Тема 7 „Ряды"

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д'Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \frac{(n+1)^{n+1}(n!)^2}{((n+1)!)^2 \cdot n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)^2 n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = 0$$

степень знаменателя больше степени числителя, поэтому предел равен 0

$0 < 1$ – ряд сходится

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = 0$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n+\ln n}\right| \geq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+1+\ln(n+1)}\right|$$

$$\frac{1}{n+\ln n} \geq \frac{1}{n+1+\ln(n+1)}$$ => предел равен 0, неравенство истинно => сходится

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{\frac{3^n}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{3^n\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot 3^{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2}{3}-1\right) = \lim_{n\to\infty} -\frac{n}{3} = -\infty$$

$-\infty < 1 \Rightarrow$ ряд расходится

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

$$f'(x) = \frac{32x}{16x^2} = \frac{2}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{12}{x^4}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{48}{x^5}$$

$$f(x) = \ln(16) + 2(x-1) - \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 - \frac{12}{4!}(x-1)^4 + \frac{48}{5!}(x-1)^5$$

$$f(x) = \ln 16 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \ln 16 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n} = \ln 16 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n}$$

Тема 8 „Понятие об интеграле"

1. Найти неопределённый интеграл:

$$\int(2x^2-2x-1+\sin x-\cos x+\ln x+e^x)dx =$$

$$= \frac{2x^3}{3}-x^2-x-\cos x-\sin x+\ln x\cdot x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx+e^x+C =$$

$$= \frac{2x^3}{3}-x^2-x-\cos x-\sin x+x\ln x-x+e^x+C =$$

$$= \frac{2x^3}{3}-x^2-2x-\cos x-\sin x+x\ln x+e^x+C$$

2. Найти неопределённый интеграл:

$$\int(2x+6xz^2-5x^2y-3\ln z)dx =$$

$$= x^2+3x^2z^2-\frac{5}{3}x^3y-3\ln z\cdot x+C$$

3. Вычислить определённый интеграл:

$$\int_0^{\pi}3x^2\sin(2x)dx$$

$$\int 3x^2\sin(2x)dx$$

$t=2x$,

$x=\frac{t}{2}$, $dx=\frac{dt}{2}$

$$3\int\frac{t^2}{4}\sin t\frac{dt}{2}=\frac{3}{8}\int t^2\sin t\,dt=\frac{3}{8}\left(t^2(-\cos t)-\int-\cos t\cdot 2t\cdot dt\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\left(-t^2\cos t+2\int t\cos t\,dt\right)=\frac{3}{8}\left(-t^2\cos t+2\left(t\cdot\sin t-\int\sin t\,dt\right)\right)=$$

$$=\frac{3}{8}\left(-t^2\cos t+2(t\sin t+\cos t)\right)=\frac{3}{8}\left(-4x^2\cos 2x+2(2x\sin 2x+\cos 2x)\right)=$$

$$=\frac{3}{4}\left(-2x^2\cos 2x+2x\sin 2x+\cos 2x\right)$$

$$\int_0^{\pi}3x^2\sin(2x)dx=\frac{3}{4}\left(-2\pi^2\cos 2\pi+2\pi\sin 2\pi+\cos 2\pi\right)-\frac{3}{4}\cdot\cos 0=$$

$$=\frac{3}{4}\left(-2\pi^2+1\right)-\frac{3}{4}=-\frac{3\pi^2}{2}$$

4. Найти неопределённый интеграл

$$\int\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$$

$t=x+1$

$$\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{x+1}+C$$