

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ

7 семестр

2022 г.

## Численное моделирование нестационарного одномерного течения вязкого газа с использованием неявных разностных схем

Попов А.В.

### Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Задачи практикума</b>	<b>5</b>
2.1	Дифференциальные модели . . . . .	5
2.1.1	Баротропный газ . . . . .	5
2.1.2	Теплопроводный газ . . . . .	7
2.2	Основные обозначения . . . . .	8
2.3	Общие замечания по РС . . . . .	9
2.4	Задания практикума . . . . .	11
2.4.1	Отладочный тест . . . . .	11
2.4.2	Негладкие начальные данные . . . . .	14
2.4.3	Стабилизация осциллирующей функции . . . . .	15
2.4.4	Задача „протекания“ . . . . .	16
2.5	Отчет . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Разностные схемы</b>	<b>17</b>
3.1	Схема с центральными разностями $(\rho, u)$ . . . . .	17
3.2	Схема с центральными разностями $(\rho, u)$ (последовательная) . . . . .	19
3.3	Схема с центральными разностями $(u, \rho)$ (последовательная) . . . . .	20
3.4	Схема с центральными разностями $(\rho, u)$ (параллельная) . . . . .	20
3.5	Схема с односторонними разностями $(\rho, u)$ (последовательная) . . . . .	21
3.6	Схема с односторонними разностями $(u, \rho)$ (последовательная) . . . . .	21
3.7	Схема с односторонними разностями $(\rho, u)$ (параллельная) . . . . .	21
3.8	Схема с центральными разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная) . . . . .	22
3.9	Схема с односторонними разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная) . . . . .	22
3.10	Схема с центральными разностями $(\ln(\rho), u)$ . . . . .	22
3.11	Схема с центральными разностями $(\ln(\rho), u)$ (последовательная) . . . . .	23
3.12	Схема с центральными разностями $(u, \ln(\rho))$ (последовательная) . . . . .	24
3.13	Схема с центральными разностями $(\ln(\rho), u)$ (параллельная) . . . . .	24
3.14	Схема с односторонними разностями $(\ln(\rho), u)$ . . . . .	25
3.15	Схема с односторонними разностями $(\ln(\rho), u)$ (последовательная) . . . . .	25
3.16	Схема с односторонними разностями $(u, \ln(\rho))$ (последовательная) . . . . .	25
3.17	Схема с односторонними разностями $(\ln(\rho), u)$ (параллельная) . . . . .	26

3.18	Разностная схема А.Г.Соколова $(\rho, \rho u)$ . . . . .	26
3.19	Разностная схема А.Г.Соколова $(\rho, u)$ . . . . .	27
3.20	Разностная схема А.Г.Соколова $(u, \rho)$ . . . . .	27
3.21	Разностная схема А.Г.Соколова $(\rho, u)$ (параллельная) . . . . .	28
3.22	Схема с центральными разностями $(\rho, u, \theta)$ (последовательная) . . . . .	28
3.23	Схема с центральными разностями $(\ln(\rho), u, \theta)$ (последовательная) . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Теоретические вопросы</b> . . . . .	<b>29</b>
4.1	Существование и единственность решений РС . . . . .	29
4.2	Положительность значений функции плотности . . . . .	31
4.3	Оценки погрешности численного интегрирования . . . . .	32
4.4	Дифференциальное приближение . . . . .	34
4.5	Диссипативные и дисперсионные свойства . . . . .	36
4.6	Уравнение переноса . . . . .	39
4.7	Линейное уравнение Бюргерса с вязкостью . . . . .	41
4.8	Уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом . . . . .	42
4.9	Нелинейное уравнение Бюргерса . . . . .	43
4.10	Метод прогонки . . . . .	44
<b>5</b>	<b>Рекомендации по программированию</b> . . . . .	<b>44</b>
5.1	Общие замечания . . . . .	44
5.2	Структура программы . . . . .	45
5.3	Процедура <i>Shema</i> . . . . .	47
5.4	Имена переменных . . . . .	49
5.5	Переход от разностной задачи к СЛАУ. . . . .	50
	<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>51</b>

# 1 Введение

Математическое моделирование еще в XX веке прочно заняло свое лидирующее место среди инструментов, используемых при анализе и верификации новых сложных и дорогостоящих проектов в самых различных прикладных областях. Одним из основных способов математического описания разного рода процессов являются дифференциальные уравнения. За прошедшие годы накоплен огромный опыт записи в дифференциальной форме различных законов, действующих в естественных науках, в экономике и других далеких от физики сферах деятельности человечества. Конечно, прежде всего для этого применяются обыкновенные дифференциальные уравнения, но все больше встречается научных направлений, где требуется использование уравнений в частных производных (УрЧП).

Математические модели, которые содержат уравнения (или системы уравнений) в частных производных, давно являются предметом научного интереса математиков. С математической точки зрения произведена классификация основных уравнений, выписаны постановки и обоснованы разрешимость и корректность ряда начально-краевых задач, у части задач найдены способы их точного решения. Эта работа требует очень высокой математической подготовки исследователя и осложнена разнообразием и сложностью встречающихся задач, прежде всего их нелинейностью. Следствием этого является то,

что строгая законченная математическая теория на сегодняшний день существует далеко не для всех моделей.

Учитывая важность и насущность прикладных задач, поиск решений разного рода дифференциальных задач продолжается даже при отсутствии теорем об их разрешимости. Для этого применяются самые разнообразные методы начиная от классических, разработанных в теории дифференциальных уравнений типа разделения переменных, асимптотических и многих других и до численных методов решения. Идея свести поиск приближенных решений дифференциальных задач к решению последовательности чисто алгебраических конечномерных задач возникла еще в XIX веке. С появлением ЭВМ этот способ стал еще привлекательнее, а применимость вполне доступной для очень широкого круга ученых и инженеров, если отбросить вопросы строго математического обоснования подобных методов.

Одним из подходов приближенного решения дифференциальных уравнений является метод разностных схем (РС). Он является очень наглядным, а его алгоритм может быть применен для решения как уже известных уравнений, так и адаптирован под новые задачи. Построение РС для новых сложных задач требует знания и опыта использования этого метода при решении более простых, уже исследованных уравнений подобного класса, называемых модельными задачами. Ответы на вопросы о сходимости и устойчивости РС, предлагаемых для решения сложных задач, как правило, не удается получить в разумные сроки без привлечения специалистов очень высокой квалификации. Поэтому эти РС должны строиться исходя из опыта решения модельных задач и исследоваться на устойчивость и сходимость, с использованием практических критериев.

Предлагаемый практикум предназначен для обучения применения РС на примере сложной нелинейной системы УрЧП составного типа, описывающей движение вязкого газа. На примере этой системы демонстрируется, как для решения нелинейной системы УрЧП можно предложить РС, которая приводит к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В практикуме рассматриваются как простейшая краевая задача „прилипания“ газа к границе области, так и более сложная задача „протекания“, когда на части границы необходимо задавать не только скорость, но и плотность газа. Изучение свойств численного алгоритма и создание его программной реализации начинается с наиболее простых задач с постепенным их усложнением.

В основе практикума лежат два подхода для построения РС. Первый способ — плотность и скорость газа определяются в одних и тех же узлах [1], второй подход — скорость задается в целых узлах, а плотность в полуцелых [2]. В обоих случаях сотрудниками кафедры вычислительной математики механико-математического факультета МГУ были построены РС, для которых было проведено их обоснование. В целях увеличения числа различных РС (каждый студент получает свою РС), в эти схемы были внесены изменения, которые сохранили основные свойства оригинальных схем.

Одним из этих самых важных свойств является факт сохранения положительности значений сеточной функции плотности с течением времени. РС практикума можно разделить на три части. Для одних РС это достигается особой аппроксимацией конвективных членов. В других схемах — за счет непрямого вычисления функции плотности  $\rho$ , а нахождения функции  $g = \ln \rho$  из разностной аппроксимации преобразованного уравнения неразрывности. В оставшихся схемах это свойство выполняется условно, если удовлетворяются условия априорной оценки ошибки вычисления плотности в норме  $C$  и предположение, что функция  $\rho$ , задающая распределение плотности газа, всегда положительна.

Рассматриваемые РС либо безусловно устойчивы, либо условие устойчивости не яв-

ляется слишком обременительным. В целях построения РС, обладающих минимальными условиями устойчивости, в практикуме используются лишь неявные РС. Как показывают различные исследования (прежде всего модельных задач), вынесение аппроксимаций пространственных производных на верхний слой является необходимым условием избавления от зависимости временного шага от шага по пространственной переменной. Опыт применения РС показывает, что такой подход позволяет, если не полностью избавиться от подобных ограничений на шаги сетки, то максимально их ослабить. Неявные разностные схемы приводят в общем случае к системам нелинейных алгебраических уравнений, но в практикуме используются только линеаризованные РС. Это сделано в целях облегчения заданий, поскольку в этом случае поиск сеточных решений происходит без использования итерационных методов решения нелинейных систем.

Поскольку все задачи одномерные, то СЛАУ, которые приходится решать, в ряде схем являются трехдиагональными. В этом случае для их решения можно применять метод прогонки 4.10. В более сложных случаях, когда матрицы СЛАУ обладают более широкой лентой, предлагается применять метод бисопряженных градиентов [5]. При этом требуется написать как свою подпрограмму, реализующую один из алгоритмов этого метода, так и использовать подпрограмму из пакета *Laspack*, применяющую тот же метод. В результате можно сравнить, насколько собственная реализация, адаптированная под конкретный вид матрицы СЛАУ, будет быстрее работать чем пакетная (выполняя задание студенты учатся подключать к своим программам внешние пакеты). В виду вышесказанного вопрос о существовании и единственности решений РС очень важен. Его решение для РС, используемых в практикуме, приведено в параграфе 4.1.

Практическая оценка точности численных решений в отсутствии априорных оценок или в случаях, когда проверка условий выполнения таких оценок затруднена, всегда очень актуальна. В заданиях практикума такая оценка проводится общепризнанным методом сравнения получаемых решений на вложенных сетках. Безусловно, нужно отметить, что этот способ позволяет оценить точность получаемых решений лишь снизу. Другим возможным способом практической оценки точности служит сравнение численных решений, полученных с использованием разных методов. В предлагаемом практикуме такими методами могут служить схема Соколова и схема для  $g = \ln \rho$ . На практике проверку нового метода часто проводят, сравнивая его решения с решениями, полученными по хорошо зарекомендовавшему себя известному методу. И, наконец, если известно точное решение какой-то задачи (пусть и не совсем той, для решения которой был предназначен исследуемый метод), то имеет смысл адаптировать программу под расчет этого решения и оценить разность между точным и численным решениями.

Важным свойством РС является их консервативность. Проверка выполнения закона сохранения массы входит в одно из заданий практикума. Не для всех схем практикума это свойство выполняется даже теоретически, но контроль за степенью его выполнения необходим в качестве косвенной оценки точности получаемых решений.

Отдельный вопрос, как находить ошибки (опечатки) в программе. Для этого служат разного рода отладчики, позволяющие выполнять пошагово запрограммированный алгоритм. Хорошим тестом для отлова ошибок может быть расчет первого временного слоя с последующим поточечным анализом полученного решения. Можно брать особые начальные условия для того, чтобы решение становилось проще. Например, ставить такие условия, чтобы плотность или скорость были константами на первом слое. Заключительным этапом верификации программы служит расчет точного гладкого решения с ненулевой правой частью. В качестве этого решения берутся гладкие функции, удо-

влетворяющие краевым условиям, и вычисляется правая часть решаемой системы, при которой выбранные функции являются точным решением. Это делается простой подстановкой этих функций в левую часть системы. После чего проводится расчет численного решения с использованием в качестве начальных данных РС значений точного гладкого решения в узлах нулевого слоя. Расчеты проводятся при различных шагах, ошибка (разность между численным и точным решениями в узлах сетки) вычисляется в различных нормах на последнем временном слое, результаты заносятся в таблицу (см. параграф 2.4.1). Поскольку для гладкого точного решения сходимость всех схем доказана в норме  $\|\cdot\|_{L_2^h}$  с порядком аппроксимации, то данные в таблице должны удовлетворять условию сходимости. При этом наличие условия на шаги в теореме о сходимости должно явно проявляться в таблице (если условие на шаги не выполнено, то в соответствующих ячейках должны быть достаточно большие числа или программа просто не досчитает до конца из-за переполнения памяти). Сходимость в более сильных нормах ( $\|\cdot\|_{C^h}$  и  $\|\cdot\|_{W_2^{1h}}$ ) для некоторых схем отсутствует, либо имеет порядок меньший, чем порядок аппроксимации РС. Но для ряда схем сходимость в этих нормах доказана с порядком аппроксимации. Поэтому, если для этих схем данные таблиц с сильными нормами не стремятся к нулю с порядком аппроксимации, то можно утверждать, что в программе есть ошибки и скорее всего они допущены в дополнительных слагаемых, обеспечивающих повышенную аппроксимацию на границе.

Задачи практикума обладают решениями, выходящими на стационар. Одним из пунктов заданий является определение времени стабилизации и его зависимости от параметров дифференциальной задачи, вида начальной функции и шагов сетки.

Конечным этапом выполнения практикума является составление отчета. Для наглядности полученных результатов отчет включает в себя многочисленные таблицы и графики. Для построения графиков предлагается использовать пакет GNUPLOT [3].

## 2 Задачи практикума

### 2.1 Дифференциальные модели

#### 2.1.1 Баротропный газ

В практикуме рассматриваются РС для решения начально-краевых задач для системы уравнений, описывающей нестационарное одномерное движение вязкого баротропного газа

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Выше через  $\mu$  обозначен коэффициент вязкости газа, который будем считать известной положительной константой.

Неизвестные функции: плотность  $\rho$  и скорость  $u$  являются функциями переменных Эйлера

$$(t, x) \in Q = [0; T] \times [0; X].$$

В уравнения входят еще две известные функции: давление газа  $p$ , зависящее от плотности, и вектор внешних сил  $f$ , являющийся функцией переменных Эйлера. Зависимость

$p = p(\rho)$  часто называют уравнением состояния газа. В практикуме используются две возможные зависимости:  $p = C_\rho \rho$ , где  $C_\rho$  — положительная константа, или  $p = \rho^\gamma$ , где  $\gamma = 1.4$ . Если константа  $C_\rho \gg 1$ , то газ называют слабосжимаемым.

Про систему (2.1) говорят, что она записана в дивергентном виде. Такой вид получается сразу после перехода от интегральных уравнений, получающихся после записи законов сохранения, к их дифференциальной форме. Первое уравнение системы называется уравнением неразрывности и является записью закона сохранения массы. Второе уравнение получается из закона сохранения импульса. Вторые слагаемые в этих уравнениях появляются вследствие движения элементарных объемов сплошной среды и называются конвективными слагаемыми.

Часто второе дифференциальное уравнение системы (2.1) записывают в виде

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f. \quad (2.2)$$

Это уравнение в случае гладких функций  $\rho$  и  $u$  эквивалентно эквивалентно второму уравнению системы (2.1). Такую форму записи можно получить, если первые два слагаемых левой части уравнения (2.1) записать, применив формулу дифференцирования произведения двух функций, и заметить, что сумма двух из четырех получившихся слагаемых равна нулю вследствие уравнения неразрывности. Заметим, что, как показала практика, для расчета разрывных решений лучше работают алгоритмы, которые аппроксимируют систему, записанную в дивергентном виде. Однако, для задач, обладающих достаточно гладким решением, РС, построенные для системы (2.2) или других недивергентных аналогов системы (2.1), могут оказаться более эффективными.

В начальный момент времени задаются функции, значениями которых являются плотность и скорость газа в точках отрезка  $[0, X]$ :

$$(\rho, u)|_{t=0} = (\rho_0, u_0), \quad x \in [0, X]. \quad (2.3)$$

Простейшими граничными условиями являются условия „прилипания“ (непротекания)

$$u(t, 0) = u(t, X) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.4)$$

В этом случае граничные условия на плотность газа не ставятся.

Более сложными являются задачи, когда скорость на границе не задана нулевой. В практикуме рассматривается задача „протекания“. В ней в точках границы, где скорость направлена во внутрь области, считается известным скорость течения. В этих точках необходимо еще задавать краевое условие в виде известного значения плотности потока. В точках, где скорость направлена из области, граничное условие на скорость задается в виде нормальной производной равной нулю. В этих точках условие на плотность отсутствует.

Важными требованиями к вычислительным алгоритмам являются выполнение аналогов интегральных законов сохранения массы и импульса для сеточных функций. Численные методы, для которых выполняются один или несколько законов сохранения (но не все), называют консервативными. Если выполняются все законы сохранения, то метод называют полностью консервативным.

Еще одним важным свойством является выполнение условия неотрицательности функции плотности. В практикуме для части используемых схем это условие выполняется

автоматически. Для этого использовано два альтернативных подхода. Первый – это замена поиска функции  $\rho$  на функцию  $g = \ln(\rho)$ . Во втором применяется специальная аппроксимация уравнения неразрывности, предложенная А.Г.Соколовым.

### 2.1.2 Теплопроводный газ

На практике гораздо чаще встречается случай, когда давление зависит не только от плотности, но и от температуры газа. В этом случае уравнение состояния газа задает зависимость

$$p = p(\rho, \theta), \quad (2.5)$$

где  $\theta$  — температура по шкале Кельвина, и в систему дифференциальных уравнений (2.1) добавляется еще одно уравнение, являющееся следствием закона сохранения энергии. Приведем его для модели политропного газа, т.е. когда внутренняя энергия  $U$  зависит лишь от температуры  $U = c_v \theta$  ( $c_v = \text{const} > 0$ )

$$c_v \rho \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - p \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.6)$$

где  $\kappa = \text{const} > 0$  (коэффициент теплопроводности).

К уравнению (2.6) добавляется начальное условие

$$\theta|_{t=0} = \theta_0(x), \quad x \in [0, X]. \quad (2.7)$$

Для теплопроводного газа следует задать граничные условия, характеризующие **тепловой режим течения**. Наиболее общий вид граничных данных для температуры следующий

$$\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{n}} = k(\Theta - \chi)|_{\partial \Omega}. \quad (2.8)$$

Здесь  $k$  и  $\chi$  — заданные функции,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к границе  $\partial \Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$  — производная по нормали. Равенство означает, что тепловой поток через границу  $\partial \Omega$  пропорционален разности температур газа  $\Theta$  и стенки  $\chi$ .

