

# Kapitel 1

## Categorical Language and the van-Kampen theorem

### 1.1 Kategorien

### 1.2 Funktoren

### 1.3 Natürliche Transformationen

#### 1.3.1 Definition: Natürliche Transformationen

Sind  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Funktoren, so ist eine **natürliche Transformation**  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  definiert durch Pfeile  $\alpha_A : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$  für alle  $A \in \mathcal{C}$ , sodass

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(B) \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ \mathcal{G}(A) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

für alle  $A, B \in \mathcal{C}, f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  kommutiert.

#### 1.3.2 Definition: Natürliche Isomorphismen

Eine **natürliche Isomorphie** ist eine natürliche Transformation  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , bei der alle Pfeile  $\alpha_A : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$  isomorph sind.

### 1.3.3 Definition: Äquivalenzen von Kategorien

Kategorien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  heißen **natürlich äquivalent**, falls Funktoren  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  existieren, sodass  $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$  natürlich isomorph zu  $\text{id}_{\mathcal{C}}$  und  $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$  natürlich isomorph zu  $\text{id}_{\mathcal{D}}$  sind.

## 1.4 Adjungierte Funktoren

### 1.4.1 Definition: Adjungierte

Seien  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  Funktoren.  $\mathcal{F}$  heißt **linksadjungiert** zu  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{G}$  **rechtsadjungiert** zu  $\mathcal{F}$ , falls für alle  $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}$  gilt:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{G}(B)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), B)$$

### 1.4.2 Definition: Präsentation von Gruppen

Sei  $S$  eine Menge und  $R$  eine Teilmenge von  $S^*$ . Wir definieren  $\langle S \mid R \rangle$  als die **Präsentation**  $\mathcal{G}$ , falls

$$\langle S \mid R \rangle := \mathcal{F}(S)/N(R) \cong G$$

$G$  ist **endlich präsentiert**, falls  $S$  und  $R$  endlich sind.

## 1.5 Limes Konstruktionen

### 1.5.1 Definition: Produkt

Sind  $X, Y \in \mathcal{C}$  Objekte einer Kategorie, so definieren wir das **Produkt** von  $X$  und  $Y$  als das größte Objekt  $X \times Y$  zusammen mit Abbildungen  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X, \pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ , sodass folgende UAE erfüllt wird:

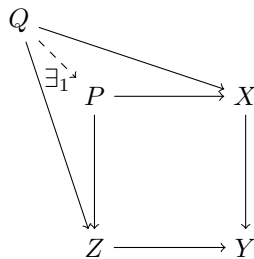
$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & \swarrow q_X & \vdots \exists_1 \Phi & \searrow q_Y & \\ X & \xleftarrow{\pi_X} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \end{array}$$

### 1.5.2 Definition: Pullback

Seien  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$  Objekte einer Kategorie mit den Abbildungen  $X \rightarrow Y \leftarrow Z$ . Dann ist ein **Pullback** bzw. **Faserprodukt**  $P$  das größte Objekt, das folgendes **Pullback-Diagramm** zum kommutieren bringt.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

d.h. es erfüllt folgende UAE:

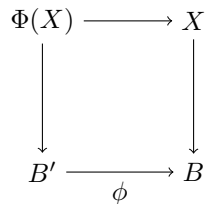


### 1.5.3 Beispiel: Pullback

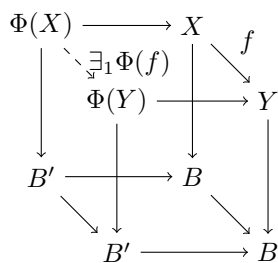
In **Set** ist der Pullback gerade  $X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$  für  $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$ . In **Top** ist der Pullback dieselbe Menge mit der entsprechenden Spurtopologie.

### 1.5.4 Beispiel: Überlagerung

Sei  $\mathbf{Cov}_B$  die Kategorie der Überlagerung von  $B \in \mathbf{Top}$ . Sei ferner  $\phi : B' \rightarrow B$  eine stetige Abbildung. Dann definieren wir einen Funktor  $\Phi : \mathbf{Cov}_B \rightarrow \mathbf{Cov}_{B'}$  auf Objekten  $X \in \mathbf{Cov}_B$  durch den Pullback:



Und auf Pfeilen  $X \xrightarrow{f} Y$  durch die UAE des folgenden Pullbacks:



### 1.5.5 Definition: Diagramme

Ein **Diagramm** der Gestalt  $\mathcal{I}$  ist ein Funktor von einer kleinen Kategorie  $\mathcal{I}$  in eine Kategorie.

### 1.5.6 Definition: Kegel

Der **Kegel** eines Diagrammes  $\mathcal{D} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  ist ein Objekt  $A \in \mathcal{C}$  mit einer Familie von Pfeilen  $(A \rightarrow \mathcal{D}(i))_{i \in \mathcal{I}}$ , sodass folgendes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D}(i) \\ & \searrow & \nearrow \mathcal{D}(g) \\ & \mathcal{D}(j) & \end{array}$$

für alle Pfeile  $i \xrightarrow{g} j$  in  $\mathcal{I}$  kommutiert.

### 1.5.7 Definition: Limes

Der **Limes** eines Diagrammes  $\mathcal{D} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  ist der größte Kegel  $L \in \mathcal{C}$ , d.h. es erfüllt folgende UAE für alle Kegel  $A$  von  $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\exists_1} & L \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathcal{D}(i) & \end{array}$$

für alle  $i \in \mathcal{I}$ .

### 1.5.8 Beispiel: Limites

- Das Produkt einer Kategorie ist der Limes eines Diagramms der Gestalt

$$\bullet_1 \qquad \bullet_2$$

- Der Pullback einer Kategorie ist der Limes eines Diagramms der Gestalt

$$\bullet_1 \rightarrow \bullet_2 \leftarrow \bullet_3$$

### 1.5.9 Definition: Koproduct

Sind  $X, Y \in \mathcal{C}$  Objekte einer Kategorie, so definieren wir das **Koproduct** von  $X$  und  $Y$  als das kleinste Objekt  $X \oplus Y$  zusammen mit Abbildungen  $\iota_X : X \rightarrow X \oplus Y, \iota_Y : Y \rightarrow X \oplus Y$ , sodass folgende UAE erfüllt wird:

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & \nearrow q_X & \uparrow \exists_1 \Phi & \nwarrow q_Y & \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & X \oplus Y & \xleftarrow{\iota_Y} & Y \end{array}$$

**1.5.10 Definition: Freies Gruppenprodukt**

Das freie Produkt  $G \star H$  ist definiert als das Koproduct zweier Gruppen  $G$  und  $H$ .

**1.5.11 Lemma: Freies Gruppenprodukt**

In **Grp** existieren Koproducte und es gilt

$$\langle S_1 \mid R_1 \rangle \star \langle S_2 \mid R_2 \rangle \cong \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$$

**1.5.12 Definition: Pushout**

Seien  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$  Objekte einer Kategorie mit den Abbildungen  $Y \leftarrow X \rightarrow Z$ . Dann ist ein **Pushout** bzw. **Kofaserprodukt**  $P$  das kleinste Objekt, das folgendes **Pushout-Diagramm** zum kommutieren bringt.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & P \end{array}$$

d.h. es erfüllt folgende UAE:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ Z & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\exists_1} & Q \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

**1.5.13 Lemma: Pushouts in Top**

In **Top** existieren Pushouts und sind von der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & X \\ \downarrow t & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \sqcup Y / \sim \end{array}$$

wobei  $\sim \subset X \times Y$  erzeugt wird durch

$$t(a) \sim s(a) \quad \forall a \in A$$

### 1.5.14 Definition: Amalgirtes freies Produkt in Grp

Ist  $G \hookleftarrow A \hookrightarrow H$  ein Diagramm von injektiven Gruppenhomomorphismen, so wird sein Pushout als **amalgirtes freies Produkt**  $G \star_A H$  von  $G, H$  über  $A$  bezeichnet.

