

# Differentialgeometrie 2

Kurzkript, WS 16/17

Mitschreiber: Akın Ünal

15. Januar 2023

Das folgende Kurzsript orientiert sich an einer Vorlesung, die im Wintersemester 2016 / 2017 in Heidelberg gehalten wurde. Für alle Fehler im Text trägt ausschließlich der Autor die Verantwortung.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Erste Woche</b>	<b>5</b>
1.1	Krümmungen . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Erster Teil, Räume Konstanter Krümmung</b>	<b>7</b>
2.1	Zweiter Fundamentaltensor . . . . .	7
2.2	Hyperbolische Modelle . . . . .	12
2.3	Satz von Cartan . . . . .	16
2.4	Fundamentalgruppen und Überlagerungen . . . . .	19
2.5	Äquivalenzrelationen und Submersionen . . . . .	25
2.6	Lie-Gruppen und Überlagerungen . . . . .	29
2.7	Schall und Rauch . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Zweiter Teil, Geometrische Aussagen</b>	<b>41</b>
3.1	Trigonometrie mit oberer Krümmungsschranke . . . . .	41
3.2	Anwendungen bzgl. der Fundamentalgruppe . . . . .	45
3.3	Konvexitätseigenschaften Nichtpositiv Gekrümmter Mannigfaltigkeiten . . . . .	47
3.4	Wachstum der Fundamentalgruppe . . . . .	49
3.5	Rand im Unendlichen bzw. Raum der Enden . . . . .	52
3.6	Symmetrische Räume . . . . .	54



# Kapitel 1

## Erste Woche

### 1.1 Krümmungen

#### 1.1.1 Definition

Es sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\kappa_p(\sigma)$  bezeichne die Schnittkrümmung in einem Punkt  $p$  und einer Ebene  $\sigma \subset T_p M$ .

$M$  heißt **von positiver Schnittkrümmung**, falls  $\kappa_p(\sigma) > 0$  für alle  $p \in M, \sigma \subset T_p M$ .

Bezeichnet  $\text{ric}$  die Ricci-Krümmung, so heißt  $M$  **von positiver Ricci-Krümmung**, falls  $\text{ric}_p(v, v) > 0$  für alle  $p \in M, v \in T_p M$ .

Die Ricci-Krümmung von  $M$  wird von  $\alpha > 0$  **nach unten beschränkt**, falls

$$\text{ric}_p(v, v) \geq \alpha g_p(v, v)$$

für alle  $p \in M, v \in T_p M$ .

#### 1.1.2 Definition: Isometrien

Eine glatte Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt **lokal isometrisch**, falls für alle  $p \in M$  das Differential  $df_p : T_p M \rightarrow T_p N$  eine lineare Isometrie metrischer Räume ist.

#### 1.1.3 Bemerkung

$f$  ist genau dann isometrisch, wenn  $f$  lokal isometrisch und diffeomorph ist.

#### 1.1.4 Satz

Jede glatte Abbildung  $f : M \rightarrow M$ , die für einen Punkt eine Isometrie auf den Tangentialräumen induziert, ist eine Isometrie.

Jede glatte, abstandserhaltende Funktion  $f : M \rightarrow M$  ist eine Isometrie.

#### 1.1.5 Definition

Die **Kompakt-Offen-Topologie** auf  $\text{Isom}(M, M)$  wird durch eine Basis folgender Mengen generiert

$$W(K, U) := \{f \mid f(K) \subseteq U\}$$

für alle  $K \subseteq M$  kompakt und  $U \subseteq M$  offen.

**1.1.6 Proposition: Cartan**

Seien  $v, w$  normierte, orthogonale Vektoren in  $T_p M$ . Es gilt

$$d(c_v(t), c_w(t))^2 = 2t^2 - \frac{\kappa_p(\sigma_{v,w})}{6}t^4 + o(t^5)$$

**1.1.7 Lemma**

Ist  $J$  ein Jacobifeld entlang  $c$ , so gilt

$$D_t(\mathcal{R}(\dot{c}, J), \dot{c})(0) = \mathcal{R}(\dot{c}, D_t J)\dot{c}$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(\mathcal{R}(\dot{c}, J)\dot{c}, w) &= g(D_t \mathcal{R}(\dot{c}, J)\dot{c}, w) + g(\mathcal{R}(\dot{c}, J)\dot{c}, D_t w) \\ \frac{d}{dt}g(\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, J) &= g(D_t \mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, J) + g(\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, D_t J) \\ g(D_t \mathcal{R}(\dot{c}, J)\dot{c}, w) &= g(D_t \mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, J) + g(\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, D_t J) = g(\mathcal{R}(\dot{c}, D_t J)\dot{c}, w) \end{aligned}$$

□

**1.1.8 Proposition**

Seien  $v, w \in T_p M$  mit  $|w| = 1$ . Setze  $J(t) = (\mathbf{d} \exp_p)_{tv}(tw) \in \mathcal{J}_{c_v}$ . Dann gilt

$$|J(t)|^2 = g(J(t), J(t)) = t^2 - \frac{1}{3}g(\mathcal{R}(v, w)w, v)t^4 + o(t^5)$$

**Beweis**

Es gilt

$$J(0) = 0 \text{ und } D_t(J)(0) = w$$

Man rechnet nach

$$\begin{aligned} g(J, J)(0) &= 0 \\ g(J, J)'(0) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} g(J(t), J(t)) = 2g(D_t(J), J)(0) = 0 \\ g(J, J)''(0) &= 2g(D_t J, D_t J)(0) + 2g(D_t D_t J, J)(0) = 2g(w, w) = 2 \\ g(J, J)'''(0) &= 6g(D_t D_t J, D_t J)(0) = 6g(-\mathcal{R}(\dot{c}, J)\dot{c}, D_t J)(0) = 0 \\ g(J, J)''''(0) &= 8g(\mathcal{R}(\dot{c}, D_t J)\dot{c}, D_t J) - \frac{8}{24}g(\mathcal{R}(v, w)w, v) = -\frac{1}{3}g(\mathcal{R}(v, w)w, v) \end{aligned}$$

□

## Kapitel 2

# Erster Teil, Räume Konstanter Krümmung

### 2.1 Zweiter Fundamentaltensor

#### 2.1.1 Definition

Unter  $\mathbb{M}_\kappa^n$  verstehen wir die bis auf Isometrie eindeutige vollständige, einfache zusammenhängende,  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$ .

#### 2.1.2 Bemerkung

Skaliert man die Metrik einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit  $c > 0$ , so skaliert sich ihre Krümmung mit  $\frac{1}{c}$ .

#### 2.1.3 Beispiel

Man führe auf  $\mathbb{R}^{n+1}$  folgende Bilinearformen ein

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot y_i$$
$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - x_{n+1} \cdot y_{n+1}$$

Dann gilt

$$\mathbb{M}_0^n = \mathbb{R}^n \quad \mathbb{M}_1^n = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x) = 1\} \quad \mathbb{M}_{-1}^n = \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0\}$$

#### 2.1.4 Definition

Der **Index** einer symmetrischen Bilinearform ist die größte Dimension aller Unterräume, auf denen jene Bilinearform negativ definit ist.

### 2.1.5 Definition

Sei  $(M, g)$  eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit einer semi-Riemannschen Mannigfaltigkeit  $(\bar{M}, \bar{g})$ . Bezeichnet  $\iota : M \hookrightarrow \bar{M}$  die Einbettung, so verstehen wir unter  $\bar{\mathcal{V}}(M) := \Gamma(\iota^*(\mathcal{T}\bar{M}))$  den Pullback der Vektorfelder auf  $\bar{M}$ , d.h.

$$\bar{\mathcal{V}}(M) = \{Y|_M \mid Y \in \mathcal{V}(\bar{M})\}$$

Unter  $\mathcal{V}(M)^\perp \subset \bar{\mathcal{V}}(M)$  verstehen wir die Vektorfelder auf  $M$ , die normal zu  $M$  liegen. Wir schränken den Levi-Civita-Zusammenhang von  $\bar{M}$  auf  $\mathcal{V}(M) \times \bar{\mathcal{V}}(M)$  ein und erhalten

$$\bar{\mathcal{D}} : \mathcal{V}(M) \times \bar{\mathcal{V}}(M) \longrightarrow \bar{\mathcal{V}}(M)$$

Betrachte folgende Zerlegung

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp$$

Unter dem **Koindex von**  $M$  verstehen wir den Index auf  $(T_p M)^\perp$ . Es gilt

$$\text{Index}(T_p \bar{M}) = \text{Index}(T_p M) + \text{Index}(T_p M)^\perp$$

### 2.1.6 Lemma

$\bar{\mathcal{D}}$  ist wohldefiniert.

#### Beweis

Sei  $p \in M$  ein Punkt und  $U \subset M$  eine Koordinatennachbarschaft von  $p$ . Seien ferner  $V \in \mathcal{V}(M)$ ,  $X \in \bar{\mathcal{V}}(M)$  mit Liftungen  $\bar{V}, \bar{X} \in \mathcal{V}(\bar{M})$ .  $\bar{X}$  lässt sich auf  $U$  darstellen durch

$$\bar{X} = \sum_i f_i \frac{d}{dx_i}$$

$$\bar{\mathcal{D}}_{\bar{V}} \bar{X} = \sum_i \bar{V}(f_i) \frac{d}{dx_i} + \sum_i f_i \bar{\mathcal{D}}_{\bar{V}} \left( \frac{d}{dx_i} \right)$$

Für  $q \in U \cap M$  gilt

$$\bar{V}(f_i)(q) = V_q(f_i) = V_q((f_i)|_{U \cap M})$$

und

$$\bar{\mathcal{D}}_{\bar{V}} \left( \frac{d}{dx_i} \right) (q) = \bar{\mathcal{D}}_{\bar{V}_q} \left( \frac{d}{dx_i} \right)$$

□

### 2.1.7 Korollar

Seien  $V, W \in \mathcal{V}(M)$ ,  $X, Y \in \bar{\mathcal{V}}(M)$ .

- $\bar{\mathcal{D}}_V X$  ist  $\mathcal{F}(M)$ -linear in  $V$ .
- $\bar{\mathcal{D}}_V X$  ist  $\mathbb{R}$ -linear in  $X$ .
- $\bar{\mathcal{D}}_V(fX) = (Vf)X + f\bar{\mathcal{D}}_V X$
- $[V, W] = \bar{\mathcal{D}}_V W - \bar{\mathcal{D}}_W V$
- $Vg(X, Y) = g(\bar{\mathcal{D}}_V X, Y) + g(X, \bar{\mathcal{D}}_V Y)$



**2.1.8 Lemma**

Sind  $V, W \in \mathcal{V}(M)$ , dann gilt

$$\mathcal{D}_V W = (\overline{\mathcal{D}}_V W)^T$$

**Beweis**

Sei  $X \in \mathcal{V}(M)$  beliebig

$$2g(\overline{\mathcal{D}}_{\overline{V}} \overline{W}, \overline{X}) = \overline{V}g(\overline{W}, \overline{X}) + \overline{W}g(\overline{X}, \overline{V}) - \overline{X}g(\overline{V}, \overline{W}) + g(\overline{W}, [\overline{X}, \overline{V}]) + g(\overline{X}, [\overline{V}, \overline{W}])$$

Mit dem Vorhergehenden Korollar erhalten wir durch Einschränkung auf  $M$

$$g(\overline{\mathcal{D}}_V W, X) = g(\mathcal{D}_V W, X)$$

Es gilt ferner

$$g(\overline{\mathcal{D}}_V W, X) = g((\overline{\mathcal{D}}_V W)^T, X)$$

da  $X$  tangential an  $M$  liegt. □

**2.1.9 Lemma**

Definiere den **Gestalttensor** bzw. **zweiten Fundamentaltensor** durch

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) &\longrightarrow \mathcal{V}(M)^\perp \\ (V, W) &\longmapsto (\overline{\mathcal{D}}_V W)^N = \overline{\mathcal{D}}_V W - \mathcal{D}_V W \end{aligned}$$

Dann ist dieser Tensor  $\mathcal{F}(M)$ -bilinear und symmetrisch.

**Beweis**

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{D}}_V(fW))^N &= (f\overline{\mathcal{D}}_V W)^N + (V(f)W)^N = (f\overline{\mathcal{D}}_V W)^N \\ \Pi(V, W) - \Pi(W, V) &= (\overline{\mathcal{D}}(V, W) - \overline{\mathcal{D}}(W, V))^N = [V, W]^N = 0 \end{aligned}$$

□

**2.1.10 Satz: Gauss-Gleichung**

Seien  $V, W, X, Y \in \mathcal{V}(M)$ . Es gilt

$$g(\mathcal{R}(V, W)X, Y) = g(\overline{\mathcal{R}}(V, W)X, Y) + g(\Pi(V, X), \Pi(W, Y)) - g(\Pi(V, Y), \Pi(W, X))$$

**Beweis**

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y)Z &= -\mathcal{D}_{[X, Y]}Z + [\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y]Z \\ g(\overline{\mathcal{D}}_{[V, W]}X, Y) &= g(\mathcal{D}_{[V, W]}X, Y) \\ g(\overline{\mathcal{D}}_V \overline{\mathcal{D}}_W X, Y) &= g(\overline{\mathcal{D}}_V \mathcal{D}_W X, Y) + g(\overline{\mathcal{D}}_V \Pi(W, X), Y) \\ &= g(\mathcal{D}_V \mathcal{D}_W X, Y) + (Vg(\Pi(W, X), Y) - g(\Pi(W, X), \overline{\mathcal{D}}_V Y)) \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$g(\Pi(W, X), Y) = 0$$

Ergo

$$\begin{aligned} g(\overline{\mathcal{D}}_V \overline{\mathcal{D}}_W X, Y) &= g(\mathcal{D}_V \mathcal{D}_W X, Y) + (Vg(\Pi(W, X), Y) - g(\Pi(W, X), \overline{\mathcal{D}}_V Y)) \\ &= g(\mathcal{D}_V \mathcal{D}_W X, Y) - g(\Pi(W, X), \Pi(V, Y)) \end{aligned}$$

□

### 2.1.11 Korollar

Sind  $v, w \in T_p M$  linear unabhängig, so gilt

$$\kappa(v, w) = \bar{\kappa}(v, w) + \frac{g(\Pi(v, v), \Pi(w, w)) - g(\Pi(v, w), \Pi(v, w))}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}$$

### 2.1.12 Proposition

Sei  $Y$  ein Vektorfeld tangential zu  $M$  entlang einer Kurve  $\alpha(t)$  in  $M$ . Dann gilt

$$\overline{\mathcal{D}}_t Y = \mathcal{D}_t Y + \Pi(\dot{\alpha}, Y)$$

### 2.1.13 Korollar

$\alpha$  ist genau dann eine Geodäte von  $M$ , wenn  $\overline{\mathcal{D}}_t(\dot{\alpha})$  normal zu  $M$  steht.

### 2.1.14 Definition

Eine **semi-Riemannsche Hyperfläche** ist eine **semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit** der Kodimension Eins.

### 2.1.15 Definition

Das **Vorzeichen** einer semi-Riemannschen Hyperfläche  $M$  ist definiert durch

$$\varepsilon := \begin{cases} +1 & \text{coindex } M = 0 \\ -1 & \text{coindex } M = 1 \end{cases}$$

### 2.1.16 Definition

Sei  $U$  ein normiertes Normalenvektorfeld einer semi-Riemannschen Hyperfläche  $M$ . Dann wird durch

$$g(S(V), W) = g(\Pi(V, W), U)$$

ein (1,1)-Tensorfeld  $S$  auf  $M$  definiert, der sogenannte **Gestaltoperator**, der durch  $U$  induziert wird.

### 2.1.17 Lemma

Für alle  $v \in T_p M$  gilt

$$S(v) = -\overline{\mathcal{D}}_v U$$

Ferner ist  $S_p$  selbstadjungiert.

**Beweis**

$g(U, U)$  ist konstant gleich 1. Ergo gilt

$$g(\overline{\mathcal{D}}_V U, U) = 0$$

Daraus folgt, dass  $\overline{\mathcal{D}}_V U$  für alle  $V \in \mathcal{V}(M)$  tangent an  $M$  liegt.

Sei nun  $W \in \mathcal{V}(M)$ , dann gilt

$$g(S(V), W) = g(\Pi(V, W), U) = g(\overline{\mathcal{D}}_V W, U) \stackrel{g(U, W)=0}{=} g(\overline{\mathcal{D}}_V U, W)$$

□

**2.1.18 Korollar**

$$\kappa(v, w) = \overline{\kappa}(v, w) + \varepsilon \frac{g(Sv, v)g(Sw, w) - g(Sv, w)^2}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}$$

**Beweis**

$$\Pi(v, w) = \varepsilon g(Sv, w)U \text{ und } g(U, U) = \varepsilon$$

□

## 2.2 Hyperbolische Modelle

### 2.2.1 Definition: 3 Shades of Artig-Sein

Sei  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$x \text{ heißt } \begin{cases} \text{zeitartig, falls } \langle x, x \rangle < 0 \\ \text{lichtartig, falls } \langle x, x \rangle = 0 \\ \text{raumartig, falls } \langle x, x \rangle > 0 \end{cases}$$

### 2.2.2 Proposition

Sei  $M = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = -r^2\}$ . Dann ist  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der konstanten Schnittkrümmung  $-\frac{1}{r^2}$  für  $r > 0$ .

#### Beweis

Definiere  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $x \mapsto \langle x, x \rangle$ . Dann ist  $df_p(v) = 2\langle v, p \rangle$ . Ergo ist  $df_p$  surjektiv für alle  $p \in M$ . Ergo ist  $f^{-1}(-r^2)$  eine glatte Hyperfläche von  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Ferner ist

$$T_p M = \text{Ker} df_p = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v \rangle = 0\} = p^\perp$$

Da  $p$  zeitartig ist, ist  $T_p M$  positiv definit. Ferner ist der vom Einheiten-Normalen Vektorfeld  $U(p) = \frac{p}{r}$  abgeleitete Gestaltoperator gegeben durch  $S(V) = -\mathcal{D}'_V U = \frac{-V}{r}$ . Es folgt

$$\kappa(v, w) = 0 - \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r^2}$$

□

### 2.2.3 Definition

Unter einer **Paar-Isometrie**  $\Phi : (M, M') \rightarrow (N, N')$ , wobei  $M \subset M', N \subset N'$  semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind, ist eine Isometrie  $M' \rightarrow N'$ , dergestalt, dass auch ihre Restriktion  $M \rightarrow N$  eine Isometrie ist.