Возможны два других варианта

$$\Theta|_{\partial \Omega} = \chi \quad (2.9)$$

и

$$\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{n}} = q, \quad (2.10)$$

когда задаются граничные условия в виде известных температуры  $\Theta$  или теплового потока  $\kappa \frac{\partial \Theta}{\partial \mathbf{n}}$ .

В случае теплопроводного газа уравнением состояния часто полагают **уравнение Клайперона**

$$p = R\rho\Theta, \quad R = \text{const} > 0. \quad (2.11)$$

Уравнение состояния Клайперона не соответствует действительности для

- сильно сжатых газов (когда плотность очень велика),
- состояний, близких к точкам конденсации газов в жидкость,
- жидкостей,
- при очень малых температурах, близких к абсолютному нулю.

Для описания процессов вблизи точек конденсации газа и для некоторых диапазонов жидкой фазы используют **уравнение состояния Ван-дер-Ваальса**

$$p = \frac{R\rho\Theta}{1 - b\rho} - a\rho^2, \quad (2.12)$$

где  $R$ ,  $b$  и  $a$  — положительные постоянные.

Введение знаменателя

$$1 - b\rho = 1 - \frac{\rho}{\rho^*}$$

приводит к резкому возрастанию давления при приближении плотности  $\rho$  к значению  $\rho^*$ , которое выбирается большим.

Добавочный член  $a\rho^2$  существенен также только при больших плотностях. С помощью этого члена учитывается появление сил отталкивания между молекулами.

Хороший обзор результатов по поводу обоснования начально-краевых задач механики жидкости и газа можно найти в [6].

## 2.2 Основные обозначения

В заданиях практикума рассматривается пространственная область в виде отрезка  $\bar{\Omega} = [0; X]$ , где вводится равномерная сетка с шагом  $h$ :  $\bar{\omega}_h = \{mh \mid m = 0, \dots, M\}$ , где  $Mh = X$ . На временном интервале  $[0; T]$  также используется равномерная сетка:  $\bar{\omega}_\tau = \{n\tau \mid n = 0, \dots, N\}$ , где  $N\tau = T$ . В результате в области  $Q$  вводится сетка  $\bar{Q}_{\tau h} = \bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_h$ . Узлы сетки  $\bar{\omega}_h$ , попадающие на границу области  $\bar{\Omega}$ , обозначим  $\gamma_h$  (граничные узлы), а попадающие во внутрь области  $\Omega$  через  $\omega_h$  (внутренние узлы). Узлы  $x = 0$  и  $x = X$  будем обозначать  $\gamma_h^-$  и  $\gamma_h^+$  соответственно.

Кроме сетки  $\omega_h$  в ряде схем используются сдвинутые сетки с полуцелыми узлами. Через  $\omega_h^{1/2}$  будем обозначать сетку  $\omega_h^{1/2} = \{mh + h/2 \mid m = 0, \dots, M - 1\}$ , а через  $Q_{\tau h}^{1/2} = \bar{\omega}_\tau \times \omega_h^{1/2}$ .

Значение функции  $g$ , определенной на сетке  $Q_{\tau h}$  (или на сетке  $Q_{\tau h}^{1/2}$ ), в узле  $(n, m)$  будем обозначать через  $g_m^n$ . Если индексы будут опущены, то это означает, что они равны  $n$  и  $m$ . Для сокращения записи значений функции  $g$  в узлах, соседних с узлом  $(n, m)$ , используются следующие обозначения:

$$g_m^{n+1} = \hat{g}, \quad g_{m\pm 1}^n = g^{\pm 1}.$$

Введем обозначения для среднего значения величин сеточной функции в двух соседних узлах

$$g_s = \frac{g_{m+1}^n + g_m^n}{2}, \quad g_{\bar{s}} = \frac{g_m^n + g_{m-1}^n}{2}.$$

Для разностных операторов применяются следующие обозначения, принятые в [4]:

$$g_t = \frac{g_m^{n+1} - g_m^n}{\tau}, \quad g_x = \frac{g_{m+1}^n - g_m^n}{h}, \quad g_{\dot{x}} = \frac{g_{m+1}^n - g_{m-1}^n}{2h}, \quad g_{\bar{x}} = \frac{g_m^n - g_{m-1}^n}{h}.$$

Для приближения конвективных слагаемых в дифференциальных операторах в ряде схем будут использоваться разностные аппроксимации против потока. Для этих выражений введем обозначения



$$\delta\{W, V\} = \frac{V + |V|}{2} W_{\bar{x}} + \frac{V - |V|}{2} W_x = \begin{cases} VW_{\bar{x}}, & \text{если } V \geq 0, \\ VW_x, & \text{если } V < 0; \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\delta_1\{W, V\} = \begin{cases} (VW)_{\bar{x}}, & \text{если } V \geq 0, \\ (VW)_x, & \text{если } V < 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

В схеме А.Г.Соколова в конвективных слагаемых узел шаблона, в котором нужно брать значение сеточной функции  $F$ , зависит от знака компоненты вектора скорости  $V$ . Для этих выражений используется обозначение

$$\sigma\{F, V\} = F \frac{V - |V|}{2} + F^{-1} \frac{V + |V|}{2} = \begin{cases} -VF, & \text{если } V < 0, \\ VF^{-1}, & \text{если } V \geq 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

Определим используемые ниже скалярные произведения и нормы сеточных функций, заданных на сетке  $\bar{\omega}_h$ :

$$(v, u) = h \sum_{x_m \in \omega_h} v_m u_m, \quad [u, v] = (u, v) + 0, 5h \sum_{x_m \in \gamma_h} v_m u_m,$$

$$\|v\|_{C_h} = \max_{x_m \in \bar{\omega}_h} |v_m|, \quad \|v\| = \sqrt{(v, v)}, \quad \|v\|_{L_{2,h}} = |[v]| = \sqrt{[v, v]}, \quad \|v\|_2^1 = \sqrt{[v]^2 + |v|_1^2},$$

где через  $|v|_1$  обозначена полунорма, задаваемая следующим образом:

$$|v|_1 = \sqrt{h \sum_{x_m \in \omega_h \cup \gamma_h^-} (v_x)^2}.$$

Если  $a$  — точное значение некоторой величины, а  $a^*$  — известное приближение к нему, то **абсолютной погрешностью** приближенного значения  $a^*$  будем называть [7] величину

$$\Delta(a^*) = |a^* - a|,$$

а **относительной погрешностью** приближенного решения будем называть величину

$$\delta(a^*) = \left| \frac{a^* - a}{a^*} \right|.$$

Относительная погрешность более информативна в случае вычисления величин  $a$ , порядок которых отличен от 1, поскольку показывает долю ошибки в найденном числе  $a^*$ . Часто относительную погрешность записывают в процентах.

### 2.3 Общие замечания по РС

По РС, предназначенным для решения задачи (2.1),(2.3),(2.4), ищутся сеточные функции  $H$  и  $V$ , задающие приближенное значение плотности  $\rho$  и скорости  $u$  в узлах сетки. В большинстве РС эти функции заданы на одной сетке  $\bar{Q}_{\tau h}$ . Исключение составляют схемы из параграфов 3.18-3.21. В схемах из этих параграфов функция  $H$  вычисляется в узлах сетки  $Q_{\tau h}^{1/2}$ , функция  $V$  — в узлах  $\bar{Q}_{\tau h}$ .

В качестве значений разностного решения на нулевом слое для первой группы схем берутся проекции на сетку  $\bar{\omega}_h$  функций  $\rho_0$  и  $u_0$

$$H_m^0 = (\rho_0)_m, \quad V_m^0 = (u_0)_m, \quad x_m \in \bar{\omega}_h. \quad (2.16)$$

Во второй группе значения  $H^0$  задаются на сетке  $\omega_h^{1/2}$ , а  $V^0$  на сетке  $\bar{\omega}_h$

$$H_m^0 = (\rho_0)_m, \quad x_m \in \bar{\omega}_h^{1/2}, \quad V_m^0 = (u_0)_m, \quad x_m \in \bar{\omega}_h. \quad (2.17)$$

В РС из параграфов 3.10-3.17 используется функция

$$G = \ln(H),$$

заданная также как и функция  $H$  на сетке  $\bar{Q}_{\tau h}$ .

Для задачи „прилипания“ граничные значения функции скорости равны нулю

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.18)$$

Эти граничные условия и уравнения любой из РС образуют СЛАУ (или две последовательно решаемых СЛАУ) в количестве равном числу неизвестных на верхнем временном слое. Методы доказательства однозначной разрешимости получающихся алгебраических задач в простейших случаях показаны в параграфах 4.6-4.9. Оригинальные доказательства можно найти в работах [1, 2], а также в конспектах лекций спецкурса А.В.Попова [10]. В следующих параграфах все РС будут адаптированы для расчета задачи „прилипания“. Ниже будет объяснено, как их следует поменять для задачи „протекания“.

В случае задачи „протекания“ (2.29) граничные условия на скорость меняются на следующие

$$V_0^n = \tilde{v}, \quad V_M^n = V_{M-1}^n \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.19)$$

Уравнения на плотность в узлах с  $m = 0$  меняются на равенства

$$H_0^n = \tilde{\rho} \quad n = 1, \dots, N, \quad (2.20)$$

Чуть более сложно решается вопрос об уравнении на плотность в узлах с  $m = M$ . Например, РС (3.1) аппроксимирует уравнение неразрывности, записанное в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Тогда нужное разностное уравнение выглядит так

$$H_{t,M} + V_M \hat{H}_{\bar{x},M} + \frac{h}{2} \left( V_M (H_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2} H_{x\bar{x},M-2}) + (VH)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2} (VH)_{x\bar{x},M-2} \right) = 0.$$

Аналогично этот вопрос решается и для других РС.

В случае РС, предназначенных для решения задач теплопроводного газа, вводится еще одна сеточная функция  $\Theta$ , задающая распределение температуры газа. Для ее нахождения на каждом временном слое добавляются еще  $M+1$  разностные уравнения: — 1 из которых аппроксимируют уравнение баланса энергии (2.6) (или эквивалентные записи этого уравнения), а два оставшихся — граничные условия для температуры. Для задания значений на нулевом слое используется начальное условие (2.7)

$$\Theta_m^0 = \theta_0(mh).$$

## 2.4 Задания практикума

Практикум состоит из четырех заданий, состоящих в нахождении приближенных решений начально-краевых задач для системы 2.1 с помощью РС. По результатам выполнения этих заданий составляется итоговый отчет. Численные эксперименты следует провести при различных значениях параметров дифференциальной и разностной задач (ниже будем называть эти параметры входными). Входными параметрами будем считать

1) вязкость  $\mu$  из диапазона  $[0.001; 0.1]$  (результаты следует привести для трех значений 0.001, 0.01 и 0.1);

2) уравнение состояния  $p = p(\rho)$  (рассмотреть линейную зависимость  $p = C_\rho \rho$  при коэффициенте  $C_\rho$  равным 1, 10 и 100, а также нелинейную зависимость  $p = \rho^\gamma$ , где  $\gamma = 1.4$ );

3) шаги сетки  $\tau$  и  $h$ .

**Результаты расчетов следует оформить в виде таблиц и графиков, после которых должны следовать выводы о характере зависимости полученных результатов от входных параметров.**

Варианты заданий, предлагаемых различным студентам, отличаются РС, которые требуется реализовать.

### 2.4.1 Отладочный тест

**Первое задание заключается в написании программы, реализующей разностную схему, и проверке ее на наличие ошибок с помощью задачи, имеющей точное гладкое решение.**

Дело в том, что даже в одномерном случае программы, реализующие нижеописанные РС, достаточно сложны и не допустить при их создании ошибки (опечатки) не удастся никому. В книге [7] в „заключении“ приводятся практические советы по отладке таких программ. Одним из описанных там приемов является постановка дифференциальной задачи, имеющей известное точное гладкое решение. Этот способ верификации является одним из основных на этапе отладки.

Зададим, например, функции

$$\tilde{\rho}(t, x) = e^t(\cos(3\pi x) + 1.5), \quad \tilde{u}(t, x) = \cos(2\pi t) \sin(4\pi x). \quad (2.21)$$

Такой выбор функций в качестве точного решения обусловлен тем, что функция плотности должна быть больше нуля во всех расчетной области, а функция скорости должна обнуляться в граничных точках.

Определим функции  $f_0$  (отличную от нуля правую часть уравнения неразрывности) и  $f$  так, чтобы функции  $(\tilde{\rho}, \tilde{u})$  удовлетворяли системе (2.2) с правой частью, составленной из этих функций

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\rho} \tilde{u}}{\partial x} &= f_0, \\ \tilde{\rho} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \tilde{\rho} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + f, \\ p &= p(\tilde{\rho}). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Для этого нужно подставить в левую часть системы (2.2) функции (2.21) и получить явный вид функций  $f_0$  и  $f$ .

Таким образом, дифференциальная задача для системы (2.22) с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}(0, x) &= \cos(3\pi x) + 1.5, \quad x \in [0; 1], \\ \tilde{u}(0, x) &= \sin(4\pi x), \quad x \in [0; 1], \\ \tilde{u}(t, 0) &= u(t, 1) = 0, \quad t \in [0; 1],\end{aligned}\tag{2.23}$$

имеет гладкое точное решение в области  $Q = [0; 1] \times [0; 1]$ , задаваемое функциями (2.21).

Теоретические оценки для схем практикума показывают сходимость численного решения к точному гладкому решению с порядком аппроксимации в норме  $L_2^h$  (а для некоторых схем и в нормах  $C^h$  и  $W_2^{1,h}$ ) [2, 1]. Сходимость может быть как безусловной (т.е. иметь место при любых шагах сетки), так и условной (т.е. иметь место лишь при определенных соотношениях шагов). В задачах практикума для диапазона исследуемых параметров  $\mu$  и функций  $p(\rho)$ , а также диапазона шагов сетки сходимость должна быть либо безусловной, либо условной при условии, что  $\tau \leq Ch$ .

Проверить программу, реализующую схему из практикума, на наличие ошибок можно с помощью задачи (2.22)-(2.23) (или аналогичной ей). Для этого нужно провести расчеты при различных шагах сетки  $(\tau, h)$  и вычислить для каждого расчета нормы разности между разностным решением и проекцией на сетку точного решения дифференциальной задачи (абсолютные ошибки численного интегрирования) на последнем временном слое. Результаты записываются в таблицу следующего вида

Абсолютные ошибки численного интегрирования  
по неявной РС с центральными разностями  
нелинейного уравнения Бюргерса с  $\mu = 0, 1$ .

$\tau \setminus h$	0.1	0.01	0.001	0.0001
0.1000	5.958e-001	3.765e-001	3.748e-001	3.747e-001
	3.380e-001	2.002e-001	1.989e-001	1.989e-001
	3.187e+000	2.080e+000	2.070e+000	2.069e+000
	0.000e+000	0.000e+000	1.500e-002	6.300e-002
0.0100	2.442e-001	3.690e-002	3.505e-002	3.504e-002
	1.293e-001	1.922e-002	1.827e-002	1.826e-002
	1.287e+000	2.143e-001	2.039e-001	2.038e-001
	0.000e+000	1.500e-002	6.300e-002	6.090e-001
0.0010	2.084e-001	5.275e-003	3.494e-003	3.476e-003
	1.097e-001	2.746e-003	1.818e-003	1.809e-003
	1.098e+000	3.080e-002	2.043e-002	2.033e-002
	0.000e+000	6.300e-002	5.930e-001	6.079e+000
0.0001	2.049e-001	2.141e-003	3.652e-004	3.475e-004
	1.078e-001	1.115e-003	1.900e-004	1.808e-004
	1.079e+000	1.250e-002	2.137e-003	2.033e-003
	6.200e-002	5.940e-001	6.047e+000	6.034e+001

Приведенная таблица содержит результаты расчетов по неявной РС с центральными разностями (4.44) для нелинейного уравнения Бюргерса (4.40). В каждой ячейке в столбик записаны четыре числа: первые три это нормы ошибки численного интегрирования в пространствах  $C_h$ ,  $L_2^h$  и  $W_2^{1,h}$  соответственно, а последнее число это время расчета теста при соответствующих шагах сетки. Из нее можно сделать вывод, что сходимость имеет

место с порядком  $\tau + h^2$  во всех трех пространствах. Этот вывод полностью совпадает с теоретическими оценками, что говорит о том, что программа, реализующая разностную схему, на данном тесте работает верно.

Очень важным является вопрос о точности получаемого по РС решения, когда точное решение неизвестно и теоретические оценки погрешности отсутствуют. Для получения ответа на этот вопрос на практике часто используют расчеты на вложенных сетках. Вывод о порядке точности решения, полученного на сетке с шагами  $\tau$  и  $h$  делается на основании сравнения его по норме в одинаковых узлах с решением, полученным, например, на сетках с шагами  $\tau/2^k$  и  $h/2^k$ , где  $k \in N$ . Если сходимость РС есть, то норма этой разности, как правило, является оценкой снизу для нормы разности между сеточным и точным решениями и тем лучше, чем больше параметр  $k$ .

Подтверждение этого факта следует получить, выполняя первое задание. Проиллюстрировать это можно, приведя следующую таблицу. Выбираются шаги  $\tau$  и  $h$  и в  $k$ -ой строке таблицы приводятся нормы разности решения  $v$ , полученного на сетке  $\bar{Q}_{\tau,h}$ , и решения  $v^k$ , полученного на сетке  $\bar{Q}_{\tau/2^k, h/2^k}$  (столбцы таблицы различаются различными шагами начальной сетки) на последнем временном слое. В последней строке содержатся нормы погрешности решения  $v - u$  на сетке  $\bar{Q}_{\tau,h}$ .

