

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Topologische Gruppen</b>	<b>5</b>
1.1	Topologische Gruppen . . . . .	5
1.1.1	Definition: Topologische Gruppen . . . . .	5
1.1.2	Bemerkung . . . . .	5
1.1.3	Proposition . . . . .	5
1.1.4	Proposition . . . . .	6
1.1.5	Proposition . . . . .	6
1.1.6	Proposition . . . . .	7
1.1.7	Definition . . . . .	7
1.1.8	Definition . . . . .	7
1.1.9	Definition . . . . .	8
1.2	Lokal-Kompakte Gruppen . . . . .	8
1.2.1	Definition . . . . .	8
1.2.2	Bemerkung . . . . .	8
1.2.3	Proposition . . . . .	8
1.2.4	Proposition . . . . .	8
1.3	Zusammenhangskomponenten . . . . .	8
1.3.1	Definition . . . . .	8
1.3.2	Bemerkung . . . . .	9
1.3.3	Definition . . . . .	9
1.3.4	Proposition . . . . .	9
1.3.5	Proposition . . . . .	9
1.3.6	Proposition . . . . .	9
1.3.7	Bemerkung . . . . .	9
1.4	Total Unzusammenhängende Gruppen . . . . .	9
1.4.1	Satz . . . . .	9
1.4.2	Lemma . . . . .	9
1.4.3	Lemma . . . . .	10
1.4.4	Korollar . . . . .	10
1.5	Limiten Topologischer Räume . . . . .	10
1.5.1	Definition: Gerichtet Geordnet . . . . .	10
1.5.2	Definition: Inverses System . . . . .	10
1.5.3	Definition: Projektiver Limes . . . . .	10
1.5.4	Bemerkung . . . . .	11
1.5.5	Proposition . . . . .	11
1.5.6	Proposition . . . . .	11
1.5.7	Proposition . . . . .	11
1.5.8	Definition: Kolimes . . . . .	12
1.5.9	Bemerkung . . . . .	12
1.6	Proendliche Gruppe . . . . .	12

1.6.1	Bemerkung . . . . .	12
1.6.2	Definition . . . . .	12
1.6.3	Satz . . . . .	12
1.6.4	Lemma . . . . .	13
1.7	Unendliche Galoistheorie . . . . .	13
1.7.1	Satz . . . . .	13
1.7.2	Satz: Satz der Unendlichen Galoistheorie . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Klassenkörpertheorie – Motivation und Hauptresultate</b>	<b>15</b>
2.1	Abelsche Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ . . . . .	15
2.1.1	Satz: Kroncker-Weber . . . . .	15
2.1.2	Satz . . . . .	15
2.1.3	Satz . . . . .	15
2.1.4	Satz . . . . .	15
2.1.5	Proposition . . . . .	16
2.1.6	Proposition . . . . .	16
2.2	Quadratische Erweiterungen . . . . .	16
2.2.1	Proposition . . . . .	16
2.2.2	Definition: Legendre-Symbol . . . . .	17
2.2.3	Proposition: Trivialer Zerlegungssatz . . . . .	17
2.2.4	Definition: Dirichlet-Charaktere . . . . .	17
2.2.5	Lemma . . . . .	18
2.2.6	Definition: Gaußsche Summen . . . . .	18
2.2.7	Satz . . . . .	18
2.2.8	Satz . . . . .	18
2.2.9	Satz . . . . .	19
2.2.10	Satz: Gaußsches Quadratisches Reziprozitätsgesetz . . . . .	19
2.2.11	Definition . . . . .	19
2.2.12	Satz: Strahlklassenkörper . . . . .	19
2.3	Abstrakte bzw. Axiomatische Klassenkörpertheorie . . . . .	20
2.3.1	Definition: Stetiger $G$ -Modul . . . . .	20
2.3.2	Definition: Normabbildung . . . . .	20
2.3.3	Definition: Kohomologie . . . . .	20
2.3.4	Definition: Verlagerung . . . . .	21
2.3.5	Definition: Normrestsymbol . . . . .	21
2.4	Haupttheoreme der Klassenkörpertheorie . . . . .	22
2.4.1	Definition: Lokaler Körper . . . . .	22
2.4.2	Satz: Lokale Klassenkörpertheorie . . . . .	22
2.4.3	Definition: Globale Körper . . . . .	22
2.4.4	Satz: Globale Klassenkörpertheorie . . . . .	22
2.5	Was besagt die Klassenkörpertheorie? Erste Folgerungen der Hauptresultate . . . . .	23
2.5.1	Satz . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Adele, Ideale und Verallgemeinerte Idealklassengruppen</b>	<b>25</b>
3.1	Eingeschränkte Produkte . . . . .	25
3.1.1	Bemerkung . . . . .	25
3.1.2	Definition: Eingeschränkte Produkte . . . . .	25
3.2	Adele und Ideale . . . . .	26
3.2.1	Definition: Adelering und Idelering . . . . .	26
3.2.2	Bemerkung . . . . .	26
3.2.3	Definition: Hauptadele und Hauptidele . . . . .	26
3.2.4	Satz: Produktformel . . . . .	26

3.2.5	Satz . . . . .	26
3.2.6	Bemerkung . . . . .	27
3.2.7	Bemerkung: Idealklassengruppe . . . . .	27
3.2.8	Definition: Verallgemeinerte Idealklassengruppe . . . . .	27
3.2.9	Bemerkung: Alternative Beschreibung der Idealklassengruppe . . . . .	27
3.2.10	Bemerkung . . . . .	28
3.2.11	Satz . . . . .	28
3.2.12	Satz: Approximationssatz . . . . .	28
3.2.13	Definition . . . . .	28
3.2.14	Lemma . . . . .	29
3.2.15	Satz: Schlangenlemma . . . . .	29
3.2.16	Bemerkung . . . . .	29
3.3	Normgruppen . . . . .	29
3.3.1	Definition: Spur und Norm . . . . .	29
3.3.2	Bemerkung . . . . .	30



# Kapitel 1

## Topologische Gruppen

### 1.1 Topologische Gruppen

#### 1.1.1 Definition: Topologische Gruppen

Ein Paar  $(G, \mathcal{T})$  einer Gruppe und einer Topologie auf  $G$  heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen

$$\begin{aligned} \_ \cdot \_ &: G \times G \longrightarrow G \\ \_^{-1} &: G \longrightarrow G \end{aligned}$$

stetig sind.

Unter einem **Homomorphismus topologischer Gruppen** verstehen wir einen stetigen Gruppenhomomorphismus.

#### 1.1.2 Bemerkung

Seien  $G, H$  topologische Gruppen.

- $U \subset G$  heißt **Umgebung** von  $g \in G$ , falls eine Teilmenge  $V \subset_o G$  existiert, sodass  $g \in V \subseteq U$ .
- $\phi : G \rightarrow H$  ist genau ein Homomorphismus, wenn das Urbild jeder Umgebung der 1 in  $H$  eine Umgebung der 1 in  $G$  ist.

#### 1.1.3 Proposition

Sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $U \subset G$  eine Umgebung der 1.

- (i) Es existiert eine offene Umgebung  $V$  der 1, sodass  $V \cdot V \subset U$  und  $V = V^{-1}$ .
- (ii) Es existiert eine Umgebung  $V$  der 1, deren Abschluss  $\overline{V}$  in  $U$  enthalten ist.

Sei nun  $H \leq G$  eine Untergruppe.

- (iii) Der Abschluss von  $H$  ist ebenfalls eine Untergruppe. Dieser ist insbesondere normal, falls  $H$  ebenfalls normal ist.
- (iv) Ist  $H \leq_o G$  offen, so auch abgeschlossen, also insbesondere eine Zusammenhangskomponente.

