

Тема "Производные функций нескольких переменных"

1. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{1-x^3} + \ln(y^2-1)$$

$$\begin{cases} 1-x^3 \geq 0 \\ y^2-1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ y > 1 \end{cases}$$

2. Найти производные 1-го порядка функции

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$z'_x = 3 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln y} = 3 \left(1 + \frac{2 \ln x}{\ln y} + \frac{\ln^2 x}{\ln^2 y}\right) \cdot \frac{1}{x \ln^3 y} = \frac{3 \ln^2 y + 6 \ln x \ln y + 3 \ln^3 x}{x \ln^3 y}$$

$$z'_y = 3 \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \left(-\frac{\ln x}{\ln^2 y}\right) \cdot \frac{1}{y} = -\frac{3 \ln x}{y \ln^2 y} \cdot \left(\frac{\ln^2 y + 2 \ln x \ln y + \ln^3 x}{\ln^2 y}\right) = -\frac{3 \ln x \ln^2 y + 6 \ln^2 x \ln y + 3 \ln^3 x}{y \ln^4 y}$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1).

$$z = \sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}$$

$$z'_x = \left((2xy + \cos \frac{x}{y})^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} \cdot \left(2y - \sin \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}\right) = \frac{2y - \frac{\sin \frac{x}{y}}{y}}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} = \frac{2y^2 - \sin \frac{x}{y}}{2y\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}}$$

$$z'_y = \left((2xy + \cos \frac{x}{y})^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} \cdot \left(2x - \sin \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\right) = \frac{2xy^2 + x \sin \frac{x}{y}}{2y^2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}}$$

$$dz(1,1) = \frac{2 - \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}} + \frac{2 + \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}} = \frac{2}{\sqrt{2 + \cos 1}}$$

4. Исследовать на экстремум функцию.

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6xy - 9y$$

$$\begin{aligned} z'_x &= 2x + y - 6 \\ z'_y &= x + 2y - 9 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 6 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 - 2x \\ x = 9 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \rightarrow \text{экстремум есть}$$

$$z''_{xx} = 2 > 0 \rightarrow \text{точка минимума } (1, 4)$$