Тема „Производные функций нескольких переменных"

1. Найти область определения функции

$$z=\sqrt{1-x^3}+\ln(y^2-1)$$

$$\begin{cases}1-x^3\geq 0\\ y^2-1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ (y>1)\cup(y<-1)\end{cases}$$

2. Найти производные 1-го порядка функции

$$z=\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^3$$

$$z'_x=3\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\ln y}=3\left(1+\frac{2\ln x}{\ln y}+\frac{\ln^2 x}{\ln^2 y}\right)\cdot\frac{1}{x\ln y}=\frac{3\ln^2 y+6\ln x\cdot\ln y+3\ln^2 x}{x\ln^3 y}$$

$$z'_y=3\left(1+\frac{\ln x}{\ln y}\right)^2\cdot\left(-\frac{\ln x}{\ln^2 y}\right)\cdot\frac{1}{y}=-\frac{3\ln x}{y\ln^2 y}\left(\frac{\ln^2 y+2\ln x\ln y+\ln^2 x}{\ln^2 y}\right)=-\frac{3\ln x\ln^2 y+6\ln^2 x\ln y+3\ln^3 x}{y\ln^4 y}$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке $(1;1)$.

$$z=\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}$$

$$z'_x=\left(\left(2xy+\cos\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\cdot\left(2y-\sin\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}\right)=\frac{2y-\frac{\sin\frac{x}{y}}{y}}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}=\frac{2y^2-\sin\frac{x}{y}}{2y\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}$$

$$z'_y=\left(\left(2xy+\cos\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\cdot\left(2x-\sin\frac{x}{y}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right)=\frac{2xy^2+x\cdot\sin\frac{x}{y}}{2y^2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}$$

$$dz(1,1)=\frac{2-\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}}+\frac{2+\sin 1}{2\sqrt{2+\cos 1}}=\frac{2}{\sqrt{2+\cos 1}}$$

4. Исследовать на экстремум функцию.

$$z=x^2+xy+y^2-6x-9y$$

$$\begin{aligned}z'_x&=2x+y-6\\ z'_y&=x+2y-9\end{aligned}\Rightarrow\begin{cases}2x+y-6=0\\ x+2y-9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=6-2x\\ x=9-2y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=3>0\rightarrow$$ экстремум есть

$$z''_{xx}=2>0\rightarrow$$ точка минимума $(1,4)$