1 Krümmungen

1.1 Definition

Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\kappa_p(\sigma)$ bezeichne die Schnittkrümmung in einem Punkt p und einer Ebene $\sigma \subset T_pM$.
M heißt **von positiver Schnittkrümmung**, falls $\kappa_p(\sigma) > 0$ für alle $p \in M, \sigma \subset T_pM$. Bezeichnet ric die Ricci-Krümung, so heißt M **von positiver Ricci-Krümmung**, falls $\mathsf{ric}_p(v,v) > 0$ für alle $p \in M, v \in T_pM$.
Die Ricci-Krümmung von M wird von $\alpha > 0$ nach unten beschränkt, falls

$$\mathsf{ric}_p(v,v) \geq \alpha g_p(v,v)$$

für alle $p \in M, v \in T_pM$.

1.2 Definition: Isometrien

Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ heißt **lokal isometrisch**, falls für alle $p \in M$ das Differential $\mathsf{d}_p : T_pM \to T_pN$ eine lineare Isometrie metrischer Räume ist.

1.3 Bemerkung

f ist genau dann isometrisch, wenn f lokal isometrisch und diffeomorph.

1.4 Satz

Jede glatte Abbildung $f : M \to M$, die für einen Punkt eine Isometrie auf den Tangentialräumen induziert, ist eine Isometrie.
Jede glatte, abstandserhaltende Funktion $f : M \to M$ ist eine Isometrie.

1.5 Definition

Die **Kompakt-Offen-Topologie** auf $\mathsf{Isom}(M,M)$ wird durch eine Basis folgender Mengen generiert

$$W(K,U) := \{f \mid f(K) \subseteq U\}$$

für alle $K \subseteq M$ kompakt und $U \subseteq M$ offen.

1.6 Proposition: Cartan

Seien v, w normierte, orthogonale Vektoren in T_pM. Es gilt

$$d(c_v(t), c_w(t))^2 = 2t^2 - \frac{\kappa_p(\sigma_{v,w})}{6} t^4 + o(t^5)$$

1.7 Lemma

Ist Y ein Jacobifeld entlang c, so gilt

$$D_t(\mathcal{R}(\dot{c}, Y), \dot{c})(0) = \mathcal{R}(\dot{c}, D_tY)\dot{c}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} g(\mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, w) &= g(D_t \mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, w) + g(\mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, D_t w) \\
\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} g(\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, Y) &= g(D_t \mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, Y) + g(\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, D_t Y) \\
g(D_t \mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, w) &= g(D_t \mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, Y) + g(\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, D_t Y) = g(\mathcal{R}(\dot{c}, D_t Y)\dot{c}, w)
\end{aligned}$$

□

1.8 Proposition

Seien $v, w \in T_p M$ mit $|w| = 1$. Setze $Y(t) = (\mathsf{d}\exp_p)_{tv}(tw) \in J_{c_v}$. Dann gilt

$$|Y(t)|^2 = g(Y(t), Y(t)) = t^2 - \frac{1}{3} g(\mathcal{R}(v, w)w, v)t^4 + o(t^5)$$

Beweis

Es gilt

$$Y(0) = 0, D_t(Y)(0) = w$$

Man rechnet nach

$$\begin{aligned}
g(Y, Y)(0) &= 0 \\
g(Y, Y)'(0) &= \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}_{|t=0} g(Y(t), Y(t)) = 2g(D_t(Y), Y)(0) = 0 \\
g(Y, Y)''(0) &= 2g(D_t Y, D_t Y)(0) + 2g(D_t D_t Y, Y)(0) = 2g(w, w) = 2 \\
g(Y, Y)'''(0) &= 6g(D_t D_t Y, D_t Y)(0) = 6g(-\mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, D_t Y)(0) = 0 \\
g(Y, Y)''''(0) &= 8g(\mathcal{R}(\dot{c}, D_t Y)\dot{c}, D_t Y) - \frac{8}{24} g(\mathcal{R}(v, w)w, v) = -\frac{1}{3} g(\mathcal{R}(v, w)w, v)
\end{aligned}$$

□

2 Räume konstanter Krümmung

2.1 Definition

Unter $\mathbb{M}_k^n$ verstehen wir die bis auf Isomorphie eindeutige vollständige, einfache zusammenhängende, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung k.

2.2 Bemerkung

Skaliert man die Metrik einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mt $c > 0$, so skaliert sich ihre Krümmung mit $\frac{1}{c}$.

2.3 Beispiel

Man führe auf $\mathbb{R}^{n+1}$ folgende Bilinearformen ein

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot y_i$$
$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - x_{n+1} \cdot y_{n+1}$$

Dann gilt

$$\mathbb{M}_0^n = \mathbb{R}^n \quad M_1^n = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x) = 1\} \quad M_{-1}^n = \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x) = 1, x_{n+1} > 0\}$$

2.4 Definition

Der **Index** einer symmetrischen Bilinearform ist die größte Dimension aller Unterräume, auf denen jene Bilinearform negativ definit ist.