Приведенная таблица содержит результаты расчетов по неявной РС с центральными разностями (4.44) для нелинейного уравнения Бюргерса (4.40). В каждой ячейке в столбик записаны три числа: оценки ошибки численного интегрирования в пространствах  $C_h$ ,  $L_2^h$  и  $W_2^{1,h}$  соответственно.

Оценки абсолютных ошибок численного интегрирования  
по неявной РС с центральными разностями  
нелинейного уравнения Бюргерса с  $\mu = 0, 1$   
методом вложенных сеток.

	$\tau = 0.1$ $h = 0.1$	$\tau = 0.01$ $h = 0.01$	$\tau = 0.001$ $h = 0.001$
$v - v^1$	3.618e-001 2.157e-001 2.006e+000	1.900e-002 9.905e-003 1.100e-001	1.752e-003 9.119e-004 1.024e-002
$v - v^2$	4.948e-001 2.858e-001 2.677e+000	2.809e-002 1.464e-002 1.629e-001	2.624e-003 1.366e-003 1.535e-002
$v - v^3$	5.490e-001 3.139e-001 2.950e+000	3.253e-002 1.695e-002 1.888e-001	3.060e-003 1.592e-003 1.789e-002
$v - v^4$	5.733e-001 3.264e-001 3.073e+000	3.472e-002 1.809e-002 2.016e-001	3.277e-003 1.705e-003 1.916e-002
$v - u$	5.958e-001 3.380e-001 3.187e+000	3.690e-002 1.922e-002 2.143e-001	3.494e-003 1.818e-003 2.043e-002

### 2.4.2 Негладкие начальные данные

Для системы (2.1) зададим две задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом.

$$\begin{aligned}\rho_0(x) &= 1, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5, \\ \rho_0(x) &= 2, & x \in [4.5; 5.5], \\ u_0(x) &\equiv 0, & x \in [0; 10], \\ u(t, 0) &= u(t, 10) = 0, & t \in [0; T].\end{aligned}\tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}u_0(x) &= 0, & x < 4.5 \text{ или } x > 5.5, \\ u_0(x) &= 1, & x \in [4.5; 5.5], \\ \rho_0(x) &\equiv 1, & x \in [0; 10], \\ u(t, 0) &= u(t, 10) = 0, & t \in [0; T].\end{aligned}\tag{2.25}$$

Функция  $f$  из правой части системы (2.1) считается равной нулю в обеих задачах.

**Второе задание состоит в решении задач (2.24) и (2.25).**

Вычисления следует проводить до времени  $T_{st} = n_{st}\tau$ , при котором решение перестает зависеть от времени (выходит на стационар). Критерием выхода на стационар можно считать выполнение условия

$$\|(H^{n_{st}}, V^{n_{st}}) - (\tilde{H}, \tilde{V})\|_C \leq \varepsilon.\tag{2.26}$$

Функции  $\tilde{H}$  и  $\tilde{V}$  являются постоянными и равны  $\sum_{m \in \omega_h} H_m^{n_{st}} / \text{num}(\omega_h)$  и нулю соответственно. Выше через  $\text{num}(\omega_h)$  обозначено число узлов сетки  $\omega_h$ . Время  $T_{st}$  полагают равным  $n_{st}\tau$ . Величина  $\varepsilon$  является достаточно малой и определяется опытным путем.

Результаты следует оформить в виде таблиц, в ячейках которых приведены значения норм разностей (2.26) в различные моменты времени (например,  $n_{st}/4$ ,  $n_{st}/2$ ,  $3n_{st}/4$ ,  $n_{st}$ ) и времена стабилизации  $T_{st} = n_{st}\tau$  для различных входных параметров.

Процесс выхода на стационар полезно проиллюстрировать графиками затухания на участке от  $t = 0$  до  $T_{st}$  норм (2.26), а также привести графики  $H_m$  и  $V_m$  на различных временных слоях. Динамика „затухания“ процесса очень наглядно может быть проиллюстрирована цветными проекциями на плоскость  $(t, x)$  поверхностей  $H_m^n$  и  $V_m^n$ , имеющих разный цвет в зависимости от значения функции. Из этих проекций можно сделать вывод о цикличности процесса стабилизации задач (2.24) и (2.25).

В этом задании нужно проверить выполнение закона сохранения массы для получаемого сеточного решения. Для этого следует ввести функцию относительного изменения массы на  $n$ -ом временном слое в сравнении с начальным ее значением

$$\Delta_{massa}(n) = \frac{\sum_{m \in \omega_h} H_m^n h - \sum_{m \in \omega_h} H_m^0 h}{\sum_{m \in \omega_h} H_m^0 h}$$

и привести таблички, в ячейках которых приведены величины этой функции в различные моменты времени, и ее графики для различных входных параметров.

В конце выполнения второго задания требуется применить метод вложенных сеток для выяснения порядка точности получаемых решений. Для чего следует привести таблицы такие же как и в первом задании, но в последних строках в связи с отсутствием известного точного решения следует записывать нормы разности сравнения с решением,

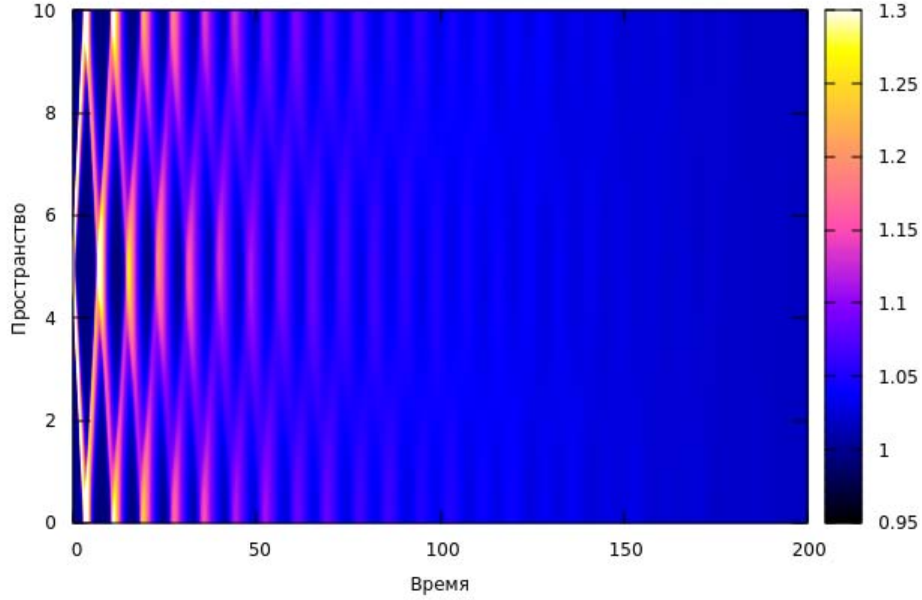


Рис. 1: Цикличность изменения плотности

полученным на сетке  $Q_{\tau/2^k, h/2^k}$ , где  $k$  — максимально возможное число. Временной слой для сравнения следует выбирать существенно меньше, чем  $n_{st}$ .

Метод вложенных сеток также следует применить для изучения вопроса о точности определения времени выхода на стационар в зависимости от входных параметров, для чего нужно привести соответствующие таблицы.

### 2.4.3 Стабилизация осциллирующей функции

Для системы (2.1) зададим две задачи, начальные и граничные условия которых определяются следующим образом.

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= 2 + \sin(k\pi x), & u_0(x) &= 0, & x &\in [0; 1], \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0, & t &\in [0; T]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \rho_0(x) &= 1, & u_0(x) &= \sin(k\pi x), & x &\in [0; 1], \\ u(t, 0) &= u(t, 1) = 0, & t &\in [0; T]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Функция  $f$  из правой части системы (2.1) считается равной нулю в обеих задачах. Число  $k$ , задающее число колебаний начальной функции, является натуральным и для численного эксперимента выбирается из диапазона от 1 до  $M/10$ , где  $Mh = 1$ . Такой выбор максимального  $k$  обеспечивает достаточную аппроксимацию РС.

Третье задание представляет собой исследование зависимости времени стабилизации от входных параметров и частоты колебания волны в начальном условии.

В отчете следует привести таблицы, содержащие времена стабилизации при различных частотах колебаний (строки таблицы) и входных параметрах (столбцы таблицы). Число  $M$ , задающее число точек по пространству, рекомендуется взять больше 500. При таком  $M$  частоты колебаний (число  $k$ ) нужно взять следующие,

$$1, 2, 3, \dots, 10, 10 + M/10, 10 + 2M/10, \dots, 10 + 9M/10.$$

Критерий выхода на стационар такой же, как и во втором задании.

#### 2.4.4 Задача „протекания“

Для системы (2.1) зададим начальные и граничные условия, которые определяют задачу „протекания“

$$\begin{aligned} \rho_0(x) = 1, \quad u_0(x) = 0, \quad x \in [0; X], \\ u(t, 0) = \tilde{v}, \quad \rho(t, 0) = \tilde{\rho}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=X} = 0 \quad t \in [0; T], \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $X = 10$ .

Параметры  $\tilde{v}$  ( $\tilde{v} > 0$ ) и  $\tilde{\rho}$  ( $\tilde{\rho} \geq 1$ ) задают скорость и плотность „набегающего“ потока. Функция  $f$  из правой части системы (2.1) считается равной нулю.

**Замечание.** Корректная постановка граничных условий для системы (2.1) заключается в задании на всей границе условия для функции скорости  $u$ , а граничное условие на функцию  $\rho$  ставится лишь в тех точках границы, где вектор скорости направлен внутрь области, т.е. только в тех точках, где газ втекает в область.

**Четвертое задание состоит в расчете задачи „протекания“ при различных параметрах дифференциальной задачи и определение времени выхода ее решения на стационар.**

Главное отличие стационарного решения задачи протекания от предыдущих заданий — его зависимость от пространственной переменной.

Критерием выхода на стационар на временном слое  $n_{st}$  можно считать выполнение условия

$$\|(H^n, V^n) - (H^{n_{st}}, V^{n_{st}})\|_C \leq \varepsilon \quad (2.30)$$

для всех  $n \geq n_{st}$ . Проверку условия (2.30) нужно проверять для достаточно большого числа слоев  $n$ : например, для

$$n/len_{st}/k,$$

где  $k$  зависит от параметров дифференциальной задачи и подбирается опытным путем.

В отчете следует привести таблицы, в ячейках которых записаны времена стабилизации. Столбцы таблиц отвечают различным значениям  $\tilde{v}$ , а строки —  $\tilde{\rho}$ . Для иллюстрации динамики процесса стабилизации нужно привести графики зависимости плотности и скорости от пространственной координаты в различные моменты времени (например,  $n_{st}/4$ ,  $n_{st}/2$ ,  $3n_{st}/4$ ,  $n_{st}$ ).

Точность расчетов следует оценить методом вложенных сеток, приведя несколько таблиц времен стабилизации и графиков полученных стационарных решений при различных шагах сетки.



## 2.5 Отчет

В итоговый отчет должны быть включены следующие пункты.

**1. Общая постановка дифференциальной задачи.**

**2. Алгоритм, реализующий РС.** В том числе обязательно должны быть приведены поточечная запись разностных уравнений и выражений, задающих элементы матриц и правых частей алгебраических задач, которые требуется решить.

**3. Отчет о выполнении задания I.**

а) Функции из правой части дифференциальной системы (2.22), для которых проводились расчеты и точное решение с этой правой частью.

б) Таблицы норм ошибок вычисления известного точного гладкого решения.

в) Таблицы оценок ошибок численного интегрирования методом вложенных сеток.

**4. Отчет о выполнении задания II.**

а) Дифференциальная постановка задач.

б) Таблицы, содержащие величины норм разности между приближенными решениями, вычисленными на вложенных сетках, для времен  $T_{st}/4$ ,  $T_{st}/2$ ,  $3T_{st}/4$  и  $T_{st}$  и времена стабилизации.

в) Проверка выполнения закона сохранения массы для исследуемой РС.

г) Представление динамики процессов в виде графиков функций плотности и скорости в различные моменты времени вплоть до выхода на стационар. Частота временных срезов должна отражать развитие процесса вплоть до момента установления.

д) Изображение цветной проекции одной из компонент решения на плоскость  $(t, x)$  (пример цветной проекции приведен на рис. (1)) и оценка времени цикла.

е) Таблицы с оценками точности решений и времен стабилизации, полученных методом вложенных сеток.

**5. Отчет о выполнении задания III.**

а) Постановка задачи.

б) Таблица времен стабилизации.

**6. Отчет о выполнении задания IV.**

а) Постановка задачи.

б) Таблица времен стабилизации при различных параметрах дифференциальной задачи и амплитуд скачков скорости  $\tilde{v}$  и плотности  $\tilde{\rho}$  в граничном условии.

в) Графики зависимости скорости и плотности от пространственной координаты в различные моменты времени.

## 3 Разностные схемы

### 3.1 Схема с центральными разностями $(\rho, u)$

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности

$$\begin{aligned}
H_t + 0.5(V\hat{H}_{\hat{x}} + (V\hat{H})_{\hat{x}} + H\hat{V}_{\hat{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + V_0\hat{H}_{x,0} + H\hat{V}_{x,0}) - \\
- 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + V_M\hat{H}_{\bar{x},M} + H\hat{V}_{\bar{x},M}) + \\
+ 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\
V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\hat{x}} + (V\hat{V})_{\hat{x}}) + \tilde{p}'(H)\hat{H}_{\hat{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $\tilde{p}'(H) = \frac{p'_\rho(H)}{H}$  и  $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$ . Здесь и далее через  $p'_\rho(\rho)$  обозначена производная уравнения состояния,

Выписанная выше РС аппроксимирует эквивалентную систему (при условии гладкости решения) системе (2.1), уравнения которой выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \\
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Расписав уравнения РС в каждой точке пространственной сетки и приведя подобные при неизвестных значениях  $\hat{H}_m, \hat{H}_{m\pm 1}$  и  $\hat{V}_m, \hat{V}_{m\pm 1}$ , получаем

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{\tau}{h}V_0\right)\hat{H}_0 - \frac{\tau H_0}{2h}\hat{V}_0 + \frac{\tau}{2h}(V_0 + V_1)\hat{H}_1 + \frac{\tau H_0}{2h}\hat{V}_1 &= H_0 + \\
+ \frac{\tau}{4h}(2H_0V_0 - 5H_1V_1 + 4H_2V_2 - H_3V_3 + H_0(2V_0 - 5V_1 + 4V_2 - V_3)) + \tau(f_0)_0, \\
\hat{V}_0 &= 0, \\
\left\{ -\frac{\tau}{4h}(V_{m-1} + V_m)\hat{H}_{m-1} - \frac{\tau H_m}{4h}\hat{V}_{m-1} + \hat{H}_m + \frac{\tau}{4h}(V_{m+1} + V_m)\hat{H}_{m+1} + \frac{\tau H_m}{4h}\hat{V}_{m+1} = \right. \\
= H_m + \tau(f_0)_m, \\
- \frac{\tau \tilde{p}'(H_m)}{2hH_m}\hat{H}_{m-1} - \left( \frac{\tau \tilde{\mu}}{h^2} + \frac{\tau}{6h}(V_{m-1} + V_m) \right) \hat{V}_{m-1} + \left( 1 + \frac{2\tau \tilde{\mu}}{h^2} \right) \hat{V}_m + \\
+ \frac{\tau \tilde{p}'(H_m)}{2hH_m}\hat{H}_{m+1} + \left( -\frac{\tau \tilde{\mu}}{h^2} + \frac{\tau}{6h}(V_m + V_{m+1}) \right) \hat{V}_{m+1} = \\
= V_m + \frac{\tau}{h^2} \left( \frac{\mu}{\hat{H}_m} - \tilde{\mu} \right) (V_{m+1} - 2V_m + V_{m-1}) + \tau f_m, \Big\} \quad m = 1, \dots, M-1, \\
- \frac{\tau}{2h}(V_{M-1} + V_M)\hat{H}_{M-1} - \frac{\tau}{2h}H_M\hat{V}_{M-1} + \left( 1 + \frac{\tau}{h}V_M \right) \hat{H}_M + \frac{\tau}{2h}H_M\hat{V}_M = \\
= H_M - \frac{\tau}{4h}(2H_MV_M - 5H_{M-1}V_{M-1} + 4H_{M-2}V_{M-2} - H_{M-3}V_{M-3} + \\
+ H_M(2V_M - 5V_{M-1} + 4V_{M-2} - V_{M-3})) + \tau(f_0)_M. \\
\hat{V}_M &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

В правых частях выписанных уравнений добавлено слагаемое вида  $\tau(f_0)_m$  для отладочного варианта, когда в правой части уравнения неразрывности появляется функция  $f_0$ . Уравнения (3.3) составляют СЛАУ относительно вектора неизвестных

$$(\hat{H}_0, \hat{V}_0, \hat{V}_1, \hat{H}_1, \dots, \hat{H}_M, \hat{V}_M)^T$$

с матрицей, у которой отличны от нуля элементы, принадлежащие лишь 5 диагоналям. Решать такую систему можно, используя метод бисопряженных градиентов, используя в качестве первого приближения вектор

$$(H_0, V_0, V_1, H_1, \dots, H_M, V_M)^T.$$

Решение этой СЛАУ существует и единственно лишь при одном условии, что на сеточная плотность  $H$  имеет положительные значения во всех узлах на нижнем временном слое.

### 3.2 Схема с центральными разностями $(\rho, u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой.

$$\begin{aligned} & H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + V_0\hat{H}_{x,0} + H_0V_{x,0}) - \\ & - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) = 0, \\ & H_t + 0.5(V\hat{H}_{\hat{x}} + (V\hat{H})_{\hat{x}} + HV_{\hat{x}}) = 0, \quad x \in \omega_h, \\ & H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + V_M\hat{H}_{\bar{x},M} + H_MV_{\bar{x},M}) + \\ & + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) = 0, \\ & V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\hat{x}} + (V\hat{V})_{\hat{x}}) + \frac{p(\hat{H})_{\hat{x}}}{\hat{H}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{\hat{H}}\right)V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \\ & V_0 = V_M = 0, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где  $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{\hat{H}}$ .

Разностные уравнения схемы (3.4) аппроксимируют уравнения системы (3.2).