**Beweis**

(i) Definiere

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G, x \mapsto x^2 \\ V' &:= f^{-1}(U) \cap U \\ V &:= V' \cap V'^{-1} \end{aligned}$$

(ii) Wir geben ohne Beweis einen Satz an, aus dem die Behauptung sofort folgt:

**Satz von Weil** Eine topologische Gruppe  $G$  ist  $T_{3\frac{1}{2}}$ , d. h., ist  $A \subseteq_a G$  eine Teilmenge, die die 1 nicht enthält, so existiert eine stetige Abbildung  $f : G \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

- $f(A) = \{1\}$
- $f(1) = 0$

(iii) Seien  $a, b \in \overline{H}$ , dann existieren Folgen  $a_n, b_n \in H$ , die gegen  $a, b$  konvergieren. Dann ist  $(a_n, b_n^{-1})$  eine Folge in  $G \times G$ , die gegen  $(a, b^{-1})$  konvergiert. Da Multiplikation stetig ist, konvergiert  $a_n b_n^{-1} \in H$  gegen  $ab^{-1}$ , ergo liegt  $ab^{-1}$  in  $\overline{H}$ . Analog zeigt man, dass  $\overline{H}$  normal ist, falls  $H$  normal ist.

(iv) Sei  $H \leq_o G$  offen und sei  $a \in \overline{H}$ . Dann existiert eine Folge  $a_n \in H$ , die gegen  $a$  konvergiert.  $aH$  ist eine Umgebung von  $a$ , ergo existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $a_n \in aH$ . Daraus folgt  $a \in a_n H^{-1} = H$ . □

**1.1.4 Proposition**

Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $G$  ist hausdorffsch.
- (ii)  $\{1\}$  ist abgeschlossen in  $G$ .
- (iii)  $\{g\}$  ist abgeschlossen in  $G$  für alle  $g \in G$ .

**Beweis**

Es bleibt die Implikation (iii)  $\implies$  (i) zu zeigen. Seien  $g, h \in G$  verschieden. Dann ist  $U = G \setminus \{gh^{-1}\}$  offen in  $G$ . Laut Proposition 1.1.3 (i) existiert eine offene Teilmenge  $V$  von  $U$  mit folgenden Eigenschaften:

- $1 \in V$
- $VV \subset U$
- $V^{-1} = V$

Dann sind  $Vg, Vh$  disjunkte Umgebungen von  $g, h$ . Denn wäre ihr Schnitt nichtleer, so würden  $v, w \in V$  existieren, sodass  $vg = wh$ , woraus folgt dass  $gh^{-1}$  in  $U$  liegen würde. □

**1.1.5 Proposition**

Sei  $G$  eine topologische Gruppe und  $H \leq G$  eine Untergruppe.

- (i)  $H$  ist genau dann diskret, wenn  $H$  einen isolierten Punkt besitzt.
- (ii) Ist  $G$  hausdorffsch und  $H$  diskret, so ist  $H$  abgeschlossen.

**Beweis: (ii)**

$H$  ist diskret, d. h., es existiert eine offene Teilmenge  $V \subseteq_o G$ , s. d.  $V \cap H = \{1\}$ . Ohne Einschränkung darf angenommen werden, dass  $V = V^{-1}$ .

$G$  ist hausdorffsch, ergo ist  $\{1\}$  abgeschlossen in  $V$ . Sei  $x \in \overline{H}$ , dann existiert ein  $y \in H$ , das in  $xV$  liegt. Man erhält durch Umformung

$$x \in yV \cap \overline{H} = \bigcap_{H \subset A \subset_a G} A \cap yV = \bigcap_{\{y\} = H \cap yV \subset A \subset_a yV} A = \{y\}$$

Ergo gilt  $x = y \in H$ . □

**1.1.6 Proposition**

Sei  $G$  eine topologische Gruppe mit Untergruppe  $H$ .

- $G$  operiert stetig auf  $G/H$ .
- $\pi_H : G \rightarrow G/H$  ist eine offene Abbildung.
- $G/H$  ist genau dann hausdorffsch, wenn  $H$  abgeschlossen ist.
- $G/H$  ist genau dann diskret, wenn  $H$  offen ist.
- Ist  $H$  normal, so ist  $G/H$  eine topologische Gruppe und  $\pi_H$  ein Morphismus topologischer Gruppen.

**Beweis: (iii)**

$\implies$ : Sei  $a \in \overline{H}$ , dann existiert eine Folge  $a_n \in H$ , die gegen  $a$  konvergiert. Da  $\pi_H$  stetig ist, gilt

$$\pi_H(a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_H(a)$$

Da alle  $a_n$  in  $H$  liegen, gilt aber  $\pi_H(a_n) = \pi_H(1)$ . Da  $G/H$  hausdorffsch ist, besitzt diese Folge höchstens einen Grenzwert, ergo gilt

$$\pi_H(a) = \pi_H(1) \implies a \in H$$

$\Leftarrow$ : Seien  $\pi_H(b), \pi_H(c) \in G/H$ . Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $\pi_H(c) = \pi_H(1)$ .

In jeder Umgebung  $\tilde{U}$  von  $\pi_H(b)$  sei  $\pi_H(1)$  enthalten. Dann ist  $b$  im Abschluss von  $H$  enthalten, denn ist  $U$  eine Umgebung von  $b$ , so ist  $\pi(U)_H$  eine Umgebung von  $\pi_H(b)$ . Ergo ist  $\pi_H(1) \in \pi_H(U)$ , ergo existiert ein  $h \in H$ , sodass  $h \in U$ . □

**1.1.7 Definition**

Ist  $G$  eine topologische, so ist  $\overline{\{1\}}$  normal.  $G/\overline{\{1\}}$  wird als **Hausdorffquotient** von  $G$  bezeichnet.

**1.1.8 Definition**

Ein Homomorphismus  $\phi : G \rightarrow G'$  topologischer Gruppen heißt **strikt**, falls er den Isomorphiesatz respektiert, d. h., die induzierte Abbildung

$$\phi : G/\text{Kern}\phi \longrightarrow \text{Bild}\phi$$

ist homöomorph.

### 1.1.9 Definition

Eine kurze exakte Sequenz topologischer Gruppen heißt **topologisch exakt**, falls alle beteiligten Abbildungen strikt sind.

## 1.2 Lokal-Kompakte Gruppen

### 1.2.1 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- Wir nennen  $X$  **kompakt**, falls er **quasikompakt** ist, d.h., jede offene Überdeckung von  $X$  besitzt eine offene Teilüberdeckung.
- $X$  heißt **lokal kompakt**, falls jeder Punkt eine Umgebung enthält, deren Abschluss kompakt ist.

### 1.2.2 Bemerkung

- Jede abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.
- Jede kompakte Menge eines Hausdorffraums ist abgeschlossen.
- Ist ein Raum kompakt und hausdorffsch, so erfüllt er **T3**, d.h., er ist **regulär**, d.h., jede abgeschlossene Teilmenge und jeder nicht in dieser Teilmenge liegender Punkt könne durch offene Umgebungen getrennt werden.
- Ein Raum ist genau dann regulär, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Umgebungen besitzt.
- In lokal kompakten Räumen hat jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Umgebungen.
- Ist ein Raum kompakt und hausdorffsch, so erfüllt er **T4**, d.h., er ist **normal**, d.h., disjunkte abgeschlossene Teilmengen werden durch offene Umgebungen getrennt.
- Eine bijektive, stetige Abbildung von einem Kompaktum nach einem Hausdorffraum ist homöomorph.

### 1.2.3 Proposition

Sei  $G$  eine lokal kompakte Gruppe,  $H \leq G$  eine abgeschlossene Gruppe.

- $G/H$  ist ein lokal kompakter Raum.
- Jede kompakte Teilmenge von  $G/H$  besitzt ein kompaktes Urbild.

### 1.2.4 Proposition

Sei  $G$  lokal kompakt und hausdorffsch,  $H \leq G$  eine Untergruppe.

$H$  ist genau dann diskret, wenn  $H \cap K$  für alle kompakten Teilmengen von  $K \subset G$  endlich ist.

## 1.3 Zusammenhangskomponenten

### 1.3.1 Definition

Ein topologischer Raum heißt **zusammenhängend**, wenn er sich nicht in zwei offene, disjunkte, nichtleere Teilräume zerlegen lässt.



