Урок 1.

1. Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=1,\ f_3(x)=x+1,\ f_4(x)=x-e^x$

Решение:

$f_3(x)-f_2(x)-f_1(x)=x+1-1-e^x=x-e^x=f_4(x)$

Т.к. функции можно выразить друг через друга, значит они линейно зависимы.

2. Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x)=2,\ f_2(x)=x,\ f_3(x)=x^2,\ f_4(x)=(x+1)^2$

Решение:

$f_4(x)=x^2+2x+1=f_3(x)+2f_2(x)+0{,}5\,f_1(x)$

Т.к. функции можно выразить друг через друга, значит они линейно зависимы.

3. Найти координаты вектора $x=(2,3,5)\in R^3$ в базисе $b_1=(0,0,10),\ b_2=(2,0,0),\ b_3=(0,1,0)$.

Решение:

$x=0{,}5b_1+b_2+3b_3$

$x=(0{,}5,\ 1,\ 3)$

4. Найти координаты вектора $3x^2-2x+2\in R^3[x]$:

а) в базисе $1, x, x^2$

б) в базисе $x^2, x-1, 1$

Решение:

а) ~~$e_1=(1,0,0), e_2=(0,x,0), e_3=(0,0,x^2)$~~

$e_1=(0,0,1),\ e_2=(0,x,0),\ e_3=(x^2,0,0)$

$2e_1-2e_2+3e_3 \Rightarrow (2,-2,3)$

б) $e_1=(x^2,0,0), e_2=(0,x-1,0), e_3=(0,0,1)$

б.1) $3e_1-\frac{2x}{x-1}e_2+2e_3 \Rightarrow \left(3,-\frac{2x}{x-1},2\right)$

б.2) $3e_1-2e_2+0\cdot e_3 \Rightarrow (3;-2;0)$

Решил двумя способами, т.к. не определился какой из них более правильный.

5, Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$

Решение:

а) Возможные варианты векторов:

$(0, a, b), (c, 0, d), (0, 0, e)$

Проверим их на условия $u+v \in L$ и $\alpha \cdot u \in L$.

$(0, a, b)+(c, 0, d)=(c, a, b+d)$

Первая же проверка показывает, что условие нарушается, поэтому ответ: не является.

б) Да, является. Это следует из определения: возьмём в n-мерном линейном пространстве конечный набор векторов, тогда совокупность всех линейных комбинаций этих векторов образует некоторое подпространство исходного линейного пространства.