Расписав первые три уравнения РС в каждой точке пространственной сетки и приведя подобные при неизвестных значениях  $\hat{H}_{m\pm 1}$  и  $\hat{H}_m$ , получаем

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\tau}{h}V_0\right)\hat{H}_0 + \frac{\tau}{2h}(V_0 + V_1)\hat{H}_1 = H_0 + \frac{\tau}{2h}H_0(V_0 - V_1) + \\ & + \frac{\tau}{4h}(2H_0V_0 - 5H_1V_1 + 4H_2V_2 - H_3V_3 + H_0(2V_0 - 5V_1 + 4V_2 - V_3)) + \tau(f_0)_0, \\ & - \frac{\tau}{4h}(V_{m-1} + V_m)\hat{H}_{m-1} + \hat{H}_m + \frac{\tau}{4h}(V_{m+1} + V_m)\hat{H}_{m+1} = \\ & = H_m + \frac{\tau}{4h}H_m(V_{m-1} - V_{m+1}) + \tau(f_0)_m, \quad m = 1, \dots, M-1 \\ & \left(1 + \frac{\tau}{h}V_M\right)\hat{H}_M - \frac{\tau}{2h}(V_{M-1} + V_M)\hat{H}_{M-1} = H_M + \frac{\tau}{2h}H_M(V_{M-1} - V_M) - \\ & - \frac{\tau}{4h}(2H_MV_M - 5H_{M-1}V_{M-1} + 4H_{M-2}V_{M-2} - H_{M-3}V_{M-3} + \\ & + H_M(2V_M - 5V_{M-1} + 4V_{M-2} - V_{M-3})) + \tau(f_0)_M. \end{aligned} \tag{3.5}$$

В правых частях выписанных уравнений добавлено слагаемое вида  $\tau(f_0)_m$  для отладочного варианта, когда в правой части уравнения неразрывности появляется функция  $f_0$ . Уравнения 3.5 задают СЛАУ с трехдиагональной матрицей для нахождения функции  $\hat{H}$  на верхнем временном слое.

Аналогично расписав оставшиеся уравнения РС и приведя подобные, получаем

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0 &= 0, \\
-\left(\frac{\tau\tilde{\mu}}{h^2} + \frac{\tau}{6h}(V_{m-1} + V_m)\right)\hat{V}_{m-1} &+ \left(1 + \frac{2\tau\tilde{\mu}}{h^2}\right)\hat{V}_m + \left(-\frac{\tau\tilde{\mu}}{h^2} + \frac{\tau}{6h}(V_m + V_{m+1})\right)\hat{V}_{m+1} = \\
= V_m + \frac{\tau}{h^2}\left(\frac{\mu}{\hat{H}_m} - \tilde{\mu}\right)(V_{m+1} - 2V_m + V_{m-1}) &+ \\
+ \frac{\tau}{2h\hat{H}_m}(p(\hat{H}_{m-1}) - p(\hat{H}_{m+1})) + \tau f_m, & \quad m = 1, \dots, M-1, \\
\hat{V}_M &= 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

После того, как функция  $\hat{H}$  была найдена, уравнения 3.6 задают СЛАУ с трехдиагональной матрицей для нахождения функции  $\hat{V}$  на верхнем временном слое.

Для решения обеих СЛАУ можно использовать метод „прогонки“.

### 3.3 Схема с центральными разностями ( $u, \rho$ ) (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{V}$ . После того как  $\hat{V}$  найдена, из второй СЛАУ ищется функция  $\hat{H}$

$$\begin{aligned}
V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\bar{x}} + (V\hat{V})_{\bar{x}}) + \frac{p(H)_{\bar{x}}}{H} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \\
H_t + 0.5(\hat{V}\hat{H}_{\bar{x}} + (\hat{V}\hat{H})_{\bar{x}} + H\hat{V}_{\bar{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + 0.5((\hat{V}\hat{H})_{x,0} + H_0\hat{V}_{x,0}) - & \\
-0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
H_{t,M} + 0.5((\hat{V}\hat{H})_{\bar{x},M} + H_M\hat{V}_{\bar{x},M}) + & \\
+0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где  $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$ .

Разностные уравнения схемы (3.7) аппроксимируют уравнения системы (3.2).

### 3.4 Схема с центральными разностями ( $\rho, u$ ) (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит

для определения функции  $\hat{H}$ . вторая —  $\hat{V}$ . Системы решаются независимо друг от друга

$$\begin{aligned}
H_t + 0.5(V\hat{H}_{\hat{x}} + (V\hat{H})_{\hat{x}} + H\hat{V}_{\hat{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0V_{x,0}) - \\
- 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_MV_{\bar{x},M}) + \\
+ 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\
V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\hat{x}} + (V\hat{V})_{\hat{x}}) + \frac{p(H)_{\hat{x}}}{H} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - \left(\tilde{\mu} - \frac{\mu}{H}\right)V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где  $\tilde{\mu} = \max_m \frac{\mu}{H}$ .

Разностные уравнения схемы (3.8) аппроксимируют уравнения системы (3.2).

### 3.5 Схема с односторонними разностями $(\rho, u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned}
H_t + \delta_1\{\hat{H}, V\} &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + (\hat{H}V)_{x,0} &= 0, \\
H_{t,M} + (\hat{H}V)_{\bar{x},M} &= 0, \\
\hat{H}V_t + \delta\{\hat{V}, \hat{H}V\} + p(\hat{H})_{\hat{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f. \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Решение РС ищется по временным слоям, на каждом из которых последовательно решаются две СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Первая служит для определения  $\hat{H}$ , вторая —  $\hat{V}$ . РС (3.9) аппроксимирует систему (2.2).

### 3.6 Схема с односторонними разностями $(u, \rho)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned}
HV_t + \delta\{\hat{V}, HV\} + p(H)_{\hat{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + Hf, \quad x \in \omega_h, \\
H_t + \delta_1\{\hat{H}, \hat{V}\} &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + (\hat{H}\hat{V})_{x,0} &= 0, \\
H_{t,M} + (\hat{H}\hat{V})_{\bar{x},M} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Решение РС ищется по временным слоям, на каждом из которых последовательно решаются две СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Первая служит для определения  $\hat{V}$ , вторая —  $\hat{H}$ . РС (3.10) аппроксимирует систему (2.2).

### 3.7 Схема с односторонними разностями $(\rho, u)$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (2.1),(2.3),(2.4) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned}
H_t + \delta_1\{\hat{H}, V\} &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + (\hat{H}V)_{x,0} &= 0, \\
H_{t,M} + (\hat{H}V)_{\bar{x},M} &= 0, \\
HV_t + \delta\{\hat{V}, HV\} + p(H)_{\hat{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + Hf, \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Решение РС ищется по временным слоям, на каждом из которых решаются две СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Первая служит для определения  $\hat{H}$ , вторая —  $\hat{V}$ , которые решаются независимо друг от друга. РС (3.11) аппроксимирует систему (2.2).

### 3.8 Схема с центральными разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{H}$ . После того как  $\hat{H}$  найдена, из второй СЛАУ ищется функция  $\hat{V}$ .

$$\begin{aligned} H_t + 0.5(V\hat{H}_{\bar{x}} + (V\hat{H})_{\bar{x}} + H\hat{V}_{\bar{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0V_{x,0}) - \\ - 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_MV_{\bar{x},M}) + \\ + 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\ (HV)_t + \frac{2}{3}(\hat{H}V\hat{V})_{\bar{x}} + \frac{2}{3}\hat{H}V\hat{V}_{\bar{x}} + \frac{V^2}{3}\hat{H}_{\bar{x}} + p(\hat{H})_{\bar{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f, \quad x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (3.12)$$

Выписанная выше РС аппроксимирует эквивалентную систему (при условии гладкости решения) системе (2.1), уравнения которой выглядят следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left( 2 \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + 2 \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho f. \end{aligned} \quad (3.13)$$

### 3.9 Схема с односторонними разностями $(\rho, \rho u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1), (2.3), (2.4) можно использовать р.с., в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности

$$\begin{aligned} H_t + \delta_1 \{ \hat{H}, V \} &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ H_{t,0} + (\hat{H}V)_{x,0} &= 0, \\ H_{t,M} + (\hat{H}V)_{\bar{x},M} &= 0, \\ (HV)_t + \delta_1 \{ \hat{V}, \hat{H}V \} + p(\hat{H})_{\bar{x}} &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}f, \quad x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (3.14)$$

Решение РС ищется по временным слоям, на каждом из которых последовательно решаются две СЛАУ с трехдиагональными матрицами. Первая служит для определения  $\hat{H}$ , вторая —  $\hat{V}$ . РС (3.14) аппроксимирует непосредственно систему (2.1).

### 3.10 Схема с центральными разностями $(\ln(\rho), u)$

Для автоматического обеспечения условия положительности функции плотности заменим вычисление  $H$  на вычисление функции  $G = \ln H$ . Для этого преобразуем систему (2.2) следующим образом. Заменим уравнение неразрывности на уравнение 4.3. Для

того, что бы РС всегда имела единственное решение, преобразуем его к виду

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u g}{\partial x} + (2 - g) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \quad (3.15)$$

Второе уравнение системы (2.2) поделим на  $\rho$  и конвективный член перепишем аналогично проделанному с первым уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) + \tilde{p}'(e^g) \frac{\partial g}{\partial x} = \mu e^{-g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (3.16)$$

где  $\tilde{p}'(x) = \frac{dp}{d\rho}(x)$ .

Для полученной системы, состоящей из уравнений (3.15)-(3.16) рассмотрим те же начально-краевые задачи, что и для системы (2.1).

Для поиска численного решения задачи (3.15), (3.16), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности

$$\begin{aligned} G_t + 0.5 (V \hat{G}_{\bar{x}} + (V \hat{G})_{\bar{x}} + 2 \hat{V}_{\bar{x}} - G V_{\bar{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\ G_{t,0} + 0.5 ((V \hat{G})_{x,0} + 2 \hat{V}_{x,0} - G_0 V_{x,0}) - \\ - 0.5 h ((G V)_{x\bar{x},1} - 0.5 (G V)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0) (V_{x\bar{x},1} - 0.5 V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\ G_{t,M} + 0.5 ((V \hat{G})_{\bar{x},M} + 2 \hat{V}_{\bar{x},M} - G_M V_{\bar{x},M}) + \\ + 0.5 h ((G V)_{x\bar{x},M-1} - 0.5 (G V)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M) (V_{x\bar{x},M-1} - 0.5 V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\ V_t + \frac{1}{3} (V \hat{V}_{\bar{x}} + (V \hat{V})_{\bar{x}}) + \tilde{p}'(G) \hat{G}_{\bar{x}} = \tilde{\mu} \hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G}) V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$ .

В качестве значений разностного решения на нулевом слое берутся проекции на сетку  $\bar{\omega}_h$  функций  $\ln(\rho_0)$  и  $u_0$ :

$$G_m^0 = \ln((\rho_0)_m), \quad V_m^0 = (u_0)_m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (3.18)$$

Граничные значения функции скорости равны нулю:

$$V_0^n = V_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (3.19)$$

В РС (3.17)-(3.19) функции  $\hat{G}$  и  $\hat{V}$  ищутся из одной СЛАУ. Поэтому для уменьшения ширины ленты матрицы вектор неизвестных нужно формировать следующим образом

$$(\hat{G}_0, \hat{V}_0, \hat{G}_1, \hat{V}_1, \hat{G}_2, \hat{V}_2, \dots, \hat{G}_M, \hat{V}_M).$$

В этом случае матрица СЛАУ получается пятидиагональной.

### 3.11 Схема с центральными разностями $(\ln(\rho), u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (3.15), (3.16), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ

с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{G}$ . После того как  $\hat{G}$  найдена, из второй СЛАУ ищется функция  $\hat{V}$

$$\begin{aligned}
G_t + 0.5(V\hat{G}_{\hat{x}} + (V\hat{G})_{\hat{x}} + (2-G)V_{\hat{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
G_{t,0} + 0.5((V\hat{G})_{x,0} + (2-G_0)V_{x,0}) - \\
-0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2-G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
G_{t,M} + 0.5((V\hat{G})_{\bar{x},M} + (2-G_M)V_{\bar{x},M}) + \\
+0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2-G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\
V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\hat{x}} + (V\hat{V})_{\hat{x}}) + \tilde{p}'(\hat{G})\hat{G}_{\hat{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-\hat{G}})V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-\hat{G}}\|_C$ .

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (3.18)-(3.19).

### 3.12 Схема с центральными разностями $(u, \ln(\rho))$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (3.15), (3.16), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{V}$ . После того как  $\hat{V}$  найдена, из второй СЛАУ ищется функция  $\hat{G}$

$$\begin{aligned}
V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\hat{x}} + (V\hat{V})_{\hat{x}}) + \tilde{p}'(G)G_{\hat{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h, \\
G_t + 0.5(\hat{V}\hat{G}_{\hat{x}} + (\hat{V}\hat{G})_{\hat{x}} + (2-G)\hat{V}_{\hat{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
G_{t,0} + 0.5((\hat{V}\hat{G})_{x,0} + (2-G_0)\hat{V}_{x,0}) - \\
-0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2-G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
G_{t,M} + 0.5((\hat{V}\hat{G})_{\bar{x},M} + (2-G_M)\hat{V}_{\bar{x},M}) + \\
+0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2-G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$ .

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (3.18)-(3.19).

### 3.13 Схема с центральными разностями $(\ln(\rho), u)$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (3.15), (3.16), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{G}$ , вторая —  $\hat{V}$ . Системы решаются независимо друг от друга

$$\begin{aligned}
G_t + 0.5(V\hat{G}_{\hat{x}} + (V\hat{G})_{\hat{x}} + (2-G)V_{\hat{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
G_{t,0} + 0.5((V\hat{G})_{x,0} + (2-G_0)V_{x,0}) - \\
-0.5h((GV)_{x\bar{x},1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},2} + (2-G_0)(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
G_{t,M} + 0.5((V\hat{G})_{\bar{x},M} + (2-G_M)V_{\bar{x},M}) + \\
+0.5h((GV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2-G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\
V_t + \frac{1}{3}(V\hat{V}_{\hat{x}} + (V\hat{V})_{\hat{x}}) + \tilde{p}'(G)G_{\hat{x}} = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{3.22}$$



где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$ .

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (3.18)-(3.19).

### 3.14 Схема с односторонними разностями $(\ln(\rho), u)$

Решение разностной схемы (3.17)-(3.19) вследствие использования центральных разностей не является строго монотонным, а имеет незначительные осцилляции. Для их устранения можно использовать схему с разностями против потока

$$\begin{aligned} G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + \hat{V}_{\hat{x}} &= 0, & x \in \omega_h, \\ G_t + \hat{V}_{\mathbf{x}} &= 0, & m = 0; \\ G_t + \hat{V}_{\bar{\mathbf{x}}} &= 0, & m = M; \\ V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G)\hat{G}_{\hat{x}} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, & x \in \omega_h, \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$ .

В РС (3.23) функции  $\hat{G}$  и  $\hat{V}$  ищутся из одной СЛАУ. Поэтому для уменьшения ширины ленты матрицы вектор неизвестных нужно формировать следующим образом

$$(\hat{G}_0, \hat{V}_0, \hat{G}_1, \hat{V}_1, \hat{G}_2, \hat{V}_2, \dots, \hat{G}_M, \hat{V}_M).$$

В этом случае матрица СЛАУ получается пятидиагональной.

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (3.18)-(3.19).

### 3.15 Схема с односторонними разностями $(\ln(\rho), u)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (3.15), (3.16), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{G}$ . После того как  $\hat{G}$  найдена, из второй СЛАУ ищется функция  $\hat{V}$

$$\begin{aligned} G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + V_{\hat{x}} &= 0, & m = 1, \dots, M-1; \\ G_t + V_{\mathbf{x}} &= 0, & m = 0; \\ G_t + V_{\bar{\mathbf{x}}} &= 0, & m = M; \\ V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(\hat{G})\hat{G}_{\hat{x}} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-\hat{G}})V_{x\bar{x}} + f, & m = 1, \dots, M-1; \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-\hat{G}}\|_C$ .

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (3.18)-(3.19).

### 3.16 Схема с односторонними разностями $(u, \ln(\rho))$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (3.15), (3.16), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем последовательного обращения двух СЛАУ

с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{V}$ . После того как  $\hat{V}$  найдена, из второй СЛАУ ищется функция  $\hat{G}$

$$\begin{aligned} V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G)G_{\hat{x}} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, & x \in \omega_h, \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0, \\ G_t + \delta\{\hat{G}, \hat{V}\} + \hat{V}_{\hat{x}} &= 0, & x \in \omega_h, \\ G_{t,0} + \hat{V}_{x,0} &= 0, \\ G_{t,M} + \hat{V}_{\bar{x},M} &= 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$ .

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (3.18)-(3.19).

### 3.17 Схема с односторонними разностями $(\ln(\rho), u)$ (параллельная)

Для поиска численного решения задачи (3.15), (3.16), (2.3), (2.4) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются односторонние разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому решение на каждом слое ищется путем обращения двух СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{G}$ , вторая —  $\hat{V}$ . Системы решаются независимо друг от друга

$$\begin{aligned} G_t + \delta\{\hat{G}, V\} + V_{\hat{x}} &= 0, & x \in \omega_h, \\ G_{t,0} + V_{x,0} &= 0, \\ G_{t,M} + V_{\bar{x},M} &= 0, \\ V_t + \delta\{\hat{V}, V\} + \tilde{p}'(G)G_{\hat{x}} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} - (\tilde{\mu} - \mu e^{-G})V_{x\bar{x}} + f, & x \in \omega_h, \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

где  $\tilde{\mu} = \mu \|e^{-G}\|_C$ .

Начальные и граничные условия следует брать согласно формулам (3.18)-(3.19).

