Урок 5.

1) Найти собственные вектора и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(6-\lambda) + 6 \cdot 2 = -6 + \lambda - 6\lambda + \lambda^2 + 12 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 6}}{2} = (2, 3)$$ – собственные значения

$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Для $\lambda = 2$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$$ => решением является множество чисел, например $(1, -0{,}5)$

Для $\lambda = 3$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = -3x_2 \\ 2x_1 = -3x_2 \end{cases}$$ => решением является множество чисел, например $(1, -\frac{2}{3})$

2) Дан оператор поворота на 180 градусов, задаваемый матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Показать, что любой вектор является для него собственным.

Решение:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1+\lambda)^2 = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 = -x_1 \\ -x_2 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$ => любой вектор является собственным.

3) Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор $x = (1, 1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 + 1 = \lambda \\ -1 + 3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2$$

Т.к. получилось вычислить собственное значение, то вектор $(1, 1)$ является собственным вектором.

4) Пусть линейный оператор задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Установить, является ли вектор $x = (3, -3, -4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ 9 = -3\lambda \\ -12 = -4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$

Т.к. система не имеет решений, то вектор $(3, -3, -4)$ не является собственным вектором этого линейного оператора.