### 2.2.4 Lemma

Eine Paar-Isometrie  $\Phi : (M, M') \rightarrow (N, N')$  erhält den Gestalttensor, d. h.

$$d\Phi(\Pi(v, w)) = \Pi(d\Phi(v), d\Phi(w))$$

für alle  $p \in M, v, w \in T_p M$ .

### 2.2.5 Proposition

Seien  $p, q \in M = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = -r^2\}$  mit ONBs  $e_i \in T_p M, f_i \in T_q M$ . Dann existiert eine eindeutige Paar-Isometrie

$$\phi : (\mathbb{R}^{n+1}, M) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, M)$$

mit

$$\phi(p) = q \text{ und } d\phi_p(e_i) = f_i$$

### 2.2.6 Definition

Eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit  $M \subset M'$  heißt **total geodätisch**, falls  $\Pi = 0$ .

### 2.2.7 Proposition

Für eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit  $M \subset M'$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $M$  ist total geodätisch in  $M'$
- 2.) Jede Geodäte von  $M$  bleibt eine Geodäte in  $M'$
- 3.) Für  $v \in T_p M \subset T_p M'$  liegt das Anfangstück von  $\gamma(t) = \exp'_p(tv)$  in  $M$ . ( $\exp'$  bezeichnet hier die Exponentialfunktion von  $M'$ .)
- 4.) Für jeden Weg in  $M$  stimmt der Paralleltransport in  $M$  mit dem in  $M'$  überein.

### 2.2.8 Proposition

Seien  $M, N \subset M'$  vollständige, zusammenhängende, total geodätische semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Existiert ein Punkt  $p \in M \cap N$  mit

$$T_p M = T_p N$$

so folgt

$$M = N$$

### 2.2.9 Proposition

Bezeichnet  $H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  das **Hyperboloidenmodell** des hyperbolischen Raumes, d. h.

$$H^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = -1\}$$

so sind die  $k$ -dimensionalen, vollständigen, total geodätischen, zusammenhängenden Riemannschen Untermannigfaltigkeiten von  $H^n$  genau die Schnitte

$$H^n \cap W^{k+1}$$

wobei  $W^{k+1}$  ein  $k+1$ -dimensionaler Untervektorraum von  $\mathbb{R}^{n+1}$  ist.

### 2.2.10 Korollar

$H^n$  ist vollständig.

### 2.2.11 Lemma: Poincare-Scheiben-Modell

Definiere die **Poincare-Scheibe** durch

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

und folgenden Diffeomorphismus

$$p : H^n \longrightarrow D^n$$

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \longmapsto \frac{1}{x_{n+1} + 1} (x_1, \dots, x_n)$$

Dann ist die Metrik auf  $D^n$  gerade gegeben durch

$$g_p^D = \left( \frac{2}{1 - \|p\|^2} \right)^2 g_p^E$$

wobei  $g^E$  die euklidische Metrik von  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet.

**2.2.12 Lemma**

Es seien

$$O(n, 1) = \{A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1} \mid \langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle\}$$

und

$$O(n, 1)^+ = \{A \in O(n, 1) \mid A(H^n) \subset H^n\}$$

Dann ist  $O(n, 1)^+$  eine Index-2-Gruppe von  $O(n, 1)$  und

$$Isom(H^n) = O(n, 1)^+$$

Ferner gilt

$$Isom(S^n) = O(n) \text{ und } Isom(\mathbb{R}^n) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$$

**2.2.13 Definition**

Eine  **$k$ -Ebene** von  $H^n$  ist eine vollständige, zusammenhängende, total geodätische,  $k$ -dimensionale Riemannsche Untermannigfaltigkeit von  $H^n$ .

Ist  $S = H^n \cap W^n$  eine Hyperebene von  $H^n$ , so definiere die **Reflektion** an  $S$  durch

$$\begin{aligned} r_S : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (r_S)|_{W^n} &= \text{id}_{W^n} \\ (r_S)|_{W^{n\perp}} &= -\text{id}_{W^{n\perp}} \end{aligned}$$

**2.2.14 Proposition**

Die Reflektionen an Hyperebenen erzeugen  $Isom(H^n)$ .

**2.2.15 Definition**

Ein Diffeomorphismus

$$f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$$

heißt **konform**, falls eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  existiert, sodass

$$f^*(h_{f(p)}) = \lambda(p) \cdot g_p$$

**2.2.16 Bemerkung**

Die Poincare-Scheibe ist ein konformes Modell von  $\mathbb{H}^n$ , d. h.,  $(D^n, g^E)$  und  $(D^n, g^D)$  sind zueinander konform.

**2.2.17 Lemma**

Die  $k$ -dimensionalen, vollständigen, zusammenhängenden, total geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Poincare-Scheibe sind ihre Schnitte mit  $k$ -Sphären und  $k$ -Ebenen von  $\mathbb{R}^n$ , die orthogonal zum Rand der Poincare-Scheibe liegen.

**2.2.18 Definition**

Sei  $S_p(r) \subset \mathbb{R}^n$  eine Sphäre mit Radius  $r$  um  $p$ . Definiere die **Inversion** an  $S_p(r)$  durch

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \\ x &\longmapsto p + r^2 \frac{x - p}{\|x - p\|^2} \end{aligned}$$

**2.2.19 Proposition**

Jede Inversion ist konform und bildet Sphären und Ebenen auf Sphären und Ebenen ab.

**2.2.20 Definition**

Das **obere Halbebenen-Modell**

$$U^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

ergibt sich durch eine Inversion der Poincare-Scheibe an der Sphäre

$$S = S_{(0, \dots, 0, -1)}(\sqrt{2})$$

Insofern ist die obere Halbebene ein konformes Modell von  $\mathbb{H}^n$ .

**2.2.21 Proposition**

Die  $k$ -Ebenen von  $U^n$  sind die  $k$ -Ebenen und  $k$ -Sphären von  $\mathbb{R}^n$ , die orthogonal zu  $\partial U^n$  sind.

**2.2.22 Proposition**

Die Metrik auf  $U^n$  ist gegeben durch

$$g_x^U = \frac{1}{x_n^2} g^E$$

**2.2.23 Proposition**

Folgende Abbildungen sind Isometrien von  $U^n$ :

1.) Horizontale Translationen:

$$x \mapsto x + (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$$

2.) Dilationen:

$$x \mapsto x \cdot \lambda$$

3.) Inversionen an Sphären orthogonal zu  $\partial U^n$

**2.2.24 Proposition**

Die Isometrien der Poincare-Scheibe und der oberen Halbebene werden durch Inversionen an Sphären und Reflektion an Euklidischen Ebenen, die alle orthogonal zum Rand stehen, erzeugt.

**2.2.25 Proposition**

In den konformen Modellen sind Kugeln genau die euklidischen Kugeln mit exzentrischen Mittelpunkten.

**2.2.26 Satz: Thurston**

Ein Knoten in  $S^3$  ist entweder ein Torus-Knoten, d. h., er kann auf die Oberfläche eines Torus platziert werden, ein Satellitknoten, d. h., es gibt einen echt einfacheren Knoten, sodass der Satellitknoten in der Verdickung des einfacheren lebt, oder ein hyperbolischer Knoten, d. h., sein Komplement ist eine hyperbolische Mannigfaltigkeit.

## 2.3 Satz von Cartan

### 2.3.1 Satz: Cartan

Seien  $M, N$  zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$ ,  $p \in M, q \in N$ . Ferner sei eine lineare Isometrie

$$i : T_p M \longrightarrow T_p N$$

gegeben und eine offene Umgebung  $p \in V \subset_o M$ , sodass

$$f := \exp_q \circ i \circ \exp_p^{-1} : V \longrightarrow f(V)$$

wohldefiniert ist. Definiere für  $p' \in V$  folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \phi_t : T_{p'} M &\longrightarrow T_{f(p')} N \\ x &\longmapsto P_t^N \circ i \circ (P_t^M)^{-1} \end{aligned}$$

wobei  $P_t^M : T_p M \rightarrow T_{p'} M$  den Paralleltransport entlang der Geodäte

$$\gamma : \gamma(0) = p \mapsto \gamma(t) = p'$$

und  $P_N$  den Paralleltransport entlang der Geodäte  $\delta$  mit

$$\delta(0) = q \text{ und } \dot{\delta}(0) = i(\dot{\gamma}(0))$$

bezeichnet.

Gilt nun für alle  $p' \in V, x, y, z, w \in T_{p'} M$

$$g(\mathcal{R}(x, y)z, w) = g(\mathcal{R}(\phi_t(x), \phi_t(y))\phi_t(z), \phi_t(w))$$

Dann ist  $f$  eine lokale Isometrie mit  $df_p = i$ .

### Beweis

- 1.) Sei  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  eine Geodäte von  $p$  nach  $p'$  und  $v \in T_{p'} M$  beliebig. Definiere ein Jacobi-Feld  $J$  entlang  $\gamma$  durch

$$J(0) = 0 \text{ und } J(t) = v$$

Sei  $\{e_1(t), \dots, e_{n-1}(t), e_n(t) = \dot{\gamma}(t)\}$  eine ONB von parallelen Vektorfeldern entlang  $\gamma$ . Es gilt

$$J(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) e_i(t)$$

und

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_t \mathcal{D}_t J(t) + \mathcal{R}(\dot{\gamma}(t), J(t))\dot{\gamma}(t) = 0 \\ \iff &\sum_{i=1}^n y_i''(t) e_i(t) + \sum_{i=1}^n y_i(t) \mathcal{R}(e_n(t), e_i(t)) e_n(t) = 0 \\ \iff &\forall j : y_j''(t) + \sum_{i=1}^n y_i(t) g(e_j(t), \mathcal{R}(e_n(t), e_i(t)) e_n(t)) = 0 \end{aligned}$$



Definiere nun  $\delta : [0, l] \rightarrow N$  durch

$$\delta(0) = q \text{ und } \dot{\delta}(0) = i(\dot{\gamma}(0))$$

und folgende ONB entlang  $\delta$  durch

$$e'_i(t) := \phi_t(e_i(t))$$

und das Vektorfeld  $K$  entlang  $\delta$  durch

$$K(t) := \phi_t(J(t)) = \sum_{i=1}^n y_i(t) e'_i(t)$$

Nun gilt aufgrund unserer Voraussetzung  $\phi_t^* g(\mathcal{R}, ) = g(\mathcal{R}, )$

$$\begin{aligned} \forall j : y''_j(t) + \sum_{i=1}^n y_i(t) g(e_j(t), \mathcal{R}(e_n(t), e_i(t)) e_n(t)) &= 0 \\ \iff \forall j : y''_j(t) + \sum_{i=1}^n y_i(t) g(e'_j(t), \mathcal{R}(e'_n(t), e'_i(t)) e'_n(t)) &= 0 \\ \iff \sum_{i=1}^n y''_i(t) e'_i(t) + \sum_{i=1}^n y_i(t) \mathcal{R}(e'_n(t), e'_i(t)) e'_n(t) &= 0 \\ \iff \mathcal{D}_t \mathcal{D}_t K(t) + \mathcal{R}(\dot{\delta}(t), K(t)) \dot{\delta}(t) &= 0 \end{aligned}$$

Ergo ist  $K$  ein Jacobifeld.

2.) Da Paralleltransporte isometrisch sind, gilt

$$g(J(l), J(l)) = g(\phi_t \circ J(l), \phi_t \circ J(l)) = g(K(l), K(l))$$

3.) Da  $v = J(l) \in T_{p'} M$  beliebig war, bleibt nun folgendes zu zeigen

$$K(l) = \mathbf{d}f_{p'}(J(l))$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{K}(0) &= (\mathcal{D}_t K)(0) \\ &= \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} P_t^{N-1}(K(t))|_{t=0} \\ &= i \left( \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} P_t^{M-1}(J(t))|_{t=0} \right) \\ &= i(\mathcal{D}_t J)(0) = i\dot{J}(0) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} K(l) &= (\mathbf{d} \exp_q)_{l\dot{\delta}(0)}(l\dot{K}(0)) \\ &= ((\mathbf{d} \exp_q)_{l\dot{\delta}(0)} \circ i)(l\dot{J}(0)) \\ &= (\mathbf{d} \exp_q)_{l\dot{\delta}(0)} \circ i \circ (\mathbf{d} \exp_p)_{l\dot{\gamma}(0)}^{-1}(J(l)) \\ &= \mathbf{d}f_{p'}(J(l)) \end{aligned}$$

□

### 2.3.2 Korollar

Seien  $M, N$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten derselben konstanten Schnittkrümmung und Dimension. Dann existiert für jede Wahl von Punkten  $p \in M, q \in N$  und ONBs  $e_i \in T_p M$  und  $f_i \in T_q N$  eine lokale Isometrie

$$g : p \in V \subset_o M \longrightarrow g(V)$$

mit

$$g(p) = q \text{ und } dg_p(e_i) = f_i$$

## 2.4 Fundamentalgruppen und Überlagerungen

### 2.4.1 Definition

Für  $p, q \in M$  bezeichne  $P(p, q)$  die Menge aller **stetigen Wege**  $c : [0, 1] \rightarrow M$  von  $p$  nach  $q$ . Sind  $a, b \in P(p, q)$  so verstehen wir unter einer **Homotopie** von  $a$  nach  $b$  eine **stetige** Abbildung

$$H : I^2 \longrightarrow M$$

mit

$$\begin{aligned} H_s(0) &= p \quad \forall s \\ H_s(1) &= q \quad \forall s \\ H_0(t) &= a(t) \quad \forall t \\ H_1(t) &= b(t) \quad \forall t \end{aligned}$$

Existierte eine Homotopie  $a \mapsto b$ , so heißen  $a, b$  zueinander **homotop**.

*Homotop Sein* ist eine Äquivalenzrelation von  $P(p, q)$ .

Definiere ferner für  $a \in P(p, q), b \in P(q, r)$

$$a * b(t) := \begin{cases} a(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ b(2t - 1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{und} \quad a^{-1}(t) := a(1 - t)$$

Diese Operationen sind unter Homotopie invariant.

### 2.4.2 Definition: Die X.te Definition der Fundamentalgruppe...

Definiere die **Fundamentalgruppe** von  $M$  in  $p$  durch

$$\pi_1(M, p) := (P(p, p) / \text{Homotopie}, *)$$

### 2.4.3 Bemerkung

Ist  $M$  wegzusammenhängend, so ist die Fundamentalgruppe bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des Basispunktes.

### 2.4.4 Definition

$M$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn  $M$  wegzusammenhängend ist und eine triviale Fundamentalgruppe hat.

### 2.4.5 Definition

Eine glatte, surjektive Abbildung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $M' \rightarrow M$  heißt **Überlagerung**, falls jeder Punkt  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset M$  besitzt, sodass das Urbild dieser Umgebung ausschließlich aus Zusammenhangskomponenten besteht, die diffeomorph zu  $U$  sind.

### 2.4.6 Lemma

Eine Überlagerung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten  $\varphi : M' \rightarrow M$  gehorcht folgender **Universellen Abbildungseigenschaft**:

Ist  $\alpha : I \rightarrow M$  eine glatte Kurve mit Anfangspunkt  $p$ , so existiert für jedes Urbild  $q \in \varphi^{-1}(p)$  genau eine **Liftung**  $\alpha' : I \rightarrow M'$  mit Anfangspunkt  $q$  und

$$\varphi \circ \alpha' = \alpha$$

### 2.4.7 Lemma

Sei  $M' \rightarrow M$  eine Überlagerung und  $a, b : I \rightarrow M$  homotope Kurven in  $M$ . Besitzen ihre Liftungen  $a', b' : I \rightarrow M'$  denselben Anfangspunkt, so sind diese ebenfalls homotop.

### 2.4.8 Korollar

Sei  $\varphi : M' \rightarrow M$  eine Überlagerung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Ist  $f : P \rightarrow M$  eine glatte Abbildung,  $P$  wegzusammenhängend und  $p \in f(P)$ , so existiert für jedes Urbild  $q \in \varphi^{-1}(p)$  höchstens eine **Liftung**  $f' : P \rightarrow M'$  mit Anfangspunkt  $q$  und

$$\varphi \circ f' = f$$

Ist  $P$  einfach zusammenhängend, so existiert diese Liftung immer.

### 2.4.9 Satz

Jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit besitzt eine einfach zusammenhängende Überlagerung.

#### Beweis: Skizze

Für  $p \in M$  sei  $\Omega_p$  die Mannigfaltigkeit aller Pfade in  $M$ , die in  $p$  starten. Setze  $M' := \Omega_p / \text{Homotopie}$ , dann ist folgende Überlagerung gegeben

$$\begin{aligned} M' &\longrightarrow M \\ [\gamma]_H &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

□

### 2.4.10 Korollar

Ist  $M$  eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gibt es bis auf Diffeomorphie nur eine einfach zusammenhängende Überlagerung  $M' \rightarrow M$ . In diesem Sinne nennen wir  $M'$  die **universelle Überlagerung** von  $M$ .

### 2.4.11 Definition

Eine Überlagerung  $M' \rightarrow M$  heißt **trivial**, wenn das Urbild jeder Zusammenhangskomponente von  $M$  ausschließlich aus Zusammenhangskomponenten besteht, die jeweils diffeomorph zu ihrem Bild sind.

### 2.4.12 Korollar

Jede Überlagerung einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist trivial.

**2.4.13 Definition**

Sei  $k : M' \rightarrow M$  eine Überlagerung. Unter einer **Deck-Transformation** verstehen wir einen Diffeomorphismus  $\phi : M' \rightarrow M'$  mit

$$k \circ \phi = k$$

Bezeichnet  $D$  die Gruppe aller Deck-Transformationen, so heißt  $k$  **normal**, wenn für alle  $p, q \in M'$  mit  $k(p) = k(q)$  ein  $\phi \in D$  mit  $\phi(p) = q$  existiert.

**2.4.14 Korollar**

Jede einfach zusammenhängende Überlagerung ist normal.

**2.4.15 Satz**

Ist  $k : M' \rightarrow M$  eine universelle Überlagerung, so ist  $D \cong \pi_1(M)$ .