### 1.5.15 Lemma: Pushouts in Grp

Ist  $G \xleftarrow{s} A \xrightarrow{t} H$ , so existiert sein Pushout und ist von der Gestalt:

$$G \star_A H = G \star H / \{s(a)t(a)^{-1} \mid a \in A\}$$

### 1.5.16 Definition: Kolimes

Ist  $\mathcal{D} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$  ein Diagramm, so ist ein **Kolimes** ein Limes von  $\mathcal{D}^{\text{op}}$ .

## 1.6 Der Fundamentalgruppoid

### 1.6.1 Definition: Fundamentalgruppoid

Ist  $X$  ein topologischer Raum, dann definieren wir den **Fundamentalgruppoiden**  $\Pi(X)$  wie folgt:

- Objekte sind alle Punkte  $x \in X$
- Pfeile von  $x$  nach  $y$  sind die Homotopieklassen von Wegen von  $x$  nach  $y$ . Also

$$\text{Hom}_{\Pi(X)}(x, y) = \{\gamma : x \rightarrow y \mid \} / \sim$$

- Die Komposition ist die Konkatenation von Wegen.

### 1.6.2 Definition: Gruppoid

Eine Kategorie heißt **Gruppoid**, falls alle Pfeile isomorph sind.

### 1.6.3 Definition: Zusammenhängende Kategorien

Eine Kategorie heißt **zusammenhängend**, falls jedes Paar von Objekten durch eine (nicht zwangsläufig gerichtete) Sequenz von Pfeilen verbunden werden kann.

### 1.6.4 Lemma: Einbettungsfunktor

Ist  $G$  ein zusammenhängender Gruppoid, dann ist der Einbettungsfunktor

$$\mathcal{I}_x : \text{Aut}_G(x) = \text{Hom}_G(x, x) \longrightarrow \mathcal{G}$$

eine Äquivalenz von Kategorien für alle  $x \in X$ .

**1.6.5 Korollar:**

Ist  $X$  ein wegzusammenhängender Raum, so ist die Inklusion

$$\pi_{(X,x)} \hookrightarrow \Pi(X)$$

eine Äquivalenz von Kategorien für alle  $x \in X$ .

**1.7 Der Satz von Seifert-van Kampen****1.7.1 Bemerkung:**

Wir definieren als **Gruppoid** die Kategorie der kleinen Gruppoide. Es existiert ein Einbettungsfunktor

$$\mathbf{Grp} \hookrightarrow \mathbf{Gruppoid}$$

**1.7.2 Satz: Der Satz von Seifert-van Kampen (kategorientheoretische Version)**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\mathcal{O}$  eine Überdeckung von  $X$  durch offene Mengen, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten.

Wir fassen  $\mathcal{O}$  als eine Kategorie auf, deren Objekte die offenen Mengen und deren Pfeile Teilmengen-Inklusionen sind.

In diesem Fall erhalten wir einen Funktor

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{O} &\longrightarrow \mathbf{Gruppoid} \\ U &\longmapsto \Pi(U) \\ (U \hookrightarrow V) &\longmapsto \left( \Pi(U) \xrightarrow{\Pi(\iota)} \Pi(V) \right) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\Pi(X) = \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{O}} \Pi(U)$$

**1.7.3 Satz: Der Satz von Seifert-van Kampen**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $x \in X$ ,  $\mathcal{O}$  eine Überdeckung von  $X$  durch offene, wegzusammenhängenden Mengen, die  $x$  enthalten, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten.

Dann ist  $\pi_1(X, x)$  der Kolimes von

$$\begin{aligned} \pi_1(\_, x) : \mathcal{O} &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ U &\longmapsto \pi_1(U, x) \\ (U \hookrightarrow V) &\longmapsto \left( \pi_1(U, x) \xrightarrow{\pi_1(\iota, x)} \pi_1(V, x) \right) \\ \pi_1(X, x) &= \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{O}} \pi_1(U, x) \end{aligned}$$

**Beweis: „kategorischer SvK  $\Rightarrow$  normaler SvK“**

Wir beweisen die Aussage nur im Fall, dass  $\mathcal{O}$  endlich ist.

Wir müssen zeigen, dass  $\pi_1(X, x)$  die UAE des Kolimes von  $\pi_1(\_, x)$  erfüllt.

Für jedes  $U \in \mathcal{O}$  ist die Einbettung

$$\mathcal{I}_U : \pi_1(U, x) \longrightarrow \Pi(U)$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Ein *inverser* Funktor  $\mathcal{F}_U : \Pi(U) \rightarrow \pi_1(U, x)$  wird definiert durch eine Zuordnung

$$y \longmapsto [c_U^y]$$

Wir definieren  $c_U^y$  induktiv für alle  $U \in \mathcal{O}, y \in X$ .

- Definiere  $U_0 = \bigcap_{U \in \mathcal{O}} U$ . Ist  $y \in U_0$ , so bezeichne  $c_{U_0}^y$  einen beliebigen Weg  $x \mapsto y$  in  $U_0$ .  $c_{U_0}^x$  bezeichne den konstanten Weg.
- Existiert ein  $V \in \mathcal{O}$ , sodass  $c_V^y$  bereits definiert und  $V \subseteq U$  ist, so definiere  $c_U^y := c_V^y$ . Anderenfalls definiere  $c_U^y$  als beliebigen Pfad in  $U$  von  $x$  nach  $y$ .

Durch diese Wahl werden die Funktoren  $\mathcal{F}_U$  verträglich im Sinne, dass folgende Diagramme für  $U \subset V$  kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U) & \xrightarrow{\mathcal{F}_U} & \pi_1(U, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}_V} & \pi_1(V, x) \end{array}$$

Ergo kommutieren auch

$$\begin{array}{ccccc} \Pi(U) & \xrightarrow{\mathcal{F}_U} & \pi_1(U, x) & \xrightarrow{f_U} & G \\ \downarrow & & & \nearrow f_V & \\ \Pi(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}_V} & \pi_1(V, x) & & \end{array}$$

Die UAE von  $\Pi(X)$  garantiert nun die Existenz eines eindeutig bestimmten Pfeils  $f$ , sodass folgende Diagramme kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \Pi(X) & \overset{f}{\dashrightarrow} & G \\ \uparrow & \nearrow f_U \circ \mathcal{F}_U & \\ \Pi(U) & & \end{array}$$



Ergo kommutieren auch folgende Diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\mathcal{I}_X} & \Pi(X) & \overset{f}{\dashrightarrow} & G \\
 \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\
 \pi_1(U, x) & \xrightarrow{\mathcal{I}_U} & \Pi(U) & & f_U \circ \mathcal{F}_U
 \end{array}$$

Da  $\mathcal{F}_U \circ \mathcal{I}_U = \text{id}_{\pi_1(U, x)}$ , erfüllt  $\pi_1(X, x)$  die als Kolimes geforderte UAE.  $\square$

#### 1.7.4 Lemma: Lebesgue Lemma

Sei  $X$  ein kompakter, metrischer Raum mit einer offenen Überdeckung durch  $(U_i)_{i \in I}$ . Dann existiert eine **Lebesgue Konstante**  $\delta > 0$ , sodass jede Teilmenge  $A \subset X$  mit Durchmesser  $< \delta$  komplett in einem  $U_i$  enthalten ist.