2.5 Definition

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M', g'). Bezeichnet $\iota : M \hookrightarrow M'$ die Einbettung, so verstehen wir unter $\mathcal{V}'(M) := \Gamma(\iota^*(TM'))$ den Pullback der Vektorfelder auf M', d.h.

$$\mathcal{V}'(M) = \left\{Y_{|M} \mid Y \in \mathcal{V}(M)\right\}$$

Unter $\mathcal{V}(M)^\perp \subset \mathcal{V}'(M)$ verstehen wir die Vektorfelder auf M, die normal zu M liegen.
Wir schränken den Levi-Civita-Zusammenhang von M' auf $\mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}'(M)$ ein und erhalten

$$\mathcal{D}' : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}'(M) \longrightarrow \mathcal{V}'(M)$$

2.6 Lemma

$\mathcal{D}'$ ist wohldefiniert.

Beweis

Sei $p \in M$ ein Punkt und $U \subset M$ eine Koordinatennachbarschaft von p. Seien ferner $V \in \mathcal{V}(M), X \in \mathcal{V}'(M)$ mit Liftungen $V', X' \in \mathcal{V}(M')$. X' lässt sich auf U darstellen durch

$$X' = \sum_i f^i \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i}$$

$$\mathcal{D}'_{V'}X' = \sum_i V'(f^i)\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i} + \sum_i f^i D'_{V'}\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i}\right)$$

Für $q \in U \cap M$ gilt

$$V'(f^i)(q) = V_q(f^i) = V_q(f^i_{|U\cap M})$$

und

$$\mathcal{D}'_{V'}\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i}\right)(q) = \mathcal{D}'_{V'_q}\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i}\right)$$

□

2.7 Korollar

Seien $V, W \in \mathcal{V}(M), X, Y \in V'(M)$.

- $D'_V X$ ist $\mathcal{F}(M)$-linear in V.
- $D'_V X$ ist $\mathbb{R}$-linear in X.
- $D'_V(fX) = (Vf)X + f\mathcal{D}'_V X$
- $[V, W] = \mathcal{D}'_V W - \mathcal{D}'_W V$
- $Vg(X, Y) = g(D'_V X, Y) + g(X, D'_V Y)$

2.8 Lemma

Sind $V, W \in \mathcal{V}(M)$, dann gilt

$$\mathcal{D}_V W = (\mathcal{D}'_V W)^T$$

Beweis

Sei $X \in \mathcal{V}(M)$ beliebig

$$2g(\mathcal{D}'_{V'}W', X') = V'g(W', X') + W'g(X', V') - X'g(V', W') + g(W', [X', V']) + g(X', [V', W'])$$

Mit dem Vorhergehenden Korollar erhalten wir durch Einschränkung auf M

$$g(\mathcal{D}'_V W, X) = g(\mathcal{D}_V W, X)$$

Es gilt ferner

$$g(\mathcal{D}'_V W, X) = g((\mathcal{D}'_V W)^T, X)$$

da X tangential an M liegt. □

2.9 Lemma

Definiere den **Gestalttensor** bzw. **zweiten Fundamentaltensor** durch

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) &\longrightarrow \mathcal{V}(M)^\perp \\ (V, W) &\longmapsto (\mathcal{D}'_V W)^N = \mathcal{D}'_V W - \mathcal{D}_V W \end{aligned}$$

Dann ist dieser Tensor $\mathcal{F}(M)$-bilinear und symmetrisch.

Beweis

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D}'_V(fW))^N &= (f\mathcal{D}'_V W)^N + (V(f)W)^N = (f\mathcal{D}'_V W)^N \\
\Pi(V,W) - \Pi(W,V) &= (\mathcal{D}'(V,W) - \mathcal{D}'(W,V))^N = [V,W]^N = 0
\end{aligned}
$$

□

2.10 Satz: Gauss-Gleichung

Seien $V, W, X, Y \in \mathcal{V}(M)$. Es gilt

$$g(\mathbb{R}(V,W)X,Y) = g(\mathbb{R}'(V,W)X,Y) + g(\Pi(V,X),\Pi(W,Y)) - g(\Pi(V,Y),\Pi(W,X))$$

Beweis

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}(X,Y)Z &= -\mathcal{D}_{[X,Y]}Z + [\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y]Z \\
g(\mathcal{D}'_{[V,W]}X,Y) &= g(\mathcal{D}_{[V,W]}X,Y) \\
g(\mathcal{D}'_V\mathcal{D}'_W X,Y) &= g(\mathcal{D}'_V\mathcal{D}_W X,Y) + g(\mathcal{D}'_V\Pi(W,X),Y) \\
&= g(\mathcal{D}_V\mathcal{D}_W X,Y) + (Vg(\Pi(W,X),Y) - g(\Pi(W,X),\mathcal{D}'_V Y))
\end{aligned}
$$