**2.4.16 Definition**

Sei  $G \subset \text{Diffeo}(M)$  eine Untergruppe. Wir sagen  $G$  agiert **eigentlich diskontinuierlich (und frei)**, falls gilt

PD1) Jedes  $p \in M$  hat eine Umgebung  $U \subset M$ , sodass für alle  $g \in G$  gilt

$$g.U \cap U \neq \emptyset \implies g = 1$$

PD2) Punkte  $p, q \in M$  aus verschiedenen  $G$ -Orbiten haben Umgebungen  $U, V \subset M$ , sodass für alle  $g \in G$  gilt

$$g.U \cap V = \emptyset$$

**2.4.17 Bemerkung**

Die Deck-Transformationsgruppe ist immer eigentlich diskontinuierlich.

**2.4.18 Lemma**

Sei  $G \subset \text{Diffeo}(M)$  eine eigentlich diskontinuierliche Untergruppe. Es gibt genau eine Struktur auf  $M/G$ , durch die

$$M \longrightarrow M/G$$

zu einer Überlagerung (Riemannscher) Mannigfaltigkeiten wird. Ist  $M$  zusammenhängend, so gilt  $D = G$  und die Überlagerung ist normal.

**2.4.19 Definition**

Eine Überlagerung  $p : M' \rightarrow M$  heißt eine **Riemannsche Überlagerung**, wenn  $p$  lokal isometrisch ist.

**2.4.20 Korollar**

Ist eine Riemannsche Überlagerung  $k : M' \rightarrow M$  gegeben, wobei  $M'$  zusammenhängend und  $M$  einfach zusammenhängend ist, so ist  $k$  eine Isometrie.

**2.4.21 Satz**

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine lokale Isometrie,  $N$  zusammenhängend. Existiert für jede Geodäte  $\sigma$  in  $N$  mit Anfangspunkt  $p$  und jedem  $q \in f^{-1}(p)$  eine Liftung  $\sigma'$  in  $M$  mit Anfangspunkt  $q$ , so ist  $f$  eine Riemannsche Überlagerung.

**Beweis: Skizze**

Sei  $p \in N$  und  $U \subset_o N$  eine geodätische sternförmige Nachbarschaft. Ist  $q \in f^{-1}(p)$ , so ist  $df_q : T_q M \rightarrow T_p N$  eine Isometrie, ergo ist  $U' := df_q^{-1}(\exp_p^{-1}(U)) \subset_o T_q M$  sternförmig.

- (1)  $\exp_q$  ist auf  $U'$  definiert, denn wir können jede von  $p$  ausgehende Geodäte in  $U$  hochliften. Die hochgelifteten Wege bleiben Geodäten, da  $f$  lokal isometrisch ist.
- (2)  $U_q := \exp_q(U')$  ist eine normale Nachbarschaft von  $q$ .
- (3) Auf  $U_q$  gilt

$$f = \exp_p \circ df_q \circ \exp_q^{-1}$$

ergo ist  $f : U_q \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus.

- (4) Für verschiedene Urbilder  $q_1, q_2 \in f^{-1}(p)$  sind  $U_{q_1}$  und  $U_{q_2}$  disjunkt, denn existiert ein gemeinsamer Punkt, so lässt er sich als gemeinsame Geodäte hochliften.
- (5)  $f^{-1}(U) = \coprod_{q \in f^{-1}(p)} U_q$

□

**2.4.22 Korollar**

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine lokale Isometrie und  $N$  zusammenhängend. Es gilt

$M$  ist vollständig  $\iff N$  ist vollständig und  $f$  ist eine Riem. Überlagerung

**2.4.23 Satz**

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa \in \{0, 1, -1\}$ . Dann ist die universelle Überlagerung  $M'$  von  $M$  bis auf Isometrie gegeben durch

$$M' = \begin{cases} \mathbb{H}^n & \kappa = -1 \\ \mathbb{R}^n & \kappa = 0 \\ S^n & \kappa = 1 \end{cases}$$

**Beweis**

Fall 1  $\kappa = -1$

**Erinnerung: Satz von Hadamard** Ist  $M$  eine vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht-positiver Schnittkrümmung, so ist

$$\exp_p : T_p M \longrightarrow M$$

eine (im Allgemeinen nicht Riemannsche) Überlagerung.

Der Satz von Hadamard liefert zusammen mit dem Satz von Cartan, dass folgende Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H}^n &\longrightarrow M' \\ x &\longmapsto \exp_p \circ i \circ \exp_q^{-1} \end{aligned}$$

eine Isometrie ist.

Fall 2  $\kappa = 0$

Gleiches Argument wie oben.

Fall 3  $\kappa = 1$

Sei  $x \in S^n, p \in M', i : T_x S^n \rightarrow T_p M'$  eine Isometrie. Sei ferner  $x' = -x$  die Antipode zu  $x$ , dann ist folgende lokale Isometrie gegeben

$$\begin{aligned} f_x : S^n \setminus \{x'\} &\longrightarrow M' \\ z &\longmapsto \exp_p \circ i \circ \exp_x^{-1}(z) \end{aligned}$$

Sei  $y \in S^n \setminus \{x, x'\}$  ein weiterer Punkt mit Antipode  $y' = -y$  und Isometrie  $j = \mathbf{d}(f_x)_y : T_y S^n \rightarrow T_{f_x(y)} M'$ . Dann erhalten wir folgende weitere Abbildung

$$\begin{aligned} f_y : S^n \setminus \{y'\} &\longrightarrow M' \\ z &\longmapsto \exp_{f_x(y)} \circ j \circ \exp_y^{-1}(z) \end{aligned}$$

$f_x$  und  $f_y$  stimmen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich überein, ergo wird  $f_x$  von  $f_y$  fortgesetzt zur lokalen Isometrie

$$f : S^n \longrightarrow M'$$

Nach dem vorgehenden Korollar ist  $f$  eine Riemannsche Überlagerung, ergo eine Isometrie.

□

#### 2.4.24 Korollar

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa \in \{0, 1, -1\}$ . Dann ist  $M$  isometrisch zu  $M'/G$ , wobei  $M'$  die universelle Riemannsche Überlagerung von  $M$  und  $G \subset \text{Isom}(M')$  eigentlich diskontinuierlich ist.

#### 2.4.25 Proposition

Sei  $M$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit,  $G_1, G_2 \subset \text{Isom}(M)$  Untergruppen. Es gilt

$$M/G_1 \text{ und } M/G_2 \text{ sind isometrisch} \iff G_1 \text{ und } G_2 \text{ sind konjugiert}$$

#### 2.4.26 Proposition

Sei  $M$  eine vollständige, zusammenhängende  $2n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit der Schnittkrümmung 1. Dann ist  $M$  isometrisch zu  $S^{2n}$  oder  $P^{2n}\mathbb{R}$ .

#### 2.4.27 Definition

Sind  $H \subset G$  Gruppen, so definiere den **Normalisator** durch

$$N(H) := \{g \in G \mid gH = Hg\}$$

**2.4.28 Proposition**

Sei  $M$  eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und  $\Gamma \subset Isom(M)$  eigentlich diskontinuierlich. Es gilt

$$Isom(M/\Gamma) \cong N(\Gamma)/\Gamma$$



## 2.5 Äquivalenzrelationen und Submersionen

### 2.5.1 Lemma

Sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer Äquivalenzrelation  $R$ . Es gilt

$$X/R \text{ ist hausdorffsch} \implies R \subset X \times X \text{ ist abgeschlossen}$$

Ist  $p : X \rightarrow X/R$  offen, so gilt auch die Umkehrung.

### 2.5.2 Satz: von Rang

Seien  $M, N$  glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $m$  bzw.  $n$  und  $f : M \rightarrow N$  glatt mit konstanten Rang  $r$ .

Für jedes  $p \in M$  existieren Koordinaten  $p \in (U, \phi) \subset M$  und  $f(p) \in (V, \psi) \subset N$ , sodass  $f(U) \subset V$  und für

$$\tilde{f} := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

gilt

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$$

Ist  $f$  ferner eine Submersion, so gilt

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_n)$$

und ist  $f$  eine Immersion, so gilt weiterhin

$$\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

### 2.5.3 Korollar

Seien  $M, N$  glatte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $m$  bzw.  $n$  und  $f : M \rightarrow N$  glatt.

$f$  ist genau dann eine Submersion, wenn jeder Punkt von  $M$  im Bild eines lokalen glatten Schnittes von  $f$  liegt.

### 2.5.4 Korollar

Jede Submersion von Mannigfaltigkeiten ist offen.

### 2.5.5 Proposition

Sei  $S$  eine Teilmenge einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ .

$S$  ist genau dann eine  $k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit von  $M$ , wenn jeder Punkt von  $S$  eine Nachbarschaft  $U \subset_o M$  hat, sodass  $S \cap U$  die Urbildmenge eines Punktes unter einer glatten Submersion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  ist.

### 2.5.6 Lemma

Seien  $M, N, Z$  Mannigfaltigkeiten. Betrachte folgendes kommutative Diagramm von mengentheoretischen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Ist  $\beta$  glatt und  $\alpha$  surjektiv und submersiv, so ist  $f$  glatt. Ist  $\beta$  zusätzlich submersiv, so ist es auch  $f$ . Ist  $\beta$  zusätzlich surjektiv, so ist es auch  $f$ .

**Beweis**

Sei  $m \in M$  und  $s : U \rightarrow Z$  ein glatter Schnitt von  $\alpha$  in einer Umgebung  $U$  von  $m$ . Dann gilt auf  $U$

$$f = f \circ \alpha \circ s = \beta \circ s$$

Ergo ist  $f$  lokal glatt. □

**2.5.7 Korollar**

Sei  $p : M \rightarrow N$  eine surjektive Abbildung von Mengen. Besitzt  $M$  die Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit, so gibt es auf  $N$  höchstens eine glatte Struktur, durch die  $p$  zu einer Submersion wird.

**2.5.8 Proposition**

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine differenzierbare Abbildung von Mannigfaltigkeiten. Definiere den **Graph** von  $f$  durch

$$G(f) := \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\}$$

Dann ist  $G(f)$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von  $M \times N$ .

**2.5.9 Definition**

Seien  $S, S' \subset M$  glatte Untermannigfaltigkeiten. Wir sagen,  $S$  und  $S'$  **schneiden sich transversal**, falls für alle  $p \in S \cap S'$  gilt

$$T_p M = T_p S + T_p S'$$

Ist noch allgemeiner eine glatte Abbildung  $f : N \rightarrow M$  gegeben, so sagen wir  $f$  **schneidet  $S$  transversal**, falls für alle  $p \in f^{-1}(S)$  gilt

$$T_{f(p)} M = T_{f(p)} S + \mathbf{d}f_p T_p N$$

**2.5.10 Proposition**

Seien Mannigfaltigkeiten  $S \subset M$  und  $N$  gegeben. Wird  $S$  von  $f : N \rightarrow M$  transversal geschnitten, so ist  $f^{-1}(S) \subset N$  eine Untermannigfaltigkeit, die dieselbe Kodimension wie  $S \subset M$  besitzt.

**Beweis**

Es bezeichne  $k$  die Kodimension von  $S \subset M$ . Für ein  $x \in f^{-1}(S)$  können wir eine Umgebung  $f(x) \in U \subset M$  finden, sodass  $U \cap S = \phi^{-1}(0)$  sich als Stufenmenge einer Submersion  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  darstellen lässt.

Es genügt nun zu zeigen, dass  $\phi \circ f$  regulär in 0 ist, da

$$f^{-1}(S \cap U) = f^{-1}(\phi^{-1}(0) \cap S)$$

Seien  $z \in T_0 \mathbb{R}^k$  und  $p \in (\phi \circ f)^{-1}(0)$ . Da  $\phi$  eine Submersion ist, existiert ein  $y \in T_{f(p)} M$  mit

$$\mathbf{d}\phi_{f(p)}(y) = z$$

Da  $f$  transversal zu  $S$  liegt, gibt es  $y_0 \in T_{f(p)} S$  und  $v \in T_p N$  mit

$$y = y_0 + \mathbf{d}f_p v$$

$\phi$  ist konstant auf  $S \cap U$ , ergo gilt

$$z = \mathbf{d}\phi_{f(p)}(y) = \mathbf{d}\phi_{f(p)}(y_0 + \mathbf{d}f_p v) = \mathbf{d}\phi_{f(p)}(y_0) + \mathbf{d}\phi_{f(p)}(\mathbf{d}f_p v) = 0 + \mathbf{d}\phi_{f(p)}(\mathbf{d}f_p v) = \mathbf{d}(\phi \circ f)_p(v)$$

Ergo ist  $\mathbf{d}(\phi \circ f)_p$  surjektiv, ergo ist  $\phi \circ f$  regulär in 0. □

**2.5.11 Korollar**

Seien  $S \subset M$  und  $N$  glatte Mannigfaltigkeiten.  $S \subset M$  habe Kodimension  $k$ .

- 1.) Ist  $f : N \rightarrow M$  eine Submersion, so ist  $f^{-1}(S) \subset N$  eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $k$ .
- 2.) Ist  $S' \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $k'$ , die  $S$  transversal schneidet, so ist  $S \cap S' \subset M$  eine Untermannigfaltigkeit der Kodimension  $k + k'$ .

**2.5.12 Definition**

Für eine Äquivalenzrelation  $R$  auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$  nennen wir  $M/R$  eine **glatte Mannigfaltigkeit**, falls

$$M \longrightarrow M/R$$

eine glatte Submersion ist.

**2.5.13 Satz: Godement**

Sei  $R$  eine Äquivalenzrelation auf einer glatten Mannigfaltigkeit  $M$ .

$M/R$  ist genau dann eine glatte Mannigfaltigkeit, wenn ist  $R \subset M \times M$  eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit und die Projektionen

$$p_i : R \longrightarrow M \text{ für } i = 1, 2$$

surjektive Submersionen sind.

**Beweis**

Die Implikation nach rechts ist klar.

Betrachte für die andere Richtung folgende Lemmata, die alle unter der Voraussetzung gelten, dass  $R \subset M \times M$  abgeschlossen und  $p_i$  surjektive Submersionen sind.

**2.5.14 Lemma: 1**

$M \rightarrow M/R$  ist offen und ergo  $M/R$  hausdorffsch.

**2.5.15 Lemma: 2**

Jede Äquivalenzklasse von  $R$  ist eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\dim R - \dim M$ .

**2.5.16 Lemma: 3**

Für jedes  $a \in M$  existiert eine offene Umgebung  $a \in U \subset_o M$  mit einer abgeschlossenen Mannigfaltigkeit  $S \subset U$  und einer Submersion  $q : U \rightarrow S$ , sodass für jedes  $x \in U$  gilt

$$[x] \cap U \cap S = \{q(x)\}$$

$S$  nennt man in diesem Fall einen **Schnitt durch die Äquivalenzklassen von  $R$  in  $U$** .

**2.5.17 Definition**

Ist  $V \subset M$  eine Teilmenge, so setze  $R_V := (V \times V) \cap R$

**2.5.18 Korollar**

Sei  $a \in M$ , dann existiert eine offene Umgebung  $a \in U \subset_o M$ , sodass  $U \rightarrow U/R_U$  eine surjektive Submersion von glatten Mannigfaltigkeiten ist.

**2.5.19 Definition**

$V \subset M$  heißt **saturiert**, wenn sich  $V$  als die Vereinigung von Äquivalenzklassen darstellen lässt, d. h.

$$V = \pi_R^{-1}(\pi_R(V))$$

**2.5.20 Lemma: 4**

Sei  $a \in M$ , dann existiert eine offene Umgebung  $a \in U \subset_o M$ , sodass  $U \rightarrow U/R_U$  eine surjektive Submersion von glatten Mannigfaltigkeiten ist. Setzt man  $V := \pi_R^{-1}(\pi_R(U))$ , so ist  $V \rightarrow U/R_U$  eine surjektive Submersion.

**2.5.21 Korollar**

In obiger Situation ist  $V/R_V$  eine glatte Mannigfaltigkeit.

**2.5.22 Korollar**

Jeder Punkt ist in einer saturierten offenen Nachbarschaft  $V$  enthalten, sodass  $V \rightarrow V/R_V$  eine surjektiv Submersion glatter Mannigfaltigkeiten ist.  $\square$

## 2.6 Lie-Gruppen und Überlagerungen

### 2.6.1 Definition: Lie-Gruppe

Eine **Lie-Gruppe** ist eine glatte Mannigfaltigkeit  $G$ , die eine Gruppenstruktur trägt, deren Multiplikation  $G \times G \rightarrow G$  und Inversion  $G \rightarrow G$  glatte Abbildungen sind.

### 2.6.2 Lemma

Sei  $G \curvearrowright M$  die stetige Wirkung einer beliebigen Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann ist  $M \rightarrow M/G$  offen.

### 2.6.3 Korollar

$M/G$  ist genau dann hausdorffsch, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} M \times G &\longrightarrow M \times M \\ (x, g) &\longmapsto (x, g.x) \end{aligned}$$

ein abgeschlossenes Bild hat.

### 2.6.4 Definition

Eine Gruppenwirkung  $G \curvearrowright M$  heißt **frei**, wenn für jedes  $m \in M$  der **Stabilisator**

$$\text{Stab}_G(m) = \{g \in G \mid m.g = m\}$$

trivial ist. Die Wirkung heißt **eigentlich**, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times M &\longrightarrow M \times M \\ (g, m) &\longmapsto (m, m.g) \end{aligned}$$

eigentlich ist, d. h., das Urbild kompakter Mengen ist wieder kompakt.

### 2.6.5 Definition

Ein Vektorfeld  $V$  auf einer Lie-Gruppe heißt **rechts-invariant**, falls für alle  $g \in G$

$$\text{d}R_g(V) = V$$

gilt, wobei  $R_g : p \mapsto pg$  die Rechtsmultiplikation mit  $g$  bezeichnet. Mit  $\mathcal{V}_R(G) \subset \mathcal{V}(G)$  fassen wir den Vektorraum aller rechts-invarianten Vektorfelder zusammen.