**Beweis: „kategorischer SvK“**

Wir müssen zeigen, dass  $\Pi(X)$  die UAE erfüllt, d.h. für jeden Kokegel  $G$  existiert genau ein  $\Pi(X) \xrightarrow{f} G$ , sodass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi(X) & \overset{f}{\dashrightarrow} & G \\
 \uparrow & \nearrow & \\
 \Pi(U) & & f_U
 \end{array}$$

Für  $x \in U$ , definieren wir

$$f(x) := f_U(x)$$

Ist  $c$  ein Weg in  $X$ , so definieren wir

$$f([c]) := f_U([c])$$

falls  $c$  in einem  $U$  enthalten ist. Ist  $c$  beliebig, so ist  $c^{-1}(\mathcal{O})$  eine offene Überdeckung von  $[0, 1]$ . Ergo existiert eine Lebesgue Konstante  $\delta > 0$ ; wir unterteilen  $[0, 1]$  in  $n$  viele Intervalle mit Länge  $< \delta$  und erhalten eine Unterteilung von  $c = c_1 \cdots c_n$ , wobei jedes  $c_i$  in einem  $U_j$  liegt. Folglich definieren wir nun

$$f([c]) = f([c_1]) \circ \dots \circ f([c_n])$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Definition von  $f([c])$  unabhängig von der Wahl

- (i) der Unterteilung von  $[0, 1]$  und
- (ii) des Repräsentanten  $c$  von  $[c]$  ist.

$\square$

## 1.8 Anwendungen des Satzes von Seifert-van Kampen

### 1.8.1 Bemerkung: Meistgenutzte Anwendung

Ist  $X = U \cup V$  mit  $U, V \overset{o}{\subset} X$ , so erhalten wir folgendes Pushout Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X \end{array}$$

Mit Seifert-van Kampen folgt nun für alle  $x \in U \cap V$ , dass  $\pi_1(\_, x)$  Pushouts erhält:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \rightarrow & \pi_1(U, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

Ergo

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(U, x) \underset{\pi_1(V \cap U, x)}{\star} \pi_1(V, x)$$

### 1.8.2 Satz: Anhängen von Zellen

Sei  $(S^{n-1}, *) \xrightarrow{f} (X, x)$  ein Pfeil, dann existiert folgender Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \iota & & \downarrow j \\ D^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

- Ist  $n \geq 3$ , dann ist  $\pi_1(X, x) \xrightarrow{j_*} \pi_1(Y, j(x))$  ein Isomorphismus.
- Ist  $n = 2$ , dann ist  $j_*$  surjektiv und  $\text{Kern } j_*$  ist die normale Untegruppe, die von  $[f]$  in  $\pi_1(X, x)$  erzeugt wird.

**Beweis:** „“

Definiere  $y = j(x)$ ,  $U = \overset{o}{D^n}$ ,  $V = X \underset{f}{\cup} (D^n - 0)$ . Dann ist  $U \cap V \simeq S^{n-1}$

- Sei  $y' \in U - 0$  und  $u$  ein Pfad in  $Y$  von  $y$  zu  $y'$ .  
Für  $n \geq 3$  ist  $\pi_1(U \cap V, y') = 1$ . Mit Seifert-van Kampen folgt:

$$\pi_1(Y, y') = \pi_1(U, y') \underset{\pi_1(U \cap V, y')}{\star} \pi_1(V, y') = \pi_1(V, y')$$

Da  $y$  und  $y'$  durch einen Weg verbunden werden, gilt:

$$\pi_1(V, y) \cong \pi_1(V, y')$$

Da  $(V, y) \rightarrow (X, x)$  ein NDR ist, gilt schließlich

$$\pi_1(V, y) \cong \pi_1(X, x)$$

- Ist  $n = 2$ , so ist  $U \cap V \simeq S^1$ . Mit Seifert-van Kampen folgt abermals

$$\pi_1(Y, y') = \pi_1(U, y') \underset{\pi_1(U \cap V, y')}{\star} \pi_1(V, y') = \pi_1(V, y') / N([f])$$

Da  $f_*(\mathbb{Z}) = N([f])$ .

□

### 1.8.3 Beispiel: Flächenwort

Die orientierbare, geschlossene, zusammenhängende Fläche von Geschlecht  $g$  ist definiert durch den Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & \bigvee_{i=1}^{2g} S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & \longrightarrow & F_g \end{array}$$

wobei wir die  $2g$  Kreise in  $\bigvee_{i=1}^{2g} S^1$  mit  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  bezeichnet werden.  $f$  wird bestimmt durch das **Flächenwort**  $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i]$ . Es folgt mit obigen Satz

$$\pi_1(F_g) = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right\rangle$$

### 1.8.4 Satz:

Sei  $G = \langle S \mid R \rangle$  eine endlich präsentierte Gruppe. Dann existiert ein 2-dimensionaler Zellen-Komplex  $(X, x)$  mit

$$\pi_1(X, x) \cong G$$

## 1.9 Eigenschaften von Pushouts in Top

### 1.9.1 Definition: Identifizierungsabbildung

$f : X \rightarrow Y$  heißt **Identifizierungsabbildung**

$:\Leftrightarrow f$  ist surjektiv und

$$U \overset{o}{\subset} Y \Leftrightarrow f^{-1}(U) \overset{o}{\subset} X$$

$\Leftrightarrow f$  induziert einen Homöomorphismus

$$X / \sim \xrightarrow{\sim} Y$$

wobei  $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ .

$\Leftrightarrow$  Für alle mengentheoretischen Abbildungen  $g : Y \rightarrow W$  gilt:

$$g \circ f \text{ ist stetig} \iff g \text{ ist stetig}$$

### 1.9.2 Satz:

Seien  $A, X, Y, Z$  Räume und  $K$  ein lokal kompakter Hausdorffraum.

1. Ist  $X$  kompakt, so ist die Projektion  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  abgeschlossen.
2. Ist  $X \xrightarrow{f} Y$  eine Identifizierungsabbildung, so ist auch  $f \times \text{id}_K : X \times K \rightarrow Y \times K$  eine Identifizierungsabbildung.
3. Ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_2} & Y \\ f_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ X & \xrightarrow{g_1} & Z \end{array}$$

ein Pushout-Diagramm, so ist es auch

$$\begin{array}{ccc} A \times K & \xrightarrow{f_2 \times \text{id}_K} & Y \times K \\ f_1 \times \text{id}_K \downarrow & & \downarrow g_2 \times \text{id}_K \\ X \times K & \xrightarrow{g_1 \times \text{id}_K} & Z \times K \end{array}$$

**Beweis:** „ „

1. Sei  $C \subset X \times Y$  abgeschlossen,  $y \in Y - \pi_Y(C)$ . Dann gilt für alle  $x \in X : (x, y) \notin C$ . Dann existiert für jedes  $x \in X$  eine Umgebung  $U_x \overset{o}{\subset} X$  zusammen mit einer Umgebung  $V_x \overset{o}{\subset} Y$  von  $y$ , s.d.  $U_x \times V_x \cap C = \emptyset$ .  $X$  ist kompakt, ergo erhält man  $x_1, \dots, x_k$ , s.d.  $\bigcup_{i=1}^k U_{x_i} = X$ . Setzt man  $V := \bigcap_{i=1}^k V_{x_i}$ , so gilt  $(X \times V) \cap C = \emptyset$ . Ergo findet man zu jedem  $y \in Y - \pi_Y(C)$  eine offene Umgebung  $V$ .
2. Seien folgende Pfeile gegeben

$$\begin{aligned} g : Y \times K &\longrightarrow W \\ h : X \times K &\xrightarrow{f \times \text{id}_K} Y \times K \xrightarrow{g} W \end{aligned}$$

Angenommen  $h$  sei stetig. Sei  $U \overset{o}{\subset} W, g(y_0, k_0) \in U, f(x_0) = y_0$ . Dann ist ein  $h(x_0, k_0) \in U$ , also existiert eine kompakte Nachbarschaft  $N$  von  $k_0$ , s.d.  $h(x_0, N) \subset U$ . Definiere

$$A = \{y \in Y \mid g(y \times N) \subset U\}$$

Dann ist sicherlich  $y_0 \in A$ .  $f^{-1}(A)$  ist offen in  $X$ , da

$$X - f^{-1}(A) = \pi_X(h^{-1}(W - U) \cap (X \times N))$$

laut (1) abgeschlossen ist. Ergo ist  $A \times N$  eine offene Umgebung von  $(y_0, k_0)$ , ergo ist  $g^{-1}(U)$  offen. Also ist  $g$  stetig.