### 3.18 Разностная схема А.Г.Соколова $(\rho, \rho u)$

Функции  $H$  (сеточная плотность), заданная в узлах сетки  $\omega_h^{1/2}$ , и  $V$  (сеточная скорость), заданная в узлах сетки  $\omega_h$ , ищутся по схеме, аппроксимирующей систему (2.1)

$$\begin{aligned} H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\})_x &= 0, & 0 \leq m < M, \\ (H_{\bar{s}}V)_t + \frac{1}{2} \left( (\sigma\{\hat{H}\hat{V}, V\})_x + (\sigma\{\hat{H}\hat{V}^{+1}, V\})_{\bar{x}} \right) + Gr^h p(\hat{H}) &= \\ = \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}}f, & \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \\ \hat{V} = 0, & \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\ 0 < m < M, \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где

$$Gr^h p(H) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} H_{\bar{s}} ((H)^{\gamma-1})_{\bar{x}},$$

если  $p = \rho^\gamma$ , и

$$Gr^h p(H) = p(H)_{\bar{x}},$$

если  $p = C\rho$ .

Разностные уравнения (3.27) в случае  $p = \rho^\gamma$  в индексах имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{2h} + \\ & + \frac{(V_{m+1}^n - |V_{m+1}^n|)H_{m+1}^{n+1} + (V_{m+1}^n + |V_{m+1}^n| - V_m^n + |V_m^n|)H_m^{n+1} - (V_m^n + |V_m^n|)H_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0, \\ & 0 \leq m < M, \\ & \frac{(H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1})V_m^{n+1} - (H_{m-1}^n + H_m^n)V_m^n}{2h} - \\ & - \frac{((|V_{m-1}^n| + V_{m-1}^n)H_{m-2}^{n+1} + (|V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1})V_{m-1}^{n+1}}{2h} + \\ & + \frac{((|V_{m-1}^n| - V_{m-1}^n + |V_m^n| + V_m^n)H_{m-1}^{n+1} + (|V_{m+1}^n| + V_{m+1}^n + |V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1})V_m^{n+1}}{2h} - \\ & - \frac{((|V_m^n| - V_m^n)H_m^{n+1} + (|V_{m+1}^n| - V_{m+1}^n)H_{m+1}^{n+1})V_{m+1}^{n+1}}{2h} + \\ & + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{H_m^{n+1} + H_{m-1}^{n+1}}{2} \frac{(H_m^{n+1})^{\gamma-1} - (H_{m-1}^{n+1})^{\gamma-1}}{2} = \\ & = \mu \frac{V_{m-1}^{n+1} - 2V_m^{n+1} + V_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1}}{2} f_m^{n+1}, \\ & \text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} \neq 0, \\ & V_m^{n+1} = 0, \quad \text{при } H_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} = 0, \\ & 0 < m < M, \\ & V_0^{n+1} = V_M^{n+1} = 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

### 3.19 Разностная схема А.Г.Соколова $(\rho, u)$

В схеме (3.27) можно поменять второе уравнение так, чтобы оно аппроксимировало соответствующее уравнение системы (2.2). В результате получим следующую схему

$$\begin{aligned} & H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\})_x = 0, \quad 0 \leq m < M, \\ & \hat{H}_{\bar{s}} V_t + \hat{H}_{\bar{s}} \delta\{\hat{V}, V\} + Gr^h p(\hat{H}) = \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + \hat{H}_{\bar{s}} f, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \\ & \hat{V} = 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\ & 0 < m < M, \\ & \hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Разностный оператор  $Gr^h$  был определен в параграфе 3.18.

### 3.20 Разностная схема А.Г.Соколова $(u, \rho)$

$$\begin{aligned} & H_{\bar{s}} V_t + H_{\bar{s}} \delta\{\hat{V}, V\} + Gr^h p(H) = \mu \hat{V}_{x\bar{x}} + H_{\bar{s}} f, \quad \text{при } H_{\bar{s}} \neq 0, \\ & \hat{V} = 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}} = 0, \\ & 0 < m < M, \\ & \hat{V}_0 = \hat{V}_M = 0, \\ & H_t + (\sigma\{\hat{H}, \hat{V}\})_x = 0, \quad 0 \leq m < M, \end{aligned} \tag{3.30}$$

Разностный оператор  $Gr^h$  был определен в параграфе 3.18.

### 3.21 Разностная схема А.Г.Соколова $(\rho, u)$ (параллельная)

$$\begin{aligned}
H_t + (\sigma\{\hat{H}, V\})_x &= 0, \quad 0 \leq m < M, \\
H_{\bar{s}}V_t + H_{\bar{s}}\delta\{\hat{V}, V\} + Gr^h p(H) &= \mu\hat{V}_{x\bar{x}} + H_{\bar{s}}f, \quad \text{при } H_{\bar{s}} \neq 0, \\
\hat{V} &= 0, \quad \text{при } H_{\bar{s}} = 0, \\
0 < m < M, \\
\hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Разностный оператор  $Gr^h$  был определен в параграфе 3.18.

### 3.22 Схема с центральными разностями $(\rho, u, \theta)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (2.1), (2.6), (2.11), (2.3), (2.4), (2.9) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому разностное решение  $(H, V, \Theta)$  на каждом слое ищется путем последовательного обращения трех СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{H}$ . После того как  $\hat{H}$  найдена, из второй СЛАУ ищется функция  $\hat{V}$ . И в конце, используя найденные функции  $\hat{H}$  и  $\hat{V}$ , из третьей СЛАУ определяется  $\hat{\Theta}$ .

$$\begin{aligned}
H_t + 0.5(V\hat{H}_{\bar{x}} + (V\hat{H})_{\bar{x}} + H\hat{V}_{\bar{x}}) &= 0, \quad x \in \omega_h, \\
H_{t,0} + 0.5((V\hat{H})_{x,0} + H_0V_{x,0}) - \\
- 0.5h((HV)_{x\bar{x},1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},2} + H_0(V_{x\bar{x},1} - 0.5V_{x\bar{x},2})) &= 0, \\
H_{t,M} + 0.5((V\hat{H})_{\bar{x},M} + H_MV_{\bar{x},M}) + \\
+ 0.5h((HV)_{x\bar{x},M-1} - 0.5(HV)_{x\bar{x},M-2} + H_M(V_{x\bar{x},M-1} - 0.5V_{x\bar{x},M-2})) &= 0, \\
V_t + \frac{1}{3}V\hat{V}_{\bar{x}} + \frac{1}{3}(V\hat{V})_{\bar{x}} + \frac{R(\Theta\hat{H})_{\bar{x}}}{\hat{H}} &= \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} + (\frac{\mu}{\hat{H}} - \tilde{\mu})V_{x\bar{x}} + F, \quad x \in \omega_h, \\
c_v(\Theta_t + \frac{1}{2}\hat{V}\hat{\Theta}_{\bar{x}} + \frac{1}{2}(\hat{V}\hat{\Theta})_{\bar{x}} - \frac{1}{2}\Theta\hat{V}_{\bar{x}}) &= \\
= \tilde{\kappa}\hat{\Theta}_{x\bar{x}} + (\frac{\kappa}{\hat{H}} - \tilde{\kappa})\Theta_{x\bar{x}} + \frac{\mu}{\hat{H}}(\hat{V}_{\bar{x}})^2 - R\Theta\hat{V}_{\bar{x}}, \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

### 3.23 Схема с центральными разностями $(\ln(\rho), u, \theta)$ (последовательная)

Для поиска численного решения задачи (3.15), (3.16), (2.6), (2.11), (2.3), (2.4), (2.9) можно использовать РС, в которой при аппроксимации конвективных членов используются центральные разности, но аппроксимация не всех производных вынесена на верхний временной слой. Поэтому разностное решение  $(G, V, \Theta)$  на каждом слое ищется путем последовательного обращения трех СЛАУ с трехдиагональными матрицами, для чего рекомендуется использовать метод „прогонки“. Первая СЛАУ служит для определения функции  $\hat{G}$ . После того как  $\hat{G}$  найдена, из второй СЛАУ ищется функция  $\hat{V}$ . И в конце,

используя найденные функции  $\hat{G}$  и  $\hat{V}$ , из третьей СЛАУ определяется  $\hat{\Theta}$ .

$$\begin{aligned}
& G_t + \frac{1}{2}V\hat{G}_x + \frac{1}{2}(V\hat{G})_x + V_x - \frac{1}{2}GV_x = 0, \quad x \in \omega_h, \\
& G_{t,0} + \frac{1}{2}(V\hat{G})_{x,0} + V_{x,0} - \frac{1}{2}G_0V_{x,0} - \\
& - \frac{1}{2}h((GV)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}(GV)_{x\bar{x},2} + (2 - G_0)(V_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}V_{x\bar{x},2})) = 0, \\
& G_{t,M} + \frac{1}{2}(V\hat{G})_{\bar{x},M} + V_{\bar{x},M} - \frac{1}{2}G_MV_{\bar{x},M} - \\
& - \frac{1}{2}h((GV)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}(GV)_{x\bar{x},M-2} + (2 - G_M)(V_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}V_{x\bar{x},M-2})) = 0, \\
& V_t + \frac{1}{3}V\hat{V}_x + \frac{1}{3}(V\hat{V})_x + R\Theta\hat{G}_x + R\Theta_x = \tilde{\mu}\hat{V}_{x\bar{x}} + (\mu e^{-\hat{G}} - \tilde{\mu})V_{x\bar{x}} + F, \quad x \in \omega_h, \\
& c_v(\Theta_t + \frac{1}{2}\hat{V}\hat{\Theta}_x + \frac{1}{2}(\hat{V}\hat{\Theta})_x - \frac{1}{2}\Theta\hat{V}_x) = \\
& = \tilde{\kappa}\hat{\Theta}_{x\bar{x}} + (\kappa e^{-\hat{G}} - \tilde{\kappa})\Theta_{x\bar{x}} + \mu e^{-\hat{G}}(\hat{V}_x)^2 - R\Theta\hat{V}_x, \quad x \in \omega_h,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

## 4 Теоретические вопросы

### 4.1 Существование и единственность решений РС

Важным свойством численных методов является существование единственного их решения. Разберем способы ответа на этот вопрос для разностных схем, предложенных в практикуме. Сразу следует отметить одно важное условие однозначной разрешимости РС: выполнение условия положительности значений сеточной функции плотности (для схем А.Г.Соколова это условие заменяется на неотрицательность значений). Выполнимость этого условия для РС практикума будет рассмотрена в параграфе 4.2.

Простым, но эффективным способом достижения единственности решения РС является такая аппроксимация исходных дифференциальных уравнений, чтобы определение решения на очередном временном слое сводилось к решению одной или более СЛАУ с положительно определенными матрицами. Такие матрицы невырождены в силу определения

$$(Ax, x) > 0 \quad \forall x.$$

Во многих РС практикума такой вид матриц достигается за счет аппроксимации конвективных слагаемых кососимметричными, а вязких членов — симметричными положительно определенными операторами. В случае последовательного (или параллельного) решения уравнений системы такие аппроксимации строятся по аналогии с РС для модельных задач, рассмотренных в параграфах 4.6-4.9.

Более сложными являются схемы, в которых неизвестные функции на верхнем слое ищутся одновременно, как решение одной СЛАУ. Разберем этот случай на примере схемы 3.10 с уравнением состояния  $p = C\rho$ . Решение этой РС на верхнем временном слое  $x = (\hat{G}, \hat{V})^*$  является решением системы линейных уравнений

$$Ax = b.$$

Матрица  $A$  представима в виде суммы трех матриц

$$A = \tilde{E} + \tau A_1 + \tau A_2. \tag{4.1}$$

$\tilde{E}$  — диагональная матрица (она соответствует членам  $G_t$  и  $V_t$ ), у которой диагональные элементы равны  $\tilde{p}'(g)$ , если строка матрицы соответствует члену  $G_t$  во внутренних узлах сетки,  $\tilde{p}'(g)/2$ , если строка соответствует члену  $G_t$  в граничных узлах, и 1, если строка соответствует члену  $V_t$ .

Матрица  $A_1$  состоит из блоков

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_1^g & \tilde{A}_2^g \\ A_2^y & A_1^y \end{pmatrix}.$$

Строки блоков  $\tilde{A}_k^g$  ( $k=1,2$ ) получаются домножением на  $\tilde{p}'(g)/2$  строк матриц  $A_k^g$ , соответствующих граничным узлам сетки, и на  $\tilde{p}'(g)$  для внутренних узлов. В случае  $\tilde{p}'(g) = \text{const} > 0$  матрица  $A_1$  является кососимметричной.

$A_2$  – симметричная неотрицательно определенная матрица, состоящая из блоков

$$\begin{pmatrix} -\eta\tau\tilde{A}_3^g(\Phi) & 0 \\ 0 & -A_3^y \end{pmatrix},$$

в которой блок  $\tilde{A}_3^g(\Phi)$  отличается от матрицы  $A_3^g(\Phi)$  аналогично случаю блоков  $\tilde{A}_k^g$  ( $k=1,2$ ).

Поскольку для любого вектора  $x$ , ( $x \neq 0$ ),

$$(Ax, x) = (\tilde{E}x, x) + \tau(A_1x, x) + \tau(A_2x, x) \geq (\tilde{E}x, x) > 0,$$

то матрица  $A$  – невырождена и решение на  $(n+1)$ -ом временном слое всегда однозначно определяется по  $n$ -ому слою. Следовательно, решение РС существует и единственно.

Поиск решения на верхнем слое РС А.Г.Соколова из параграфа 3.18 сводится к последовательному решению двух СЛАУ: сначала находится сеточная функция плотности, а затем скорости. Матрица сеточного оператора

$$A\hat{H} \equiv (\sigma\{\hat{H}, V\})_x$$

выглядит следующим образом

$$\frac{1}{2h} \begin{pmatrix} v_1 + |v_1| & v_1 - |v_1| & 0 & \dots & 0 \\ -v_1 - |v_1| & -v_1 + |v_1| + v_2 + |v_2| & v_2 - |v_2| & 0 & \dots \\ 0 & -v_2 - |v_2| & -v_2 + |v_2| + v_3 + |v_3| & v_3 - |v_3| & 0 \\ 0 & \dots & -v_3 - |v_3| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A_{N-2, N-1} \\ 0 & \dots & 0 & A_{N-1, N-2} & A_{N-1, N-1} \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Эта матрица имеет следующие свойства:

- 1) на диагонали стоят неотрицательные числа;
- 2) вне диагонали стоят неположительные числа;
- 3) сумма элементов по столбцу равна нулю;
- 4) матрица  $A$  является трехдиагональной, причем если для какого-нибудь  $i$  выполняется  $A_{i, i+1} \neq 0$ , то  $A_{i+1, i} = 0$ ;
- 5) если у матрицы  $A$  имеется три ненулевых элемента в столбце для какого-нибудь  $i$ , то в  $i$ -ой строке ненулевым будет только диагональный элемент.

Сеточная функция плотности на верхнем временном слое ищется из СЛАУ

$$B\hat{H} = H,$$

где матрица  $B = E + \tau A$ . У матрицы  $B$  по диагонали стоят положительные числа большие или равные 1. В силу свойства 3 матрица  $B$  имеет строгое диагональное преобладание по столбцам, из чего следует однозначная разрешимость системы при любом векторе  $H$ .

Аналогично доказывается однозначная разрешимость СЛАУ, из которой ищется сеточная функция скорости.

Для модификаций схемы А.Г. Соколова, приведенных в параграфах 3.19-3.21, разрешимость СЛАУ для плотности такое же, а СЛАУ для скорости имеет диагональное преобладание уже по строкам, поскольку в этих схемах для конвективных слагаемых используются односторонние разности против потока.

## 4.2 Положительность значений функции плотности

Одним из важнейших свойств РС для газовой динамики является выполнение условия неотрицательности сеточной функции плотности. Важность выполнения этого условия обусловлена не только физическим смыслом этой функции, а еще и устойчивостью метода решения. Дело в том, что в точках, где значения плотности становятся отрицательными, уравнение сохранения импульса соответствует обратной задаче теплопроводности, которая экспоненциально неустойчива и поэтому в решение РС сразу начинают вноситься быстро нарастающие погрешности.

Для доказательства, что сеточная функция плотности, найденная по схемам А.Г. Соколова, имеет неотрицательные значения, достаточно доказать, что  $\hat{H}$  имеет все значения неотрицательные, если  $H \geq 0$ . Для этого докажем неотрицательность элементов обратной матрицы

$$(E + \tau A)^{-1},$$

где матрица  $A$  имеет вид (4.2).

Рассмотрим матрицу  $D = (E + \tau A)^T$ . У нее имеется строгое диагональное преобладание по строке. Для матриц с таким свойством итерационные методы Якоби и Зейделя сходятся с любого начального приближения.

Пусть решается СЛАУ  $Dx = b$  методом Якоби с начального приближения  $x_0 = 0$  и с вектором правой части  $b$ , состоящим из неотрицательных чисел. Из вычислительной схемы метода Якоби

$$x_i^{n+1} = \frac{1}{D_{i,i}}(b_i - \sum_{k=1, k \neq i}^M B_{i,k} x_k^n), \quad i = 1, 2, \dots, M$$

и свойств неположительности внедиагональных и положительности диагональных элементов матрицы  $D$  ( $D_{k,i} = B_{i,k} \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, M$ ) следует, что  $x_i^n \geq 0$  для  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Предельный вектор также будет неотрицательным. Таким образом, для любого неотрицательного вектора  $b$  вектор  $x = D^{-1}b$  будет неотрицательным. Значит матрица  $D^{-1}$  состоит из неотрицательных чисел. Соответственно матрица

$$(E + \tau A)^{-1} = (D^{-1})^T$$

существует и состоит из неотрицательных чисел.

Другим способом решения проблемы неотрицательности функции плотности служит переход к расчету не самой функции плотности, а ее логарифма. Это возможно для тех задач, где из каких-либо соображений известно, что функция  $\rho$  ограничена снизу некоторой положительной константой. В этом случае при дополнительном условии гладкости

функций  $(\rho, u)$  уравнение неразрывности можно преобразовать следующим образом. Раскроем конвективное слагаемое, используя формулу дифференцирования произведения функций, и поделим получившееся уравнение на  $\rho$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Введя обозначение  $g = \ln \rho$ , получим уравнение для логарифма плотности

$$\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (4.3)$$

Аппроксимируя это уравнение, получаем способ вычисления всегда положительной функции плотности.

