

1 Задачи с практики

1. Попробуйте найти более «короткую» версию `iszro`
$$\text{iszro} \equiv \lambda b\ t\ f.\ b\ (\lambda x.\ f)\ t$$
2. опробуйте найти другое определение `succ`
$$\text{succ} \equiv \lambda n\ s\ z.\ n\ s\ (s\ z)$$
3. Попробуйте найти определение `plus` с использованием `succ`
$$\text{plus} \equiv \lambda m\ n.\ m\ \text{succ}\ n$$
4. Можно ли `mult2` записать короче?
$$\text{mult} \equiv \lambda m\ n\ s.\ m\ (n\ s)$$

2 Домашнее задание

1. Выполните подстановку
 - (a) $\lambda y\ z.\ x\ y\ w\ (z\ x) \quad [x := \lambda y.\ y\ w]$
$$\lambda y\ z.\ (\lambda y.\ y\ w)\ y\ w\ (z\ (\lambda y.\ y\ w)) \equiv \lambda y\ z.\ y\ w\ w\ (z\ (\lambda y.\ y\ w))$$
 - (b) $\lambda x\ y.\ x\ y\ (\lambda x.\ x\ y)\ x \quad [x := \lambda z.\ z]$
$$\lambda x\ y.\ x\ y\ (\lambda x.\ x\ y)\ x$$
 - (c) $x\ y\ (\lambda x\ z.\ x\ y\ z)\ y \quad [y := x\ z]$
$$x\ (x\ z)\ (\lambda x'\ z'.\ x'\ (x\ z)\ z')\ (x\ z)$$
2. Уберите лишние скобки и при возможности выполните β -преобразование
 - (a) $(x\ (\lambda x.\ ((x\ y)\ x))\ y)$
$$\begin{aligned} & (x\ (\lambda x.\ ((x\ y)\ x))\ y) \equiv \\ & x\ (\lambda x.\ ((x\ y)\ x))\ y \equiv \\ & x\ (\lambda x.\ (x\ y\ x))\ y \equiv \\ & x\ (\lambda x.\ x\ y\ x)\ y \end{aligned}$$
 - (b) $((\lambda p.\ (\lambda q.\ ((q\ (p\ r))\ s)))\ ((q\ (p\ r))\ s))$
$$\begin{aligned} & ((\lambda p.\ (\lambda q.\ ((q\ (p\ r))\ s)))\ ((q\ (p\ r))\ s)) \equiv \\ & (\lambda p.\ (\lambda q.\ ((q\ (p\ r))\ s)))\ ((q\ (p\ r))\ s) \equiv \\ & (\lambda p.\ (\lambda q.\ (q\ (p\ r)\ s)))\ ((q\ (p\ r))\ s) \equiv \\ & (\lambda p.\ (\lambda q.\ q\ (p\ r)\ s))\ ((q\ (p\ r))\ s) \equiv \\ & (\lambda p\ q.\ q\ (p\ r)\ s)\ ((q\ (p\ r))\ s) \equiv \\ & (\lambda p\ q.\ q\ (p\ r)\ s)\ (q\ (p\ r)\ s) \equiv \\ & \lambda q'.\ q'\ ((q\ (p\ r)\ s)\ r)\ s = \\ & \lambda q'.\ q'\ (q\ (p\ r)\ s\ r)\ s. \end{aligned}$$
3. Покажите, что для любых M и N выполняется $\lambda x.\ M\ N = \mathbf{S}\ (\lambda x.\ M)\ (\lambda x.\ N)$
$$\mathbf{S}\ (\lambda x.\ M)\ (\lambda x.\ N) \equiv \lambda x'.\ (\lambda x.\ M)\ x'\ ((\lambda x.\ N)\ x') \equiv \lambda x.\ M\ N$$

4. Покажите, что

(a) $\mathbf{SKK} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{SKK} \equiv$$

$$\lambda x. \mathbf{K} x (\mathbf{K} x) \equiv$$

$$\lambda x. x \equiv$$

$$\mathbf{I}$$

(b) $\mathbf{B} = \mathbf{S} (\mathbf{K} \mathbf{S}) \mathbf{K}$

$$\mathbf{S} (\mathbf{K} \mathbf{S}) \mathbf{K} =$$

$$\lambda x. (\mathbf{K} \mathbf{S}) x (\mathbf{K} x) =$$

$$\lambda x. \mathbf{K} \mathbf{S} x (\mathbf{K} x) =$$

$$\lambda x. \mathbf{S} (\mathbf{K} x) =$$

$$\lambda x'. \mathbf{S} (\mathbf{K} x') =$$

$$\lambda x'. (\lambda f g x. f x (g x)) (\mathbf{K} x') =$$

$$\lambda x'. (\lambda g x. (\mathbf{K} x') x (g x)) =$$

$$\lambda x'. (\lambda g x. \mathbf{K} x' x (g x)) =$$

$$\lambda x'. (\lambda g x. x' (g x)) =$$

$$\lambda x' g x. x' (g x) =$$

$$\lambda f g x. f (g x) =$$

$$\mathbf{B}.$$

5. Реализуйте функцию возведения в степень для чисел Чёрча.

$$\text{pow} \equiv \lambda m n. n (\text{mult } m) 1$$