3. Die Kolimes-Eigenschaft garantiert die Existenz eines eindeutig bestimmten  $h : (X \times K \sqcup Y \times K) / \sim \rightarrow Z \times K$ . Es gilt gerade

$$(x_1, k_1) \sim (x_2, k_2) \iff g(x_1) = g(x_2) \wedge x_1 = x_2$$

Ergo ist  $X \times K \sqcup Y \times K \rightarrow Z \times K$  eine Identifikationsabbildung, da  $X \sqcup Y \rightarrow Z$  eine Identifikationsabbildung ist.

□

### 1.9.3 Definition: Nachbarschaftsdeformationsretrakt

Ein abgeschlossener Teilraum  $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$  heißt **Nachbarschaftsdeformationsretrakt**, falls eine offene Nachbarschaft  $A \overset{c}{\subset} U \overset{o}{\subset} X$ , eine stetige Abbildung  $r : U \rightarrow A$  und eine Homotopie  $h : U \times [0, 1] \rightarrow U$  existiert, sodass

- $h : \text{id} \simeq \iota \circ r$  **relativ** zu  $A$ , d.h.
- $h_t(\_) = \text{id}_A$  für alle  $t \in [0, 1]$

**1.9.4 Satz:**

Sei folgendes Pushout Diagramm gegeben

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_2} & Y \\ i_1 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X & \xrightarrow{j_2} & Z \end{array}$$

wobei  $i_1$  die Einbettung eines abgeschlossenen Teilraumes ist, sodass  $A \hookrightarrow X$  ein Nachbarschaftsdeformationsretrakt ist. Dann gilt dasselbe für  $j_1$ .

**Beweis: „**

Zuerst zeigen wir, dass  $j_1(Y)$  abgeschlossen und  $j_1$  ein Homöomorphismus auf sein Bild ist.

- $A \cup Y = (j_2 \sqcup j_1)^{-1}(j_1(Y)) \stackrel{c}{\subset} X \sqcup Y$ , da  $A \stackrel{c}{\subset} X$

$$j_1 \sqcup j_2 \xrightarrow{\text{Id.}} j_1(Y) \stackrel{c}{\subset} Z$$

- $j_1$  ist injektiv, da es auch  $i_1$  ist. Insofern ist  $Y \xrightarrow{j_1} j_1(Y)$  bijektiv.
- Sei  $W \subset j_1(Y)$ . Dann ist  $j_1^{-1}(W) = Y \cap (j_2 \sqcup j_1)^{-1}(W)$ .  
Ist  $j_1^{-1}(W)$  abgeschlossen, so ist es auch  $(j_2 \sqcup j_1)^{-1}(W)$  und damit auch  $W \stackrel{c}{\subset} Z$ . Da  $j_1(Y) \subset Z$ , ist  $W \stackrel{c}{\subset} j_1(Y)$ .

Definiere

$$V := j_2(U) \cup j_1(Y) \subset Z$$

$V \stackrel{o}{\subset} Z$ , da

$$(j_2 \sqcup j_1)^{-1}(V) = U \cup Y \stackrel{o}{\subset} X \sqcup Y$$

Betrachte folgenden Pushout

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{i_2 \times \text{id}} & Y \times I \\ i_1 \times \text{id} \downarrow & & \downarrow j_1 \times \text{id} \\ U \times I & \xrightarrow{j_2 \times \text{id}} & V \times I \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow j_1 \circ \pi_Y \\ \searrow h' \\ \searrow j_2 \circ h \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ V \end{array}$$

Definiere  $r' : V \rightarrow j_1(Y)$  durch  $r' = h'(\_, 1)$   
Dann ist  $h' : \text{id} \simeq j_1 \circ r$  relativ zu  $j_1(Y)$ .

□

## 1.10 Noch mehr Anwendungen des Satzes von Seifert-van Kampen

### 1.10.1 Satz:

Sei folgender Pushout gegeben, wobei  $A, X, Y$  wegzusammenhängend sind:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_2} & Y \\ i_1 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X & \xrightarrow{j_2} & Z \end{array}$$

wobei  $i_1, i_2$  Einbettungen und  $A \overset{c}{\subset} X, \overset{c}{\subset} Y$  ein Nachbarschaftsdeformationsretrakt sind. Dann erhalten wir folgenden Pushout in **Grp** für alle  $x \in A$ :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, x) & \xrightarrow{\pi_1(i_2)} & \pi_1(Y, i_2(x)) \\ \pi_1(i_1) \downarrow & & \downarrow \pi_1(j_1) \\ \pi_1(X, i_1(x)) & \xrightarrow{\pi_1(j_2)} & \pi_1(Z, (j_2 \circ i_1)(x_0)) \end{array}$$

**Beweis: „**

Betrachte folgende Deformationsretrakte

$$\begin{array}{ll} X \overset{o}{\supset} U_x \xrightarrow{r_x} A & h_x : \text{id} \simeq i_1 \circ r_x \text{ relativ zu } A \\ Y \overset{o}{\supset} U_y \xrightarrow{r_y} A & h_y : \text{id} \simeq i_2 \circ r_y \text{ relativ zu } A \end{array}$$

Definiere folgende Verdickungen von  $A, X, Y$  in  $Z$ :

$$V_A := U_X \cup U_Y \quad V_X := X \cup U_Y \quad V_Y := Y \cup U_X$$

Dann sind  $X \subset V_X, Y \subset V_Y, A \subset V_A$  Deformationsretrakte. Es ergibt sich folgende Situation

$$\begin{array}{ccc} V_A & \longrightarrow & V_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

woraus sich ein Pushout für die entsprechenden Fundamentalgruppen ergibt. Aufgrund der Deformationsretrakte gilt aber

$$\pi_1(V_A) = \pi_1(A) \qquad \pi_1(V_X) = \pi_1(X) \qquad \pi_1(V_Y) = \pi_1(y)$$

□

### 1.10.2 Beispiel:

$X = S^1 \times [0, 1] / \sim$ ,  $\sim$  generated by

$$(z, 0) \sim (e^{2\pi/n}z, 0); (z, 1) \sim (e^{2\pi/m}z, 1)$$

identifying points that are an angle  $2\pi/n$ ,  $2\pi/m$  apart

It follows:

$$top \cong S^1; bottom \cong S^1$$

Pushout: (1)

The inclusions

$$top \hookrightarrow X_T, bottom \hookrightarrow X_B$$

are deformation retracts, in particular homotopy equivalences.

In the first case,

$$r : X_T \longrightarrow Top, [(z, t)] \longmapsto [(z, 1)]$$

$$h : X_T \times [0, 1] \longrightarrow X_T, [(z, s)], t \longmapsto [(z, s \cdot t)]$$

provides the data of a deformation retract. Similiar for bottom.

van Kampen yields a pushout of groups, when applying  $\pi_1$  to (1). (2)

How do the induced morphisms look like?

In the case of top:

$$r_* : \pi_1(X_T) \longrightarrow \pi_1(Top), \gamma \longmapsto \gamma^n$$

One gains

$$\pi_1(S^1 \times \{\frac{1}{2}\}) \longrightarrow \pi_1(X_T) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Top) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Be  $\gamma$  a generator of  $\pi_1(Top)$ ,  $r$  applied to the generator of  $\pi_1(S^1 \times \frac{1}{2})$  wraps around  $m$  times the top circle.