При использовании РС, не удовлетворяющих автоматически условию неотрицательности функции плотности, можно доказать это свойство при предположении, что эта функция отделена снизу от нуля положительной константой  $m_\rho$  и ошибка погрешности в норме  $C$  не превосходит  $m_\rho/2$ . Недостатком подобных РС является то, что даже при наличии теоретической априорной оценки погрешности в норме  $C$ , проверка условий выполнения этой оценки затруднительна и приходится контролировать выполнение положительности плотности по факту.

### 4.3 Оценки погрешности численного интегрирования

Получение теоретических априорных оценок для погрешности численного интегрирования имеет важное значение. Во-первых, имея подобные оценки, можно надеяться, что полученное решение будет с заданной точностью приближать точное решение дифференциальной задачи. Конечно, часто бывает так, что условия сходимости из теорем проверить затруднительно или они требуют слишком жестких расчетных параметров РС (например, шаги сетки должны быть достаточно малыми), но РС позволяет рассчитать приближенное решение с требуемой точностью при гораздо более мягких условиях параметров. Но при прочих равных условиях теоремы о точности решений РС являются веским доводом в пользу использования теоретически исследованных алгоритмов.

Вторая причина важности априорных оценок, да и других вопросов, связанных с использованием РС, является то, что при подобных теоретических исследованиях выявляются скрытые негативные свойства алгоритмов, которые подчас можно убрать, нужным образом изменив РС. Примеров тому множество: вопросы однозначной разрешимости РС, избавления от ограниченных осцилляций на разрывах, консервативность и т.д. Причем без понимания первопричины подобных явлений избавиться от них просто невозможно. Существует много примеров того, как теоретические исследования привели к кардинальному улучшению расчетных свойств РС за счет введения дополнительных слагаемых в РС, до чего просто так догадаться было нельзя.

Априорные оценки для систем уравнений в частных производных, полученных из интегральных законов сохранения, как правило получают с помощью так называемого энергетического метода. Его название происходит от первых исследований для уравнения теплопроводности. Этот метод позволяет доказать корректность постановок различных начально-краевых задач для многих уравнений и систем математической физики. Однако, не все задачи на сегодняшний день удалось обосновать, но в виду важности их решения для прикладных проблем их численное решение является очень актуальным. Сомнений в



правильности математических постановок таких до конца необоснованных теоретически задач нет. Они выводятся из общепринятых законов физики и начально-краевые задачи также поставлены исходя из теоретических соображений, которые основываются на изучении модельных задач.

К таким задачам относится система Навье-Стокса и краевая задача для нее с граничными условиями прилипания на скорость. Для сжимаемой среды (газа) теоремы разрешимости в целом по времени доказаны только в случае одной пространственной переменной [6]. Этот успех основывается на записи этой системы в лагранжевых массовых переменных, которая позволяет получить априорные оценки для функции плотности, после чего выводятся все остальные необходимые утверждения. одной не удается. В разностном случае были построены и исследованы РС, также записанные в лагранжевых массовых переменных [11] и обоснованные без предположений о существовании и единственности точного гладкого решения дифференциальной задачи.

Однако повторить этот результат для этой системы в случае, когда пространственных переменных более одной, или в эйлеровых переменных не удастся. Но в силу важности решения задачи именно в эйлеровых переменных были построены неявные РС без использования полупелых узлов, предлагаемые в данном практикуме. Их обоснование проводится при предположении о существовании единственного достаточно гладкого решения дифференциальной задачи.

В качестве примера приведем теорему, которую можно доказать для РС из параграфа 3.2.

Предположим относительно задачи (2.1)-(2.4) выполнение следующих требований.

**Условие 1.** Существует единственное классическое решение задачи.

**Условие 2.**  $u \in C^{2,4}(Q)$ ,  $(\rho, \frac{\partial \rho}{\partial x}) \in C^{2,3}(Q)$ .

**Условие 3.**  $\rho(t, x) \geq m_\rho > 0$ , при  $(t, x) \in Q$ .

**Условие 4.**  $p \in C^3(m_\rho/2; \|\rho\|_Q + m_\rho/2)$ ,  $\max_Q |f| = f_M < \infty$ .

При сделанных предположениях методом энергетических неравенств доказывается следующая теорема.

**ТЕОРЕМА** Существуют величины  $\tau_{\max}$ ,  $h_{\max}$  и  $C$ , зависящие от таких параметров:

- 1) размер области  $Q$ ,
- 2)  $\|u\|_{C^{2,4}(Q)}$ ,  $\|(\rho, \frac{\partial \rho}{\partial x})\|_{C^{2,3}(Q)}$ ,
- 3) констант  $\mu$ ,  $f_M$  и  $m_\rho$ ,
- 4)  $\|p\|_{C^3(m_\rho/2; \|\rho\|_Q + m_\rho/2)}$

такие, что для сеточных норм разности между проекцией точного решения дифференциальной задачи на сетку  $Q_{\tau, h}$  и разностного решения верна оценка

$$\max_{n \leq N} \|(H^n, V^n) - (\rho^n, u^n)\|_{W_{2h}^1}^2 + \tau \sum_{n=1}^M [\|V_{x\bar{x}}^n - u_{x\bar{x}}^n\|^2 + \|V_{\bar{t}}^n - u_{\bar{t}}^n\|^2] \leq C(\tau + h^2)^2,$$

если  $\tau \leq \tau_{\max}$  и  $h \leq h_{\max}$ .

В доказательстве этой теоремы важную роль играет доказательство того, что при  $\tau \leq \tau_{\max}$  и  $h \leq h_{\max}$ , значения сеточной функции плотности  $H$  отделены от нуля величиной  $m_\rho/2$ .

Аналогичные теоремы можно доказать и для других РС практикума, в которых не используются полуцелые узлы.

В практикуме используются линеаризованные схемы Соколова, которые являются упрощенным вариантом следующей полностью неявной РС

$$H_t + (\sigma\{\hat{H}, \hat{V}\})_x = 0, \quad 0 \leq m < M, \quad n \geq 0, \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} (H_{\bar{s}}V)_t + \frac{1}{2} \left( (\sigma\{\hat{H}\hat{V}, \hat{V}\})_x + (\sigma\{\hat{H}\hat{V}^{+1}, \hat{V}\})_{\bar{x}} \right) + \frac{\gamma}{\gamma-1} \hat{H}_{\bar{s}}((\hat{H})^{\gamma-1})_{\bar{x}} &= 0 \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} \neq 0, \\ \hat{V} &= 0, \quad \text{при } \hat{H}_{\bar{s}} = 0, \\ 0 < m < M, \quad n \geq 0, \\ \hat{V}_0 &= \hat{V}_M = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для этой разностной схемы справедлива теорема [2].

**ТЕОРЕМА.** Пусть в начальный момент времени функция  $H^0$  больше или равна нулю. Тогда существует решение разностной схемы (4.4)-(4.5) для которого выполнено энергетическое неравенство

$$\sum_{m=0}^{M-1} \frac{h}{\gamma-1} (\hat{H}^\gamma - H^\gamma) + \sum_{m=0}^{M-1} \frac{h}{2} (\hat{H}\hat{V}^2 - HV^2) \leq 0.$$

#### 4.4 Дифференциальное приближение

Пусть разностное решение  $v^h$  является проекцией на сетку гладкой функции  $v$ . Функция  $v$  в общем случае не удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое аппроксимирует разностная схема.

**Определение.** Дифференциальное уравнение, решением которого является функция  $v$ , называют дифференциальным приближением разностной схемы.

Как правило, дифференциальное приближение содержит бесконечное число членов, в каждый из которых входит производная функции  $v$  с коэффициентом, зависящим от шагов сетки. Чем выше порядок производной, тем выше порядок малости по  $\tau$  и  $h$  этого члена. На практике дифференциальное приближение обычно выписывают до членов порядка  $\underline{\underline{O}}(\tau^n + h^m)$  потому, что, как будет видно из дальнейшего, именно члены с наименьшим порядком по  $\tau$  и  $h$  вносят наибольшее возмущение в функцию  $v$ , по сравнению с точным решением дифференциальной задачи. Более того, дифференциальное приближение стараются выписывать в таком виде, чтобы в дополнительные по сравнению с исходным дифференциальным уравнением члены не входили частные производные по временной переменной, что более удобно для анализа характера вносимых возмущений.

Выведем для примера дифференциальное приближение разностной схемы

$$v_t + av_{\bar{x}} = 0 \quad (4.6)$$

с точностью до членов порядка  $\underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3)$ .

Поскольку функция  $v$  по предположению является гладкой, то подставим в (4.6) вместо  $v_m^{n+1}$  и  $v_{m-1}^n$  их выражения в виде рядов Тейлора, с центром разложения в узле  $(n, m)$

и с точностью разложения до  $\underline{\underline{O}}(\tau^4)$  и  $\underline{\underline{O}}(h^4)$  соответственно. В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \left( \left[ v + \tau \dot{v} + \frac{\tau^2}{2} \ddot{v} + \frac{\tau^3}{6} \dddot{v} + \underline{\underline{O}}(\tau^4) \right] - v \right) + \\ & + \frac{a}{h} \left( v - \left[ v - h v' + \frac{h^2}{2} v'' - \frac{h^3}{6} v''' + \underline{\underline{O}}(h^4) \right] \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

После несложных преобразований уравнение (4.7) приводится к виду

$$\dot{v} + a v' = -\frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{a h}{2} v'' - \frac{\tau^2}{6} \ddot{v} - \frac{a h^2}{6} v''' + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3). \quad (4.8)$$

В левой части последнего равенства записано исходное волновое уравнение, которое аппроксимирует разностная схема (4.6), а в правой — погрешность аппроксимации, которая в общем случае отлична от нуля. Далее производные по времени, входящие в погрешность аппроксимации, заменяются производными по пространственной переменной с требуемой точностью. Для этого выразим производную  $\ddot{v}$  через производную по  $x$ . Дифференцируя (4.8) по времени, получаем

$$\ddot{v} + a \dot{v}' = -\frac{\tau}{2} \ddot{v} + \frac{a h}{2} \dot{v}'' - \frac{\tau^2}{6} \ddot{v} - \frac{a h^2}{6} \dot{v}''' + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3), \quad (4.9)$$

а дифференцируя (4.8) по  $x$  и умножая на  $-a$ , находим

$$-a \dot{v}' - a^2 v'' = \frac{a \tau}{2} \ddot{v} - \frac{a^2 h}{2} v''' + \frac{a \tau^2}{6} \dot{v}'' + \frac{a^2 h^2}{6} v'''' + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3). \quad (4.10)$$

Складывая (4.9) и (4.10), получаем

$$\ddot{v} = a^2 v'' + \tau \left( \frac{-\ddot{v}}{2} + \frac{a}{2} \ddot{v}' + \underline{\underline{O}}(\tau) \right) + h \left( \frac{a}{2} \dot{v}'' - \frac{a^2}{2} v''' + \underline{\underline{O}}(h) \right). \quad (4.11)$$

Аналогично можно получить следующие выражения для производных  $\ddot{v}$ ,  $\ddot{v}'$ ,  $\dot{v}''$ :

$$\begin{aligned} \ddot{v} &= -a^3 v''' + \underline{\underline{O}}(\tau + h), \\ \ddot{v}' &= a^2 v''' + \underline{\underline{O}}(\tau + h), \\ \dot{v}'' &= -a v''' + \underline{\underline{O}}(\tau + h). \end{aligned} \quad (4.12)$$

Заменяя в правой части уравнения (4.8) производные по временной переменной на производные по пространственной переменной по формулам (4.11) и (4.12), получаем

$$\dot{v} + a v' = \frac{a h}{2} (1 - \nu) v'' - \frac{a h^2}{6} (2\nu^2 - 3\nu + 1) v''' + \underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3), \quad (4.13)$$

где  $\nu = a\tau/h$ . Уравнение (4.13) и называют дифференциальным приближением разностной схемы (4.6) с точностью до членов порядка  $\underline{\underline{O}}(\tau^3 + h^3)$ .

Подчеркнем, что для исключения производных по времени высших порядков необходимо использовать именно уравнение, получающееся после подстановки разложения в ряд Тейлора в разностное уравнение, (в нашем примере это уравнение (4.8)), а не исходное уравнение в частных производных, для решения которого предназначена разностная схема (для данного примера — волнового уравнения). Это связано с тем, что решение исходного уравнения в общем случае не является решением разностного уравнения, а дифференциальное приближение следует из разностного уравнения. Поэтому исходное уравнение в частных производных не должно использоваться для исключения производных по времени.

## 4.5 Диссипативные и дисперсионные свойства

При использовании метода конечных разностей на самом деле ищется решение уравнения, являющегося дифференциальным приближением разностной схемы, а не исходного уравнения в частных производных. Следовательно, проанализировав дифференциальное приближение разностной схемы, можно определить основные качественные свойства разностного решения. Коротко опишем основную идею такого анализа.

Решением простейшего волнового уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.14)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = e^{ikx} \quad (4.15)$$

является волна

$$u(t, x) = e^{i(\omega t + kx)}, \quad (4.16)$$

где  $\omega = -ak$ .

Линейное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.17)$$

с начальным условием (4.15) имеет решение в виде волны (4.16), где

$$\omega = -ak + i\mu k^2$$

. Следовательно, частота колебаний по времени решения уравнения (4.17) осталась такой же, как и у решения уравнения (4.14), а амплитуда волны стала зависеть от числа  $\mu$ : при  $\mu > 0$  амплитуда волны с увеличением времени затухает, а при  $\mu < 0$  — возрастает. Более того, при  $\mu < 0$  задача Коши в полуплоскости  $t > 0$  для уравнения (4.17) с начальным условием (4.15) является некорректной.

Обратимся теперь к рассмотрению линейного уравнения Кортвега-де-Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \xi \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}. \quad (4.18)$$

Его решением с начальным условием (4.15) является волна (4.16), у которой

$$\omega = -ak - \xi k^3.$$

Такая волна не меняет своей амплитуды с течением времени, но частота колебаний по времени зависит по другому закону, чем у решения уравнения (4.14).

Аналогичные выводы можно сделать и для уравнений, содержащих производные по пространственной переменной более высокого порядка: производные четного порядка определяют изменение амплитуды волны, а нечетного порядка частоту колебаний по времени.

Таким образом, неявная замена при использовании метода конечных разностей решаемого уравнения уравнением, содержащим старшие производные по пространственным переменным, приводит к качественным изменениям у получаемых решений по сравнению с решениями исходной задачи. Безусловно, наибольший вклад в изменение решения

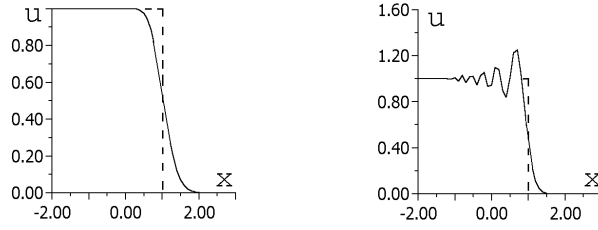


Рис. 2: два типа численного решения

вносит тот член дифференциального приближения, не входящий в исходное уравнение, который имеет наименьший порядок малости в зависимости от шагов разностной сетки.

Проиллюстрируем сказанное выше на примере разностной схемы (4.6). Пусть с ее помощью решается задача о распространении волны, описываемой уравнением (4.14) при  $a = 1$  и начальным условием

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Точное решение этой задачи задается формулой

$$u(t, x) = u_0(x - t); \quad (4.20)$$

иными словами, профиль точного решения не будет меняться с ростом  $t$ , а будет лишь сдвигаться вправо со скоростью  $a = 1$ .

Решение же разностной схемы (4.6) при  $\tau/h < 1$  будет тоже иметь профиль, сдвигающийся вправо со скоростью  $a = 1$ , но который будет постепенно сглаживаться (левый график рис. 2). Это объясняется наличием в дифференциальном приближении этой схемы члена со второй производной по пространственной переменной, который играет роль гасителя амплитуд волн вида (4.16), из которых состоит решение (4.20), поскольку

$$\mu = \frac{ah}{2}(1 - \tau/h) > 0.$$

Следовательно, схема (4.6) при  $\nu \neq 1$  неявно вводит в уравнение искусственную вязкость, которую часто называют неявной (схемной) искусственной вязкостью в отличие от явной искусственной вязкости, которая преднамеренно вводится в некоторых схемах в разностное уравнение. Искусственная вязкость сглаживает решение уравнения, уменьшая градиенты всех параметров независимо от причины возникновения этих градиентов, физической или вычислительной. Такое свойство разностной схемы, обусловленное наличием в выражении для погрешности аппроксимации производных четного порядка, называют диссипацией на разностной сетке. Воздействие диссипации приводит к растяжению крутых линий раздела, которые могут появляться в расчетной области.

Дифференциальное приближение разностной схемы (4.6) содержит также член с третьей производной по пространственной переменной, но он более высокого порядка малости по шагам разностной сетки, поэтому его роль практически не видна. Проиллюстрировать вклад члена с нечетной производной по пространственной переменной можно на примере следующей схемы

$$v_t + av_x = \frac{\tau a}{2} v_{x\bar{x}}. \quad (4.21)$$

Ее дифференциальное приближение имеет вид

$$\dot{v} + av' = -\frac{ah^2}{6}(1-\nu^2)v''' - \frac{ah^3\nu}{8}(1-\nu^2)v'''' + \dots \quad (4.22)$$

При расчете задачи (4.14), (4.19) по схеме (4.21) (естественно при выполнении условия устойчивости  $\tau/h < 1$ ) получается разностное решение, имеющее характерные осцилляции на фоне точного решения (4.20) (правый график рис. 2). Это объясняется тем, что главным членом, вносящим погрешность в численное решение, является первое слагаемое из правой части (4.22). Этот член является третьей производной по пространственной переменной, т.е. не влияет на величину амплитуды волн, из которых состоит разностное решение, зато частота колебаний по времени у них оказывается разной и происходит явление, аналогичное явлению дифракции. Такое явление, связанное с производными нечетного порядка в дифференциальном приближении, называют дисперсией. Дисперсия приводит к искажению соотношения фаз различных волн.