Nun gilt aber

$$g(\Pi(W,X),Y) = 0$$

Ergo

$$
\begin{aligned}
g(\mathcal{D}'_V\mathcal{D}'_W X,Y) &= g(\mathcal{D}_V\mathcal{D}_W X,Y) + (Vg(\Pi(W,X),Y) - g(\Pi(W,X),\mathcal{D}'_V Y)) \\
&= g(\mathcal{D}_V\mathcal{D}_W X,Y) - g(\Pi(W,X),\Pi(V,Y))
\end{aligned}
$$

□

2.11 Korollar

Sind $v, w \in T_pM$ linear unabhängig, so gilt

$$\kappa(v,w) = \kappa'(v,w) + \frac{g(\Pi(v,v),\Pi(w,w)) - g(\Pi(v,w),\Pi(v,w))}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2}$$

2.12 Proposition

Sei Y ein Vektorfeld tangential zu M entlang einer Kurve $\alpha(t)$ in M. Dann gilt

$$\mathcal{D}'_t Y = \mathcal{D}_t Y + \Pi(\dot\alpha, Y)$$

2.13 Korollar

α ist genau dann eine Geodäte von M, wenn $\mathcal{D}'_t(\dot\alpha)$ normal zu M steht.

2.14 Definition

Eine **semi-Riemannsche Hyperfläche** ist eine **semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit** der Kodimension Eins.

2.15 Definition

Das **Vorzeichen** einer semi-Riemannschen Hyperfläche M ist definiert durch

$$\varepsilon := \begin{cases} +1 & \mathsf{coindex} M = 0 \\ -1 & \mathsf{coindex} M = 1 \end{cases}$$

2.16 Definition

Sei U ein normierter Normalenvektorfeld einer semi-Riemannschen Hyperfläche M. Dann wird durch

$$g(S(V), W) = g(\Pi(V, W), U)$$

ein (1,1)-Tensorfeld S auf M definiert, der sogenannte **Gestaltoperator**, der durch U induziert wird.

2.17 Lemma

Für alle $v \in T_pM$ gilt

$$S(v) = -\mathcal{D}'_v U$$

Ferner ist S_p selbstadjungiert.

Beweis

$g(U, U)$ ist konstant gleich 1. Ergo gilt

$$g(\mathcal{D}'_V U, U) = 0$$

Daraus folgt, dass $\mathcal{D}'_V U$ für alle $V \in \mathcal{V}(M)$ tangent an M liegt.
Sei nun $W \in \mathcal{V}(M)$, dann gilt

$$g(S(V), W) = g(\Pi(V, W), U) = g(\mathcal{D}'_V W, U) \overset{g(U,W)=0}{=} g(\mathcal{D}'_V U, W)$$

□

2.18 Korollar

$$\kappa(v, w) = \kappa'(v, w) + \varepsilon \frac{g(Sv, v)g(Sw, w) - g(Sv, w)^2}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2}$$

Beweis

$$\Pi(v, w) = \varepsilon g(Sv, w)U \text{ und } g(U, U) = \varepsilon$$

□

2.19 Definition: 3 Shades of Artig-Sein

Sei $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$$x \text{ heißt } \begin{cases} \text{zeitartig, falls } \langle x, x \rangle < 0 \\ \text{lichtartig, falls } \langle x, x \rangle = 0 \\ \text{raumartig, falls } \langle x, x \rangle > 0 \end{cases}$$

2.20 Proposition

Sei $M = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = -r^2 \right\}$. Dann ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der konstanten Schnittkrümmung $-\frac{1}{r^2}$ für $r > 0$.

Beweis

Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \overset{\mathbb{R}}{\to}$ durch $x \mapsto \langle x, x \rangle$. Dann ist $\mathsf{d}f_p(v) = 2\langle v, p \rangle$. Ergo ist $\mathsf{d}f_p$ surjektiv für alle $p \in M$. Ergo ist $f^{-1}(-r^2)$ eine glatte Hyperfläche von $\mathbb{R}^{n+1}$.
Ferner ist

$$T_pM = \mathsf{Kernd}f_p = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v \rangle = 0 \right\} = p^{\perp}$$

Da p zeitartig ist, ist T_pM positiv definit. Ferner ist der vom Einheiten-Normalen Vektorfeld $U = \frac{p}{r}$ abgeleitete Gestaltoperator gegeben durch $S(V) = -\mathcal{D}'_V U = \frac{-V}{r}$. Es folgt

$$\kappa(v, w) = 0 - \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r^2}$$

$\square$

2.21 Definition

Unter einer **Paar-Isometrie** $\Phi : (M, M') \to (N, N')$, wobei $M \subset M', N \subset N'$, ist eine Isometrie $M' \to N'$, dergestalt, dass auch ihre Restriktion $M \to N$ eine Isometrie ist.

2.22 Lemma

Eine Paar-Isometrie $\Phi : (M, M') \to (N, N')$ erhält den Gestalttensor, d. h.

$$\mathsf{d}\Phi(\Pi(v, w)) = \Pi(\mathsf{d}\Phi(v), \mathsf{d}\Phi(w))$$

für alle $p \in M, v, w \in T_pM$.