Because of (2) we obtain a group presentation

$$\pi_1(X) \cong \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle$$

We have an epimorphism

$$\pi_1(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m \star \mathbb{Z}/n$$

$$a \longmapsto 1_{\mathbb{Z}/m}$$

$$b \longmapsto 1_{\mathbb{Z}/n}$$



# Kapitel 2

## Homology - the axiomatic approach 2

### 2.1 The Eilenberg-Steenrod axioms

Let  $R$  be a commutative Ring.

A sequence of morphisms of  $R$ -modules

$$M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}}$$

is called **exact** if

$$\text{Kern } f_i = \text{im } f_{i+1} \forall i$$

#### Definition

A **homology theory**  $(H_*, \partial_*)$  with values in  $R$ -modules consists of a family  $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  of functors

$$H_n : \mathbf{Top}^2 \longrightarrow R\text{-Mod}$$

from the category of pairs of spaces to the category of  $R$ -modules and a family of natural transformations  $(\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\partial_n : H_n \longrightarrow H_{n-1} \circ J$$

where  $J$  is the functor

$$J : \mathbf{Top}^2 \longrightarrow \mathbf{Top}^2$$

$$(X, A) \longmapsto (A, \emptyset)$$

such that the following axioms are true

- **Homotopy invariance**

If  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  are maps of pairs of spaces and  $h_t : f \simeq g$  is a homotopy with  $h_t(A) \subset B \forall t \in [0, 1]$  then

$$H_n(f) = H_n(g)$$

- **Long exact sequence**

For every pair  $(X, A)$  the following sequence of  $R$ -modules is exact:

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X, A)} H_n(A, \emptyset) \xrightarrow{H_n(\iota)} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A, \emptyset) \longrightarrow \dots$$

is exact where

$$\iota : (A, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$$

$$j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$$

This maps  $\partial_i(X, A)$  are called **boundary homomorphisms**.

- **Excision axiom**

Let  $X$  be a space and  $A, B \subset X$  be a subspace such that  $\overline{A} \subset B^\circ$ . Then the  $R$ -homomorphisms

$$H_n(X \setminus A, B \setminus A) \longrightarrow H_n(X, B)$$

induced by

$$(X \setminus A, B \setminus A) \hookrightarrow (X, A)$$

is an isomorphism for all  $n$ .

If  $(H_*, \partial_*)$  in addition satisfies the following, we say  $(H_*, \partial_*)$  satisfies the **dimension axiom**:

$$H_n(\{*\}, \emptyset) \cong R, \text{ if } n = 0; 0 \text{ if } n \neq 0$$

Notation: In the sequel we write  $H_n(X)$  instead of  $H_n(X, \emptyset)$ .

**Remark**

In a nutshell,  $(H_*, \partial_*)$  is the following:

- $(X, A) \rightsquigarrow R\text{-Modules } H_n(X, A), n \in \mathbb{Z}$
- $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \rightsquigarrow H_n(X, A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y, B)$
- boundary homom. (3)

**Remark**

Long exact sequence for  $(X, X)$

$$H_{n+1}(X, X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(X)$$

$$\text{Kernid} = \text{im}(\partial_n) = 0 \implies \partial_n = 0$$

$$\text{im}H_n(j) = \text{Kern}\partial_n = H_n(X, X)$$

$$\text{Ker}H_n(j) = \text{imid} = H_n(X)$$

Therefore  $H_n(X, X) = 0$

## 2.2 First conclusions from the axioms

### 2.2.1 Satz: Fünferlemma

Consider the following commuting diagram of  $R$ -modules (4) such that both rows are exact and  $f_1$  is surjective,  $f_5$  is injective and  $f_2$  and  $f_4$  are isomorphisms. Then  $f_3$  is an isomorphism.

**Proof by Diagrammjagd** Im folgenden ist  $(H_n, \partial_n)$  eine Homologietheorie, die nicht zwangsläufig das Dimensionsaxiom erfüllt.

### 2.2.2 Korollar:

Sei  $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)$  ein Pfeil. Sind  $H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y)$  und  $H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B)$  isomorph für alle  $n$ , so ist es auch  $H_n(X, A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y, B)$  für alle  $n$ .

### 2.2.3 Lemma:

Seien  $A \subset B \subset X$  topologische Räume; dann existiert eine natürliche lange Sequenz (die sogenannte **Dreier-Sequenz**)

$$\longrightarrow H_{n+1}(X, A) \longrightarrow H_{n+1}(X, B) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X; B, A)} H_n(B, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow$$

induziert durch die Inklusionen

$$(B, A) \xhookrightarrow{i} (X, A) \xhookrightarrow{j} (X, B)$$

**Beweis: „“**

Definiere

$$\partial_n(X; B, A) = H_{n-1}(l) \circ \partial_n(X, B)$$

wobei  $(B, \emptyset) \xhookrightarrow{l} (B, A)$

□

### 2.2.4 Definition: Excisive Triad

Seien  $X_1, X_2 \subset X$  Räume.  $(X, X_1, X_2)$  heißt ein **Schneidungs-Trias**, falls die Inklusion

$$(X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X, X_2)$$

einen Isomorphismus

$$H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_n(X, X_2)$$

für alle  $n$  induziert.

### 2.2.5 Bemerkung:

Sind  $X_1, X_2 \overset{o}{\subset} X$  und  $X = X_1 \cup X_2$ , dann ist  $(X, X_1, X_2)$  aufgrund des Excision-Axioms excisiv.

### 2.2.6 Satz: Mayer-Vietoris

Sei  $(X, X_1, X_2)$  ein excisives Trias. Sei  $A \subset X_0 = X_1 \cap X_2$ . Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz (sogenannte **Mayer-Vietoris Sequenz**)

$$\rightarrow H_{n+1}(X_1, A) \oplus H_{n+1}(X_2, A) \xrightarrow{H_{n+1}(j_1) - H_{n+1}(j_2)} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X_0, A) \xrightarrow{H_n(i_1) + H_n(i_2)} H_n(X_1, A) \oplus H_n(X_2, A) \rightarrow$$

induziert durch die Inklusionen

$$(X_0, A) \xrightarrow{i_1} (X_1, A) \xrightarrow{j_1} (X, A) \quad (X_0, A) \xrightarrow{i_2} (X_2, A) \xrightarrow{j_2} (X, A)$$

### 2.2.7 Satz: Mayer-Vietoris für Pushouts

Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

ein Pushout, wobei  $A \xrightarrow{i} X$  die Einbettung eines abgeschlossenen Teilraumes und  $A \subset X$  ein NDR ist.

Dann induziert  $(f, g) : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$  Isomorphismen

$$H_n(X, A) \xrightarrow{\cong} H_n(Z, Y)$$

Ferner existiert folgende natürliche exakte Sequenz (**Mayer-Vietoris Sequenz**)

$$\rightarrow H_{n+1}(Z) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i) + H_n(f)} H_n(X) \oplus H_n(Y) \xrightarrow{H_n(g) - H_n(j)} H_n(Z)$$

Ab sofort fordern wir, dass unsere Homologietheorie das Dimensionsaxiom erfüllt.

### 2.2.8 Bemerkung:

Für alle  $n \geq 1$

$$H_i(S^n) = \begin{cases} R & i = n \text{ oder } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$H_i(S^0) = \begin{cases} R \oplus R & i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## 2.3 Grade der Selbstabbildungen der Sphäre

In diesem Kapitel erfüllt unsere Theorie das Dimensionsaxiom.