### 1.3.2 Bemerkung

- Ist eine Teilmenge eines Raumes zusammenhängend, so ist es auch ihr Abschluss.
- Seien  $A_i \subset X$  jeweils zusammenhängend, dann gilt

$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset \implies \bigcup_{i \in I} A_i \text{ ist zusammenhängend}$$

- Beliebige Produkte zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.
- Bilder zusammenhängender Räume bleiben unter stetigen Abbildungen zusammenhängend.

### 1.3.3 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- Ist  $x \in X$  ein Punkt, so verstehen wir unter der **Zusammenhangskomponente** von  $x$  die größte, zusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die  $x$  enthält.
- $X$  heißt **total unzusammenhängend**, wenn jede Zusammenhangskomponente genau ein Element enthält.
- Ist  $G$  eine topologische Gruppe, so bezeichnen wir mit  $G^o$  die Zusammenhangskomponente der Eins.

### 1.3.4 Proposition

Ist  $G$  eine topologische Gruppe, so ist  $G^o$  ein abgeschlossener Normalteiler.

### 1.3.5 Proposition

Sei  $G$  eine topologische Gruppe,  $H \leq G$  eine Untergruppe. Sind  $H$  und  $G/H$  zusammenhängend, so auch  $G$ .

### 1.3.6 Proposition

Sei  $G$  eine topologische Gruppe, dann ist  $G/G^o$  hausdorffsch und total unzusammenhängend.

### 1.3.7 Bemerkung

Eine total unzusammenhängende Gruppe ist hausdorffsch.

## 1.4 Total Unzusammenhängende Gruppen

### 1.4.1 Satz

Eine hausdorffsche Gruppe ist genau dann total unzusammenhängend und lokal kompakt, wenn jede Umgebung der Eins eine offene und kompakte Untergruppe enthält.

### 1.4.2 Lemma

Sei  $X$  ein kompakter und total unzusammenhängender Hausdorffraum. Bezeichnet  $\mathcal{W}$  für  $x \in X$  die Menge der Umgebungen von  $x$ , die zugleich offen und abgeschlossen sind, so gilt

$$\bigcap_{W \in \mathcal{W}} W = \{x\}$$

### 1.4.3 Lemma

Sei  $G$  eine lokal kompakte und total unzusammenhängende Gruppe,  $U$  eine offene Umgebung von  $x \in G$ .

Dann existiert eine offene und kompakte Umgebung von  $x$ , die in  $U$  enthalten ist.

### 1.4.4 Korollar

Sei  $G$  eine kompakte und total unzusammenhängende Gruppe. Dann enthält jede Umgebung der Eins einen offenen Normalteiler.

## 1.5 Limiten Topologischer Räume

### 1.5.1 Definition: Gerichtet Geordnet

Sei  $I$  eine nichtleere Menge.

- $(I, \leq)$  heißt **teilgeordnet**, falls  $\leq$  auf  $I$  eine binäre Relation ist, die reflexiv und transitiv ist.
- Eine teilgeordnete Menge  $(I, \leq)$  heißt **gerichtet**, falls für jedes Paar  $i, j \in I$  ein  $k \in I$  existiert, sodass  $i \leq k$  und  $j \leq k$ .

### 1.5.2 Definition: Inverses System

Sei  $I$  gerichtet.

- Ein **inverses System**  $(X_i, \phi_{ij})$  topologischer Räume ist ein kontravarianter Funktor  $X : I \rightarrow \mathbf{Top}$ , d. h., die  $X_i$  sind topologische Räume und für jedes  $i \leq j$  ist

$$\phi_{ij} : X_j \longrightarrow X_i$$

eine stetige Abbildung.

- Ein Morphismus inverser Systeme ist eine natürliche Transformation von inversen Systemen.
- Ist  $X$  ein topologischer Raum, so verstehen wir unter  $(X, \text{id}_X)$  das **konstante System** zu  $X$ .

### 1.5.3 Definition: Projektiver Limes

Ein **projektiver bzw. inverser Limes** eines inversen Systemes  $(X_i, \phi_{ij})$  ist ein topologischer Raum

$$X = \lim_{i \in I} (X_i, \phi_{ij}) =: \lim_{i \in I} X_i$$

der den Funktor

$$\mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

$$Y \longmapsto \text{Hom}_{\text{inv.Sys.}}((Y, \text{id}_Y), (X_i, \phi_{ij}))$$

darstellt, d. h.,

$$\text{Hom}_{\mathbf{Top}}(Y, X) \cong \text{Hom}_{\text{inv.Sys.}}((Y, \text{id}_Y), (X_i, \phi_{ij}))$$

### 1.5.4 Bemerkung

- Ein Limes ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie.
- Folgendes Konstrukt ist ein Limes von  $(X_i, \phi_{ij})$

$$X := \left\{ (x_k) \in \prod_{i \in I} X_i \mid \phi_{ij}(x_i) = x_j \forall i \leq j \right\}$$

- Es gilt

$$X = \bigcap_{i \leq j} \left\{ (x_k) \in \prod_{i \in I} X_i \mid \phi_{ij}(x_i) = x_j \right\}$$

### 1.5.5 Proposition

Sei  $(X_i, \phi_{ij})$  ein inverses System topologischer Räume mit stetigen Abbildungen

$$\phi_i : X_i \longrightarrow X := \lim_{i \in I} X_i$$

- Die  $\phi_i^{-1}$  bilden für alle  $i$  und  $U \subseteq_o X_i$  eine Basis der Topologie von  $X$ .
- Eine Teilmenge  $Y \subset X$  mit  $\phi_i(Y) = X_i$  für alle  $i \in I$  liegt dicht in  $X$ .
- Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn für alle  $i \in I$   $\phi_i \circ f$  stetig ist.

### 1.5.6 Proposition

Sei  $(X_i, \phi_{ij})$  ein inverses System topologischer Räume mit Limes  $X$ .

- Sind alle  $X_i$  hausdorffsch, so ist dies auch  $X$ .
- Sind alle  $X_i$  total unzusammenhängend, so auch  $X$ .
- Sind alle  $X_i$  hausdorffsch, so ist

$$\left\{ (x_k) \in \prod_{i \in I} X_i \mid \phi_{ij}(x_i) = x_j \forall i \leq j \right\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von  $\prod_{i \in I} X_i$ .

- Sind alle  $X_i$  kompakt und hausdorffsch, so ist es auch  $X$ .
- Sind alle  $X_i$  nichtleer, kompakt und hausdorffsch, so ist dies auch  $X$ .

### 1.5.7 Proposition

Seien folgende Morphismen inverser Systeme von kompakten und hausdorffschen Gruppen gegeben

$$(F_i, v_{ij}) \xrightarrow{\alpha} (G_i, \phi_{ij}) \xrightarrow{\beta} (H_i, \chi_{ij})$$

Ist diese Sequenz gradweise exakt, d. h., ist für alle  $i \in I$

$$F_i \xrightarrow{\alpha_i} G_i \xrightarrow{\beta_i} H_i$$

exakt, so ist auch die Limessequenz

$$\lim_{i \in I} F_i \xrightarrow{\alpha} \lim_{i \in I} G_i \xrightarrow{\beta} \lim_{i \in I} H_i$$

exakt.

### 1.5.8 Definition: Kolimes

Sei  $I$  gerichtet.

- Ein **direktes System** topologischer Räume ist ein kovarianter Funktor

$$X : I \longrightarrow \mathbf{Top}$$

- Morphismen direkter System sind natürliche Transformationen der zugrunde liegenden Funktoren.
- Ein **Kolimes** eines direkten Systemes  $(X_i, \phi_{ij})$  ist ein topologischer Raum  $X = \operatorname{colim}_{i \in I} X_i$ , der den Funktor

$$Y \longmapsto \operatorname{Hom}((X_i, \phi_{ij}), (Y, \operatorname{id}_Y))$$

darstellt.

### 1.5.9 Bemerkung

Ist  $(X_i, \phi_{ij})$  ein direktes System, so ist folgender Kolimes gegeben

$$\coprod_{i \in I} X_i / \sim$$

wobei

$$x_i \sim x_j \iff \exists k \geq i, j : \phi_{ik}(x_i) = \phi_{jk}(x_j)$$

## 1.6 Proendliche Gruppe

### 1.6.1 Bemerkung

Jede endliche Gruppe wird als eine topologische Gruppe aufgefasst, indem wir sie mit der diskreten Topologie versehen.

