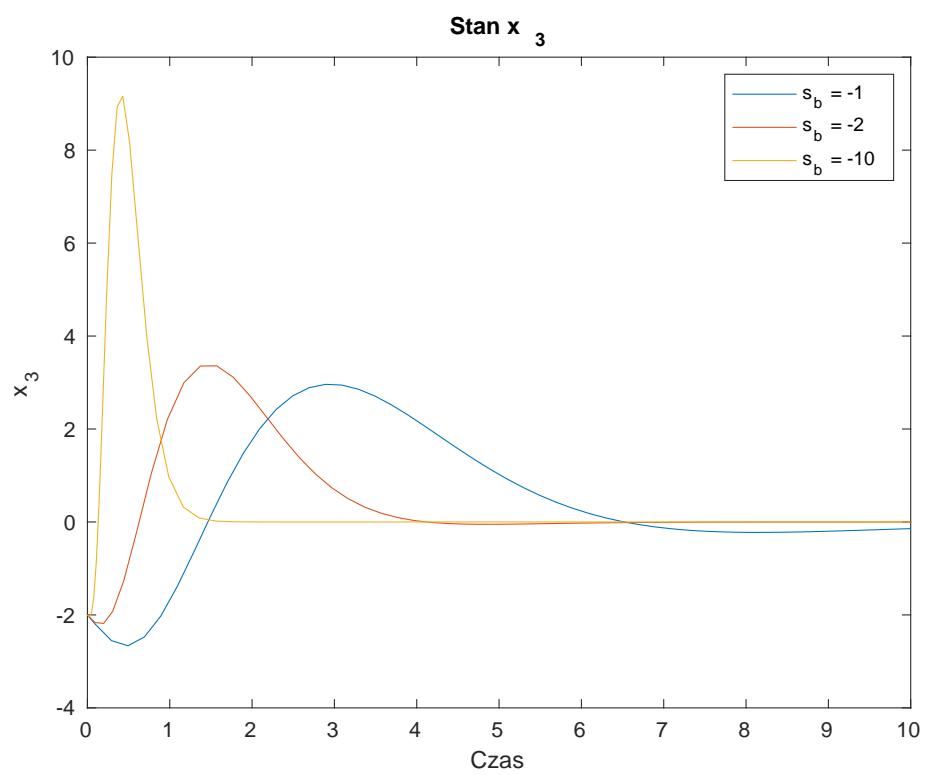
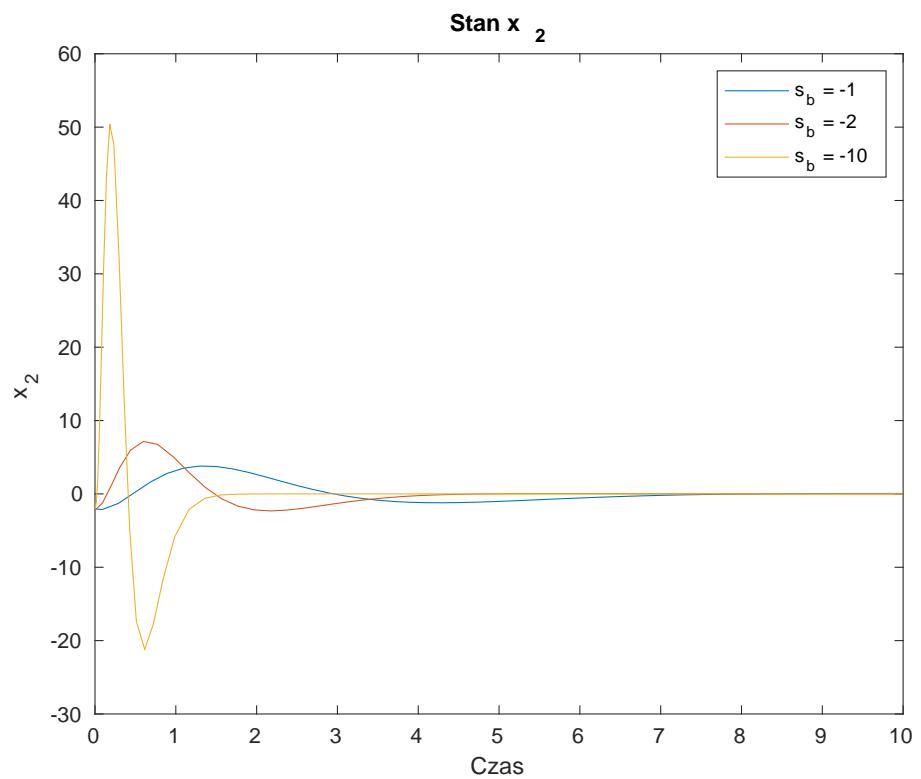
Z wykresów wynika że wszystkie bieguny poskutkowały poprawnymi wynikami, jednak układ zamknięty z biegunem „wolnym” potrzebował ponad 10 sekund osiągnąć zadaną wartość wyjścia, zaś ten z biegunem „szybkim” potrzebował wartości sygnału sterującego o rzędu wielkości przekraczającej te potrzebne przy pozostałych biegunkach. Biegun „średni” poskutkował satysfakcjonującym wynikiem w dostatecznie krótkim czasie wynoszącym około 5 sekund.