Definiere ferner die Lie-Algebra von  $G$  durch

$$\mathfrak{g} := T_e G$$

so existiert für jedes  $X \in \mathfrak{g}$  genau ein rechts-invariantes Vektorfeld  $X^R := g \mapsto \text{d}R_g(X)$  mit

$$X^R(e) = X$$

Wir erhalten hierdurch einen linearen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathcal{V}_R(G) \\ X &\longmapsto X^R \end{aligned}$$

Da es sich bei  $\mathcal{V}_R(G) \subset \mathcal{V}(G)$  um eine Lie-Subalgebra handelt, erhalten wir durch diesen Isomorphismus eine Lie-Algebrenstruktur auf  $\mathfrak{g}$ . Zusammen mit dieser Struktur nennen wir  $\mathfrak{g}$  die **Lie-Algebra der Lie-Gruppe**  $G$ .

Unter einer **Ein-Parameter-Untergruppe** verstehen wir einen Gruppenhomomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow G$ . Für jedes  $X \in \mathfrak{g}$  existiert genau eine Ein-Parameter-Untergruppe

$$\alpha_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

mit  $\alpha_X(0) = X$ . Wir definieren hierdurch folgende **Exponentialabbildung**

$$\begin{aligned} \text{Exp} : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \alpha_X(1) \end{aligned}$$

Diese ist glatt und es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_X(t) &= \text{Exp}(tX) \\ \text{Exp}(tX) \circ \text{Exp}(sX) &= \text{Exp}((t+s)X) \\ \frac{d}{dt} \text{Exp}(tX)|_{t=0} &= X \end{aligned}$$

Jedes  $X \in \mathfrak{g}$  induziert ein glattes Vektorfeld  $X^*$  auf  $G$  durch

$$X^*(p) := \frac{d}{dt} p \cdot \text{Exp}(tX)|_{t=0}$$

### 2.6.6 Satz

Sei  $G \curvearrowright M$  die glatte, freie und eigentlich Wirkung einer Lie-Gruppe auf einer glatten Mannigfaltigkeit. Dann besitzt  $M/G$  genau eine Struktur einer glatten Mannigfaltigkeit durch die  $M \rightarrow M/G$  zu einer glatten Submersion wird.

#### Beweis

Betrachte folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha : M \times G &\longrightarrow M \times M \\ (x, g) &\longmapsto (x, g.x) \end{aligned}$$

Um Godements Satz anzuwenden, müssen wir zeigen, dass  $\alpha$  die Einbettung einer abgeschlossenen Untermannigfaltigkeit ist, und, dass die Projektionen  $p_i : R \rightarrow M$  submersiv sind.

Seien  $x \in M, g \in G$  und  $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ , so gilt

$$\begin{aligned} d\alpha_{(x,g)}(X, (dL_g)_e Y) &= d\alpha_{(x,g)}(X, 0) + d\alpha_{(x,g)}(0, (dL_g)_e Y) \\ &= d\alpha(\gamma(t), g)|_{t=0} + d\alpha(x, (L_g(\text{Exp}(tY))))|_{t=0} \\ &= d(\gamma(t), R_g(\gamma(t))|_{t=0} + d(x, (xg\text{Exp}(tY))))|_{t=0} \\ &= (X, R_g(X)) + (0, Y^*(xg)) \end{aligned}$$

wobei  $\gamma : I \rightarrow M$  eine Geodäte mit  $\gamma(0) = x$  und  $\dot{\gamma}(0) = X$  ist.

Da  $G \curvearrowright M$  frei ist, sind  $\alpha$  und  $d\alpha$  injektiv, ergo handelt es sich bei  $\alpha$  um eine Immersion.

Die Projektionen sind nun submersiv, da gilt

$$p_1 \circ \alpha(m, g) = m$$

□

### 2.6.7 Definition: Faserbündel

Es seien  $E, F, B$  glatte Mannigfaltigkeiten. Ein **Faserbündel** über einer **Basis**  $B$  mit **Faser**  $F$  und **Totalraum**  $E$  ist eine surjektive Submersion

$$p : E \rightarrow B$$

die **lokal trivial** ist, d. h., für jeden Punkt  $x \in B$  existiert eine Umgebung  $x \in U \subset_o B$  und ein Diffeomorphismus

$$\phi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$$

sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & U \times F \\ & \searrow p & \swarrow \pi_U \\ & U & \end{array}$$

Insbesondere ist  $p^{-1}(x)$  diffeomorph zur Faser  $F$ .

Existiert sogar ein Diffeomorphismus  $\phi_B$ , der folgendes Diagramm kommutieren lässt

$$\begin{array}{ccc} E = p^{-1}(B) & \xrightarrow{\phi_B} & B \times F \\ & \searrow p & \swarrow \pi_B \\ & B & \end{array}$$

so spricht man von einem **trivialen Faserbündel**.

### 2.6.8 Definition: Hauptfaserbündel

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $B$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein **Hauptfaserbündel** mit **Strukturgruppe**  $G$  über  $B$  ist ein Faserbündel  $p : M \rightarrow B$  mit Faser  $G$  und einer glatten Rechtswirkung  $G \curvearrowright M$ , sodass für jedes  $x \in B$  eine Umgebung  $x \in U \subset_o B$  und ein Diffeomorphismus

$$\tau : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$$

existiert, durch die die Wirkung durch  $G$  trivial wird, d. h., folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{x \rightarrow x.g} & p^{-1}(U) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau \\ U \times G & \xrightarrow{(x, g) \rightarrow (x, x.g)} & U \times G \end{array}$$

### 2.6.9 Satz

- 1.) Sei  $G \curvearrowright M$  die glatte, freie und eigentliche Wirkung einer Lie-Gruppe auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann besitzt  $M/G$  genau eine Mannigfaltigkeitsstruktur, durch die  $M \rightarrow M/G$  zu einer Submersion wird. Ferner ist  $M \rightarrow M/G$  in diesem Fall ein Hauptbündel mit Strukturgruppe  $G$ .

- 2.) Sei  $p : M \rightarrow B$  ein Hauptbündel mit Strukturgruppe  $G$ . Dann wirkt  $G$  frei und eigentlich auf  $M$  und  $p$  faktorisiert über einen Diffeomorphismus  $M/G \xrightarrow{\sim} B$ .



## 2.7 Schall und Rauch

### 2.7.1 Definition: Erinnerung

Zwei Punkte  $P, Q$  auf einer Geodäte  $\gamma$  heißen **konjugiert** (bzgl.  $\gamma$ ), falls ein Jacobi-Feld auf  $\gamma$  existiert, das bei  $P$  und  $Q$  verschwindet.

### 2.7.2 Lemma: Das Index-Lemma

Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für eine Geodäte  $\gamma : [0, a] \rightarrow M$  und ein stückweise glattes Vektorfeld  $V$  entlang  $\gamma$ , setzen wir

$$I_{t_0}(V, V) = \int_0^{t_0} (g(\mathcal{D}_t V, \mathcal{D}_t V) - g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V)) dt$$

für  $t_0 \in [0, a]$ . Liegt nun auf  $\gamma|_{(0, a]}$  kein Punkt, der zu  $\gamma(0)$  konjugiert ist und sind ein beliebiges stückweise glattes Vektorfeld  $V$  und ein Jacobi-Feld  $J$  auf  $\gamma$  gegeben, die beide orthogonal zu  $\dot{\gamma}$  stehen, d. h.

$$g(J, \dot{\gamma}) = 0 = g(V, \dot{\gamma})$$

die ferner auch beide in  $\gamma(0)$  verschwinden, d. h.

$$J(0) = V(0) = 0$$

und in einem weiteren Punkt übereinstimmen, d. h., es gibt ein  $t_0 \in (0, a]$ , s. d.

$$J(t_0) = V(t_0)$$

so gilt

$$I_{t_0}(J, J) \leq I_{t_0}(V, V)$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn  $J$  und  $V$  auf  $[0, t_0]$  übereinstimmen.

#### Beweis

Der Raum aller Jacobi-Felder auf  $\gamma$ , die in  $\gamma(0)$  verschwinden und orthogonal zu  $\dot{\gamma}$  stehen, besitzt Dimension  $n - 1$ , wobei  $n = \dim M$ . Dementsprechend wählen wir eine Basis  $J_1, \dots, J_{n-1}$  dieses Raumes, und erhalten Skalare  $a_i \in \mathbb{R}$ , mit denen gilt

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} a_i J_i$$

Da auf  $(0, a]$  keine zu  $\gamma(0)$  adjungierten Punkte existieren, bilden die  $J_i$  eine Basis von  $\dot{\gamma}(t)^\perp \subset T_\gamma M$ . Ergo existieren stückweise glatte Funktionen  $f_i : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i$$

Wir wollen nun folgende Gleichung zeigen

$$g(\mathcal{D}_t V, \mathcal{D}_t V) - g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V) = g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i\right) + \frac{d}{dt} g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f_i \mathcal{D}_t J_i\right) \quad (1)$$

Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
& g(\mathcal{D}_t V, \mathcal{D}_t V) - g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i + f_i \mathcal{D}_t J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i + f_i \mathcal{D}_t J_i\right) - g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i \mathcal{R}(\dot{\gamma}, J_i)\dot{\gamma}, \sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i\right) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i + f_i \mathcal{D}_t J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i + f_i \mathcal{D}_t J_i\right) - g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i \cdot (-\mathcal{D}_t \mathcal{D}_t J_i), \sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i\right)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f_i \mathcal{D}_t J_i\right) \\
&= g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i + f_i \mathcal{D}_t J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f_i \mathcal{D}_t J_i\right) + g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f'_i \mathcal{D}_t J_i + f_i \mathcal{D}_t \mathcal{D}_t J_i\right)
\end{aligned}$$

D. h., Gleichung (1) ist äquivalent zu folgender Gleichung

$$g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i \mathcal{D}_t J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i\right) = g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f'_i \mathcal{D}_t J_i\right) \quad (2)$$

Um Gleichung (2) zu zeigen, legen wir folgende Funktion fest

$$h(t) := g(\mathcal{D}_t J_i, J_j)(t) - g(J_i, \mathcal{D}_t J_j)(t)$$

dann gilt

$$\begin{aligned}
& h(0) = 0 \\
& h'(t) = \frac{d}{dt} (g(\mathcal{D}_t J_i, J_j)(t) - g(J_i, \mathcal{D}_t J_j)(t)) \\
&= g(\mathcal{D}_t \mathcal{D}_t J_i, J_j)(t) + g(\mathcal{D}_t J_i, \mathcal{D}_t J_j)(t) - g(\mathcal{D}_t J_i, \mathcal{D}_t J_j)(t) - g(J_i, \mathcal{D}_t \mathcal{D}_t J_j)(t) \\
&= g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, J_i)\dot{\gamma}, J_j)(t) - g(J_i, \mathcal{R}(\dot{\gamma}, J_j)\dot{\gamma}) \\
&\stackrel{\text{Blockvertauschung}}{=} g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, J_j)\dot{\gamma}, J_i)(t) - g(J_i, \mathcal{R}(\dot{\gamma}, J_j)\dot{\gamma}) = 0
\end{aligned}$$

ergo  $h(t) = 0$  und damit einhergehend

$$g(\mathcal{D}_t J_i, J_j) = g(J_i, \mathcal{D}_t J_j)$$

Dadurch folgt insbesondere Gleichung (2) und Gleichung (1).  
Mithilfe von Gleichung (1) folgt nun

$$\begin{aligned}
I_{t_0}(V, V) &= \int_0^{t_0} (g(\mathcal{D}_t V, \mathcal{D}_t V) - g(\mathcal{R}(\dot{\gamma}, V)\dot{\gamma}, V)) dt \\
&= \int_0^{t_0} \left( g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i\right) + \frac{d}{dt} g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f_i D_t J_i\right) \right) dt \\
&= \int_0^{t_0} g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i\right) dt + g\left(\sum_{i=1}^{n-1} f_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} f_i D_t J_i\right)(t_0) \\
&\stackrel{(*)}{=} \int_0^{t_0} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i \right\|^2 dt + g\left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i J_i, \sum_{i=1}^{n-1} a_i D_t J_i\right)(t_0) \\
&= \int_0^{t_0} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i \right\|^2 dt + I_{t_0}(J, J) \\
&\geq I_{t_0}(J, J)
\end{aligned}$$

Beachte, dass  $f_i(t_0) = a_i$  bei  $(*)$  gilt, da  $J(t_0) = V(t_0)$ .  
Gilt nun

$$I_{t_0}(J, J) = I_{t_0}(V, V)$$

so folgt

$$\sum_{i=1}^{n-1} f'_i J_i = 0$$

Da die  $J_i$  auf  $(0, a]$  linear unabhängig sind, folgt  $f'_i = 0$ , d. h., die  $f_i$  sind konstant gleich  $a_i$  und  $J = V$ .  
 $\square$

### 2.7.3 Satz: Rauch

Seien  $M, \bar{M}$  Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $n + k$ . Seien ferner  $\gamma : I \rightarrow M$  und  $\bar{\gamma} : I \rightarrow \bar{M}$  Geodäten derselben Geschwindigkeit. Ferner soll  $\bar{\gamma}(0)$  keinen konjugierten Punkt auf  $\bar{\gamma}(0, a]$  haben und für alle  $x \in T_{\gamma(t)}M$  und  $y \in T_{\bar{\gamma}(t)}\bar{M}$  soll gelten

$$\kappa(x, \dot{\gamma}(t)) \leq \bar{\kappa}(y, \dot{\bar{\gamma}}(t))$$

Sind ferner Jacobifelder  $J, \bar{J}$  entlang  $\gamma$  bzw.  $\bar{\gamma}$  gegeben, dergestalt, dass  $J(0), \bar{J}(0)$  tangential zu  $\gamma$  bzw.  $\bar{\gamma}$  sind und

$$\|J(0)\| = \|\bar{J}(0)\|, \quad \|\mathcal{D}_t J(0)\| = \|\bar{\mathcal{D}}_t \bar{J}(0)\| \quad \text{und} \quad g(\mathcal{D}_t J(0), \dot{\gamma}(0)) = g(\bar{\mathcal{D}}_t \bar{J}(0), \dot{\bar{\gamma}}(0))$$

gelten, so folgt

$$\|\bar{J}(t)\| \leq \|J(t)\|$$

#### Beweis

- Wir nehmen zuerst an, dass folgende Dinge gelten

$$\|J(0)\| = g(\mathcal{D}_t J(0), \dot{\gamma}(0)) = 0 \quad \text{und} \quad \|\bar{J}(0)\| = g(\bar{\mathcal{D}}_t \bar{J}(0), \dot{\bar{\gamma}}(0)) = 0$$

Hieraus folgt, dass  $J, \bar{J}$  orthogonal auf  $\gamma$  bzw.  $\bar{\gamma}$  stehen, denn, da  $\gamma$  eine Geodäte ist, gilt

$$g(J(t), \dot{\gamma}(t)) = t \cdot g(\mathcal{D}_t J(0), \dot{\gamma}(0)) + g(J(0), \dot{\gamma}(0))$$

Gilt nun

$$\|D_t J(0)\| = \|\overline{D}_t \overline{J}(0)\| = 0$$

so folgt sofort

$$\|J(t)\| = \|\overline{J}(t)\| = 0$$

Anderenfalls setze

$$v(t) := \|J(t)\|^2 \text{ und } \overline{v}(t) = \|\overline{J}(t)\|^2$$

Da  $\overline{\gamma}(0, a]$  keine konjugierten Punkte hat, ist  $\frac{v(t)}{\overline{v}(t)}$  wohldefiniert auf  $(0, a]$ . Es folgt

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(t)}{\overline{v}(t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ddot{v}(t)}{\ddot{\overline{v}}(t)} = \frac{\|D_t J(0)\|^2}{\|\overline{D}_t \overline{J}(0)\|^2} = 1$$

Um zu zeigen, dass  $\frac{v(t)}{\overline{v}(t)} \geq 1$ , genügt es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{v(t)}{\overline{v}(t)} \right) \geq 0$$

zu zeigen, was gerade äquivalent ist zu

$$\dot{v}(t)\overline{v}(t) \geq v(t)\dot{\overline{v}}(t) \tag{1}$$

Fixiere hierzu  $t_0 \in (0, a]$ . Gilt gerade  $v(t_0) = 0$ , so folgt auch

$$\dot{v}(t_0) = 2g(D_t J(t_0), J(t_0)) = 0$$

und (1) gilt für  $t = t_0$ .

Sei also  $v(t_0), \overline{v}(t_0) \neq 0$ , man setze

$$U := \frac{1}{\sqrt{v(t_0)}} J \text{ und } \overline{U} := \frac{1}{\sqrt{\overline{v}(t_0)}} \overline{J}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{\dot{v}(t_0)}{v(t_0)} &= \frac{2g(D_t J(t_0), J(t_0))}{v(t_0)} \\ &= 2g(D_t U(t_0), U(t_0)) \\ &= \frac{d}{dt} g(U, U)|_{t=t_0} \\ &= \int_0^{t_0} \frac{d^2}{dt^2} g(U, U) dt \\ &= 2 \int_0^{t_0} (g(D_t U, D_t U) + g(U, D_t D_t U)) dt \\ &= 2 \int_0^{t_0} (g(D_t U, D_t U) + g(U, -\mathcal{R}(\dot{\gamma}, U)\dot{\gamma})) dt \\ &= I_{t_0}(U, U) \end{aligned}$$

und analog

$$\frac{\dot{\overline{v}}(t_0)}{\overline{v}(t_0)} = I_{t_0}(\overline{U}, \overline{U})$$

Ergo folgt (1) aus folgender Ungleichung

$$I_{t_0}(U, U) \geq I_{t_0}(\bar{U}, \bar{U})$$

Es seien nun folgende parallelen ONBs entlang  $\gamma$  bzw.  $\bar{\gamma}$  gegeben

$$e_1 = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, e_2, e_3, \dots, e_n \text{ und } \bar{e}_1 = \frac{\dot{\bar{\gamma}}}{\|\dot{\bar{\gamma}}\|}, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_{n+k}$$

mit

$$e_2(t_0) = U(t_0) \text{ und } \bar{e}_2(t_0) = \bar{U}(t_0)$$

Definiere dann folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{V}_\gamma &\longrightarrow \mathcal{V}_{\bar{\gamma}} \\ \sum_{i=1}^n f_i e_i &\longmapsto \sum_{i=1}^n f_i \bar{e}_i \end{aligned}$$

Für diese gilt

$$g(\Phi V, \Phi V) = g(V, V) \text{ und } \bar{\mathcal{D}}_t(\Phi V) = \Phi(\mathcal{D}_t V)$$

Man rechnet nach

$$I_{t_0}(\Phi U, \Phi U) \leq \dots = I_{t_0}(U, U)$$

$\bar{U}$  und  $\Phi U$  erfüllen nun beide die Voraussetzungen des Index-Lemmas, weswegen folgt

$$I_{t_0}(\bar{U}, \bar{U}) \leq I_{t_0}(\Phi U, \Phi U)$$

Ergo folgt in diesem Fall die Behauptung.