### 1.6.2 Definition

Eine topologische Gruppe heißt **proendlich**, wenn sie ein projektiver Limes eines inversen Systems endlicher Gruppen ist.

### 1.6.3 Satz

Sei  $G$  eine topologische Gruppe. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $G$  ist proendlich.
- $G$  ist kompakt und total unzusammenhängend.
- $G$  ist kompakt und

$$\bigcap_{N \trianglelefteq_o G} N = \{1\}$$

### 1.6.4 Lemma

Sei  $G$  eine topologische Gruppe,  $I$  eine Familie abgeschlossener Normalteiler, sodass gilt

$$N_1, N_2 \in I \implies \exists N_3 \in I : N_3 \subseteq N_1 \cap N_2$$

- Definiere für  $N_1, N_2 \in I$

$$N_1 \preceq N_2 \iff N_1 \supseteq N_2$$

Dann ist  $(I, \preceq)$  gerichtet.

- Setzt man für  $N_i \preceq N_j$

$$\phi_{ij} : G/N_j \longrightarrow G/N_i$$

so ist  $(G/N_i, \phi_{ij})$  ein inverses System.

Definiere

$$\widehat{G} := \lim_{N \in I} G/N$$

Es existiert ein kanonischer Morphismus stetiger Gruppen

$$v : G \longrightarrow \widehat{G}$$

mit Kern

$$\text{Kern } v = \bigcap_{N \in I} N$$

- Ist  $G$  kompakt, so ist  $v$  surjektiv.

## 1.7 Unendliche Galoistheorie

### 1.7.1 Satz

Sei  $L|K$  eine galoissche, nicht notwendigerweise endliche Körpererweiterung. Definiere

$$G(L|K) := \text{Aut}_{K-\text{Alg.}}(L)$$

$G(L|K)$  erhält eine Topologie als Gruppe, indem wir Untergruppen der Gestalt

$$G(L|E)$$

für alle endlichen, galoisschen Teilerweiterungen  $E|K$  zu einer Umgebungsbasis der Eins in  $G(L|K)$  zusammenfassen. Es gilt dann

$$G = \lim_{\substack{L|E|K \\ E|K \text{ endl., gal.}}} G(E|K)$$

### 1.7.2 Satz: Satz der Unendlichen Galoistheorie

Für eine galoissche Körpererweiterung  $K$  herrschen folgende Dualitäten vor

$$\begin{array}{ccc} \{L|E|K \text{ galoissche Zwischenerweiterung}\} & \longleftrightarrow & \{U \subseteq_{\text{abg}} G\} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \{L|E|K \text{ endliche, galoissche Zwischenerweiterung}\} & \longleftrightarrow & \{U \subseteq_o G\} \end{array}$$

durch

$$\begin{array}{l} E \longmapsto G(L|E) \\ H \longmapsto L^H \end{array}$$



## Kapitel 2

# Klassenkörpertheorie – Motivation und Hauptresultate

### 2.1 Abelsche Erweiterungen von $\mathbb{Q}$

#### 2.1.1 Satz: Kroncker-Weber

Sei  $L|\mathbb{Q}$  eine endliche Erweiterung. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $L|\mathbb{Q}$  ist abelsch.
- $L$  ist enthalten in einem Kreisteilungskörper  $\mathbb{Q}(\mu_n)$ .

#### 2.1.2 Satz

Sei  $N \in \mathbb{N}$ ,  $L|\mathbb{Q}$  endlich. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- $L \subseteq \mathbb{Q}(\mu_N)$ .
- Ob eine Primzahl  $p$  in  $L$  voll zerlegt ist, hängt nur von  $p \bmod n$  ab.

#### 2.1.3 Satz

Sei  $L|\mathbb{Q}$  abelsch und  $N$  minimal mit

$$L \subseteq \mathbb{Q}(\mu_N)$$

Für jede Primzahl  $p$  gilt

$$p \text{ ist in } L \text{ verzweigt} \iff p|N$$

#### 2.1.4 Satz

Sei  $N \in \mathbb{N}$  und  $H \subseteq (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \cong G(\mathbb{Q}(\mu_N)/\mathbb{Q})$  beliebig. Es bezeichne  $L = \mathbb{Q}(\mu_N)^H$ . Für  $p \nmid N$  prim gilt:

- $p$  ist unverzweigt in  $L$ .
- $p$  ist genau dann voll zerlegt in  $L$ , wenn  $p \bmod N \in H$ .
- Ist  $f$  die kleinste natürliche Zahl, die

$$p^f \bmod N \in H$$

erfüllt, so ist  $p\mathcal{O}_L$  ein Produkt von  $[L:\mathbb{Q}]/f$  verschiedenen Primidealen.

### 2.1.5 Proposition

Sei  $L|K$  galoissch und  $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$  unverzweigte Stellen in  $\mathcal{O}_L|\mathcal{O}_K$ . Es bezeichne  $\lambda = \mathcal{O}_L/\mathfrak{P}$  und  $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathfrak{p}$  die korrespondierenden Restklassenkörper. Dann ist  $G_{\mathfrak{P}} := G(\lambda|\kappa) \xhookrightarrow{\iota} G(L|K)$  zyklisch und wird vom **Frobeniusautomorphismus**

$$\begin{aligned}\phi_q : \lambda &\longrightarrow \lambda \\ x &\longmapsto x^q\end{aligned}$$

erzeugt, wobei  $q = \#\kappa$ . Definiere für  $\sigma \in G(L|K)$

$$\text{Frob}_{\mathfrak{p},\mathfrak{P}} := \iota(\phi_q) \text{ und } \text{Frob}_{\mathfrak{p},\sigma(\mathfrak{P})} := \sigma \text{Frob}_{\mathfrak{p},\mathfrak{P}} \sigma^{-1}$$

und folgende Äquivalenzklasse

$$\text{Frob}_{\mathfrak{p}} := \text{Frob}_{\mathfrak{p},L} := \{ \text{Frob}_{\mathfrak{p},\sigma(\mathfrak{P})} \mid \sigma \in G(L|K) \} \subset G(L|K)$$

Dann gilt

- Es gilt  $\text{Frob}_{\mathfrak{p}} = \{1\}$  genau dann, wenn  $\mathfrak{p}$  total zerlegt in  $L|K$  ist.
- Es gilt

$$\#\{\mathfrak{P}'|\mathfrak{p}\} = \frac{\#G(L|K)}{\#G_{\mathfrak{P}'}}$$

- Ist  $L|K$  abelsch, so besteht  $\text{Frob}_{\mathfrak{p}}$  aus dem eindeutig bestimmten Element, das auf  $\lambda$  die Abbildung  $x \mapsto x^q$  induziert.
- Ist  $L'|K$  eine galoissche Zwischenerweiterung, so gilt

$$\text{Frob}_{\mathfrak{p},L} \xrightarrow{\text{res}} \text{Frob}_{\mathfrak{p},L'}$$

### 2.1.6 Proposition

Es gelte  $p \nmid N$ . Dann ist  $p$  unverzweigt in  $\mathbb{Q}(\mu_N)$  und es herrscht folgende Isomorphie vor

$$\begin{aligned}\chi_{\text{cyc},N} : G(\mathbb{Q}(\mu_N)|\mathbb{Q}) &\xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \\ \text{Frob}_p &\longmapsto p \pmod{N}\end{aligned}$$

## 2.2 Quadratische Erweiterungen

### 2.2.1 Proposition

Sei  $m$  eine quadratfreie ganze Zahl. Dann ist  $\mathbb{Q}(\sqrt{m})|\mathbb{Q}$  abelsch. Setzt man

$$N := \begin{cases} |m| & m \equiv 1 \pmod{4} \\ 4|m| & m \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

so ist  $N$  minimal mit der Eigenschaft

$$\mathbb{Q}(\sqrt{m}) \subset \mathbb{Q}(\mu_N)$$



### 2.2.2 Definition: Legendre-Symbol

Sei  $p > 2$  eine ungerade Primzahl und  $a \in \mathbb{Z}$  beliebig. Definiere das **Legendre-Symbol** durch

$$\left(\frac{a}{p}\right) := \begin{cases} 1 & p \nmid a \text{ und } a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times)^2 \\ 0 & p \mid a \\ -1 & p \nmid a \text{ und } a \notin (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times)^2 \end{cases}$$

wobei  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times)^2 = \{x^2 \mid 0 \neq x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$  die Quadratzahlen modulo  $p$  bezeichnet.