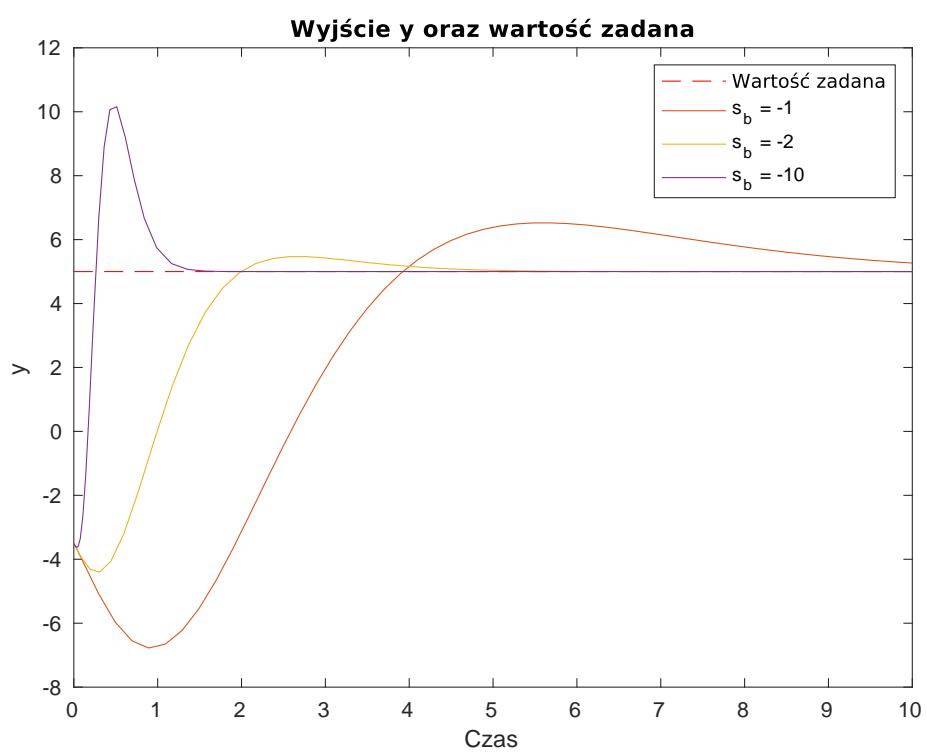
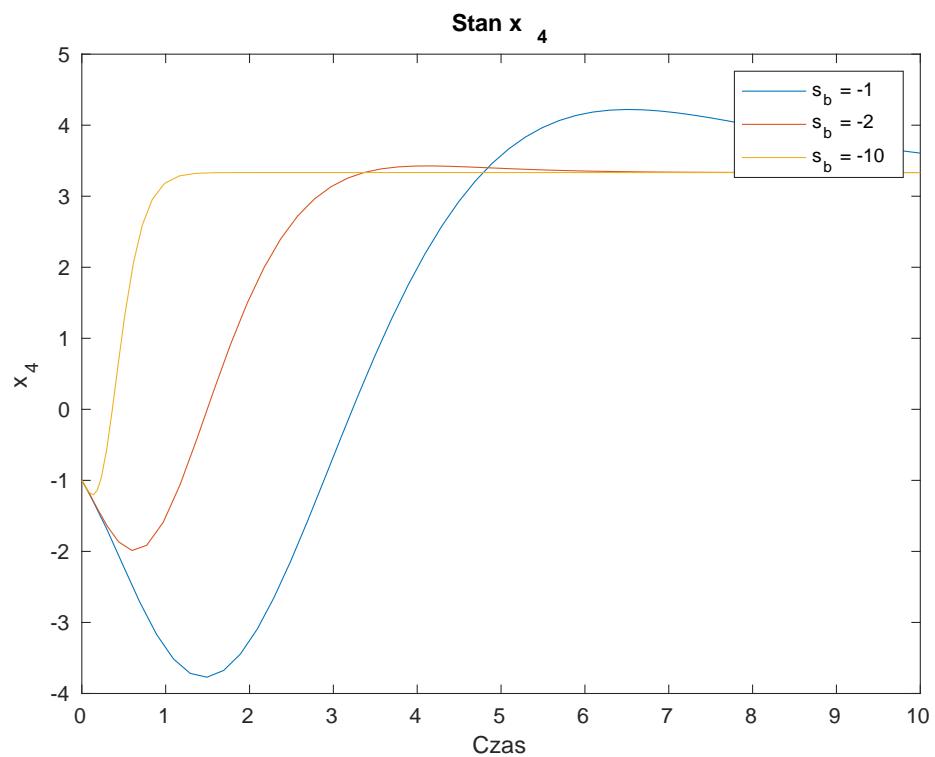
2.2. Symulacja procesu z regulatorem ze sprzężeniem od stanu i całkowaniem ze zmodyfikowaną macierzą B

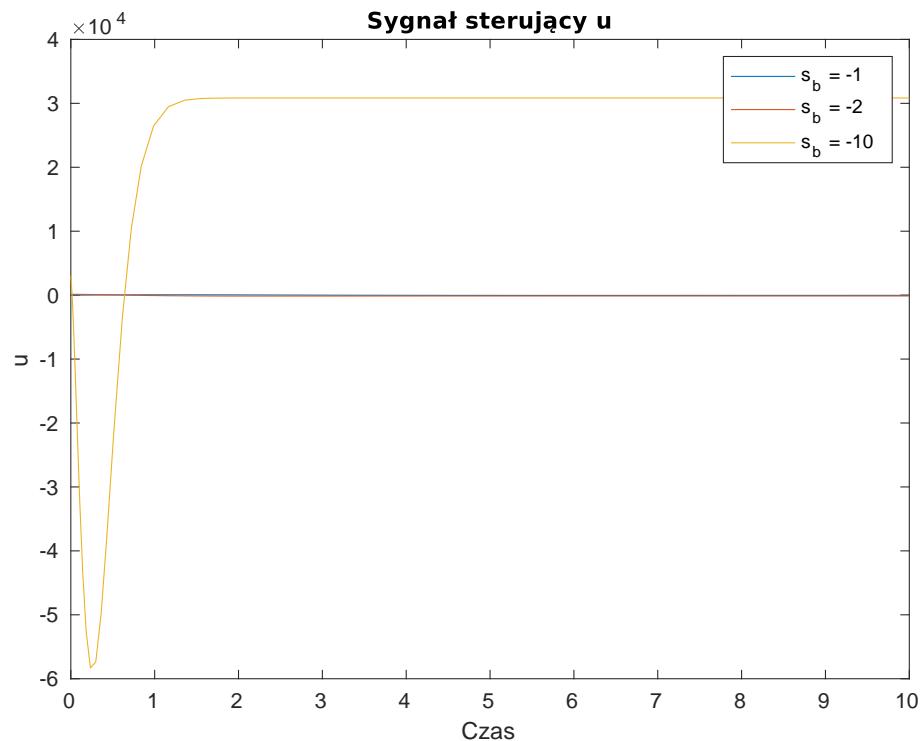
Aby przetestować sprawność regulatora przy większych wartościach macierzy B (większym wpływie sygnału sterującego na stan obiektu), zastąpiono macierz B macierzą $B' = 1,8 \cdot B$. Wszystkie obliczenia przeprowadzono tak jak w poprzedniej symulacji z uwzględnieniem nowych wartości B' .

Wyniki symulacji w formie wykresów przedstawiono na następnych stronach.









Z wykresów wynika, że zmiana wartości macierzy \mathbf{B} nie ma dużego wpływu na przebieg zmiennych stanu ani zmiennej wyjścia. Istotną różnicę można dostrzec na wykresie sygnału sterującego. Dla bieguna „szybkiego”, wartość sygnału sterującego mieści się już w granicach $[-6 \cdot 10^4; 3 \cdot 10^4]$. Nie osiąga już tak dużych wartości jak te z przedziału $[-1,2 \cdot 10^5; 6 \cdot 10^4]$ z poprzedniej symulacji.