### 2.3.1 Definition: Reduzierte Homologie

Definiere die **reduzierte Homologie** durch

$$\tilde{H}_n(X) := \text{Kern}(H_n(X) \rightarrow H_n(\bullet))$$

Dann gelten

- $\tilde{H}$  ist funktoriell.
- $\tilde{H}_n(X) = H_n(X) \iff n \neq 0$
- $H_n(X) = R \oplus \tilde{H}_n(X) \iff n = 0$

### 2.3.2 Definition: Grad

Sei  $R = \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 0$ . Dann ist der **Grad** einer Abbildung  $S^n \xrightarrow{f} S^n$  definiert als die eindeutig bestimmte Zahl  $\deg f \in \mathbb{Z}$ , die folgendes Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S_n) & \xrightarrow{\tilde{H}_n(f)} & \tilde{H}_n(S_n) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot \deg f} & \mathbb{Z} \end{array}$$

### 2.3.3 Bemerkung:

- Ist das Bild von  $f$  null-homotop, so ist  $\deg f = 0$ .
- $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$
- $\deg \text{id}_{S^n} = 1$
- Der Grad ist unabhängig von der Wahl der Homologietheorie.

### 2.3.4 Lemma:

Sei

$$\begin{aligned} f : S^n &\longrightarrow S^n \\ (x_0, \dots, x_i, \dots, x_n) &\longmapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Dann ist

$$\deg f = -1$$

**2.3.5 Satz:**

Sei  $n \geq 2$  gerade,  $S^n \xrightarrow{f} S^n$ . Dann existiert ein  $x$  mit

$$f(x) \in \{x, -x \mid \}$$

**2.3.6 Satz:**

Sei  $n \geq 2$  gerade. Dann existiert für jedes stetige Vektorfeld auf  $S^n$  mindestens ein Verschwindungspunkt.

**2.3.7 Satz:**

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$  regulär.

$$\deg(x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|}) = \text{sign}(\det A)$$

**2.3.8 Satz:**

Die Abbildung  $S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^k} S^1$  hat Grad  $k$

**2.3.9 Satz:**

Sei  $f : S^n \rightarrow S^n$  differenzierbar.  $q \in S^n$  regulärer Punkt,  $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k \mid \}$ .  $d_i = \text{sign}(\det f'(p_i))$ , wobei die Jacobimatrix durch Karten von  $p_i$  und  $q$  berechnet wird, die sich um ein Element aus  $SO(n+1)$  unterscheiden.

$$\deg f = \sum_i d_i$$

**2.3.10 Korollar:**

Der Grad ist unabhängig von der Wahl der Homologietheorie.

**2.3.11 Lemma:**

Sei  $g : S^n \rightarrow S^n$  glatt,  $q$  ein regulärer Punkt, sodass  $g^{-1} = p$ .

Dann ist der Grad von  $g$  das Vorzeichen der Determinante der Jacobimatrix von  $g$  bei  $p$ , berechnet durch Karten, die sich ausschließlich um eine Rotation unterscheiden.

# Kapitel 3

## The construction of singular homology

### 3.1 Algebraische Vorbereitungen

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit 1.

#### 3.1.1 Definition: Kettenkomplex

Ein  $R$ -**Kettenkomplex** ist eine Familie von  $R$ -Moduln  $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  mit Pfeilen  $c_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ , sodass  $c_{n-1} \circ c_n = 0$ .

Ein Pfeil  $f : C_n \rightarrow D_n$  von  $R$ -Kettenkomplexen ist eine Familie von Modulmorphismen  $f_n : C_n \rightarrow D_n$ , sodass die sich ergebenden Diagramme kommutierten.

#### 3.1.2 Definition: Homologie

Die  $n$ -te Homologie eines Kettenkomplexes ist definiert durch

$$H_n(C_*, c_*) := \text{Kern}(c_n) / \text{Bild} c_{n+1}$$

Elemente  $c \in \text{Kern} c_n$  heißen **Zykel**,  $b \in \text{Bild} c_{n+1}$  heißen **Ränder**. Zwei Zykel, die sich nur um einen Rand unterscheiden, heißen **homolog**.

#### 3.1.3 Bemerkung:

Eine Kettenabbildung  $f : C_n \rightarrow D_n$  induziert einen wohldefinierten Pfeil von  $R$ -Moduln  $H_n(f) : H_n(C_n) \rightarrow H_n(D_n)$  durch  $H_n(f)([c]) = [f(c)]$ . Insofern ist  $H_n$  ein Funktor  $R\text{-}\mathbf{Chain} \rightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ .

#### 3.1.4 Definition: Homotopie

Eine **Kettenhomotopie** zwischen Kettenpfeilen  $f_n, g_n : C_n \rightarrow D_n$  ist eine Familie von Modulmorphismen  $h_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$ , sodass

$$f_n - g_n = d_{n+1}h_n + h_{n+1}c_n$$

Man schreibt in diesem Fall  $f \simeq g$

### 3.1.5 Lemma:

Zwei homotope Pfeile von Kettenkomplexen induzieren in der Homologie dieselbe Abbildung.

### 3.1.6 Bemerkung:

- Ketten-Homotopie ist eine Äquivalenzrelation
- Ketten-Homotopie ist verträglich mit der Verkettung von Pfeilen.

### 3.1.7 Definition:

Eine Sequenz von Kettenkomplexen

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

heißt **exakt**, falls sie gradweise **exakt** ist

$$A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n$$

### 3.1.8 Satz:

Sei folgende kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen gegeben

$$0 \longrightarrow C_* \xrightarrow{i_*} D_* \xrightarrow{p_*} E_* \longrightarrow 0$$

Dann existiert folgende natürliche lange exakte Sequenz in der Homologie

$$\longrightarrow H_{n+1}(E_*) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C_*) \xrightarrow{H_n(i_*)} H_n(D_*) \xrightarrow{H_n(p_*)} H_n(E_*) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C_*) \longrightarrow$$

## 3.2 Definition der singulären Homologie

### 3.2.1 Definition:

Der **Standard  $n$ -Simplex** ist definiert als

$$\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_1 = 1, x_i \geq 0\}$$

### 3.2.2 Definition:

Sei  $X$  ein top. Raum. Ein **singulärer  $n$ -Simplex** ist eine Abbildung

$$\delta : \Delta_n \longrightarrow X$$

Die Menge aller singulärer  $n$ -Simplizes wird durch  $s_n(X)$  bezeichnet.



**3.2.3 Definition:**

Sei  $X$  ein Raum, definiere die  $n$ -te **singuläre Kettengruppe** als den freien  $R$ -Modul mit Basis  $s_n(X)$ :

$$C_n^{sing}(X; R) := \begin{cases} R[s_n(X)] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

**3.2.4 Definition:**

Definiere die  $k$ -te **Facette** eines Simplex durch

$$\begin{aligned} i_k^n : \Delta_{n-1} &\longrightarrow \Delta_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_n) \end{aligned}$$

**3.2.5 Definition:**

Wir machen aus  $C_*^{sing}(X; R)$  einen Kettenkomplex, indem wir folgende Differentiale einführen

$$\begin{aligned} c_n^{sing}(X; R) : C_n^{sing}(X; R) &\longrightarrow C_{n-1}^{sing}(X; R) \\ \delta &\longmapsto \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \delta \circ i_k^n(\delta) \end{aligned}$$

**3.2.6 Lemma:**

$c_n^{sing} \circ c_{n+1}^{sing} = 0$ , d.h.  $(C_n^{sing}, c_n^{sing})$  ist ein Kettenkomplex.

**3.2.7 Bemerkung:**

$C_*^{sing}$  ist ein Funktor von **Top** zu  $R$ -**Ketten**, wobei für  $f : X \rightarrow Y$

$$C_n^{sing}(f)(\delta) = f \circ \delta$$

Sei  $A \xhookrightarrow{i} X$  die Inklusion eines Teilraumes, definiere

$$C_n^{sing}(X, A; R) := \text{Kokern}(C_n^{sing}(i)) = C_n^{sing}(X; R) / \text{Bild } C_n^{sing}(i)$$

Die Differentiale  $c_*^{sing}(X; R)$  machen aus  $C_*^{sing}(X, A; R)$  einen Kettenkomplex.