- Gelten die Voraussetzungen des ersten Falles nicht, so zerlege

$$J = J^\perp + \frac{g(J, \dot{\gamma})}{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \dot{\gamma} \text{ und } \bar{J} = \bar{J}^\perp + \frac{g(\bar{J}, \dot{\bar{\gamma}})}{g(\dot{\bar{\gamma}}, \dot{\bar{\gamma}})} \dot{\bar{\gamma}}$$

Dann gilt laut erstem Fall

$$\|\bar{J}^\perp\| \leq \|J^\perp\|$$

und deswegen

$$\|\bar{J}\| \leq \|J\|$$

da

$$\begin{aligned} g(J, \dot{\gamma}) &= g(\mathcal{D}_t J(0), \dot{\gamma}(0))t + g(J(0), \dot{\gamma})(0) \\ &= g(\bar{\mathcal{D}}_t \bar{J}(0), \dot{\bar{\gamma}}(0))t + g(\bar{J}(0), \dot{\bar{\gamma}})(0) \\ &= g(\bar{J}, \dot{\bar{\gamma}}) \end{aligned}$$

□

### 2.7.4 Bemerkung: Erinnerung

Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung  $\kappa$  und sei  $\gamma : [0, l] \rightarrow M$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte.

Ein Jacobi-Feld entlang  $\gamma$  orthogonal zu  $\dot{\gamma}$  kann anhand einer Basis paralleler Vektorfelder  $e_1, \dots, e_{n-1} \in \dot{\gamma}^\perp$  ausgedrückt werden durch

$$J(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i \sin(\sqrt{\kappa} \cdot t) + b_i \cos(\sqrt{\kappa} \cdot t)) e_i(t) & \kappa > 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i t + b_i) e_i(t) & \kappa = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i \sinh(\sqrt{-\kappa} \cdot t) + b_i \cosh(\sqrt{-\kappa} \cdot t)) e_i(t) & \kappa < 0 \end{cases}$$

Ist  $\kappa \leq 0$ , so besitzen Geodäten keine konjugierten Punkte. Ist  $\kappa > 0$ , so tauchen konjugierte Punkte in Abständen von  $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$  auf.

### 2.7.5 Korollar

Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit deren Schnittkrümmung  $\kappa$  begrenzt wird durch konstante Schranken

$$0 \leq l \leq \kappa(v, w) \leq h$$

Ist  $\gamma$  eine Geodäte auf  $M$ , so liegt der Abstand  $d$  zwischen zwei konjugierten Punkten auf  $\gamma$  zwischen

$$\frac{\pi}{\sqrt{h}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{l}}$$

### 2.7.6 Bemerkung: Erinnerung

Sei  $\gamma$  eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Dann sind Punkte  $p = \gamma(t_0)$  und  $q = \gamma(t_1)$  genau dann konjugiert, wenn  $(t_1 - t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0)$  ein **kritischer** bzw. **singulärer** Punkt von  $\exp_p$  ist, d. h. die Abbildung

$$d(\exp_p)_{(t_1-t_0) \cdot \dot{\gamma}(t_0)} : T_p M \longrightarrow T_q M$$

ist kein Isomorphismus.

### 2.7.7 Korollar

Seien Riemannsche Mannigfaltigkeiten  $M, \bar{M}$  der Dimensionen  $n$  bzw.  $n + k$  gegeben. Ferner sei die Schnittkrümmung  $\bar{\kappa}$  von  $\bar{M}$  stets größer als die Schnittkrümmung  $\kappa$  von  $M$ .

Seien  $p \in M, \bar{p} \in \bar{M}$  und  $r > 0$ , sodass  $\exp_{p|B_r(0)}$  eine Einbettung und  $\exp_{\bar{p}|B_r(0)}$  nicht-singulär ist. Sei ferner

$$i : T_p M \hookrightarrow T_{\bar{p}} \bar{M}$$

eine lineare, injektive Abbildung, die die Metrik erhält, und

$$c : [0, a] \longrightarrow \exp_p(B_r(0))$$

eine glatte Kurve. Für die glatte Kurve

$$\bar{c} := \exp_{\bar{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} \circ c : [0, a] \longrightarrow \exp_{\bar{p}}(B_r(0))$$

gilt nun

$$L(\bar{c}) \leq L(c)$$

**Beweis**

Definiere folgende Kurve in  $T_p M$

$$\tilde{c} := \exp_p^{-1} \circ c$$

und folgende Abbildung

$$f(t, s) := \exp_p(t\tilde{c}(s))$$

Dann ist für alle  $s$  folgendes Jacobi-Feld entlang einer Geodäte  $\gamma_s(t) := f(t, s)$  gegeben

$$J_s(t) := \frac{d}{ds} f(t, s) = (d \exp_p)_{t\tilde{c}(s)}(\dot{t}\tilde{c}(s))$$

Betrachten wir analog

$$\bar{f}(t, s) := \exp_{\bar{p}}(ti(\tilde{c}(s)))$$

so erhalten wir analog Jacobi-Felder entlang Geodäten  $\bar{\gamma}_s(t) := \bar{f}(t, s)$

$$\bar{J}_s(t) := \frac{d}{ds} \bar{f}(t, s)$$

Mit Rauchs Satz erhalten wir nun

$$\|\dot{\tilde{c}}(s)\| = \|\bar{J}_s(1)\| \leq \|J_s(1)\| = \|\dot{c}(s)\|$$

□

**2.7.8 Korollar: Satz von Cartan-Hadamard**

Sei  $M$  eine vollständige und wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit nicht-positiver Schnittkrümmung. Dann ist

$$\exp_p : T_p M \rightarrow M$$

eine Überlagerung.

**2.7.9 Definition**

Zwei geschlossene Pfade  $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow M$  heißen **frei homotop**, falls eine freie Homotopie  $H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$  existiert mit

$$H(t, 0) = \gamma_1(t) \text{ und } H(t, 1) = \gamma_2(t)$$

Unter  $C_1(M)$  verstehen wir die Menge aller Äquivalenzklassen der freien Homotopie. Wir erhalten eine natürliche Abbildung

$$\Phi : \pi_1(M, p) \longrightarrow C_1(M)$$

Ist  $M$  wegzusammenhängend, so ist  $\Phi$  surjektiv. Ferner stimmen die Bilder von zwei Klassen aus  $C_1(M)$  genau dann überein, wenn sie konjugiert in  $\pi_1(M, p)$  sind. Ergo liefert  $\Phi$  eine Bijektion zwischen  $C_1(M)$  und  $\pi_1(M, p)/\text{Konjugation}$ , wenn  $M$  wegzusammenhängend ist.

Eine freie Homotopieklasse heißt **trivial**, wenn sie eine konstante Schleife enthält. Ein **geodätisches Lasso** ist ein geschlossener Weg, der auf allen Punkten außer einem geodätisch ist.

**2.7.10 Satz: Cartan**

Ist  $M$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, so besitzt jede nicht triviale freie Homotopieklasse eine geschlossene Geodäte.

**Beweis**

Sei  $\alpha \in C_1(M)$  eine nicht-triviale freie Homotopieklasse. Dann ist

$$d := \inf \{L(c) \mid c \in \alpha\} > 0$$

Sei dazu  $(c_i)_i \in \alpha^{\mathbb{N}}$  eine gleichmäßig stetige Folge, deren Längen gegen  $d$  konvergieren. Da  $M$  kompakt ist, existiert eine Subfolge, die gegen eine gleichmäßig konvergente Schleife  $\gamma^*$  konvergiert. Bezeichne mit  $\gamma$  eine stückweise geodätische Approximation von  $\gamma^*$ . Dann gilt

$$L(\gamma) = d$$

Nun kann man sich aber auch überlegen, dass  $\gamma$  bereits eine geschlossene Geodäte ist, da die Länge von  $\gamma$  stückweise minimal ist.  $\square$

**2.7.11 Korollar**

Sei  $M$  eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ist  $M$  nicht einfach zusammenhängend, so existiert eine geschlossene Geodäte in  $M$ .



## Kapitel 3

# Zweiter Teil, Geometrische Aussagen

### 3.1 Trigonometrie mit oberer Krümmungsschranke

#### 3.1.1 Definition

Ein **geodätisches Dreieck**  $\Delta(a, b, c)$  besteht aus drei geodätischen Segmenten  $a, b, c$ , die sich paarweise in den Punkten  $A, B, C$  schneiden. Die **Winkel** bei  $A, B, C$  bezeichnen wir mit  $\alpha, \beta, \gamma$  und geben ihnen ein Maß durch

$$\cos(\alpha) = \frac{g_A(v_B, v_C)}{\|v_B\| \|v_C\|}$$

Die **Längen** von  $a, b, c$  bezeichnen wir mit  $|a|, |b|, |c|$ .

#### 3.1.2 Definition

Zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  mit Schnittkrümmung  $\leq \kappa$  sei  $M_\kappa^2$  die zwei-dimensionale Mannigfaltigkeit der konstanten Schnittkrümmung  $\kappa$ .

Ist  $\Delta = \Delta(a, b, c)$  ein Dreieck in  $M$ , so verstehen wir unter einem **Vergleichs-Dreieck**  $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset M_\kappa^2$  ein geodätisches Dreieck, das dieselben Längen besitzt, d. h.

$$|a| = |\bar{a}|, |b| = |\bar{b}| \text{ und } |c| = |\bar{c}|$$

Solch ein Vergleichs-Dreieck existiert und ist bis auf Isometrien eindeutig, falls gilt

- $|a| + |b| \geq |c|, |b| + |c| \geq |a|$  und  $|c| + |a| \geq |b|$
- $|a| + |b| + |c| < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ , falls  $\kappa > 0$

#### 3.1.3 Bemerkung

Ist  $M$  eine **Hadamard-Mannigfaltigkeit**, d. h.,  $\kappa_M \leq 0$  und  $M$  ist einfach zusammenhängend, so ist ein geodätisches Dreieck immer durch seine Eckpunkte festgelegt und ein Vergleichs-Dreieck in  $M_0^2 = \mathbb{R}^2$  existiert immer.

### 3.1.4 Satz: Umgekehrtes Toponogov Theorem

Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $\leq \kappa$ . Sei  $p \in M$ ,  $R < \text{inj}(P)$  und  $R \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ . Sei ferner  $\Delta = \Delta(a, b, c)$  ein geodätisches Dreieck in  $B_p(R)$  mit  $C = p$  und

$$|a| + |b| + |c| < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

Dann folgt

$$|c| \leq |a| + |b|$$

und für das Vergleichs-Dreieck  $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset M_\kappa^2$  gilt

(1)  $d(p, q) \leq \bar{d}(\bar{p}, \bar{q})$  für alle  $q \in \text{int}(c)$  und korrespondierenden Punkten  $\bar{q} \in \text{int}(\bar{c})$

(2)  $\alpha \leq \bar{\alpha}, \beta \leq \bar{\beta}$  und  $\gamma \leq \bar{\gamma}$

Gleichheit gilt in (1) oder (2) genau dann, wenn der **geodätische Fächer**  $\mathcal{F}(p, c) \subset M$ , der die Vereinigung aller Geodäten von  $p$  nach einem Punkt in  $c$  ist, total geodätisch und isometrisch zu  $\mathcal{F}(\bar{p}, \bar{c}) \subset M_\kappa^2$  ist.

### 3.1.5 Bemerkung

Für eine Hadamard-Mannigfaltigkeit sind die Bedingungen obigen Satzes immer erfüllt.

### 3.1.6 Lemma

Sei  $f : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion mit  $f(t_0) = f(t_1) = 0$ . Es gelte

$$f'' + \kappa f \leq 0 \text{ und } t_1 - t_0 < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

Dann folgt  $f \geq 0$ .

Gilt zusätzlich eine der folgenden Voraussetzungen

i.  $f'(t_0) = 0$

ii.  $f'(t_1) = 1$

iii.  $f(t) = 0$  für ein  $t \in (t_0, t_1)$

so gilt sogar  $f = 0$ .

### Beweis: Satz 3.1.4

- Betrachte die Differentialgleichung

$$f'' + \kappa \cdot f = 0$$

Es seien hierzu  $sn, cs$  eine Basis des Lösungsraumes mit folgenden Eigenschaften gegeben

$$sn(0) = 0$$

$$sn'(0) = 1$$

$$cs(0) = 1$$

$$cs'(0) = 0$$

Setze dann

$$ct(t) := \frac{cs(t)}{sn(t)}$$

und

$$m(r) := \int_0^r sn(t) dt = \begin{cases} \frac{1 - cs(r)}{\kappa} & \kappa \neq 0 \\ \frac{r^2}{2} & \kappa = 0 \end{cases}$$

Dann gilt

- 1.)  $m(0) = 0$
- 2.)  $m$  wächst auf  $[0, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$  streng monoton
- 3.)  $cs(t) + \kappa \cdot m(t) = 1$

Setze weiter fröhlich

$$e(t) := m \circ d_p \circ c(t) = m \circ d(p, c(t))$$

und analog

$$\bar{e}(t) := m \circ d_{\bar{p}} \circ \bar{c}(t) = m \circ d(\bar{p}, \bar{c}(t))$$

und natürlich

$$f(t) = \bar{e}(t) - e(t)$$

Man kann nun aufwendig nachrechnen, dass

$$f'' + \kappa f \leq 0$$

gilt. Ferner erfüllt  $f$  auch die anderen Voraussetzungen des Lemmas, ergo gilt

$$f \geq 0$$

Hieraus folgt Eigenschaft (1) des Theorems.

- Nehmen wir nun zum Widerspruch an, es würde

$$|c| > |a| + |b|$$

gelten. Dann wähle eine Teilstrecke  $c' \subset c$ , die bei  $B$  beginnt, und für die gilt

$$|c'| = |a| + |b'|$$

für ein passendes geodätisches Segment  $b'$ . Dann besitzt das geodätische Dreieck  $\Delta(a, b', c')$  ein Vergleichs-Dreieck  $\Delta(\bar{a}, \bar{b}', \bar{c}')$  mit

$$|\bar{c}'| = |\bar{a}| + |\bar{b}'|$$

Dann ist aber  $\Delta(\bar{a}, \bar{b}', \bar{c}')$  **degeniert**, d. h.

$$\bar{a} \cup \bar{b}' = \bar{c}'$$

weswegen auch  $\Delta(a, b', c')$  degeneriert ist, weswegen gilt

$$|b| - |b'| = |c| - |c'|$$

woraus folgt

$$|c| = |a| + |b|$$

was ein Widerspruch ist.

- Eigenschaft (2) folgt nun aus der ersten Variation der Bogenlänge. Hierzu wählt man eine Variation von  $c$ , die den Anfangspunkt von  $c$  entlang  $a$  mit Einheits-Geschwindigkeit verschiebt und den Endpunkt festhält. Für das Variationsfeld  $V$  und der Länge  $L(s) = L(c_s)$  der variierten Geodäten ergibt sich dann folgende Formel

$$\partial_s L(0) = -\cos(\alpha) \|V(0)\| - \cos(\chi) \|V(1)\| = -\cos(\alpha)$$

wobei

$$\alpha = \angle_A(\dot{c}(0), V(0)) \text{ und } \chi = \angle_B(-\dot{c}(1), V(1))$$

Aufgrund der gezeigten Eigenschaft (1) nimmt die Länge  $\bar{L}(s)$  der entsprechenden variierten Geodäten im Vergleichsdreieck langsamer ab, es folgt

$$-\cos(\alpha) = \partial_s L(0) \leq \partial_s \bar{L}(0) = -\cos(\bar{\alpha})$$

woraus folgt

$$\bar{\alpha} \leq \alpha$$

- Die Aussage im Falle von Gleichheit folgt ebenfalls aus dem Lemma.

□

### 3.1.7 Definition

Sei  $X$  ein metrischer Raum, und  $\Delta \subset X$  ein geodätisches Dreieck mit Außendurchmesser  $\leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ .  $\Delta$  erfüllt die **CAT( $\kappa$ )-Ungleichung**, falls für alle  $x, y \in \Delta$  und korrespondierenden Punkten  $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\Delta} \subset M_\kappa^2$  gilt

$$d(x, y) \leq d(\bar{x}, \bar{y})$$

Ist  $\kappa \leq 0$ , so heißt  $X$  ein **CAT( $\kappa$ )-Raum**, falls  $X$  **geodätisch** ist, d. h., jedes Paar von Punkten in  $X$  kann durch eine Geodäte verbunden werden, und falls jedes geodätische Dreieck in  $X$  die CAT( $\kappa$ )-Ungleichung erfüllt.

Ist  $\kappa > 0$ , so heißt  $X$  ein **CAT( $\kappa$ )-Raum**, falls  $X$   $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ -**geodätisch** ist, d. h., jedes Paar von Punkten in  $X$  mit einer Entfernung von  $\leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  kann durch eine Geodäte verbunden werden, und falls jedes geodätische Dreieck in  $X$  mit Durchmesser  $\leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$  die CAT( $\kappa$ )-Ungleichung erfüllt.

Wir sagen:  $X$  hat eine **Schnittkrümmung**  $\leq \kappa$ , falls  $X$  lokal CAT( $\kappa$ ) ist.

### 3.1.8 Satz

Naheliegenderweise gilt für Riemannsche Mannigfaltigkeiten, dass sie genau dann lokal CAT( $\kappa$ ) sind, wenn ihre Riemannsche Schnittkrümmung kleiner gleich  $\kappa$  ist.

