Урок 2.

1. Найти скалярное произведение векторов $x, y \in R$

а) $x = (0, -3, 6)$, $y = (-4, 7, 9)$;

б) $x = (7, -4, 0, 1)$, $y = (-3, 1, 11, 2)$.

Решение:

а) $(x, y) = 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot 7 + 6 \cdot 9 = 33$

б) $(x, y) = 7 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 11 + 1 \cdot 2 = -23$

2. Найти нормы векторов $(4, 2, 4)$ и $(12, 3, 4)$ и угол между ними.

Решение:

$l_1(4, 2, 4) = 4 + 2 + 4 = 10$

$l_2(4, 2, 4) = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2} = 6$

$l_1(12, 3, 4) = 12 + 3 + 4 = 19$

$l_2(12, 3, 4) = \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2} = 13$

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{4 \cdot 12 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4}{6 \cdot 13} \approx 0{,}9$$

$\varphi \approx 26^\circ$

3. Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов;

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

Решение:

а) Проверим на удовлетворение аксиомам евклидова пространства.

$(x, y) = (y, x)$

$|x| \cdot |y| = |y| \cdot |x|$

$\sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2} = \sqrt{\sum y_i^2} \cdot \sqrt{\sum x_i^2}$

$\sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2} = \sqrt{\sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2}$

Верно

$(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$

$|\lambda x| \cdot |y| = \sqrt{\sum (\lambda x_i)^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2} = \sqrt{\lambda^2 \sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2} = \lambda \sqrt{\sum x_i^2} \sqrt{\sum y_i^2} = \lambda |x| \cdot |y|$

Верно

$(x_1+x_2, y) = (x_1, y)+(x_2, y)$

$|x_1+x_2|\cdot|y| = \sqrt{\sum(x_{1i}+x_{2i})^2}\cdot\sqrt{\sum y_i^2} \overset{?}{=}$

$|x_1||y|+|x_2||y| = \sqrt{\sum x_{1i}^2}\sqrt{\sum y_i^2}+\sqrt{\sum x_{2i}^2}\cdot\sqrt{\sum y_i^2}$

$\sqrt{\sum(x_{1i}+x_{2i})^2}\cdot\sqrt{\sum y_i^2} = \sqrt{\sum x_{1i}^2}\sqrt{\sum y_i^2}+\sqrt{\sum x_{2i}^2}\sqrt{\sum y_i^2}$

$\sqrt{\sum(x_{1i}+x_{2i})^2} = \sqrt{\sum x_{1i}^2}+\sqrt{\sum x_{2i}^2}$

Неверно

3-я аксиома не выполняется, поэтому ответ - нет.

б) $(x, y)=(y, x)$

~~$3|x||y|\cos x = 3|y||x|\cos x$~~

$3\sum x_i y_i = 3\sum y_i x_i$

Верно

$(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$

$3\sum\lambda x_i y_i = \lambda\cdot 3\sum x_i y_i$

Верно

$(x_1+x_2, y) = (x_1, y)+(x_2, y)$

$3\sum(x_{1i}+x_{2i})y_i = 3\sum x_{1i}y_i+3\sum x_{2i}y_i$

$3\sum(x_{1i}+x_{2i})y_i = 3\sum(x_{1i}+x_{2i})y_i$

Верно

$(x, x)\geq 0$, причём $(x, x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$3\sum x_i\cdot x_i = 3\sum x_i^2$

Верно

Все 4 аксиомы выполняются, поэтому ответ - да.

4. Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве R^3:

а) $(1,0,0), (0,0,1)$;

б) $\left(1/\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1)$;

в) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (0,0,1)$;

г) $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$?

Решение:

а) Нет третьего вектора, поэтому не является ортонормированным.

б) $(a,b) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 = 0$ $\quad |a| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} = 1$

$(a,c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ $\quad |b| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} = 1$

$(b,c) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ $\quad |c| = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1$

Ортонормированный базис.

в) $(a,b) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = -1$

Не является ортонормированным базисом

г) $(a,b) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$ $\quad |a| = \sqrt{1+0+0} = 1$

$(a,c) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ $\quad |b| = \sqrt{0+1+0} = 1$

$(b,c) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ $\quad |c| = \sqrt{0+0+1} = 1$

Ортонормированный базис.