**3.2.8 Definition:**

Für ein Paar  $(X, A)$  definieren wir die  $n$ -te **singuläre Homologie** durch

$$H_n^{sing}(X, A; R) := H_n(C_*^{sing}(X, A; R))$$

**3.2.9 Satz:**

$(H_*^{sing}(\_, R), \partial_*)$  ist eine Homologietheorie mit Koeffizienten in  $R$ , die das Dimensionsaxiom erfüllt.

### 3.3 Verifikation der Eilenberg-Steenrod Axiome

#### 3.3.1 Homotopie Invarianz

Sei  $i_t : x \mapsto (x, t)$ . Wir konstruieren eine natürliche Homotopie

$$h_*(X) : C_*^{sing}(i_0) \simeq C_*^{sing}(i_1)$$

sodass

1.  $h_n(X) : C_n^{sing}(X; R) \longrightarrow C_{n+1}^{sing}(X \times I; R)$
2.  $c_{n+1}^{sing}(X \times I) \circ h_n(X) + h_{n-1}(X) \circ c_n^{sing}(X) = C_n^{sing}(i_0) - C_n^{sing}(i_1)$
3. Für alle  $g : X \rightarrow Y$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} C_n^{sing}(X; R) & \xrightarrow{h_n(X)} & C_{n+1}^{sing}(X \times I; R) \\ C_n^{sing}(g) \downarrow & & \downarrow C_{n+1}^{sing}(g \times \text{id}_I) \\ C_n^{sing}(Y; R) & \xrightarrow{h_n(Y)} & C_{n+1}^{sing}(Y \times I; R) \end{array}$$

$h_*(X)$  ist eindeutig bestimmt durch

$$\begin{array}{ccc} C_n^{sing}(\Delta_n; R) & \xrightarrow{h_n(\Delta_n)} & C_{n+1}^{sing}(\Delta_n \times I; R) \\ C_n^{sing}(\delta) \downarrow & & \downarrow C_{n+1}^{sing}(\delta \times \text{id}_I) \\ C_n^{sing}(X; R) & \xrightarrow{h_n(X)} & C_{n+1}^{sing}(X \times I; R) \end{array}$$

#### 3.3.2 Ausschneidung

#### 3.3.3 Definition:

Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine Überdeckung von  $X$ .  $\delta \in s_n(X)$  heißt  **$U$ -klein**, falls  $\text{Bild} \delta \subset U_i$ . Sei  $C_*^U(X; R) \subset C_*^{sing}(X; R)$  der Unterkettenkomplex, der durch die  $U$ -kleinen Simplices generiert wird.

#### 3.3.4 Lemma: Kleine Simplices Lemma

$C_*^U(X; R) \hookrightarrow C_*^{sing}(X; R)$  induziert Isomorphismen auf allen Homologiemoduln.

Zeige durch die Überdeckung  $U = \{B, X - A \mid \}$ , dass  $H_*^{sing}(X, B; R) \cong H_*^{sing}(X - A, B - A; R)$

### 3.3.5 Additivität

Für jede Homologie gilt

$$H_*\left(\bigsqcup_{i=1}^n X_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n H_*(X_i)$$

### 3.3.6 Definition:

Eine Homologie erfüllt das **Additivitätsaxiom**, falls für jede Menge  $I$  gilt

$$H_*\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i\right) = \bigoplus_{i \in I} H_*(X_i)$$

Die singuläre Homologie erfüllt das Additivitätsaxiom.

## 3.4 Singuläre Homologie in den Graden 0 und 1

### 3.4.1 Definition:

Definiere die **Vergrößerungsabbildung**

$$\begin{aligned} \varepsilon : C_0^{sing}(X; R) &\longrightarrow R \\ \sum n_x x &\longmapsto \sum n_x \end{aligned}$$

Dann ist  $\varepsilon = 0$  auf  $\text{Bild } c_1^{sing}$  und induziert einen Homomorphismus

$$\varepsilon : C_0^{sing}(X; R) / \text{Bild } c_1^{sing} = H_0^{sing}(X; R) \longrightarrow R$$

### 3.4.2 Satz:

Ist  $X \neq \emptyset$  wegzusammenhängend, so ist

$$\varepsilon : H_0^{sing}(X; R) \longrightarrow R$$

ein Isomorphismus.

### 3.4.3 Korollar:

$H_0^{sing}(X; R)$  ist ein freier  $R$ -Modul mit  $\pi_0(X)$  als Basis.

### 3.4.4 Satz: Hurewicz' Satz in Grad 1

Die Abbildung

$$\begin{aligned} h : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow H_1^{sing}(X; \mathbb{Z}) \\ [f]_{\sim} &\longmapsto [f] \end{aligned}$$

ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Ist  $X$  wegzusammenhängend, so ist  $h$  surjektiv und  $\text{Kern } h = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$



# Kapitel 4

## Applications of singular homology

Im folgenden betrachten wir ausschließlich die singuläre Homologie.

### 4.1 Fundamentalsatz der Algebra

#### 4.1.1 Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nichtkonstante Polynom über  $\mathbb{C}$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .

### 4.2 Das Theorem von Borsuk-Ulam

#### 4.2.1 Satz: Borsuk-Ulam

Für jede stetige Abbildung  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  existiert ein  $x \in S^n$ , sodass

$$f(x) = f(-x)$$

#### 4.2.2 Satz: Ham Sandwich theorem

Seien  $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$  Borelmengen mit endlichem Lebesguemaß  $\lambda(A_i) < \infty$ . Dann existiert eine Hyperebene, die jedes  $A_i$  maßtechnisch halbiert.

#### 4.2.3 Satz: Äquivarianz Theorem

Sei  $g : S^n \rightarrow S^m$  dergestalt, dass

$$g(-x) = -g(x) \forall x \in S^n$$

Dann ist  $n \leq m$

### 4.3 Invarianz der Dimension

#### 4.3.1 Satz:

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$$

### 4.4 Brouwers Fixpunktsatz

#### 4.4.1 Satz:

Sei  $n \geq 0$ . Jede stetige Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  hat einen Fixpunkt.

# Kapitel 5

## CW-complexes and cellular homology

### 5.1 CW-Komplexe

#### 5.1.1 Definition:

Eine  $k$ -**dimensionale Zelle**  $e \subset X$ , die bzgl. ihrer Spurtopologie homöomorph zu  $E^k = \overset{o}{D^k}$  ist. Jeder Punkt in  $X$  ist eine 0-Zelle.

#### 5.1.2 Definition:

Ein **Whitehead Komplex** ist ein Raum  $X$  zusammen mit einer Zellzerlegung  $(e_i)_{i \in I}$ , sodass

- $\bigcup_{i \in I} e_i = X$
- $X$  ist Hausdorff
- Für jede  $n$ -Zelle  $e_i$  existiert eine Abbildung  $\Phi : D^n \rightarrow X$ , sodass  $\Phi|_{E^n} : E^n \xrightarrow{\cong} e_i$  ist und  $\Phi(S^n)$  in der Vereinigung der  $\leq n - 1$ -Zellen liegt.

**Closure finiteness** Der Abschluss einer Zelle schneidet sich nur mit endlichen vielen Zellen.

**Weak topology**

$$A \overset{c}{\subset} X \iff A \cap \overline{e_i} \overset{c}{\subset} \overline{e_i} \quad \forall i \in I$$

#### 5.1.3 Definition:

Eine Teilmenge  $A \subset X$  eines Whitehead Komplexes heißt ein **Subkomplex**, falls es eine Vereinigung von Zellen ist und der Abschluss jeder Zelle von ihr in  $A$  liegt.