Обычно, если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производную четного порядка, то схема обладает в основном диссипативными свойствами, а если производную нечетного порядка — то дисперсионными.

Оценим ширину размазывания разностной схемы (4.6). Возьмем начальные данные вида

$$v_m^0 = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

и посмотрим, как их преобразует схема (4.6).

Непосредственной проверкой можно убедиться, что интересующее нас решение имеет вид

$$v_m^n = \begin{cases} C_n^{n-m} \nu^m (1-\nu)^{n-m} & \text{при } 0 \leq m < n, \\ 0 & \text{при остальных } m. \end{cases} \quad (4.24)$$

Функция, стоящая в правой части (биномиальный закон распределения), приближенно может быть представлена в виде

$$v_m^n \approx \tilde{v}_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\nu(1-\nu)}} e^{-\frac{(m-n\nu)^2}{2n\nu(1-\nu)}}. \quad (4.25)$$

График решения на  $n$ -м шаге будет иметь вид, приведенный на рис. 3. Максимум правой части (4.25) достигается при  $m = n\nu$ , т.е. имеет координату  $x = mh = an\tau = at$ . Т.к.  $x - at = 0$  — характеристика уравнения (4.14), то мы видим, что максимум решения движется по характеристике. Назовем условно шириной зоны размазывания длину отрезка, на котором решение принимает значения (см. рис. 3)

$$v > e^{-\alpha^2 \tilde{v}_{\max}}.$$

Ширина этой зоны определяется по формуле

$$H = 2\alpha\sqrt{2(1-\nu)ath}. \quad (4.26)$$

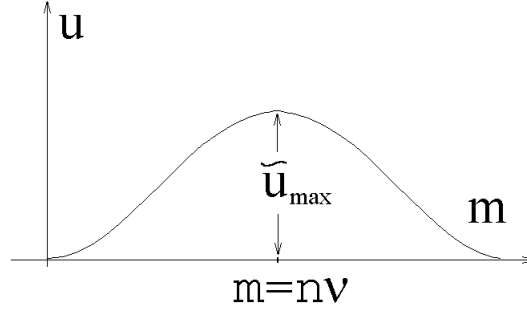


Рис. 3: Ширина зоны "размазывания"

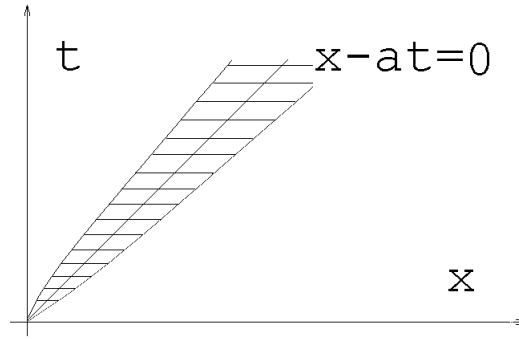


Рис. 4: Зависимость ширины зоны "размазывания" от времени

Следовательно, при  $h \rightarrow 0$  область, в которой решение существенно отлично от нуля, стягивается к характеристике  $x - at = 0$  (рис. 4). С течением времени  $t$  область размазывания расширяется пропорционально  $\sqrt{t}$ . Решение разностных уравнений с начальными данными в виде "ступеньки" (4.19) можно получить суммированием специальных решений такого вида, как мы только что изучили.

На рисунке 5 сравниваются результаты расчета задачи (4.14), (4.19) с шагом  $h = 0.1$  и  $h = 0.025$  при  $\nu = 0.1$  в один и тот же момент времени  $t = 1$ . Как видно из рисунка 5, геометрическая протяженность зоны "размазывания" уменьшилась с уменьшением шага  $h$  в 4 раза примерно вдвое.

Заметим также, что при величине числа Куранта  $\nu = 1$  формула (4.26) дает для ширины зоны размазывания значение  $H = 0$ , что подтверждается численным экспериментом, в котором схема воспроизводит точное решение.

#### 4.6 Уравнение переноса

Законы сохранения, которые лежат в основе дифференциальных уравнений, чаще всего приводят к дивергентной форме записи конвективной части дифференциального оператора. Поэтому рассмотрим уравнение переноса с переменным коэффициентом (его часто называют линейным невязким уравнением Бюргера) в следующем виде

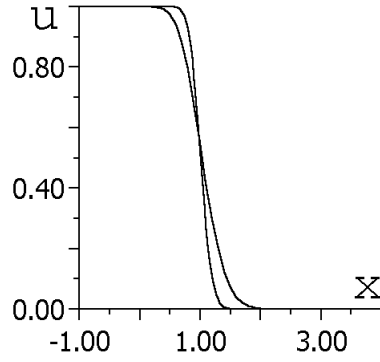


Рис. 5: Зависимость ширины зоны "размазывания" от шагов сетки

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(a(t, x)u)}{\partial x} = 0 \quad (4.27)$$

в области  $Q = [0; T] \times [0; 1]$  с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x). \quad (4.28)$$

Пусть коэффициент  $a$  при всех  $t$  удовлетворяет условиям

$$a(t, 0) = a(t, 1) = 0.$$

В этом случае краевые условия на функцию  $u$  задавать не нужно. Далее будем предполагать достаточную гладкость коэффициента  $a$ .

Запишем уравнение (4.27) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial(a(t, x)u)}{\partial x} + \frac{a(t, x)}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a'(t, x)}{2} u = 0, \quad (4.29)$$

где

$$a' = \frac{\partial a}{\partial x}.$$

Для задачи (4.29), (4.28) рассмотрим р.с. с центральными разностями

$$\begin{aligned} v_{t,0} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{x,0} + \frac{1}{2}a'_0v_0 - \frac{h}{2} \left( (av)_{x\bar{x},1} - \frac{1}{2}(av)_{x\bar{x},2} \right) &= 0, \\ v_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{\hat{x}} + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{v}_{\hat{x}} + \frac{1}{2}a'v &= 0, \quad 0 < m < M, \\ v_{t,M} + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{\bar{x},M} + \frac{1}{2}a'_Mv_M + \frac{h}{2} \left( (av)_{x\bar{x},M-1} - \frac{1}{2}(av)_{x\bar{x},M-2} \right) &= 0, \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Поиск решения этой р.с. приводит к необходимости искать на каждом временном слое



решение СЛАУ, задаваемой следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \hat{v}_0 + \frac{\tau}{2h} \hat{a}_1 \hat{v}_1 &= \left(1 - \frac{\tau}{2} a'_0\right) v_0 - \frac{5\tau}{2h} a_1 v_1 + \frac{2\tau}{h} a_2 v_2 - \frac{\tau}{2h} a_3 v_3, \\ -\frac{\tau}{4h} (\hat{a}_{m-1} + \hat{a}_m) \hat{v}_{m-1} + \hat{v}_m + \frac{\tau}{4h} (\hat{a}_{m+1} + \hat{a}_m) \hat{v}_{m+1} &= \left(1 - \frac{\tau}{2} a'_m\right) v_m, \quad 1 \leq m \leq M, \\ \hat{v}_M - \frac{\tau}{2h} \hat{a}_{M-1} \hat{v}_{M-1} &= \left(1 - \frac{\tau}{2} a'_M\right) v_M + \frac{5\tau}{2h} a_{M-1} v_{M-1} - \frac{2\tau}{h} a_{M-2} v_{M-2} + \frac{\tau}{2h} a_{M-3} v_{M-3}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Матрица  $A$  этой СЛАУ является суммой диагональной матрицы  $A_1$  и двухдиагональной кососимметрической матрицы  $A_2$ . У матрицы  $A_1$  в первой и последней строках на диагонали стоят элементы равные  $1/2$ , а остальные элементы диагонали равны 1. Поскольку в силу кососимметричности  $(A_2 v, v) = 0$ , то

$$(Av, v) = (A_1 v, v) > 0$$

для любой  $v \neq 0$ , поэтому решение р.с. (4.30) всегда существует и единственно. Найти его можно, используя метод прогонки.

#### 4.7 Линейное уравнение Бюргера с вязкостью

Линейное уравнение Бюргера с вязкостью является простейшим представителем уравнений, которых учитываются как конвективные, так и диссипативные процессы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(a(t, x)u)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.32)$$

Уравнение будем рассматривать в области  $Q = [0, T] \times [0, 1]$  с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (4.33)$$

и простейшими граничными условиями

$$u(t, 0) = u_l(t), \quad u(t, 1) = u_r(t). \quad (4.34)$$

Для решения задачи (4.32)-(4.34) рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} v_t + \frac{1}{2}(\hat{a}\hat{v})_{\hat{x}} + \frac{1}{2}\hat{a}\hat{v}_{\hat{x}} + \frac{1}{2}a_{\hat{x}}v &= \mu\hat{v}_{x\bar{x}}, \quad 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 &= u_l((n+1)\tau), \quad \hat{v}_M = u_r((n+1)\tau), \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Для нахождения решения разностной схемы (4.35) на каждом временном слое требуется решать СЛАУ

$$A\hat{v} = b,$$

где  $A = E + \frac{\tau}{4h}A_1 + \frac{\tau\mu}{h^2}A_2$ .

Матрица  $A_1$  кососимметричная

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_1 + \hat{a}_2 & 0 & \dots & 0 \\ -\hat{a}_1 - \hat{a}_2 & 0 & \hat{a}_2 + \hat{a}_3 & 0 & \dots \\ 0 & -\hat{a}_2 - \hat{a}_3 & 0 & \hat{a}_3 + \hat{a}_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Симметричная трехдиагональная матрица  $A_2$  — матрица второй разностной производной, по диагонали которой стоят 2, а на двух побочных — -1. Поэтому

$$(Av, v) = (v, v) + \frac{\tau}{4h}(A_1v, v) + \frac{\tau\mu}{h^2}(A_2v, v) \geq \|v\|^2.$$

Следовательно, матрица  $A$  является невырожденной и разностная схема (4.35) всегда имеет решение.

Вектор правой части  $b$  задается следующим образом

$$\begin{pmatrix} v_1 - \frac{\tau}{2}a_{\hat{x},1}v_1 + \frac{\tau}{4h}(\hat{a}_0 + \hat{a}_1)\hat{u}_l \\ \dots \\ v_m - \frac{\tau}{2}a_{\hat{x},m}v_m \\ \dots \\ v_{M-1} - \frac{\tau}{2}a_{\hat{x},M-1}v_1 + \frac{\tau}{4h}(\hat{a}_{M-1} + \hat{a}_M)\hat{u}_r \end{pmatrix}$$

#### 4.8 Уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом

Уравнение теплопроводности с переменным коэффициентом является модельным как для процессов, для которых этот коэффициент зависит от термодинамических параметров по известному закону, так и для некоторых "искусственных" случаев записи уравнений с целью построить численный метод решения, обладающий нужными свойствами. Чтобы не выходить за рамки темы лекции про линейные уравнения будем считать, что коэффициент теплопроводности является заданной функцией от координат  $t$  и  $x$ , обладает необходимой гладкостью и принимает положительные значения, отделенные от нуля величиной  $\delta_\mu$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (4.36)$$

Уравнение будем рассматривать в области  $Q = [0, T] \times [0, 1]$  с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (4.37)$$

и простейшими граничными условиями

$$u(t, 0) = u_l(t), \quad u(t, 1) = u_r(t). \quad (4.38)$$

Для решения задачи (4.36)-(4.38) рассмотрим разностную схему

$$\begin{aligned} v_t &= \tilde{\mu} \hat{v}_{x\bar{x}} + ((\mu^{+1/2} - \tilde{\mu})v_x)_{\bar{x}}, \quad 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 &= u_l((n+1)\tau), \quad \hat{v}_M = u_r((n+1)\tau), \\ v_m^0 &= u_0(mh), \quad 0 \leq m \leq M, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где  $\tilde{\mu}^n = \max_{m=0}^{M-1} \mu(n\tau, (m+1/2)h)$ . В уравнении (4.39) обозначение  $\mu^{+1/2}$  означает, что значение коэффициента берется в точке  $(n\tau, (m+1/2)h)$ .

**Утверждение.** Решение разностной схемы (4.39) существует и единственно. Порядок аппроксимации на гладких решениях задачи (4.36)-(4.38)  $u \in C^{2,4}(Q)$  равен  $\tau + h^2$ .

**Замечание.** Разностная схема (4.39) использует значение коэффициента теплопроводности с нижнего временного слоя. В случае нелинейных задач, когда  $\mu$  зависит от решения, такой способ аппроксимации не всегда является правильным. Бывает так, что значения  $\mu$  необходимо брать с верхнего временного слоя.

## 4.9 Нелинейное уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.40)$$

в области  $Q = [0, T] \times [0, 1]$  с начальными и граничными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (4.41)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0. \quad (4.42)$$

Для построения разностной схемы перепишем уравнение (4.40) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{2}{3} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{2}{3} u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.43)$$

Для задачи (4.43), (4.41), (4.42) рассмотрим р.с.

$$\begin{aligned} v_t + \frac{2}{3}(v\hat{v})_{\hat{x}} + \frac{2}{3}v\hat{v}_{\hat{x}} &= \mu\hat{v}_{x\bar{x}}, & 0 < m < M, \\ \hat{v}_0 = \hat{v}_M &= 0, \\ v_m^0 &= u_0(mh), & 0 \leq m \leq M. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Для нахождения решения разностной схемы (4.44) на каждом временном слое требуется решать СЛАУ

$$A\hat{v} = b,$$

где  $A = E + \frac{\tau}{6h}A_1 + \frac{\tau\mu}{h^2}A_2$ .

Матрица  $A_1$  кососимметричная

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & v_1 + v_2 & 0 & \dots & 0 \\ -v_1 - v_2 & 0 & v_2 + v_3 & 0 & \dots \\ 0 & -v_2 - v_3 & 0 & v_3 + v_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Симметричная трехдиагональная матрица  $A_2$  — матрица второй разностной производной, по диагонали которой стоят 2, а на двух побочных — -1. Поэтому

$$(Av, v) = (v, v) + \frac{\tau}{6h}(A_1v, v) + \frac{\tau\mu}{h^2}(A_2v, v) \geq \|v\|^2.$$

Следовательно, решение разностной схемы (4.44) всегда существует и единственно.

## 4.10 Метод прогонки

Пусть требуется решить СЛАУ с трехдиагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & c_{k-1} & a_k & b_k & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & c_{N-2} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & c_{N-1} & a_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_k \\ \cdot \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_k \\ \cdot \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Для таких систем метод Гаусса можно записать в следующем виде. Сначала вычисляются коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\beta_1$

$$\alpha_1 = -b_1/a_1, \quad \beta_1 = f_1/a_1.$$

Затем вычисляются по рекуррентным формулам  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  для  $k = 2, \dots, N-1$

$$\alpha_k = -b_k/(a_k + c_{k-1}\alpha_{k-1}), \quad \beta_k = (f_k - c_{k-1}\beta_{k-1})/(a_k + c_{k-1}\alpha_{k-1}).$$

После чего определяется значение  $x_N$

$$x_N = (f_N - c_{N-1}\beta_{N-1})/(a_N + c_{N-1}\alpha_{N-1})$$

и по рекуррентным формулам последовательно находятся  $x_k$  для  $k = N-1, \dots, 1$

$$x_k = \alpha_k x_{k+1} + \beta_k.$$

Описанный выше метод называется методом прогонки. Приведем наиболее известное условие устойчивости метода прогонки [4]

$$|a_k| \geq |b_k| + |c_{k-1}| \quad k = 2, \dots, N-1, \quad |b_1/a_1| \leq 1, \quad |c_{N-1}/a_N| \leq 1, \quad |b_1/a_1| + |c_{N-1}/a_N| < 2.$$

Еще ряд условий устойчивости метода прогонки доказан в книге [8]. Оригинальный метод исследования вопроса устойчивости был предложен Н.С.Бахваловым в работе [9]. Обзор результатов по устойчивости метода прогонки можно найти в конспекте лекций Попова А.В. [10].

## 5 Рекомендации по программированию

Этот раздел содержит советы по организации структуры программы, обозначениям, использованию памяти, автоматизации численных экспериментов и обсуждение других вопросов, связанных непосредственно с реализацией алгоритмов.

### 5.1 Общие замечания

Сформулируем тезисы, исходя из которых были написаны приведенные ниже рекомендации по структуре и организации памяти программ.

**I. Для достижения наибольшей точности приближенных решений требуется проводить расчеты с минимально возможными шагами сетки.**

**II. При прочих равных условиях программа работает быстрее, если под нее требуется отводить меньше памяти.**

**III. Идентификаторы переменных должны ассоциироваться с теми величинами, которые они обозначают.**

Решением нестационарных задач являются функции, зависящие от двух типов переменных: времени и пространственной координаты (координат). Дискретизация по времени приводит к вычислению приближенного решения лишь в отдельные моменты времени, которые называются временными слоями. В практикуме используются РС, которые связывают численное решение на двух последовательных временных слоях  $n$ -ом и  $(n+1)$ -ом, называемыми нижним и верхним временными слоями соответственно. Такие РС называют двухслойными. Эта связь может быть записана в виде СЛАУ

$$Az^{n+1} = d, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (5.1)$$

где  $z^{n+1}$  — разностное решение на  $(n+1)$ -ом временном слое, а матрица  $A$  и вектор правой части  $d$  определяются используемой РС и ее параметрами, параметрами решаемой дифференциальной задачи и решением на  $n$ -ом временном слое. Решение задачи (5.1) при определенных условиях существует и единственно. Поскольку решение  $z^0$  считается известным, то алгоритм поиска численного решения сводится к последовательному решению  $N$  СЛАУ.

В целях экономии выделяемой памяти практически никогда не создают массив, для хранения разностного решения на всех временных слоях одновременно. Выделяют лишь память требуемую для хранения решения на одном временном слое в виде массива  $z$ . Используя значения решения с  $n$ -го слоя, вычисляют элементы матрицы  $A$  и правой части  $d$ . После чего находят решение на  $(n+1)$ -ом слое, сохраняя его в массиве  $z$ . В ряде случаев требуется хранить информацию о решении с нижнего слоя, когда часть решения на верхнем слое уже найдена. Это приводит к необходимости отводить дополнительную память под часть решения с верхнего слоя, а затем копировать его в массив  $z$ . Но в любом случае отводимая память существенно меньше нежели та, которая была бы необходима для хранения решения на всех временных слоях.