### 3.1.9 Satz: Toponogovs Normales Theorem

Sei  $M$  eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $\geq \kappa$ , und  $\Delta(a, b, c)$  ein geodätisches Dreieck, wobei  $a, b$  minimierend sind und ferner gilt

$$|c| \leq \min(|a| + |b|, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}})$$

so existiert ein geodätisches Dreieck  $\Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \subset M_\kappa^2$ , sodass gilt

- 1.)  $d(\bar{p}, \bar{c}(t)) \leq d(p, c(t))$  für  $p \in \Delta(a, b, c)$  und korrespondierendes  $\bar{p} \in \Delta(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$
- 2.)  $\bar{\alpha} \leq \alpha, \bar{\beta} \leq \beta$  und  $\bar{\gamma} \leq \gamma$

## 3.2 Anwendungen bzgl. der Fundamentalgruppe

### 3.2.1 Bemerkung

Sei  $\overline{M} \rightarrow M$  die universelle Riemannsche Überlagerung einer vollständigen, zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Dann agiert  $\pi_1(M)$  auf  $M$  durch Deck-Transformationen, also Isometrien. Ferner ist die Wirkung

- 1.) **eigentlich diskontinuierlich**, d. h., für alle  $K \subset M$  kompakt gilt

$$\#\{g \in \pi_1(M) \mid g.K \cap K \neq \emptyset\} < \infty$$

- 2.) **frei**, d. h., nur die Identität besitzt einen Fixpunkt

- 3.) **kokompakt**, falls  $M$  kompakt ist, d. h., es gibt ein kompaktes  $K \subset \overline{M}$ , sodass

$$\pi_1(M).K = \overline{M}$$

### 3.2.2 Definition

Für eine Isometrie  $\phi : M \rightarrow M$  sei die **Versetzungsfunktion** definiert durch

$$\begin{aligned} dis(\phi) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto d(p, \phi(p)) \end{aligned}$$

Bzgl. ihrer Versetzungsfunktionen klassifizieren wir drei Arten von Isometrien:

- 1.)  $\phi$  heißt **hyperbolisch**, falls  $dis(\phi)$  ein positives Minimum hat.
- 2.)  $\phi$  heißt **elliptisch**, falls  $dis(\phi)$  eine Null als Minimum hat.
- 3.)  $\phi$  heißt **parabolisch**, falls  $dis(\phi)$  kein Minimum hat.

In den ersten beiden Fällen nennen wir  $\phi$  **halb-einfach**.

### 3.2.3 Bemerkung

Es bezeichne

$$Min(\phi) := \{p \in M \mid dis(\phi)(p) \text{ ist minimal}\}$$

- 1.) Für  $\psi \in Isom(M)$  ist  $\psi\phi\psi^{-1}$  vom selben Typ wie  $\phi$  und es gilt

$$Min(\psi\phi\psi^{-1}) = \psi Min(\phi)$$

- 2.) Ist  $\phi$  hyperbolisch, so existiert eine Geodäte  $c$ , die invariant unter  $\phi$  ist, d. h., es gibt ein  $w \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$\phi(c(t)) = c(t + w)$$

Wir nennen in diesem Fall  $c$  die **Achse** von  $p$ .

### 3.2.4 Lemma

Sei  $\Gamma \subset Isom(M)$  eine Untergruppe, die eigentlich diskontinuierlich und kokompakt auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit agiert. Dann besteht  $\Gamma$  nur aus halb-einfachen Isometrien.

Agiert  $\Gamma$  ferner frei, so ist jedes nicht-triviale Element in  $\Gamma$  hyperbolisch.

**Beweis**

Sei  $K \subset M$  eine kompakte Teilmenge, s. d.

$$\Gamma.K = M$$

Sei  $\phi \in \Gamma$  beliebig und sei  $(p_n)_n \in M^{\mathbb{N}}$  eine Folge dergestalt, dass

$$d(p_n, \phi(p_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{p \in M} d(p, \phi(p)) =: a$$

Seien analog  $(\phi_n)_n \in \Gamma^{\mathbb{N}}$ , sodass

$$\phi_n(p_n) =: q_n \in K$$

Dann gilt

$$d(\phi_n \phi \phi_n^{-1} . q_n, q_n) = d(\phi . p_n, p_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Für  $n$  hinreichend groß und  $K$  hinreichend groß gilt deswegen

$$\phi_n \phi \phi_n^{-1} . K \cap K \neq \emptyset$$

Da  $\Gamma$  eigentlich diskontinuierlich wirkt, folgt daraus, dass die Folge  $\phi_n \phi \phi_n^{-1}$  eine konstante Teilfolge besitzt, ergo existiert ein  $m$ , sodass für den Grenzwert  $q_n \rightarrow q$  gilt

$$d(\phi_m \phi \phi_m^{-1} . q, q) = a$$

und damit auch

$$d(\phi . p, p) = a$$

für  $p = \phi_m . q$

□

**3.2.5 Bemerkung**

Sei  $\overline{M} \rightarrow M$  eine Riemannsche Überlagerung

- 1.) Ist  $M$  kompakt, so ist jede nicht-triviale Deck-Transformation hyperbolisch.
- 2.) Die Achse einer hyperbolischen Deck-Transformation entspricht einer geschlossenen Geodäte in  $M$ .

**3.2.6 Lemma**

Sei  $\square = \square(A, B, C, D)$  ein nicht-degeneriertes geodätisches Viereck einer Hamadard-Mannigfaltigkeit  $M$ . Dann gilt

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \leq 2\pi$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn ein konvexes Viereck  $\bar{\square} \subset \mathbb{R}^2$  existiert mit einer isometrischen Einbettung  $\iota : \bar{\square} \hookrightarrow M$ , sodass  $\iota(\bar{\square}) = \square$ .

**3.2.7 Satz: Preissmann**

Sei  $M$  eine kompakte, zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit negativer Schnittkrümmung. Dann ist die Fundamentalgruppe von  $M$  nicht trivial und jede abelsche, nicht triviale Untergruppe der Fundamentalgruppe ist **unendlich zyklisch**, d. h., wird von einem Element der Ordnung Null erzeugt.

### 3.3 Konvexitätseigenschaften Nichtpositiv Gekrümmter Mannigfaltigkeiten

#### 3.3.1 Lemma

Sei ein Viereck in einer Hadamard-Mannigfaltigkeit gegeben. Sind beide an einer Seite anliegenden Winkel  $\geq \frac{\pi}{2}$ , so ist diese Seite höchstens genauso lang wie ihre gegenüberliegende Seite. Die beiden Seiten sind genau dann gleich lang, wenn beide Winkel an einer Seite gleich  $\frac{\pi}{2}$  sind und das ganze Viereck flach ist.

#### 3.3.2 Proposition

Sei  $C \subset M$  eine konvexe, abgeschlossene und nicht-leere Teilmenge einer Hadamard-Mannigfaltigkeit. Für jeden Punkt  $p \in M$  existiert genau ein Punkt  $q \in C$ , sodass  $d(p, q)$  minimal ist. Hieraus ergibt sich die **Projektion auf  $C$**

$$\pi_C : M \longrightarrow C$$

die jeden Punkt auf seinen nächsten Punkt in  $C$  schickt.

#### 3.3.3 Korollar

- 1.)  $\pi_C$  ist 1-Lipschitz-stetig.
- 2.) Für  $p \in M \setminus C$  und  $q = \pi_C(p)$  und  $q' \in C \setminus \{q\}$  gilt

$$\angle_q(p, q') \geq \frac{\pi}{2}$$

#### 3.3.4 Proposition

Seien  $c_0, c_1$  Geodäten einer Hadamard-Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$d(t) = d(c_0(t), c_1(t))$$

konvex.

#### 3.3.5 Lemma

Sei  $M$  eine Hadamard-Mannigfaltigkeit und  $\phi \in \text{Isom}(M)$  halb-einfach, dann ist  $\text{Min}(\phi)$  abgeschlossen, konvex und nicht-leer.

#### 3.3.6 Lemma

Seien  $\phi_1, \dots, \phi_n$  kommutierende halbeinfache Isometrien einer Hadamard-Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\text{Min}(\phi_1) \cap \text{Min}(\phi_2) \cap \dots \cap \text{Min}(\phi_n)$$

nicht-leer, abgeschlossen und konvex.

#### 3.3.7 Satz: Flacher Torus-Theorem

Sei  $M$  eine kompakte, zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und nicht-positiver Schnittkrümmung.

Sei ferner  $G \subset \pi_1(M)$  eine endlich erzeugte, abelsche Untergruppe. Dann existiert ein  $k \leq n$ , ein Gitter  $\Lambda \subset \mathbb{R}^k$  und eine total geodätische Immersion eines flachen Torus

$$T^k = \mathbb{R}^k / \Lambda \xrightarrow{\iota} M$$

sodass

$$\mathbb{Z}^k \cong \Lambda \cong \pi_1(T^k) \cong \iota_*(\pi_1(T^k)) = G$$

### Beweis

Für  $\phi \in \pi_1(M)$  sei  $c_\phi$  die Achse von  $\phi$  und  $X_\phi$  das Vektorfeld, das jedem Punkt  $P$  den Vektor in  $T_P \overline{M}$  zuordnet, der die Geodäte von  $P$  nach  $\phi(P)$  induziert. Es ergeben sich folgende Eigenschaften:

- 1.)  $X_\phi(P) \neq 0$  für jeden Punkt  $P$  der Überlagerung  $\overline{M} \rightarrow M$
- 2.)  $X_\phi$  ist glatt
- 3.)  $P \in c_\phi \implies X_\phi(P)$  ist tangential zu  $c_\phi$
- 4.)  $X_\phi$  ist parallel auf  $\text{Min}(\phi)$

Wir führen nun eine vollständige Induktion nach der Mindestanzahl der Erzeuger.

Es werde die abelsche Untergruppe  $\Delta$  von mind.  $n$  Elementen generiert, namentlich  $\phi_1, \dots, \phi_n$ . So existiert für jedes  $p \in \text{Min}(\phi_1) \cap \dots \cap \text{Min}(\phi_n)$  eine total geodätische Untermannigfaltigkeit  $F_p \subset \overline{M}$ , sodass gilt

- (1)  $F_p$  ist isometrisch zu  $\mathbb{R}^n$
- (2)  $F_p$  ist invariant unter  $\Delta$
- (3)  $\phi_1, \dots, \phi_n$  agieren auf  $F_p$  als Translationen in  $n$  linear unabhängige Richtungen.

Insbesondere ist  $\Delta$  dann isomorph zu einem  $n$ -dimensionalen Gitter  $\Lambda$ .

Sei nun  $\Delta \subset \Delta' \subset \pi_1(M)$  eine abelsche von mind.  $n+1$  Elementen erzeugte Untergruppe. Betrachte folgende Fälle:

Fall 1  $F_p$  ist invariant unter  $\phi_{n+1}$  für ein  $p \in \text{Min}(\phi_1) \cap \dots \cap \text{Min}(\phi_n)$

Dann wird auf  $F_p$   $\phi_{n+1}$  durch die  $\phi_1, \dots, \phi_n$  erzeugt, weswegen  $\Delta'$  isomorph zu einem  $n$ -dimensionalen Gitter ist, was ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass  $\Delta'$  durch mindestens  $n+1$  Elemente erzeugt werde, ist.

Fall 2  $\phi_{n+1}$  erhält kein  $F_p$  für alle  $p \in \text{Min}(\phi_1) \cap \dots \cap \text{Min}(\phi_n)$ .

Setze dann

$$C' := \text{Min}(\phi_1) \cap \dots \cap \text{Min}(\phi_n) \cap \text{Min}(\phi_{n+1})$$

und beachte, dass für die auf  $C'$  parallelen Vektorfelder  $X_{\phi_1}, \dots, X_{\phi_{n+1}}$  gilt

$$[X_{\phi_i}, X_{\phi_j}] = 0$$

Definiere dann folgende Abbildung

$$\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow C'$$

$$(t_1, \dots, t_{n+1}) \longmapsto \Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_{n+1}^{t_{n+1}}(p)$$

wobei  $\Phi_i$  den Fluss des Vektorfeldes  $X_{\phi_i}$  bezeichnet. Diese Abbildung ist eine Isometrie.

□

### 3.3.8 Korollar

Sei  $M$  eine kompakte, zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit nicht-positiver Schnittkrümmung.

Ist die Fundamentalgruppe von  $M$  abelsch, so ist  $M$  gerade ein flacher Torus.



## 3.4 Wachstum der Fundamentalgruppe

### 3.4.1 Definition

Sei  $G$  eine durch  $S$  erzeugte Gruppe. Definiere für  $g \in G$

$$\|g\|_S := \min \{n \in \mathbb{N}_0 \mid g \in (S \cup S^{-1})^n\}$$

Dann gelten

$$1.) \quad \|1\|_S = 0$$

$$2.) \quad \|gh\|_S \leq \|g\|_S + \|h\|_S$$

$$3.) \quad \|g\|_S = \|g^{-1}\|_S$$

Definiere ferner folgende Abstandsfunktion

$$d_S(g, h) := \|gh^{-1}\|_S$$

Dann gilt

$$d_S(gk, hk) = d_S(g, h)$$

und  $d_S$  ist eine Metrik auf dem Cayleygraphen von  $(G, S)$ .

### 3.4.2 Lemma

Ist  $S, S'$  zwei endliche Erzeugermengen für  $G$ , so gilt

$$\|g\|_{S'} \leq c \cdot \|g\|_S \leq cd \cdot \|g\|_{S'}$$

wobei

$$c = \max_{s \in S} \|s\|_{S'}, \quad \text{und} \quad d = \max_{s \in S'} \|s\|_S$$

### 3.4.3 Definition

Definiere für eine endliche Erzeugermenge  $S \subset G$  die **Wachstumsfunktion** von  $G$  durch

$$\begin{aligned} N_S : \mathbb{N}_0 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ r &\longmapsto \#\{g \in G \mid \|g\|_S \leq r\} \end{aligned}$$

Dann gelten folgende Eigenschaften

1.) Für  $S'$  endliche Erzeugermenge, existiert ein  $k$ , sodass

$$N_S\left(\frac{r}{k}\right) \leq N_{S'}(r) \leq N_S(kr)$$

2.)  $N_S(r+t) \leq N_S(r) \cdot N_S(t)$ , d. h. insbesondere

$$N_S(r) \leq (2 \cdot \#S + 1)^r$$

3.)  $\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log N_S(r) < \infty$

### 3.4.4 Lemma

Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log N_S(t) \text{ existiert}$$

und für alle  $r$  gilt

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log N_S(t) \leq \frac{1}{r} \log N_S(r)$$

### 3.4.5 Definition

1.)  $G$  hat **exponentielles Wachstum**, falls

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \log N_S(r) > 0$$

2.)  $G$  hat **polynomielles Wachstum von Grad  $n$** , falls Konstanten  $c, d > 0$  existieren, sodass

$$cr^n - d \leq N_S(r) \leq cr^n + d$$

3.)  $G$  hat **mittleres Wachstum**, falls keiner der oberen Fälle eintritt.

### 3.4.6 Beispiel

- $\mathbb{Z}^n$  hat polynomielles Wachstum von Grad  $n$
- Die freie nicht-abelsche Gruppe hat exponentielles Wachstum
- Ist  $M$  eine kompakte Mannigfaltigkeit negativer Schnittkrümmung, so hat ihre Fundamentalgruppe exponentielles Wachstum.

### 3.4.7 Proposition

Sei  $M$  eine kompakte zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit.

- Ist die Schnittkrümmung von  $M$  nicht-positiv, so wächst  $\pi_1(M)$  mindestens polynomiell von Grad  $n = \dim M$ .
- Ist die Schnittkrümmung negativ, so wächst  $\pi_1(M)$  exponentiell.

**Beweis**

### 3.4.8 Lemma: 1

Für  $R = 2 \cdot \text{diam}(M)$  und einen Punkt  $p \in \overline{M}$  aus der Überlagerung ist

$$S_R = \{g \in \pi_1(M) \mid d_M(p, g.p) \leq R\}$$

eine endliche Erzeugermenge von  $\pi_1(M)$ .

### 3.4.9 Lemma: 2

Sei  $d = \text{diam}(M)$ , dann gilt für  $p \in \overline{M}$  und  $S = S_{3d} = \{g \in \pi_1(M) \mid d_M(p, g.p) \leq 3d\}$

$$d(\|g\|_S - 1) \leq d(p, g.p) \leq 3d\|g\|_S$$

**3.4.10 Korollar**

Sei  $R > 0$  beliebig,  $d = \text{diam}(M)$ . Setze für  $p \in \overline{M}$

$$N_p(R) := \# \{g \in \pi_1(M) \mid d(p, g \cdot p) \leq R\}$$

Dann gilt für  $S = S_{3d}$

$$N_S\left(\frac{R}{3d}\right) \leq N_p(R) \leq N_S\left(\frac{R}{d} + 1\right)$$

**3.4.11 Lemma: 3**

Sei  $d = \text{diam}(M)$ ,  $r = \text{inj}(M)$ . Dann gilt

$$\frac{v(R-d)}{v(d)} \leq N_p(R) \leq \frac{v(R+r)}{v(r)}$$

wobei  $v(t)$  das Volumen von  $\overline{B_p(t)}$  bezeichnet.

**3.4.12 Lemma: 4**

Ist  $\text{sec}_M \leq 0$ , so gilt

$$v(R) = \text{vol}(\overline{B_p(R)}) \geq \text{vol}(B_0^{\mathbb{R}^n}(R))$$

and für  $\text{sec}_M = -1$ , gilt

$$v(R) = \text{vol}(\overline{B_p(R)}) \geq \text{vol}(B_{p_0}^{\mathbb{H}^n}(R)) = \text{vol}_{n-1}(S^{n-1}) \int_0^R \sinh(t)^{n-1} dt$$

□

## 3.5 Rand im Unendlichen bzw. Raum der Enden

### 3.5.1 Definition

Zwei nach Bogenlänge parametrisierte Geodäten  $\gamma, \delta$  heißen **asymptotisch**, falls die Funktion

$$d(\sigma(t), \delta(t)) : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

beschränkt ist. *Asymptotisch Sein* ist eine Äquivalenzrelation, die Menge der Äquivalenzklassen bezeichnen wir als den **Rand**  $\partial_\infty M$  **von**  $M$ .

Die Äquivalenzklasse eines geodätischen Strahl  $\delta$  bezeichnen wir mit  $\delta(\infty)$ .

