

Тема „Предел функции“

1. Предложить пример функции, не имеющей предела в точке и в бесконечностях.

$$f(x) = \sqrt{4 - (x-4)^2}$$

2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

3. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$ по плану.

- а) Область задания и область значений.

$$x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R}$$

- б) Корни функции и их кратность.

$$x_1 = 0 - \text{кратность } 2$$

$$x_2 = 1 - \text{кратность } 1$$

- в) Отрезки знакопостоянства.

отрицательна при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$

положительна при $x \in (1; +\infty)$

- г) Интервалы монотонности.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}$$

$(-\infty; 0)$ - монотонно возрастает

$(0; \frac{2}{3})$ - монотонно убывает

$(\frac{2}{3}; +\infty)$ - монотонно возрастает

- д) Четность функции.

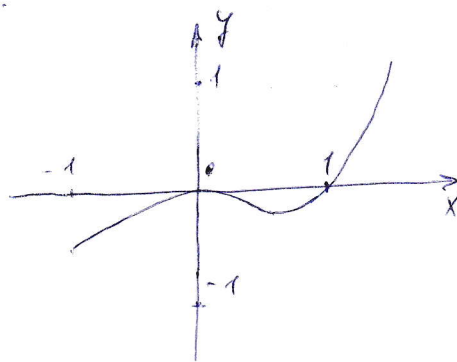
Функция не четная, не нечетная

- е) Ограниченность

Функция не ограничена

- ж) Периодичность.

Функция не периодична.



4. Найти предел:

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \frac{x^2(3x-2)}{4x^2} = \frac{3}{4}x - \frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{3}{2} \cdot (1+x)^{\frac{1}{6}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

Тема "Теоремы о пределах"

1. Найти предел:

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^{-1} = 1$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin(x)} = \left(\frac{\arcsin(x)}{x} \right)^{-1} = 1$$

$$d. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-3} \right)^{6x} = \left(\frac{4x-3+6}{4x-3} \right)^{6x} = \left(1 + \frac{6}{4x-3} \right)^{6x}$$

$$n = \frac{4x-3}{6} \Rightarrow x = \frac{6n+3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{6 \cdot \frac{6n+3}{4}} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{9n + \frac{9}{2}} = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{9n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{9}{2}} =$$

$$= \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^9 = e^9$$

$$e. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \ln x}{x} = \frac{(\sin x + \ln x)'}{x'} = \cos x + \frac{1}{x} = \cos x$$

предел не существует