Общее число временных слоев может существенно превышать необходимое количество, которое требуется для полноценного ответа на решаемые вопросы. Это связано с аппроксимацией и устойчивостью используемой РС. Поэтому для дальнейшей обработки сохраняют в файле с результатами только те временные слои, информация о которых необходима.

## 5.2 Структура программы

Для выполнения заданий практикума требуется написать несколько программ, которые будут давать ответы на поставленные задачи. Каждая программа достаточно объемная, но в них есть очень много повторяющихся (или почти повторяющихся) подпрограмм, отладка которых происходит один раз, а дальше они используются в других программах. Опишем эти подпрограммы. Заметим, что предлагаемые идентификаторы переменных и структуры допускают простое обобщение на многомерный по пространственной переменной случай, что обеспечивает более простое выполнение заданий весеннего семестра.

Главная программа (хранится в файле `gas_one.c`).

Главная программа — это набор команд, которые обеспечивают выполнение соответствующего задания. В ней должны задаваться параметры дифференциальной задачи, наборы параметров РС, для которых проводится численный эксперимент (задание сетки, величин ее шагов и т.д.), определяться пути вывода информации, которую требуется сохранить, вызываться расчетный модуль, а также осуществляться другие необходимые действия общего характера.

Параметры дифференциальной задачи для удобства задания и передачи в подпрограммы хранятся в структуре *P\_gas*.

```
typedef struct
{
    double Segm_T;
    double Segm_X;
    double p_ro;
    double p_gamma;
    double mu;
} P_gas;
```

В ней хранятся следующие величины.

1) Параметры, задающие расчетную область *Q*. В случае прямоугольной области достаточно задать длины ее сторон и временного промежутка. В одномерном случае эти параметры обозначены через *Segm\_X* и *Segm\_T* соответственно.

2) Параметры, задающие свойства газа. В случае рассматриваемой модели это вязкость газа  $\mu$  (обозначается *mu*) и функция  $p = p(\rho)$ . В практикуме используется либо простейшая линейная зависимость  $p = C_\rho \rho$ . Для ее определения требуется задать константу  $C_\rho$ , которая характеризует сжимаемость газа и в программе обозначается *p\_ro*. Либо используется нелинейная зависимость вида  $p = \rho^\gamma$ , где степень  $\gamma$  является известной константой.

Всем этим переменным сразу присваиваются значения в процедуре

```
void param_dif(P_gas *p_d)
```

Для хранения параметров схемы используется структура *P\_she*:

```
typedef struct
{
    int M_x;
    int N;
    int Dim;
    double h_x;
    double tau;
    double eta;
} P_she;
```

В одномерном случае задание равномерной сетки требует минимальной информации: числа разбиений по пространственной (*M\_x*) и временной (*N*) переменным. Для удобства в этой структуре еще хранятся переменные:

- *Dim*, задающая общее число узлов по пространственной переменной и равная  $M_x + 1$ ;
- *h\_x* и *tau* — шаги сетки, равные  $Segm_X/M_x$  и  $Segm_T/N$  соответственно;
- *eta* — параметр пропорциональности искусственной вязкости.

Структура  $P\_she$  задается в подпрограмме

$$void param\_she(P\_she * p\_s, P\_dif * p\_d)$$

В цикле, организованном для расчета всех тестов, каждый раз выполняются следующие действия.

- 1) Определяются параметры дифференциальной задачи (процедура  $param\_dif$ ).
- 2) Определяются параметры схемы (процедура  $param\_she$ ).
- 2) Вызывается подпрограмма расчета разностного решения (процедура  $Shema$ ).

### 5.3 Процедура $Shema$

В процедуре

$$void Sxema(P\_she * p\_s, P\_dif * p\_d)$$

реализован алгоритм разностной схемы, который позволяет найти сеточное решение начально-краевой задачи, поставленной для системы (2.1), в момент времени  $T$ . Параметры сетки и дифференциальной задачи передаются в структурах  $P\_she$  и  $P\_dif$ .

Численное решение РС, используемых в практикуме, на очередном временном слое ищется в виде решения СЛАУ (5.1). Все РС можно условно разделить на два типа. К первому типу отнесем РС, для которых СЛАУ (5.1) распадается на две подсистемы, которые могут быть решены либо в произвольном порядке, либо в строго определенном, но при этом решение одной системы задает функцию скорости, а решение другой системы задает функцию плотности на  $(n+1)$ -ом временном слое. При этом матрицы этих подсистем являются трехдиагональными и их решения могут быть найдены методом прогонки. Ко второму типу относятся РС, для которых СЛАУ (5.1) не допускает расщепления на две отдельные СЛАУ, решением которых служили бы функции плотности и скорости на верхнем слое. У РС второго типа матрица  $A$  системы (5.1) является сильноразреженной, но ширина ее ленты больше 2. Для решения этих систем рекомендуется использовать метод бисопряженных градиентов, поскольку разностное решение с предыдущего временного слоя может служить хорошим начальным приближением.

Для хранения решения на текущем временном слое для РС первого типа можно использовать два массива размерности  $Dim$ , в одном из которых хранится скорость, а в другом плотность. При последовательном решении подсистем, на которые распадается СЛАУ (5.1) РС этого типа, необходимо отводить память в виде четырех векторов размерности  $Dim$ . В трех из них хранятся диагонали трехдиагональной матрицы системы, а в четвертом правая часть. Для корректного задания элементов СЛАУ второй подсистемы может требоваться еще один вектор размерности  $Dim$  для сохранения копии либо функции плотности, либо функции скорости с нижнего слоя.

В случае использования РС второго типа для уменьшения ширины матрицы  $A$  СЛАУ (5.1) приходится заводить массив размерности  $2Dim$ , котором чередуются значения плотности и скорости. Матрицу  $A$  можно хранить в MSR формате (Modified Sparse Row), что позволяет применять пакетные реализации метода бисопряженных градиентов.

Опишем метод хранения матрицы  $A$  размером  $N$  на  $N$  и имеющей  $s$  ненулевых внедиагональных элементов в случае использования языка Си. Строки и столбцы матрицы  $A$  имеют номера от 0 до  $N-1$ . Для хранения заводятся одномерные действительный массив  $AA$  и целочисленный массив  $AJ$  размерности  $N+1+s$  каждый. Нумерация элементов

этих массивов начинается с нуля. В массиве  $AA$  на первых  $N$  местах с номерами от 0 до  $N - 1$  последовательно хранятся диагональные элементы матрицы  $A$  от  $a_{11}$  до  $a_{NN}$ . На месте с номером  $N$  либо ничего не хранится, либо хранится специальная информация. На оставшихся местах массива  $AA$  хранятся ненулевые внедиагональные элементы, начиная с элемента с минимальными номерами строки и столбца. Далее последовательно перечисляются все внедиагональные элементы в порядке возрастания номеров строк и столбцов, причем в первую очередь увеличивается номер столбца. В массиве  $AJ$  на месте с номером  $n$  ( $0 \leq n < N$ ) хранится номер места в массиве  $AA$  первого ненулевого внедиагонального элемента строки, имеющей номер  $n$ . При отсутствии внедиагональных элементов в строке с номером  $n$  значение  $AJ(n)$  полагается равным  $AJ(n + 1)$ . Элемент  $AJ(N)$  всегда равен  $N + 1 + s$ . На местах с номерами  $n \geq N + 1$  располагаются номера столбцов элементов  $AA(n)$ .

Хранение разреженной матрицы в MSR-формате рассмотрим на следующем примере

$$A = \begin{pmatrix} 5.2 & 2.3 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 4.1 & 3.2 & 0 & 0 & 0 \\ 7.1 & 0 & 6.2 & 9.1 & 5.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.1 & 8.4 & 0 & 0 \\ 0 & 2.3 & 0 & 0.2 & 0 & 4.3 \end{pmatrix}$$

Для этой матрицы массивы  $AA$  и  $AJ$  выглядят следующим образом

$$AA =$$

5.2	4.1	6.2	2.2	0	4.3	*	2.3	0.4	3.2	7.1	9.1	5.7	4.1	8.4	2.3	0.2
-----	-----	-----	-----	---	-----	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$$AJ =$$

7	9	10	13	13	15	17	1	3	2	0	3	4	2	3	1	3
---	---	----	----	----	----	----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

В целях еще более радикальной экономии памяти, отводимой под хранение матрицы  $A$ , заметим, что все используемые РС второго типа приводят к СЛАУ, которые состоят из разностных уравнений, аппроксимирующих уравнения неразрывности и сохранения импульса. Как было уже отмечено выше для ускорения скорости сходимости требуется чередовать эти уравнения, но для экономного в смысле памяти хранения матрицы рассмотрим перегруппировку этих уравнений: сначала запишем уравнения относящиеся к уравнению неразрывности, а затем к уравнению сохранения импульса. Эти группы уравнений не допускают расщепления на две подсистемы, как это было в РС первого типа, но каждая из этих групп задает свою часть строк матрицы  $A$ . Тем самым получаем разделение матрицы  $A$  на две прямоугольные сильно разреженные подматрицы прямоугольного типа размера  $Dim \times 2Dim$ . Каждая из этих подматриц является пяти или шестидиагональной и поэтому для хранения матрицы  $A$  требуется всего два комплекта по пять векторов размерности  $Dim$ . Далее нетрудно заметить, что часть из этих диагоналей состоит из одних и тех же чисел, поэтому соответствующие вектора можно заменить на скалярные переменные. Справедливости ради необходимо отметить, что при такой организации хранения ненулевых элементов матрицы  $A$  по сравнению с MSR форматом, текст программы тяжелее адаптировать к решению задач, в которых уравнения системы (2.1) заменяются более сложными.



Память под массивы переменных, используемых для хранения разностного решения, матрицы  $A$  и правой части  $d$ , отводится динамически. Все они имеют размерность, зависящую от  $Dim$ .

Еще один совет состоит в том, что лучше заранее вычислить несколько часто встречающихся в формулах констант, значения которых определяются входными параметрами процедуры, и потом много раз использовать при определении коэффициентов матрицы и правой части СЛАУ.

Для удобства работы с процедурой *Shema* текст ее программы разбивают на относительно небольшие блоки, которые собираются в единое целое при помощи операции *include*.

## 5.4 Имена переменных

Теперь объясним смысл рекомендуемых к использованию идентификаторов скалярных переменных. Эти обозначения существенно облегчают написание и отладку программы за счет своей наглядности особенно в многомерном случае, но привыкать к ним естественно лучше уже при создании одномерной программы.

Рассмотрим более сложный случай использования РС второго типа. Пусть разностное решение на  $n$ -ом временном слое состоит из сеточных функций  $H$  и  $V$ , которые хранятся в одномерном массиве  $RES$  размерности  $2Dim$  в следующем порядке

$$(H_0, V_0, H_1, V_1, H_2, V_2, \dots, H_{M-x}, V_{M-x}).$$

Для поиска решения на  $(n+1)$ -ом временном слое, состоящего из сеточных функций  $\hat{H}$  и  $\hat{V}$  требуется решить СЛАУ (5.1), состоящую из уравнений двух типов:

$$\begin{aligned} & a_{2m,2m-2}\hat{H}_{m-1} + a_{2m,2m-1}\hat{V}_{m-1} + a_{2m,2m}\hat{H}_m + \\ & + a_{2m,2m+1}\hat{V}_m + a_{2m,2m+2}\hat{H}_{m+1} + a_{2m,2m+3}\hat{V}_{m+1} = d_{2m} \end{aligned} \quad (5.2)$$

и

$$\begin{aligned} & a_{2m+1,2m-2}\hat{H}_{m-1} + a_{2m+1,2m-1}\hat{V}_{m-1} + a_{2m+1,2m}\hat{H}_m + \\ & + a_{2m+1,2m+1}\hat{V}_m + a_{2m+1,2m+2}\hat{H}_{m+1} + a_{2m+1,2m+3}\hat{V}_{m+1} = d_{2m+1}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Уравнения (5.2) и (5.3) аппроксимируют уравнения неразрывности и сохранения импульса соответственно. Коэффициенты  $a_{kl}$  и  $d_k$  ( $k = m, m+1; l = 2m-2, \dots, 2m+3$ ) являются функциями, зависящими от значений  $H_{m-1}, H_m, H_{m+1}, V_{m-1}, V_m, V_{m+1}$  и параметров дифференциальной задачи и разностной схемы. Узлы сетки, используемые при аппроксимации в различных точках, расположены однотипно и называются шаблоном РС. В рассматриваемом случае шаблон состоит всего из трех соседних точек  $(m-1)h, mh$  и  $(m+1)h$ .

Для определения коэффициентов  $a_{kl}$  и  $d_k$  многократно используются значения решения с  $n$ -го временного слоя, поэтому для ускорения работы программы имеет смысл считывать нужные для очередного уравнения значения из массива  $RES$  во вспомогательные переменные и уже эти переменные подставлять в формулы. Для этого сначала необходимо правильно задать номера в массиве  $RES$  значений сеточных функций  $H$  и  $V$  в узлах шаблона РС, для которых предлагается использовать следующие идентификаторы

$$mLH, m0H, mRH, mLV, m0V, mRV.$$

Переменные, которыми обозначены эти идентификаторы, задают целочисленные номера в массиве *RES* значений функций *H* и *V* в узлах шаблона сетки, равные

$$2m - 2, 2m, 2m + 2, 2m - 1, 2m + 1, 2m + 3$$

соответственно. Начальная буква *m* в этих идентификаторах говорит о том, что эти переменные предназначены для задания номеров, вторая буква указывает на то, какому узлу шаблона соответствует эта переменная (*L* означает левый узел с номером  $m - 1$ , *0* — центральный узел с номером  $m$  и *R* — правый узел с номером  $m + 1$ ), а третья буква добавлена для определения того, какая из функций *H* или *V* соответствует этому идентификатору.

После чего значения функций в узлах шаблона записываются в скалярные действительные переменные

$$HL, H0, HR, VL, V0, VR,$$

где суффикс у заглавной буквы означает узел шаблона, в котором берется значение соответствующей функции.

Введение этих переменных делает формулы для вычисления коэффициентов  $a_{kl}$  и  $d_k$  гораздо нагляднее и ошибки в их наборе находятся гораздо легче.

## 5.5 Переход от разностной задачи к СЛАУ.

Разберем переход от разностной аппроксимации к СЛАУ на примере разностной схемы 3.1.

Для этого сначала распишем первое разностное уравнение (3.1), используя поточечную запись

$$\frac{H_m^{n+1} - H_m^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left( V_m^n \frac{H_{m+1}^{n+1} - H_{m-1}^{n+1}}{2h} + \frac{V_{m+1}^n H_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^n H_{m-1}^{n+1}}{2h} + H_m^n \frac{V_{m+1}^{n+1} - V_{m-1}^{n+1}}{2h} \right) = 0, \\ m = 1, \dots, M - 1. \quad (5.4)$$

Умножив равенство 5.4 на  $\tau$  и приведя подобные при неизвестных значениях функций *V* и *H* со слоя  $n + 1$ , получим

$$-\frac{\tau}{4h}(V_{m-1}^n + V_m^n)H_{m-1}^{n+1} - \frac{\tau}{4h}H_m^n V_{m-1}^{n+1} + H_m^{n+1} + \frac{\tau}{4h}H_m^n V_{m+1}^{n+1} + \frac{\tau}{4h}(V_{m+1}^n + V_m^n)H_{m+1}^{n+1} = H_m^n, \\ m = 1, \dots, M - 1. \quad (5.5)$$

Таким образом, отличные от нуля элементы матрицы системы 5.1 строки с номером  $2m$  (коэффициенты уравнения 5.2), где  $m = 1, \dots, M - 1$ , равны

$$a_{2m, 2m-2} = -\frac{\tau}{4h}(V_{m-1}^n + V_m^n), \\ a_{2m, 2m-1} = -\frac{\tau}{4h}H_m^n, \\ a_{2m, 2m} = 1, \\ a_{2m, 2m+2} = \frac{\tau}{4h}(V_{m+1}^n + V_m^n), \\ a_{2m, 2m+3} = \frac{\tau}{4h}H_m^n,$$

а правая часть соответствующего уравнения равна

$$d_{2m} = H_m^n.$$

Элементы строк матрицы  $A$  с номерами 0 и  $2M$  и соответствующих им  $d_0$  и  $d_{2M}$  получаются из второго и третьего разностных уравнений схемы 3.1. Элементы строк с номерами  $2m + 1$ , где  $m = 1, \dots, M - 1$ , получаются из четвертого уравнения схемы 3.1, а коэффициенты уравнений с номерами 1 и  $2M + 1$  задаются граничными условиями на функцию  $V$ .

## Список литературы

- [1] Попов А.В., Жуков К.А. Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа. // Вычислительные методы и программирование. т.14, 2013 г. N 2. с. 516-523.
- [2] Имранов Ф.Б., Кобельков Г.М., Соколов А.Г. О разностной схеме баротропного газа. Доклады РАН, т.478, 2018 г., N 4, 388-391.
- [3] Попов А.В. Gnuplot и его приложения. М.: Изд-во попечительского совета механико-математического факультета МГУ, 2015. <http://numa.math.msu.su/data/materials/popov-gnuplot-and-its-applications.pdf>
- [4] Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
- [5] Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2ed., 2003.
- [6] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики жидкостей и газов. Новосибирск: Наука, 1983, 320 с.
- [7] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2000 г. - 624 с.
- [8] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы (введение в теорию) М.: Наука, 1977.
- [9] Бахвалов Н.С. О накоплении вычислительной погрешности при численном решении дифференциальных уравнений. Сб. работ ВЦ МГУ, N 1, 1962, с. 47-68.
- [10] Попов А.В. Методы решения нестационарных задач механики сплошной среды. Устойчивость метода прогонки. Лекция 10. Рабочий конспект спецкурса. 2016 г. <http://edu.math.msu.ru/special-courses/po-vyboru/>
- [11] Амосов А.А., Злотник А.А. Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа. ЖВМиМФ. т.27, 1987 г. N 7. с. 1032-1049.