Die Abbildung  $\left(\frac{\cdot}{p}\right) : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times \rightarrow \{\pm 1\}$  ist multiplikativ, weswegen folgende kurze exakte Sequenz vorliegt

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^\times)^2 \hookrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\left(\frac{\cdot}{p}\right)} \{\pm 1\} \longrightarrow 1$$

Ferner gilt

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

### 2.2.3 Proposition: Trivialer Zerlegungssatz

Sei  $m$  quadratfrei und  $p$  eine ungerade Primzahl, die teilerfremd zu  $m$  ist. Es gilt

$$p \text{ ist voll zerlegt in } \mathbb{Q}(\sqrt{m}) \iff \left(\frac{m}{p}\right) = 1$$

### 2.2.4 Definition: Dirichlet-Charaktere

Sei  $m$  quadratfrei. Setze

$$N := \begin{cases} |m| & m \equiv 1 \pmod{4} \\ 4|m| & m \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

- Unter einem **Dirichlet-Charakter** verstehen wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

- Ein Dirichlet-Charakter  $\chi$  heißt **primitiv**, falls es kein  $d \in \{1, \dots, m-1\}$  gibt, für welches  $\chi$  über

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

faktorisiert.

- Definiere

$$\begin{aligned} \chi_m : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times &\longrightarrow \{\pm 1\} \subset \mathbb{C}^\times \\ a &\longmapsto \Theta_m(a) \cdot \prod_{\substack{e \mid m \\ e > 2 \text{ prim}}} \left(\frac{a}{e}\right) \end{aligned}$$

wobei

$$\Theta_m(a) := \begin{cases} 1 & m \equiv 1 \pmod{4} \\ 1 & m \equiv 3 \pmod{4} \text{ und } a \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & m \equiv 3 \pmod{4} \text{ und } a \not\equiv 1 \pmod{4} \\ 1 & m \equiv 2 \pmod{4} \text{ und } a \equiv 1 \text{ oder } 1-m \pmod{4} \\ -1 & m \equiv 2 \pmod{4} \text{ und } a \not\equiv 1 \text{ oder } 1-m \pmod{4} \end{cases}$$

### 2.2.5 Lemma

Sei  $m$  quadratfrei. Setze

$$N := \begin{cases} |m| & m \equiv 1 \pmod{4} \\ 4|m| & m \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

Dann gilt

- $\chi_m$  ist primitiv.
- 

$$\chi_m(-1) = \begin{cases} 1 & m > 0 \\ -1 & m < 0 \end{cases}$$

### 2.2.6 Definition: Gaußsche Summen

Sei  $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  ein Dirichlet-Charakter und  $\zeta_N$  eine primitive  $N$ -te Einheitswurzel. Definiere die **Gaußsche Summe** von  $\chi$  und  $\zeta_N$  durch

$$G(\chi, \zeta_N) := \sum_{a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}^\times} \chi(a) \zeta_N^a$$

Bezeichne mit  $\bar{\chi}$  den komplex konjugierten Charakter von  $\chi$ .

### 2.2.7 Satz

Sei  $\chi$  primitiv. Dann gilt

- Für alle  $n \in \mathbb{Z}$  gilt

$$G(\chi, \zeta_N^n) = \bar{\chi}(n) G(\chi, \zeta_N)$$

- $|G(\chi, \zeta_N)| = \sqrt{N}$
- Ist  $m$  quadratfrei und gilt für  $N$

$$N = \begin{cases} |m| & m \equiv 1 \pmod{4} \\ 4|m| & m \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

dann folgt

$$G(\chi_m, \zeta_N)^2 = \begin{cases} m & m \equiv 1 \pmod{4} \\ 4m & m \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

### 2.2.8 Satz

Sei  $m$  quadratfrei und  $N = \begin{cases} |m| & m \equiv 1 \pmod{4} \\ 4|m| & m \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$ . Dann kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G(\mathbb{Q}(\mu_N)|\mathbb{Q}) & \xrightarrow[\cong]{\chi_{\text{cyc}, N}} & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times \\ \text{res} \downarrow & & \downarrow \chi_m \\ G(\mathbb{Q}(\sqrt{m})/\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\sigma \mapsto \frac{\sigma(\sqrt{m})}{\sqrt{m}}} & \{\pm 1\} \end{array}$$

**2.2.9 Satz**

Sei  $m$  quadratfrei und  $N = \begin{cases} |m| & m \equiv 1 \pmod{4} \\ 4|m| & m \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$   
 $p$  sei eine zu  $N$  teilerfremde Primzahl. Es gilt

$$p \text{ ist voll zerlegt in } \mathbb{Q}(\sqrt{m}) \iff \chi_m(p) = 1$$

**2.2.10 Satz: Gaußsches Quadratisches Reziprozitätsgesetz**

Für zwei ungerade, verschiedene Primzahlen  $p, q$  gilt

$$\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)$$

**Ergänzungssätze**

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \text{ und } \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

**2.2.11 Definition**

Sei  $K$  ein Zahlkörper. Ein Element  $a \in K^\times$  heißt **total positiv**, falls für alle reellen Stellen  $\iota : K \hookrightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\iota(a) > 0$$

**2.2.12 Satz: Strahlklassenkörper**

Sei  $K$  ein Zahlkörper und  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  ein Ideal.

- Es existiert genau eine endliche Körpererweiterung  $K(\mathfrak{a})|K$ , die folgende Eigenschaften für jedes Ideal  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$  erfüllt
  - $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a} \implies \mathfrak{p}$  ist unverzweigt in  $K(\mathfrak{a})$ .
  - $\mathfrak{p}$  zerlegt sich voll in  $K(\mathfrak{a}) \iff$  es existiert ein total positives  $\alpha \in 1 + \mathfrak{a}$  mit  $\mathfrak{p} = (\alpha)$ .

Wir nennen in diesem Fall  $K(\mathfrak{a})$  den **Strahlklassenkörper**  $\bmod \mathfrak{a}$ .

- $K(\mathfrak{a})/K$  ist abelsch und jede endliche abelsche Erweiterung ist in einem Strahlklassenkörper enthalten.
- $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \iff K(\mathfrak{b}) \supset K(\mathfrak{a})$
- Für jede endliche abelsche Erweiterung  $L|K$  existiert ein Ideal  $\mathfrak{f} \subset \mathcal{O}_K$ , das maximal ist mit der Eigenschaft  $L \subset K(\mathfrak{f})$ . Dieses Ideal nennen wir den **Führer** der Erweiterung  $L|K$ .  
 Für jedes Ideal  $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_K$  gilt:

$$\mathfrak{p} \text{ verzweigt in } L \iff \mathfrak{p} | \mathfrak{f}$$

## 2.3 Abstrakte bzw. Axiomatische Klassenkörpertheorie

### 2.3.1 Definition: Stetiger $G$ -Modul

Sei  $K$  ein Körper und  $G := G_K := G(\bar{K}|K)$  die Galoisgruppe der maximalen separablen Erweiterung von  $K$ .

