Тема 6 „Понятие о производной"

1. Найти производную выражения:

a. $\sin x \cdot \cos x$

$(\sin x \cdot \cos x)' = (\cos x)' \sin x + (\sin x)' \cos x = -\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x =$
$= -\sin^2 x + \cos^2 x$

b. $\ln(2x+1)^3$

$(\ln(2x+1)^3)' = 3\ln(2x+1)^2 (\ln(2x+1))' = 3\ln(2x+1)^2 \cdot \frac{2}{2x+1} = \frac{6\ln(2x+1)^2}{2x+1}$

c. $\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}$

$\left(\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}\right)' = \left(|\sin(\ln(x^3))|\right)' = \frac{\sin(\ln(x^3))}{|\sin(\ln(x^3))|} \cdot (\sin(3\ln x))' =$

$= \frac{\sin(3\ln x)}{|\sin(3\ln x)|} \cdot \cos(3\ln x) \cdot 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{3\sin(3\ln x) \cdot \cos(3\ln x)}{x\,|\sin(3\ln x)|} \cdot \frac{2}{2} =$

$= \frac{3\sin(6\ln x)}{2x\,|\sin(3\ln x)|}$

d. $\frac{x^4}{\ln(x)}$

$\left(\frac{x^4}{\ln(x)}\right)' = \frac{(x^4)' \cdot \ln x - x^4 (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \ln x - x^4 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x}$

2. Найти выражение производной функции и её значение в точке:

$f(x) = \cos(x^2 + 3x)$, $x_0 = \sqrt{\pi}$

$f'(x) = (\cos(x^2+3x))' = -\sin(x^2+3x) \cdot (2x+3)$

$f'(x_0) = -\sin((\sqrt{\pi})^2 + 3\sqrt{\pi}) \cdot (2\sqrt{\pi}+3) = -(\sin\pi \cdot \cos 3\sqrt{\pi} + \cos\pi \cdot \sin 3\sqrt{\pi}) \cdot (2\sqrt{\pi}+3) =$

$= \sin(3\sqrt{\pi})(2\sqrt{\pi}+3) \approx -5{,}38$

3. Найти значение производной функции в точке:

$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{1 + 2x + 3x^2 - 4x^3}$, $x_0 = 0$

$f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x - 1)(1 + 2x + 3x^2 - 4x^3) - (x^3 - x^2 - x - 1)(2 + 6x - 12x^2)}{(1 + 2x + 3x^2 - 4x^3)^2}$

$f'(x_0) = \frac{-1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2}{1} = 1$

4. Найти угол наклона касательной к графику функции в точке:

$f(x) = \sqrt{3x} \cdot \ln x$, $x_0 = 1$

$f'(x) = (\sqrt{3x})' \ln x + \sqrt{3x} (\ln x)' = \dfrac{3 \ln x}{2\sqrt{3x}} + \dfrac{\sqrt{3x}}{x}$

$f'(x_0) = \dfrac{3 \ln 1}{2\sqrt{3 \cdot 1}} + \dfrac{\sqrt{3 \cdot 1}}{1} = \sqrt{3}$

$tg\alpha = \sqrt{3}$

$\alpha = 60^\circ$