### 3.5.2 Bemerkung

- 1.) Jede Isometrie von  $M$  setzt sich zu einer Bijektion  $\partial_\infty M \rightarrow \partial_\infty M$  fort.
- 2.) Ist  $M$  eine Hadamard-Mannigfaltigkeit und sind  $\delta, \tau$  zwei geodätische Strahlen, so betrachte das Dreieck, das von  $\delta, \tau$  und dem geodätischen Segment  $l : \delta(0) \mapsto \tau(0)$  aufgespannt wird. Folgende Aussagen sind dann äquivalent:
  - i. Die Innenwinkel bei  $l$  ergeben zusammen genau  $\pi$ .
  - ii. Zwischen  $\sigma$  und  $\tau$  liegt ein flacher Streifen von  $M$ .
  - iii. Die Funktion  $d(\sigma(t), \tau(t))$  ist konstant.

### 3.5.3 Lemma

Definiere das **Sphärenbündel** von  $M$  durch

$$S_p M := \{v \in T_p M \mid \|v\| = 1\}$$

für  $p \in M$ . Für  $v \in T_p M$  bezeichne  $\sigma_v(t) = \exp_p(t \cdot v)$ . Definiere hierdurch folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_p : S_p M &\longrightarrow \partial_\infty M \\ v &\longmapsto \sigma_v(\infty) \end{aligned}$$

Ist  $M$  eine Hadamard-Mannigfaltigkeit, so ist  $\Phi_p$  bijektiv.

### 3.5.4 Bemerkung

Es gibt zwei Modi operandi, um eine Topologie auf  $\partial_\infty M$  einzuführen:

- 1.) Wir können direkt die Topologie auf  $\partial_\infty M$ , durch die  $\Phi_p : S_p M \rightarrow \partial_\infty M$  zu einem Homöomorphismus wird, betrachten.
- 2.) Wir können auf  $\partial_\infty M$  eine Metrik, die sogenannte **visuelle Metrik**, einführen, indem wir für  $\sigma_v(\infty), \sigma_u(\infty) \in \partial_\infty M$  festlegen

$$d(\sigma_v(\infty), \sigma_u(\infty)) := \angle_p(v, u)$$

Die Topologie, die durch diese Metrik induziert wird, stimmt mit obiger überein.

In beiden Fällen ergibt sich die **Kegel-Topologie** auf  $\partial_\infty M$ .

**3.5.5 Lemma**

Die oben eingeführten Topologien sind unabhängig von der Wahl von  $p \in M$ , da die Abbildungen

$$\Phi_q^{-1} \circ \Phi_p : S_p M \longrightarrow S_q M$$

homöomorph für  $p, q \in M$  sind.

**3.5.6 Bemerkung**

Auf  $M \cup \partial_\infty M$  lässt sich eine Topologie durch eine Basis definieren, die alle offenen Bälle in  $M$  enthält und alle Fächer der Gestalt

$$W(p, \eta, r, \epsilon) = \left\{ x \in M \cup \partial_\infty M \mid \angle_p(\sigma_{p \rightarrow x}(\infty), \eta) < \epsilon, x \notin \overline{B_p(r)} \right\}$$

für alle  $p \in M, \eta \in \partial_\infty M, r, \epsilon > 0$ .

## 3.6 Symmetrische Räume

### 3.6.1 Definition: Lokal Symmetrisch

Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  heißt **lokal symmetrisch**, falls für jeden Punkt  $P \in M$  eine Zahl  $r > 0$  und eine Isometrie

$$s_p : B_p(r) \longrightarrow B_p(r)$$

existiert, sodass

- 1.)  $s_p(p) = p$
- 2.)  $(ds_p)_p = -\text{id}_{T_p M}$

### 3.6.2 Bemerkung

Für jede Isometrie  $L : T_p M \rightarrow T_p M$  lässt sich lokal eine Abbildung durch

$$l_p := \exp_p \circ L \circ \exp_p^{-1}$$

definieren, die im Allgemeinen keine Isometrie ist.

### 3.6.3 Satz

Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1.)  $M$  ist lokal symmetrisch
- 2.) der Krümmungstensor ist **parallel**, d. h.,  $\nabla \mathcal{R} = 0$ , d. h., für alle  $X, Y, Z, U \in \mathcal{T}M$

$$\nabla_U \mathcal{R}(X, Y)Z = 0$$

- 3.) Für jede Geodäte  $c$  ist die Abbildung

$$\mathcal{R}_{\dot{c}} X := \mathcal{R}(X, \dot{c})\dot{c}$$

parallel entlang  $c$ .

### Beweis

1. 1.)  $\Rightarrow$  2.)

Betrachte  $s_p^*(\nabla \mathcal{R}) = (\nabla \mathcal{R}) \circ ds_p$ . Da  $s_p$  eine Isometrie ist, gilt

$$s_p^*(\nabla \mathcal{R}) = \nabla \mathcal{R}$$

Ferner gilt

$$-\nabla_U \mathcal{R}(X, Y)Z = ds_p(\nabla_U \mathcal{R}(X, Y)Z) = s_p^*(\nabla_U \mathcal{R}(X, Y)Z)$$

Es folgt ergo

$$\nabla \mathcal{R} = 0$$

2. 3.)  $\Rightarrow$  1.)

Sei  $p \in M$ ,  $r < \text{inj}_p(M)$ .

$$s_p := \exp_p \circ (-\text{id}_{T_p M}) \exp_p^{-1} : B_p(r) \longrightarrow B_p(r)$$

Wir zeigen durch Jacobi-Felder, dass  $s_p$  isometrisch ist:

Sei dazu  $E_1, \dots, E_n$  eine Basis paralleler Vektorfelder entlang  $c$ , die Eigenvektoren von  $\mathcal{R}_c$  an der Stelle  $p$  sind, d. h.

$$(\mathcal{R}_c(E_i))(p) = \lambda_i E_i(p)$$

Da diese Vektorfelder parallel entlang  $c$  sind, bleiben sie Eigenvektoren entlang  $c$  mit konstanten Eigenwerten  $\lambda_i$ , da  $\mathcal{R}$  parallel entlang  $c$  ist. Definiere folgendes Jacobi-Feld entlang  $c$

$$J(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) E_i(t)$$

mit

$$y_i''(t) = -\lambda_i y_i(t)$$

Da  $J(0) = 0$ , gilt

$$y_i(t) = y_i(-t)$$

Für  $J$  und  $q = \exp_p(v)$  gilt nun

$$\|(\text{d}s_p)_q(J(t))\| = \|(\text{d}s_p)_q((\text{d}\exp_p)_v(tJ'(0)))\| = \|(\text{d}\exp_p)_v(-tJ'(0))\| = \|J(-t)\| = \|J(t)\|$$

Da diese Gleichung für alle Jacobi-Felder in  $p$  gilt, folgt für alle  $w \in T_q M$

$$\|(\text{d}s_p)_q w\| = \|w\|$$

ergo ist  $s_p$  isometrisch. □

### 3.6.4 Bemerkung

Analog gilt für eine Isometrie  $L : T_p M \rightarrow T_p M$  mit

$$l_p = \exp_p \circ L \circ \exp_p^{-1}$$

folgende Implikation

$$L^*(\mathcal{R}_p) = \mathcal{R}_p \implies l_p \text{ ist isometrisch}$$

### 3.6.5 Definition

Ein lokal symmetrischer Raum heißt **(global) symmetrisch**, falls jede punktweise Spiegelung zu einer globalen Isometrie fortgesetzt werden kann.

### 3.6.6 Satz

Folgende Aussagen sind für eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  äquivalent:

- 1.)  $M$  ist lokal symmetrisch
- 2.)  $M$  ist symmetrisch
- 3.) Jede lineare Isometrie

$$L : T_p M \longrightarrow T_q M$$

die den Krümmungstensor erhält, d. h.

$$L^* \mathcal{R}_q = \mathcal{R}_p$$

wird durch eine eindeutig bestimmte globale Isometrie induziert.

### 3.6.7 Korollar

Die universelle Überdeckung einer lokal symmetrischen Mannigfaltigkeit ist symmetrisch.

### 3.6.8 Bemerkung

Noch allgemeiner kann man durch den Beweis von Satz 3.6.3 Folgendes zeigen:

Ist  $L : T_p M \rightarrow T_q N$  eine lineare Isometrie von Tangentialräumen lokal symmetrischer Mannigfaltigkeiten mit der Eigenschaft

$$L^* \mathcal{R}_q = \mathcal{R}_p$$

so ist

$$\begin{aligned} f : B_p(r) &\longrightarrow B_q(r) \\ x &\longmapsto \exp_q \circ L \circ \exp_p^{-1}(x) \end{aligned}$$

eine Isometrie für  $r > 0$  klein genug.

### 3.6.9 Lemma

Sind  $M, N$  lokal symmetrisch,  $M$  einfach zusammenhängend und  $N$  vollständig, so lässt sich die Abbildung  $f$  von obiger Bemerkung fortsetzen zu folgender lokalen Isometrie

$$f : M \longrightarrow N$$

#### Beweis

- 1.) Setze  $f : B_p(r) \rightarrow B_q(r)$  durch Wege  $c : p \mapsto x$  fort für alle  $x \in M$
- 2.) Zeige, dass die Fortsetzung  $f(x)$  ausschließlich vom Homotopietyp des Weges  $c$  abhängt
- 3.) Da  $M$  einfach zusammenhängend ist, ist die Fortsetzung von  $f$  wohldefiniert

Ad 1.) Setze

$$I = \{s \in [0, 1] \mid f \text{ kann fortgesetzt werden auf } c([0, s])\}$$

Dann ist  $I$  offen in  $[0, 1]$ , da der Definitionsbereich von  $f$  immer offen ist. Es bleibt also die Abgeschlossenheit zu zeigen, d. h.

$$S := \sup I \in I$$

Sei  $(s_i)_i \in I$  eine gegen  $S$  konvergente Folge. Dann konvergiert

$$f(c(s_i)) \rightarrow q$$

da  $f$  lokal isometrisch ist. Setze  $r > 0$  so, dass  $B_{c(s)}(3r), B_q(3r)$  normale Nachbarschaften sind. Dann existiert ein  $s \in I$ , sodass

$$c(s) \in B_{c(s)}(r) \text{ und } f(c(s)) \in B_q(r)$$

Dann setzt sich aber  $f$  fort auf  $B_{c(s)}(2r)$ , ergo liegt  $S \in I$ .

Ad 2.) Ähnliches Argument. Sei  $H : [0, 1]^2 \rightarrow M$  eine Homotopie und  $f^s$  die Fortsetzung entlang  $H(s, [0, 1])$ . Setze

$$I = \{s \in [0, 1] \mid \forall \alpha \in [0, s] : f^\alpha(1) = f^s(1)\}$$

und zeige analog, dass  $I$  abgeschlossen ist.

□



**3.6.10 Proposition**

Ist  $M$  symmetrisch, so ist  $M$  vollständig.

**3.6.11 Definition**

Eine Isometrie  $f$  von  $M$  heißt **Transvektion**, falls ein Punkt  $p \in M$  und ein Weg  $c : p \mapsto f(p)$  existieren, sodass  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} M$  der Paralleltransport entlang  $c$  ist.

**3.6.12 Proposition**

Ist  $M$  symmetrisch, so existiert für jedes Paar von Punkten  $p, q \in M$ , eine Transvektion, die  $p$  auf  $q$  abbildet.

**3.6.13 Korollar**

Ist  $M$  symmetrisch, so ist jede vollständige Geodäte der Orbit einer 1-Parameter Untergruppe von  $Isom(M)$ .

**Beweis**

Sei  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  vollständig geodätisch. Definiere

$$\tau_s := s_{\gamma(\frac{s}{2})} \circ s_{\gamma(0)}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow Isom(M) \\ s &\longmapsto \tau_s \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus. □

**3.6.14 Korollar**

Sei  $M$  symmetrisch. Bezeichnet  $G = Isom(M)^0$  die Zusammenhangskomponente der Identität in  $Isom(M)$ , so agiert  $G$  transitiv auf  $M$ . Ferner ist die Untergruppe

$$K = Stab_G(m) = \{g \in G \mid gm = m\}$$

kompakt und folgender Homöomorphismus ist gegeben

$$\begin{aligned} G/K &\longrightarrow M \\ gK &\longmapsto g.m \end{aligned}$$

Fasst man  $G/K$  als Lie-Gruppe auf, so handelt es sich hierbei sogar um einen Diffeomorphismus.

**3.6.15 Beispiel**

Es sei  $M = \text{Pos}(n, \mathbb{R})$  die Mannigfaltigkeit der symmetrisch positiv definiten reellen  $n \times n$ -Matrizen.  $M$  besitzt dann eine Dimension von  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Für  $p \in M$  gilt

$$\begin{aligned} T_p M &= \text{symm}(n, \mathbb{R}) \\ g_p(A, B) &= \text{spur}(p^{-1} A p^{-1} B) \end{aligned}$$

Die Symmetrie gestaltet sich nun durch

$$\begin{aligned} S_p : M &\longrightarrow M \\ A &\longmapsto pA^{-1}p \end{aligned}$$

$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  agiert auf  $M$  durch

$$g \cdot p := gp g^T$$

$$G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+ = \{g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid \det g > 0\}, K = \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$$

### 3.6.16 Definition

Eine **Lie-Algebra**  $V$  ist ein reeller Vektorraum mit einer Bilinearform

$$[, ] : V \otimes_{\mathbb{R}} V \longrightarrow V$$

mit

- 1.)  $[X, Y] = -[Y, X]$
- 2.) **Jacobi-Identität:**  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

### 3.6.17 Bemerkung

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe, setze

$$\mathfrak{g} = T_e G$$

Dann ist  $\mathfrak{g}$  isomorph zum Raum der **links-invarianten Vektorfelder** auf  $G$ , d. h., der Vektorfelder  $X$ , für die gilt

$$X(gp) = dg_p X(p)$$

Ergo können wir die Lie-Klammer der Vektorfelder auf  $\mathfrak{g}$  einschränken, wodurch  $\mathfrak{g}$  zu einer Lie-Algebra wird. Für  $x \in \mathfrak{g}$  definieren wir die **Adjunktion** durch

$$\begin{aligned} ad(x) : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ v &\longmapsto [x, v] \end{aligned}$$

Und die **Killing-Form** durch

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ x \otimes y &\longmapsto \mathrm{spur}(ad(x) \circ ad(y)) \end{aligned}$$

Beachte, für jedes  $x \in \mathfrak{g}$  existiert genau ein glatter Gruppenmorphismus

$$\Theta : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

sodass  $\Theta'(0) = x, \Theta(0) = 1$ .

Wir definieren hierdurch folgende **Exponentialabbildung**

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto \Theta(1) \end{aligned}$$

Dann existiert ein Zusammenhang auf  $G$ , sodass  $\exp$  der Riemannschen Exponential-Abbildung entspricht und jedes  $\Theta$  eine Geodäte ist.

Ist  $h \in G$ , so definiere

$$\begin{aligned} \mathrm{Int}(h) : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto hgh^{-1} \end{aligned}$$

und die **adjungierte Aktion** durch

$$Ad(h) := (dInt(h))_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(Ad(h)x) &= h \exp(x) h^{-1} \\ Ad(\exp(x)) &= e^{ad(x)} \end{aligned}$$

### 3.6.18 Bemerkung

Ist  $G = GL(n, \mathbb{R})$ , so ist  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(x, y) = c \cdot \text{spur}(xy)$  und  $[x, y] = xy - yx$ .

### 3.6.19 Bemerkung

Sei  $M$  ein symmetrischer Raum,  $G = Isom(M)^0$ . Definiere folgende Involution

$$\begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto s_m g s_m \end{aligned}$$

Dann ist auch folgende Abbildung eine Involution für  $m \in M$

$$Ad(s_m) = (d\sigma)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

Wir erhalten hierdurch die **Cartan-Zerlegung**

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \{x \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e x = x\} \oplus \{x \in \mathfrak{g} \mid (d\sigma)_e x = -x\}$$

Dabei ist  $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$  eine Lie-Subalgebra.

### 3.6.20 Proposition

Setze

$$G^\sigma := \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$$

Es bezeichne ferner

$$K = Stab_G(m) = \{g \in G \mid gm = m\}$$

so gilt

- 1.)  $(G^\sigma)^0 \subset K \subset G^\sigma$
- 2.) Die Lie-Algebra von  $K$  ist gerade  $\mathfrak{k}$ .
- 3.) Definiere

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} : G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g.m \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathfrak{k} = \text{Kern}(d\mathfrak{m})_e$$

und  $(d\mathfrak{m})_{e|_{\mathfrak{p}}} : \mathfrak{p} \rightarrow T_m M$  ist ein Isomorphismus.

**Beweis**

- 1.) Zu zeigen:
- $K \subset G^\sigma$
- .

Sei  $k \in K$ , dann gilt

$$s_m k s_m^{-1} . m = m = k . m$$

und

$$(\mathrm{d}s_m k s_m)_m = (\mathrm{d}s_m)_m \circ (\mathrm{d}k)_m \circ (\mathrm{d}s_m)_m = -\mathrm{id} \circ (\mathrm{d}k)_m \circ -\mathrm{id} = \mathrm{d}k_m$$

Ergo stimmen  $\sigma(k)$  und  $k$  auf  $m$  überein und induzieren dieselbe Abbildung auf  $T_m M$ . Als Isometrien stimmen sie somit überein.

Es folgt  $K \subset G^\sigma$  und damit auch

$$\mathrm{Lie}(K) \subset \mathrm{Lie}(G^\sigma) = \mathfrak{k}$$

wobei  $\mathrm{Lie}(H)$  die Lie-Algebra der Lie-Gruppe  $H$  bezeichnet.

- 2.) Zu zeigen:
- $(G^\sigma)^0 \subset K$
- .