Eine abelsche, multiplikativ geschriebene Gruppe  $A$  heißt **stetiger  $G$ -Modul**, falls eine stetige Rechtswirkung von  $G$

$$\begin{aligned} G \times A &\longrightarrow A \\ (\sigma, a) &\longmapsto a^\sigma \end{aligned}$$

gegeben ist, wobei  $A$  hierbei mit der diskreten Topologie und  $G$  mit der proendlichen Topologie ausgestattet wird, sodass folgende Eigenschaften erfüllt werden:

- $a^1 = a$
- $(ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma$
- $(a^\sigma)^\tau = a^{\sigma\tau}$
- $A = \bigcup_{L|K \text{ endl.}} A_L$  wobei

$$A_L := A^{G_L} = \{a \in A \mid a^\sigma = a \forall \sigma \in G_L = G(\bar{L}|L)\}$$

### 2.3.2 Definition: Normabbildung

Sei eine endliche Körpererweiterung  $L'|L$  galoissch über  $K$  gegeben. Definiere folgende **Normabbildung**

$$\begin{aligned} N_{L'|L} : A_{L'} &\longrightarrow A_L \\ a &\longmapsto \prod_{\sigma \in G_L/G_{L'}} a^\sigma \end{aligned}$$

Ist  $L'|L$  galoissch, so ist  $A_{L'}$  ein  $G(L'|L)$ -Modul und es gilt

$$A_{L'}^{G(L'|L)} = A_L$$

### 2.3.3 Definition: Kohomologie

Sei eine endliche, galoissche Körpererweiterung  $L'|L$  galoissch über  $K$  gegeben. Definiere folgende **Tate-Kohomologiegruppen**

$$\begin{aligned} H^0(G(L'|L), A_{L'}) &:= A_L / N_{L'|L} A_{L'} \\ H^{-1}(G(L'|L), A_{L'}) &:= {}_{N_{L'|L}} A_{L'} / I_{G(L'|L)} A_{L'} \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} {}_{N_{L'|L}} A_{L'} &:= \{a \in A_{L'} \mid N_{L'|L}(a) = 1\} \\ I_{G(L'|L)} A_{L'} &:= \{a^{\sigma-1} \mid a \in A_{L'}, \sigma \in G(L'|L)\} \end{aligned}$$

${}_{N_{L'|L}} A_{L'}$  nennen wir auch die **Normrestgruppe**.

### 2.3.4 Definition: Verlagerung

Sei  $G$  eine Gruppe und  $H$  eine Untergruppe mit endlichen Index.  $R = G/H$  bezeichne ein Repräsentantensystem der Linksnebenklassen von  $H$ , welches die 1 enthält.

Definiere die **Verlagerung** durch

$$\begin{aligned} Ver : G^{ab} &\longrightarrow H^{ab} \\ [g] &\longmapsto \left[ \prod_{r \in R} g_r \right] \end{aligned}$$

wobei die  $g_r$  hinreichend wohldefiniert sind durch

$$gr = r'g_r$$

für ein  $r' \in R$ .

### 2.3.5 Definition: Normrestsymbol

Sei eine endliche, galoissche Körpererweiterung  $L|K$  gegeben. Definiere das **Normrestsymbol** durch

$$(\_, L|K) : A_K \twoheadrightarrow A_K/NL|KA_L \xrightarrow{\cong} G(L|K)^{ab}$$

Das Normrestsymbol erfüllt folgende Eigenschaften:

(A1) Für alle  $\sigma \in G_K$  kommutiert

$$\begin{array}{ccc} A_K & \xrightarrow{(\_, L|E)} & G(L|K)^{ab} \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma^* : g \mapsto \sigma g \sigma^{-1} \\ A_{K^\sigma} & \xrightarrow{(\_, L^\sigma|K^\sigma)} & G(L^\sigma|K^\sigma)^{ab} \end{array}$$

(A2) Sei  $K'|K$  eine endliche Erweiterung und setze  $L' = K'L$ . Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} A_{K'} & \xrightarrow{(\_, L'|K')} & G(L'|K')^{ab} \\ N_{L'|L} \downarrow & & \downarrow \sigma \mapsto \sigma|_L \\ A_K & \xrightarrow{(\_, L|K)} & G(L|K)^{ab} \end{array}$$

(A3) Liegen endliche Körpererweiterungen  $L|K'|K$  vor, sodass  $L$  und  $K'$  galoissch über  $K$  sind, so kommutiert

$$\begin{array}{ccc} A_{K'} & \xrightarrow{(\_, L|K')} & G(L|K')^{ab} \\ \uparrow & & \uparrow Ver \\ A_K & \xrightarrow{(\_, L|K)} & G(L|K)^{ab} \end{array}$$

## 2.4 Haupttheoreme der Klassenkörpertheorie

### 2.4.1 Definition: Lokaler Körper

Unter einem **lokalen Körper** verstehen wir  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  oder einen vollständigen, diskret bewerteten Körper mit endlichem Restklassenkörper.

### 2.4.2 Satz: Lokale Klassenkörpertheorie

Sei  $K$  ein lokaler Körper.

- Es existiert genau ein stetiger Gruppenhomomorphismus

$$\phi_K : K^\times \longrightarrow G_K^{ab}$$

der folgende Eigenschaften erfüllt:

- Für jede endliche, abelsche Erweiterung  $L|K$  induziert  $\phi_K$  einen Isomorphismus

$$K^\times / N_{L|K} L^\times \xrightarrow{\cong} G(L|K)$$

- Ist  $K \neq \mathbb{R}, \mathbb{C}$  und besitzt den endlichen Restklassenkörper  $\kappa$ , so kommutiert folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} K^\times & \xrightarrow{\phi_K} & G(K^{ab}|K) \\ \downarrow v_K : \pi_K \mapsto 1 & & \downarrow \text{res} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\phi_\kappa : 1 \mapsto \phi_{\#\kappa}} & G(\bar{\kappa}|\kappa) \xrightarrow{\cong} G(K^{uv}|K) \end{array}$$

wobei  $K^{ab}$  die maximale abelsche Erweiterung von  $K$  und  $K^{uv}$  ihre maximale unverzweigte Teilerweiterung ist.

- Es ergeben sich folgende Korrespondenzen

$$\begin{array}{ccc} \{H \leq_o G(K^{ab}|K)\} & \xleftarrow{1:1} & \{U \subseteq_o K^\times \text{ von endlichem Index}\} \\ \uparrow 1:1 & & \\ \{L|K \text{ endlich, abelsch}\} & & \end{array}$$

### 2.4.3 Definition: Globale Körper

Unter einem **globalen Körper** verstehen wir einen Zahl- bzw. Funktionenkörper.

### 2.4.4 Satz: Globale Klassenkörpertheorie

Sei  $K$  ein globaler Körper,  $C_K$  bezeichne seinen Ideleguppe.

- Es existiert genau ein stetiger Gruppenhomomorphismus

$$\phi_K : C_K \longrightarrow G_K^{ab}$$

sodass für jede Stelle  $v$  von  $K$  folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
K_v^\times & \xrightarrow{\phi_{K_v}} & G(K_v^{ab}|K_v) \\
\pi_v \mapsto ? \downarrow & & \downarrow \\
C_K & \xrightarrow{\phi_K : ? \mapsto \text{Frob}_v} & G(K^{ab}|K)
\end{array}$$

wobei  $K_v$  die Kompletterung von  $K$  bzgl.  $v$  bezeichnet.

- Für jede endliche, abelsche Erweiterung  $L|K$  induziert  $\phi_K$  einen Isomorphismus

$$C_K/N_{L|K}C_L \xrightarrow{\cong} G(L|K)$$

- Es ergeben sich folgende Korrespondenzen

$$\begin{array}{ccc}
\{H \leq_o G(K^{ab}|K)\} & \xleftarrow{1:1} & \{U \subseteq_o C_K \text{ von endlichem Index}\} \\
\uparrow & & \\
1:1 & & \\
\downarrow & & \\
\{L|K \text{ endlich, abelsch}\} & & 
\end{array}$$

## 2.5 Was besagt die Klassenkörpertheorie? Erste Folgerungen der Hauptresultate

### 2.5.1 Satz

Sei  $L|K$  eine endliche, abelsche Erweiterung globaler Körper.  $v$  sei eine Stelle von  $K$ ,  $\pi_v \in \mathcal{O}_{K_v} \subset K_v$  die zugehörige lokale Stelle. Definiere folgende Abbildung

$$\Theta : K_v^\times \hookrightarrow C_K \longrightarrow C_K/N_{L|K}C_L$$

Dann gilt

- $v$  zerlegt sich voll in  $L \iff \Theta(K_v^\times) = \{1\}$

- Ist  $v$  endlich, so gilt

$$v \text{ ist unverzweigt in } L \iff \Theta(\mathcal{O}_{K_v}^\times) = \{1\}$$

- Sei  $v$  endlich und unverzweigt in  $L$ . Dann liegt folgende Isomorphie vor

$$\begin{array}{ccc}
C_K/N_{L|K}C_L & \longrightarrow & G(L|K) \\
\Theta(\pi_v) & \longmapsto & \text{Frob}_v
\end{array}$$





## Kapitel 3

# Adele, Idele und Verallgemeinerte Idealklassengruppen

### 3.1 Eingeschränkte Produkte

#### 3.1.1 Bemerkung

Ab sofort heißt ein topologischer Raum *kompakt*, falls er *quasikompakt* und *hausdorffsch* ist. Ein Raum heißt ferner ab jetzt *lokal kompakt*, falls er *hausdorffsch* und *lokal quasikompakt* ist.

