

1 Hauptklausur

1.1 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung glatter geschlossener Mannigfaltigkeiten der Dimension n . W sei eine glatte kompakte $(n+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial W = M$. F sei eine glatte Fortsetzung von f auf W . $p \in N$ sei regulär für F und f .

Zeigen Sie:

$$\deg_p f \equiv 0 \pmod{2}$$

1.2 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. $N \subset \mathbb{R}^n$ sei eine glatte Untermannigfaltigkeit. $\varepsilon > 0$ sei beliebig.

Zeigen Sie: Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| < \varepsilon$, sodass die Abbildung

$$g(x) := f(x) + v$$

transversal zu N steht.

Hinweis: Benutzen Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} F : M \times N &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto y - f(x) \end{aligned}$$

Lösungsskizze? F hat laut dem Satz von Sard einen regulären Wert v mit $\|v\| < \varepsilon$. Für die Transversalität müssen wir das Differential von g für alle $g(x) \in N$ bestimmen. Tatsächlich gilt durch einen Paralleltransport

$$g_*(T_x M) \cong f_*(T_x M)$$

und

$$F_* = \text{Id}_{N_*} - f_*$$

Da F regulär für v ist, gilt somit bei der Stelle $(x, y) \in M \times N$

$$T_v \mathbb{R}^n = F_*(T_x M \times T_y N) = \text{Id}_N^*(T_y N) + f_*(T_x M) = T_y N + f_*(T_x M) \cong T_y N + g_*(T_x M)$$

1.3 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : S^3 \rightarrow S^2$ glatt. $\omega \in \Omega^2(S^2)$ sei eine glatte 2-Form.

1.3.1 Teilaufgabe (1 Punkt)

Zeigen Sie: Es gibt ein $\beta \in \Omega^1(S^3)$ mit

$$d\beta = f^*(\omega)$$

1.3.2 Teilaufgabe (3 Punkte)

Zeigen Sie: Das Integral $\int_{S^3} f^*(\omega) \wedge \beta$ ist unabhängig von der Wahl von $\beta \in \Omega^1(S^3)$ mit $d\beta = f^*(\omega)$.

1.4 Aufgabe (4 Punkte)

Es bezeichne T^2 den zweidimensionalen Torus. $p \in T^2$ sei ein beliebiger Punkt.

Berechnen Sie: Die Kohomologiegruppen $H^k(T^2 - \{p\})$ der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $T^2 - \{p\}$ für $k = 0, 1, 2$.

1.5 Aufgabe (4 Punkte)

1.5.1 Teilaufgabe (1 Punkt)

Geben sie Definition von *Immersion* und *Submersion* wieder.

1.5.2 Teilaufgabe (1 Punkt)

Geben sie Definition von *Parallelisierbar* wieder.

1.5.3 Teilaufgabe (1 Punkt)

Ist S^2 parallelisierbar? Warum / Warum nicht?

1.5.4 Teilaufgabe (1 Punkt)

Ist S^3 parallelisierbar? Warum / Warum nicht?