Sei  $X \in \mathfrak{k}$ , dann ist  $\exp(tX) \in (G^\sigma)^0$ , da

$$s_m \exp(tX) s_m^{-1} = \exp(t \cdot \mathrm{Ad}(s_m)X) = \exp(tX)$$

daraus folgt

$$s_m(\exp(tX).m) = s_m \exp(tX) s_m . m = \exp(tX).m$$

ergo fixiert  $s_m$  den Punkt  $\exp(tX).m$ . Aber  $m$  ist ein isolierter Fixpunkt von  $s_m$ , ergo muss gelten

$$\exp(tX).m = m$$

und daraus folgt gerade

$$\exp(tX) \in K$$

Da  $(G^\sigma)^0$  aus Elementen der Gestalt  $\exp(tX)$  für  $X \in \mathfrak{k}$  besteht, folgt

$$(G^\sigma)^0 \subset K$$

und

$$\mathfrak{k} \subset \mathrm{Lie}(K)$$

- 3.) Zu zeigen:
- $\mathfrak{k} \subset \mathrm{Kern}(\mathrm{d}m)_e$

Sei  $X \in \mathfrak{k}$ , so gilt

$$(\mathrm{d}m)_e(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(\exp(tX))|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (\exp(tX)).m|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m|_{t=0} = 0$$

- 4.) Zu zeigen:
- $\mathrm{Kern}(\mathrm{d}m)_e \subset \mathfrak{k}$

Sei  $X \in \mathrm{Kern}(\mathrm{d}m)_e$  und setze für eine beliebige glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  und eine Konstante  $a \in \mathbb{R}$ 

$$h(p) := f(\exp(aX).p)$$

und berechne

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathrm{d}h)_m(\mathrm{d}m_e(X)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h(\exp(tX).m)|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\exp(aX) \exp(tX).m)|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\exp((a+t)X).m)|_{t=0} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\exp(tX).m)|_{t=a} \end{aligned}$$

Es folgt, dass  $t \mapsto f(\exp(tX).m)$  für jedes  $f$  konstant ist, d. h.

$$\exp(tX).m = m$$

Daraus folgt  $\exp(tX) \in K$ , d. h.,  $X \in \mathfrak{k}$ .

5.) Da  $\mathfrak{k} = \ker(\mathrm{dm})_e$ , ist  $\mathrm{dm}_e : \mathfrak{p} \rightarrow T_m M$  injektiv. Diese lineare Abbildung ist auch surjektiv, da

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{p} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k} = \dim G - \dim K = \dim M = \dim_{\mathbb{R}} T_m M$$

□

### 3.6.21 Definition

Ein **affines symmetrisches Paar**  $(G, \sigma, H)$  besteht aus einer Lie-Gruppe  $G$ , einer Involution  $\sigma$  auf  $G$  und einer Untergruppe  $H \subset G$ , für die gilt

$$(G^\sigma)^0 \subset H \subset G^\sigma$$

Ist  $H$  ferner kompakt, so reden wir von einem **Riemannschen symmetrischen Paar**.

### 3.6.22 Bemerkung

Die Funktoren

$$(M, m) \longmapsto (\mathrm{Isom}(M)^0, g \mapsto s_m g s_m^{-1}, \mathrm{Stab}_G(m))$$

und

$$(G, \sigma, K) \longmapsto (G/K, e)$$

liefern eine Äquivalenz zwischen der Kategorie der punktierten symmetrischen Mannigfaltigkeiten und der Riemannschen symmetrischen Paaren.

### 3.6.23 Beispiel

1.) Sei  $M = \mathrm{Pos}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+ / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$  die Menge der symmetrischen, positiv definiten Matrizen. Dann gestaltet sich die Punktspiegelung bei der Einheitsmatrix als

$$s_{E_n}(m) = m^{-1}$$

die Involution als

$$\begin{aligned} \sigma : \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+ &\longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})^+ \\ A &\longmapsto (A^T)^{-1} \end{aligned}$$

und die Involution der Lie-Algebren

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_{E_n} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \\ A &\longmapsto -(A^T) \end{aligned}$$

wobei

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{symm}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

wobei  $\mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A = -A^T\}$  die Menge der schief-symmetrischen Matrizen ist.

2.) Betrachte ferner

$$\begin{aligned}\sigma : \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \\ X &\longmapsto (X^T)^{-1}\end{aligned}$$

dann ergibt sich für  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \mathrm{spur}(X) = 0\}$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma_{E_n} &: \longrightarrow \\ X &\longmapsto -X^T\end{aligned}$$

und es folgt

$$(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{so}(\times, \mathbb{R}) \oplus \{\mathbb{A} \in \sim \curvearrowright \succ (\times, \mathbb{R}) \mid \sim \lrcorner \cong \setminus (\mathbb{A}) = \mathbb{K}\}$$

und

$$\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) / \mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Pos}_{\det=1}(n, \mathbb{R})$$

3.) Betrachte  $G = O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^T = E_n\}$

Setze für  $p, q \geq 0, p + q = n$

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -E_p & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix}$$

Definiere

$$\begin{aligned}\sigma : G &\longrightarrow G \\ A &\longmapsto I_{p,q}(A^T)^{-1}I_{p,q} = I_{p,q}AI_{p,q}\end{aligned}$$

dann ist

$$K = G^\sigma = O(p) \times O(q)$$

und

$$M = O(p+q)/O(p) \times O(q) \cong \mathrm{Grass}_p(\mathbb{R}^n) = \{V \leq \mathbb{R}^n \text{ UVR} \mid \dim_{\mathbb{R}} V = p\}$$

Insbesondere gilt für  $p = 1, q = n - 1$

$$M = P\mathbb{R}^n$$

4.)  $I_{p,q}$  definiert eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf  $\mathbb{R}^n$  durch

$$b_{p,q}(v, w) := v^T I_{p,q} w = \sum_{i=1}^p -v_i w_i + \sum_{i=p+1}^n v_i w_i$$

Definiere

$$O(p, q) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \forall v, w \in \mathbb{R}^n : b_{p,q}(Av, Aw) = b_{p,q}(v, w)\} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T I_{p,q} A = I_{p,q}\}$$

Definiere weiterhin

$$\begin{aligned}\sigma_1 : O(p, q) &\longrightarrow O(p, q) \\ A &\longmapsto (A^T)^{-1}\end{aligned}$$

dann gilt

$$G^{\sigma_1} = O(p) \times O(q)$$

und

$$M_{p,q} = O(p, q)/O(p) \times O(q) \cong \{V \leq \mathbb{R}^n \text{ UVR} \mid b_{p,q} : W \times W \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist negativ definit}\} \subset \mathrm{Grass}_p(\mathbb{R}^n)$$

Insbesondere gilt für  $p = 1, q = n - 1$

$$M_{1,n-1} = \mathbb{H}^{n-1}$$

5.) Betrachte auf  $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \overline{A}A^T = E_n\}$  die Involution

$$\begin{aligned}\sigma : U(n) &\longrightarrow U(n) \\ A &\longmapsto I_{p,q} A I_{p,q}\end{aligned}$$

Es gilt

$$U(n)^\sigma = U(p) \times U(q)$$

und es folgt abermals

$$M = U(n)/U(p) \times U(q) = \text{Grass}_p(\mathbb{C}^n)$$

6.) Natürlich lässt sich analog  $U(p, q) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A^T I_{p,q} \overline{A} = I_{p,q}\}$  betrachten mit der Involution

$$\begin{aligned}\sigma_1 : U(p, q) &\longrightarrow U(p, q) \\ A &\longmapsto (A^*)^{-1}\end{aligned}$$

und naheliegenderweise gilt auch hier

$$G^{\sigma_1} = U(p) \times U(q)$$

und

$$M_{p,q} = U(p, q)/U(p) \times U(q)$$

### 3.6.24 Proposition

Sei  $X \in \mathfrak{p} \stackrel{\text{dm}_e}{\cong} T_m M$ . Dann gilt

$$\exp(tX).m = c_{\text{dm}_e X}(t)$$

wobei  $c_v$  eine korrespondierende Geodäte ist. D. h., folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{p} & \xrightarrow{\text{dm}_e} & T_m M \\ \downarrow \exp_e & & \downarrow \exp_m \\ G & \xrightarrow{\mathfrak{m}} & M \end{array}$$

#### Beweis

Setze  $c(t) := c_{\text{dm}_e X}(t)$ . Dann gilt

$$c(t) = \tau_t.c(0) = \tau_t.m$$

für  $\tau_t = s_{c(t/2)} \circ s_m$ . Es folgt

$$\tau_t = \exp(tZ)$$

für ein  $Z \in \mathfrak{g}$ . Die Behauptung  $Z = X$  folgt, wenn wir zeigen können, dass

$$Z \in \mathfrak{p}$$

da  $\mathfrak{m}(\tau_t) = c(t)$ . Nun gilt tatsächlich

$$\sigma(\tau_t) = s_m s_{c(t/2)} s_m s_m = s_m \circ s_{c(t/2)} = s_{c(-t/2)} \circ s_m = \tau_{-t}$$

ergo

$$\text{d}\sigma_e(Z) = -Z$$

ergo  $Z \in \mathfrak{p}$ . □

### 3.6.25 Definition

Ein glattes Vektorfeld  $V \in \mathcal{V}(M)$  heißt **Killing-Feld**, falls für alle Vektorfelder  $Y, Z$  gilt

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = g(\mathcal{D}_X Y, Z) + g(Y, \mathcal{D}_X Z) = 0$$

$\mathcal{L}_X$  bezeichnet hier die **Lie-Ableitung**.

Unter  $\mathfrak{g}^*$  verstehen wir die Lie-Algebra der Killing-Felder auf  $M$ . Ein Killing-Feld  $X^*$  ist festgelegt durch  $X^*(m)$  und die Abbildung  $\mathcal{D}X^*(m)$ .

Setze

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}^* &= \{X^* \in \mathfrak{g}^* \mid X^*(m) = 0\} \\ \mathfrak{p}^* &= \{X^* \in \mathfrak{g}^* \mid \mathcal{D}X^*(m) = 0\}\end{aligned}$$

### 3.6.26 Bemerkung

Betrachte

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}^* &\longrightarrow T_m M \\ X^* &\longmapsto X^*(m)\end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{k} = \{A \in \text{End}(T_m M) = O(T_m M, g_m) \mid \forall u, v \in T_m M : A \circ \mathcal{R}_m(u, v) = \mathcal{R}_m(Au, v) + \mathcal{R}_m(u, Av) + \mathcal{R}(u, v) \circ A\}$$

wobei  $g_m$  die Metrik bei  $m$  und  $\mathcal{R}$  den Krümmungstensor bei  $m$  bezeichnet.

Auf  $\text{End}(T_m M)$  ergibt sich eine Lie-Algebren-Struktur durch

$$[A, B] := A \circ B - B \circ A$$

Die Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi : \mathfrak{k}^* &\longrightarrow \mathfrak{k} \\ X^* &\longmapsto \mathcal{D}X^*(m)\end{aligned}$$

ist ein Anti-Isomorphismus von Lie-Algebren, d. h., ein Isomorphismus von Vektorräumen, für den gilt

$$\mathcal{D}[X^*, Y^*](m) = \Phi([X^*, Y^*]) = [\Phi(Y^*), \Phi(X^*)] = [\mathcal{D}Y^*, \mathcal{D}X^*](m)$$

Ferner ist

$$\mathcal{D}_{U, X^*}^2 Y^* := \mathcal{D}_U \mathcal{D}_{X^*} Y^* - \mathcal{D}_{\mathcal{D}_U X^*} Y^*$$

tensoriell in  $X^*, Y^*$  und es gilt

$$\mathcal{D}_{U, X^*}^2 Y^* = -\mathcal{R}(X^*, U)Y^*$$

### 3.6.27 Proposition

Es gilt

$$1.) \quad [\mathfrak{k}^*, \mathfrak{k}^*] \subset \mathfrak{k}^*, [\mathfrak{k}^*, \mathfrak{p}^*] \subset \mathfrak{p}^* \text{ und } [\mathfrak{p}^*, \mathfrak{p}^*] \subset \mathfrak{k}^*$$

$$2.) \quad \text{Für alle } X^*, Y^* \in \mathfrak{p}^* \text{ gilt}$$

$$\mathcal{D}[X^*, Y^*](m) = \mathcal{R}_m(X^*(m), Y^*(m))$$

$$3.) \quad \text{Für alle } X^* \in \mathfrak{k}^*, Y^* \in \mathfrak{p}^* \text{ gilt}$$

$$[Y^*, X^*](m) = \mathcal{D}_{Y^*(m)} X^*(m)$$

und

$$\mathcal{D}_{X^*(m)} Y^*(m) = 0$$



**Beweis**

1.)

$$\mathcal{D}_{Y^*(m)}X^*(m) = \mathcal{D}_{Y^*(m)}X^*(m) - \mathcal{D}_{X^*(m)}Y^*(m) = [Y^*, X^*](m)$$

2.)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_W[X^*, Y^*](m) &= \mathcal{D}_W(\mathcal{D}_{X^*}Y^* - \mathcal{D}_{Y^*}X^*) \\ &= \mathcal{D}_W\mathcal{D}_{X^*}Y^* - \mathcal{D}_W\mathcal{D}_{Y^*}X^* \\ &\stackrel{\mathcal{D}_W X^*=0}{=} \mathcal{D}_W\mathcal{D}_{X^*}Y^* - \mathcal{D}_{\mathcal{D}_W X^*}Y^* - \mathcal{D}_W\mathcal{D}_{Y^*}X^* + \mathcal{D}_{\mathcal{D}_W Y^*}X^* \\ &= \mathcal{D}_{W, X^*}^2 Y^* - \mathcal{D}_{W, Y^*}^2 X^* \\ &= -\mathcal{R}(Y^*, W)X^* + \mathcal{R}(X^*, W)Y^* \\ &\stackrel{1. Bianchi}{=} \mathcal{R}(X^*, Y^*)W \end{aligned}$$

□

**3.6.28 Korollar**

$$\mathcal{R}_m(X^*, Y^*)W^* = [W^*, [X^*, Y^*]](m)$$

**3.6.29 Bemerkung**

$\mathfrak{k}$  ist die Lie-Algebra der kompakten Gruppe  $K$ . Betrachte die Killing-Form auf  $\mathfrak{k}$

$$B_{\mathfrak{k}}(A, B) = \text{spur}(ad(A) \circ ad(B))$$

diese ist negativ definit und  $ad(\mathfrak{k})$ -invariant. Bezeichnet  $\langle, \rangle_M$  das Skalarprodukt auf  $\mathfrak{p} \cong T_m M$ , so erhalten wir auf  $\mathfrak{g}$  durch

$$\langle, \rangle := \langle, \rangle_M - B_{\mathfrak{k}}$$

ein Skalarprodukt, welches  $ad(\mathfrak{k})$ - und  $d\sigma_e$ -invariant ist.

**3.6.30 Definition**

Eine **orthonormale involutive Lie-Algebra**  $\mathfrak{g}$  besteht aus einer Involution  $\sigma$  und einem Skalarprodukt, welches  $\sigma$ - und  $ad(\mathfrak{k})$ -invariant ist, wobei  $\mathfrak{k}$  den 1-Eigenraum von  $\sigma$  bezeichnet.

**3.6.31 Definition**

Sei  $\mathfrak{g}$  eine orthonormale involutive Lie-Algebra, dann ist  $\langle, \rangle|_{\mathfrak{p}}$  positiv definit und es existiert eine Konstante  $\lambda$ , sodass für die Killing-Form gilt

$$B|_{\mathfrak{p}} = \lambda \cdot \langle, \rangle|_{\mathfrak{p}}$$

- $\mathfrak{g}$  heißt **euklidisch**, falls  $\lambda = 0$
- $\mathfrak{g}$  heißt **von nicht-kompakten Typ**, falls  $\lambda > 0$
- $\mathfrak{g}$  heißt **von kompakten Typ**, falls  $\lambda < 0$

### 3.6.32 Beispiel

- 1.)  $(\mathfrak{o}(n), \sigma, \langle, \rangle)$  ist von kompakten Typ,  $K = O(p) \times O(q)$
- 2.)  $(\mathfrak{o}(p, q), \sigma_1, \langle, \rangle)$  ist von nicht-kompakten Typ,  $K = O(p) \times O(q)$
- 3.)  $(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}), \sigma, \langle, \rangle)$  ist von nicht-kompakten Typ,  $K = SO(n, \mathbb{R})$

### 3.6.33 Satz: Dualität

Sei  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  eine orthonormale involutive Lie-Algebra, dann ist

$$\mathfrak{g}_* = \mathfrak{k} \oplus i \cdot \mathfrak{p}$$

eine orthonormale involutive  $\mathbb{C}$ -Sub-Lie-Algebra von  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$ . Es gilt dann

- $\mathfrak{g}$  ist genau dann von kompakten Typ, wenn  $\mathfrak{g}_*$  von nicht-kompakten Typ ist.
- $\mathfrak{g}$  ist genau dann von nicht-kompakten Typ, wenn  $\mathfrak{g}_*$  von kompakten Typ ist.

### 3.6.34 Bemerkung: Schnittkrümmung

Seien  $u, v \in T_m M$  normiert und orthogonal. Dann gilt

$$\begin{aligned} \kappa(u, v) &= g(\mathcal{R}(u, v)v, u) \\ &= \lambda^{-1} B|_{\mathfrak{p}}(\mathcal{R}(u, v)v, u) \\ &= \lambda^{-1} B([v, [u, v]], u) \\ &= \lambda^{-1} B([u, v], [v, u]) \\ &= -\lambda^{-1} B([u, v], [u, v]) \end{aligned}$$

Ist  $\mathfrak{g}$  also von kompakten Typ, so ist  $M$  nicht-negativ gekrümmt. Ist  $\mathfrak{g}$  von nicht-kompakten Typ, so ist  $M$  nicht-positiv gekrümmt.

Gilt in einem der Fälle

$$[u, v] = 0$$

so folgt dann

$$\kappa(u, v) = 0$$

### 3.6.35 Beispiel

- 1.) Betrachte

$$\mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid -A = A^T\}$$

mit

$$B(X, Y) = \text{spur}(ad(X) \circ ad(Y)) = \lambda \cdot \text{spur}(X \cdot Y)$$

für  $\lambda > 0$  konstant, und

$$ad(X)A = [X, A] = XA - AX$$

Dann gilt

$$B(X, X) = \lambda \text{spur}(XX) = \lambda \text{spur}(-X^T X) = -\lambda \sum_{i=1}^n x_i^2 < 0$$

wenn nicht alle Eigenwerte  $x_i$  von  $X$  verschwinden. D. h.,  $B|_{\mathfrak{p}}$  ist von negativem Typ, ergo ist  $\mathfrak{o}(n)$  von kompakten Typ.

2.) Betrachte  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  mit  $\mathfrak{p} = \text{symm}(n, \mathbb{R})$ , dann gilt

$$B|_{\mathfrak{p}} = \text{spur}(XX) = \text{spur}(X^T X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$$

ergo ist  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$  von nicht-kompakten Typ.