#### 3.1.2 Definition: Eingeschränkte Produkte

Sei  $I$  eine Indexmenge,  $(G_i)_{i \in I}$  eine Familie lokal kompakter, abelscher Gruppen und  $(U_i)_{i \in I}$  eine Familie jeweils kompakter, offener Untergruppen.

Definiere das **restringierte Produkt** bzw. **eingeschränkte Produkt** von  $(G_i)_i$  bzgl.  $(U_i)_i$  durch

$$\prod'_{i \in I} G_i := \left\{ (x_i)_i \in \prod_{i \in I} G_i \mid x_i \in U_i \text{ f\"ur } i \in I \right\}$$

Definiere für eine endliche Menge  $J \subset I$

$$G_J := \prod_{i \in J} G_i \times \prod_{i \in I \setminus J} G_i$$

Dann gilt

$$\prod'_{i \in I} G_i = \bigcup_{J \text{ endlich}} G_J$$

Jedes  $G_J$  trägt die Produkttopologie und ist lokal kompakt; das restringierte Produkt  $\prod'_{i \in I} G_i$  wird nun mit der dadurch induzierten Kolimestopologie versehen. Dadurch ist  $\prod'_{i \in I} G_i$  ebenfalls lokal kompakt und für jedes  $V \subset \prod'_{i \in I} G_i$  gilt insbesondere

$$V \subset_o G \iff V \cap G_J \subset_o G_J \text{ für alle } J \text{ endlich}$$

Die Menge

$$\left\{ \prod_{i \in J} O_i \times \prod_{i \in I \setminus J} U_i \mid J \subset I \text{ endlich und } 1 \in O_i \subset_o G_i \right\}$$

bilde eine Umgebungsbasis der Eins in  $\prod'_{i \in I} G_i$ .

Ferner wird folgende universelle Abbildungseigenschaft für jede hausdorffsche, abelsche Gruppe  $Z$  erfüllt

$$\mathrm{Hom}_{cts} \left( \prod'_{i \in I} G_i, Z \right) = \left\{ (f_i)_i \in \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{cts} (G_i, Z) \mid \text{ffa } i \in I \text{ ist } f_i(U_i) \text{ in jedem } 1 \in U \subset_o Z \text{ enthalten} \right\}$$

## 3.2 Adele und Idele

### 3.2.1 Definition: Adelering und Idelering

Sei  $K$  ein globaler Körper,  $S$  die Menge aller Stellen von  $K$ . Definiere den **Adelering** von  $K$  durch das restringierte Produkt

$$\mathbb{A}_K := \prod'_{v \in S} K_v \text{ bzgl. } (\mathcal{O}_v)_{v \in S}$$

und die **Idelegruppe** durch

$$\mathbb{A}_K^\times := \prod'_{v \in S} K_v^\times \text{ bzgl. } (\mathcal{O}_v^\times)_{v \in S}$$

### 3.2.2 Bemerkung

$$(\mathbb{A}_K)^\times = \mathbb{A}_K^\times$$

### 3.2.3 Definition: Hauptadele und Hauptidele

Es liegen folgende Homomorphismen vor

$$\begin{array}{ll} K \hookrightarrow \mathbb{A}_K & K^\times \hookrightarrow \mathbb{A}_K^\times \\ a \mapsto (a)_v & a \mapsto (a)_v \end{array}$$

Die Bilder dieser Inklusionen nennen wir **Hauptadele** bzw. **Hauptidele**.

Die **Idele-Klassengruppe** ist definiert durch

$$C_K := \mathbb{A}_K^\times / K^\times$$

Ferner liegt folgender stetiger multiplikativer Monoid-Homomorphismus vor

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{A}_K &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (a_v)_v &\longmapsto |a| := \prod_v |a|_v \end{aligned}$$

### 3.2.4 Satz: Produktformel

Sei  $K$  global, dann gilt für alle  $a \in K^\times$

$$|a| = 1$$

### 3.2.5 Satz

Sei  $K$  global.

- $K$  liegt in  $\mathbb{A}_K$  diskret und  $\mathbb{A}_K/K$  ist kompakt.
- Definiere

$$\mathbb{A}_K^1 := \{a \in \mathbb{A}_K^\times \mid |a| = 1\}$$

$K^\times$  liegt in  $\mathbb{A}_K^1$  diskret und  $C_K^1 := \mathbb{A}_K^1 / K^\times$  ist kompakt.

### 3.2.6 Bemerkung

$C_K = \mathbb{A}_K^\times / K^\times$  ist im Allgemeinen nicht kompakt.

### 3.2.7 Bemerkung: Idealklassengruppe

Sei  $K$  ein Zahlkörper,  $\mathcal{I}$  bezeichne die Menge der gebrochenen Ideale von  $K$ ,  $\mathcal{P}$  die Menge der gebrochenen Hauptideale.

Die **Idealklassengruppe** ist definiert durch

$$Cl(K) = \mathcal{I} / \mathcal{P}$$

Bezeichnet  $S_f$  die Menge der endlichen Stellen von  $K$  und  $S_\infty$  die Menge der unendlichen Stellen von  $K$ , so definiere

$$\mathcal{U} := \prod_{v \in S_\infty} K_v^\times \times \prod_{v \in S_f} \mathcal{O}_v^\times \subset \mathbb{A}_K^\times$$

Es gilt

$$\mathbb{A}_K^\times / \mathcal{U} \cong \bigoplus_{v \in S_f} K_v^\times / \mathcal{O}_v^\times \cong \mathcal{I}$$

Definiert man ferner  $\overline{\mathcal{U}} := K^\times \cdot \mathcal{U} / K^\times$ , so gilt

$$C_K / \overline{\mathcal{U}} \cong Cl(K)$$

### 3.2.8 Definition: Verallgemeinerte Idealklassengruppe

Sei  $K$  ein Zahlkörper.

Definiere für ein Ideal  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$

$$\mathcal{U}(\mathfrak{a}) := \prod_{v \in S} U_v(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{U}$$

wobei

$$U_v(\mathfrak{a}) := \begin{cases} \{x \in \mathcal{O}_{K_v} \mid x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}\mathcal{O}_{K_v}}\} = 1 + \mathfrak{m}_v^{n_v(\mathfrak{a})} = 1 + \mathfrak{a}\mathcal{O}_{K_v} & v \in S_f \\ K_v^\times & v \text{ komplex} \\ \mathbb{R}_{>0} \cap K_v^\times & v \text{ reell} \end{cases}$$

Die **verallgemeinerte Idealklassengruppe** ist definiert durch

$$Cl(K, \mathfrak{a}) = C_K / \overline{\mathcal{U}(\mathfrak{a})}$$

Es gilt für Ideale  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$

$$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b} \iff \mathcal{U}(\mathfrak{a}) \leq \mathcal{U}(\mathfrak{b}) \iff Cl(K, \mathfrak{a}) \twoheadrightarrow Cl(K, \mathfrak{b})$$

und

$$Cl(K, \mathcal{O}_K) = Cl(K)$$

### 3.2.9 Bemerkung: Alternative Beschreibung der Idealklassengruppe

Sei  $K$  ein Zahlkörper,  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  ein Ideal.