**5.1.4 Bemerkung:**

$$\Phi(D^n) = \bar{e}_i$$

**5.1.5 Satz:**

Sei  $X$  ein Whitehead Komplex.

- Eine kompakte Teilmenge  $K \subset X$  schneidet nur endlich viele Zellen.
- Ein endlicher Subkomplex (besteht nur aus endlich vielen Zellen) ist kompakt in  $X$ .
- Ist  $L \subset X$ , so bezeichnet  $X(L)$  den kleinsten Subkomplexen, der  $L$  enthält. Dann ist  $X(e) = X(\bar{e})$  ein endlicher Subkomplex für jede Zelle  $e$ .
- Jede kompakte Teilmenge von  $X$  ist in einem endlichen Subkomplexen enthalten.
- 

$$A \stackrel{c}{\subset} X \iff A \cap L \stackrel{c}{\subset} L \quad \forall L : \text{endlicher Subkomplex}$$

- Jeder Subkomplex ist abgeschlossen.

**5.1.6 Satz:**

Ein Subkomplex eines Whitehead-Komplexes ist ein Whitehead-Komplex.

**5.1.7 Lemma: Hilfslemma**

Sei folgendes Diagramm mit abgeschlossenen Einbettungen  $j, J$  gegeben.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ j \downarrow & & \downarrow J \\ X & \xrightarrow{F} & Z \end{array}$$

$F$  soll eine Bijektion  $X - A \longrightarrow Z - Y$  induzieren. Ferner soll  $F(X) \stackrel{c}{\subset} Z$  und  $F : X \rightarrow F(X)$  eine Identifikation sein.

Dann ist das obige Diagramm ein Pushout.

**5.1.8 Definition:**

Definiere das  $n$ -Skelett eines Whitehead-Komplexes

$$X^n = \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{e: i\text{-Zelle}} e$$



**5.1.9 Satz:**

Sei  $X$  ein Whitehead-Komplex

- $X$  trägt die **Kolimes-Topologie**, d.h.

$$A \stackrel{c}{\subset} X \iff A \cap X^i \stackrel{c}{\subset} X^i \quad \forall i$$

- Sei  $(e_i)_{i \in I(n)}$  eine Familie von  $n$ -Zellen in  $X$  mit charakteristischen Abbildungen  $\Phi_i : D_i^n \rightarrow e_i$  und Einschränkungen  $\varphi_i = \Phi_i|_{S_i^{n-1}}$ . Dann ist folgendes Diagramm ein Pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I(n)} S_i^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{i \in I(n)} \varphi_i} & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I(n)} D_i^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{i \in I(n)} \Phi_i} & X^n \end{array}$$

**5.1.10 Definition:**

Sei  $A \subset X$ , eine **CW-Zerlegung** von  $(X, A)$  besteht aus einer Filtration von Teilräumen

$$A \subset X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X = \bigcup_i X_i$$

sodass

- $X$  trägt die Kolimes-Topologie
- Für jedes  $n \geq 0$  existiert folgender Pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I(n)} S_i^{n-1} & \longrightarrow & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I(n)} D_i^{n-1} & \longrightarrow & X^n \end{array}$$

Ein Paar  $(X, A)$  zusammen mit einer CW-Zerlegung heißt ein **relativer CW-Komplex**. Ist  $A = \emptyset$ , so nennt man  $X$  einfach **CW-Komplex**. Ein Raum mit einer CW-Zerlegung heißt auch **CW-Raum**. Die **zelluläre Dimension** von  $(X, A)$  ist definiert als das kleinste  $n \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ , sodass  $X^n = X^{n+1}$ .

**5.1.11 Satz:**

Jeder Whitehead Komplex ist ein CW-Komplex und umgekehrt.

**5.1.12 Satz:**

Sind  $X$  und  $Y$  CW-Komplexe, von denen mindestens einer lokal kompakt ist, so ist  $X \times Y$  ebenfalls ein CW-Komplex, wobei

$$(X \times Y)^n = \bigcup X^i \times Y^{n-i}$$

**5.1.13 Definition:**

Eine **zelluläre Abbildung**  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  ist eine stetige Abbildung, sodass

$$f(X^n) \subset Y^n$$

**5.2 Zelluläre Homologie****5.2.1 Definition:**

Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex. Definiere den **zellulären Kettenkomplex**  $C_*^{CW}(X, A; R)$  durch

$$C_n^{CW}(X, A; R) := H^n(X^n, X^{n-1}; R)$$

$$c_n^{CW} : C_n^{CW}(X, A; R) \longrightarrow C_{n-1}^{CW}(X, A; R)$$

wobei die Randmorphismen durch die Dreiersequenz des Tripels  $X^{n-2} \subset X^{n-1} \subset X^n$  bestimmt werden.

Die Homologie

$$H_n^{CW}(X, A; R) := H_n(C_*^{CW}(X, A; R))$$

wird **zelluläre Homologie** genannt.

**5.2.2 Satz:**

Es gibt Isomorphismen (natürlich, unter Berücksichtigung der zellulären Struktur)

$$H_n^{CW}(X, A; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R) \quad \forall n \geq 0$$

**5.2.3 Definition:**

Sei  $(X, A)$  ein relativer CW-Komplex mit Pushouts

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{i \in I(n)} S_i^{n-1} & \xrightarrow{\varphi^n = \coprod_{i \in I(n)} \varphi_i} & X^{n-1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\coprod_{i \in I(n)} D_i^{n-1} & \xrightarrow{\Phi^n = \coprod_{i \in I(n)} \Phi_i} & X^n
\end{array}$$

betrachte außerdem den Pushout

$$\begin{array}{ccc}
S^{n-1} & \longrightarrow & * \\
\downarrow & & \downarrow \\
D^n & \xrightarrow{u_n} & S^n
\end{array}$$

Definiere für  $n \geq 2, i \in I(n), j \in I(n-1)$  die **Inzidenznummer**  $\text{inc}_{i,j}^n \in \mathbb{Z}$  als den Grad der Komposition

$$S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_i} X^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}/(X^{n-1} - e_j) \xrightarrow{\Phi_j^{-1}} D^{n-1}/S^{n-2} \xrightarrow{u_{n-1}} S^{n-1}$$

Für  $n = 1$  definiere

$$\text{inc}_{i,j}^1 = \begin{cases} 1 & \varphi_i(1) = e_j \text{ und } \varphi_i(-1) \neq e_j \\ -1 & \varphi_i(-1) = e_j \text{ und } \varphi_i(1) \neq e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere induktiv Erzeuger

$$s^n \in \tilde{H}_n(S^n; R) \qquad b^n \in H_n(D^n, S^{n-1}; R)$$

sodass

$$\begin{aligned}
[\delta^+] - [\delta^-] &= s^0 \in \tilde{H}_0(S^0; R) \\
\partial b^n &= s^{n-1} \text{ wobei } \partial : H_n(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}; R) \\
s^n &= H_n(u_n)(b^n) \text{ wobei } H_n(u_n)(b^n) : H_n(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(S^n; R)
\end{aligned}$$

#### 5.2.4 Satz:

Folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{I(n)} R & \xrightarrow{\text{INC}^n = (\text{inc}_{i,j}^n)_{j \in I(n-1), i \in I(n)}} & \bigoplus_{I(n-1)} R \\
\downarrow \cong, 1 \mapsto b^n & & \downarrow \cong, 1 \mapsto b^{n-1} \\
\bigoplus_{I(n)} H_n(D^n, S^{n-1}; R) & & \bigoplus_{I(n-1)} H_{n-1}(D^{n-1}, S^{n-2}; R) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
C_n^{CW}(X, A; R) & \xrightarrow{c_n^{CW}} & C_{n-1}^{CW}(X, A; R)
\end{array}$$