Es sei

$$S(\mathfrak{a}) := \{v \in S_f \mid n_v(\mathfrak{a}) \neq 0\}$$

Definiere für ein Ideal  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  die Gruppe der zu  $\mathfrak{a}$  teilerfremden gebrochenen Ideale

$$\mathcal{I}(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c} \mid \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \subseteq \mathcal{O}_K \text{ teilerfremd zu } \mathfrak{a}\} \cong \bigoplus_{v \in S_f \setminus S(\mathfrak{a})} \mathbb{Z}$$

und die Gruppe der  $\mathfrak{a}$  teilerfremden gebrochenen Hauptideale

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a}) := \{(\alpha) \in K^\times \mid \alpha \text{ ist lokal positiv und } \forall v \in S(\mathfrak{a}) : \alpha \in 1 + \mathfrak{a}\mathcal{O}_{K_v}\}$$

### 3.2.10 Bemerkung

Im Allgemeinen gilt

$$\mathcal{P}(\mathfrak{a}) \subsetneq \mathcal{P} \cap \mathcal{I}(\mathfrak{a})$$

In jedem Fall gilt wegen dem Approximationsatz

$$\mathcal{I}(\mathfrak{a})/\mathcal{P} \cap \mathcal{I}(\mathfrak{a}) = \mathcal{I}/\mathcal{P} = Cl(K)$$

### 3.2.11 Satz

Sei  $K$  ein Zahlkörper,  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  ein Ideal.

Setze

$$S := S_\infty \cup S(\mathfrak{a})$$

Beachte, dass für  $v \notin S$   $U_v(\mathfrak{a}) = \mathcal{O}_{K_v}^\times$  gilt. Wir erklären folgenden Homomorphismus

$$\phi : \mathcal{I}(\mathfrak{a}) \cong \bigoplus_{v \notin S} \mathbb{Z} \cong \bigoplus_{v \notin S} K_v^\times / U_v(\mathfrak{a}) \subset \mathbb{A}_K^\times / \mathcal{U}(\mathfrak{a}) \twoheadrightarrow C_K / \overline{\mathcal{U}(\mathfrak{a})} = Cl(K, \mathfrak{a})$$

Es gilt

- $\phi$  induziert einen Isomorphismus

$$\phi : \mathcal{I}(\mathfrak{a})/\mathcal{P}(\mathfrak{a}) \longrightarrow Cl(K, \mathfrak{a})$$

- Es liegt folgende kurze exakte Sequenz vor

$$1 \longrightarrow \left( \bigoplus_{v \text{ reell}} \mathbb{R}^\times / \mathbb{R}_{>0} \oplus (\mathcal{O}_K/\mathfrak{a})^\times \right) / \mathcal{O}_K^\times \longrightarrow Cl(K, \mathfrak{a}) \longrightarrow Cl(K) \longrightarrow 1$$

Insbesondere ist  $Cl(K, \mathfrak{a})$  endlich.

### 3.2.12 Satz: Approximationssatz

Sei  $K$  ein Zahlkörper,  $S$  eine endliche Stellenmenge. Für jedes  $v \in S$  sei ein  $x_v \in K$  vorgegeben. Dann existiert für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $x \in K$ , sodass für alle  $v \in S$  gilt

$$|x - x_v|_v < \epsilon$$

### 3.2.13 Definition

Sei  $K$  ein Zahlkörper,  $0 \neq \mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$  ein Ideal,  $S = S_\infty \cup S(\mathfrak{a})$ .

Definiere

$$K_{\mathfrak{a}}^\times := \text{Kern} \left( K^\times \rightarrow \bigoplus_{v \in S} K_v^\times / U_v(\mathfrak{a}) \right)$$

und

$$\mathcal{O}_{K, \mathfrak{a}}^\times := K_{\mathfrak{a}}^\times \cap \mathcal{O}_K^\times$$

Dann liegt folgende Isomorphie vor

$$K_{\mathfrak{a}}^\times / \mathcal{O}_{K, \mathfrak{a}}^\times = \mathcal{P}(\mathfrak{a})$$

**3.2.14 Lemma**

Folgende Sequenz ist exakt

$$1 \longrightarrow K_{\mathfrak{a}}^{\times} \longrightarrow K^{\times} \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} K_v^{\times} / U_v(\mathfrak{a}) \longrightarrow 1$$

**3.2.15 Satz: Schlangenlemma**

Sei folgendes kommutative Diagramm von  $R$ -Moduln gegeben

$$\begin{array}{ccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \end{array}$$

Es liegt folgende exakte Sequenz vor

$$\mathrm{Kern} a \longrightarrow \mathrm{Kern} b \longrightarrow \mathrm{Kern} c \xrightarrow{\delta} \mathrm{Kokern} a \longrightarrow \mathrm{Kokern} b \longrightarrow \mathrm{Kokern} c$$

**3.2.16 Bemerkung**

Definiere

$$\mathbb{A}_{K,\mathfrak{a}}^{\times} := \prod_{v \in S} U_v(\mathfrak{a}) \times \prod'_{v \notin S} K_v^{\times}$$

dann liegt folgende Isomorphie vor

$$\mathbb{A}_{K,\mathfrak{a}}^{\times} \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}_K^{\times} / K^{\times}$$

und folgende surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathfrak{a}} : \mathbb{A}_{K,\mathfrak{a}}^{\times} &\longrightarrow \mathcal{I}(\mathfrak{a}) \\ (a)_v &\longmapsto (a) := \prod_{v \in S_f} \mathfrak{p}_v^{v(a_v)} \end{aligned}$$

**3.3 Normgruppen****3.3.1 Definition: Spur und Norm**

Sei  $L|K$  eine endliche, galoissche Erweiterung globaler Körper.

Definiere die **Spurabbildung** auf den Adelen durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_{L|K} : \mathbb{A}_L &\longrightarrow \mathbb{A}_K \\ (x_w)_w &\longmapsto \left( \sum_{w|v} \mathrm{Tr}_{L_w|K_v}(x_w) \right)_v \end{aligned}$$

und die **Normabbildung** durch

$$\begin{aligned} N_{L|K} : \mathbb{A}_L^{\times} &\longrightarrow \mathbb{A}_K^{\times} \\ (x_w)_w &\longmapsto \left( \prod_{w|v} N_{L_w|K_v}(x_w) \right)_v \end{aligned}$$

$G(L|K)$  operiert auf den Adelen bzw. Idelen durch

$$((x_w)_w)^\sigma := (x_w^\sigma)_{w^\sigma} = (x_{w^{\sigma^{-1}}}^\sigma)_w$$

für  $(x_w)_w \in \mathbb{A}_L$ . Es gilt ferner

$$\mathbb{A}_L^{G(L|K)} = \mathbb{A}_K \text{ und } (\mathbb{A}_L^\times)^{G(L|K)} = \mathbb{A}_K^\times$$

### 3.3.2 Bemerkung

Es bezeichne  $G = G(L|K)$ . Da  $L^\times \hookrightarrow \mathbb{A}_L^\times$  eine Inklusion von  $G$ -Moduln ist, ist auch  $C_L = \mathbb{A}_L^\times / L^\times$  ein  $G$ -Modul.

Da die erste Kohomologiegruppe  $H^1(G, L^\times) = 1$  verschwindet laut Hilbert '90, ist der Invariantenfunktor

$$\begin{aligned} G - \mathbf{Mod} &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ M &\longmapsto M^G := \{m \in M \mid \forall g \in G : m^g = m\} \end{aligned}$$

exakt, ergo ergibt sich folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & L^\times & \longrightarrow & \mathbb{A}_L^\times & \longrightarrow & C_L & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow N_{L|K} & & \downarrow N_{L|K} & & \downarrow N_{L|K} & & \\ 1 & \longrightarrow & K^\times & \longrightarrow & \mathbb{A}_K^\times & \longrightarrow & C_L^G = C_K & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Es folgt nun

- $N_{L|K}C_L = K^\times N_{L|K}\mathbb{A}_L^\times / K^\times$
- $C_K / N_{L|K}C_L = \mathbb{A}_K^\times / (K^\times N_{L|K}\mathbb{A}_L^\times)$