

Kapitel 1

Categorical Language and the van-Kampen theorem

1.1 Kategorien

1.2 Funktoren

1.3 Natürliche Transformationen

1.3.1 Definition: Natürliche Transformationen

Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktoren, so ist eine **natürliche Transformation** $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ definiert durch Pfeile $\alpha_A : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ für alle $A \in \mathcal{C}$, sodass

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} & \mathcal{F}(B) \\ \alpha_A \downarrow & & \downarrow \alpha_B \\ \mathcal{G}(A) & \xrightarrow{\mathcal{G}(f)} & \mathcal{G}(B) \end{array}$$

für alle $A, B \in \mathcal{C}, f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ kommutiert.

1.3.2 Definition: Natürliche Isomorphismen

Eine **natürliche Isomorphie** ist eine natürliche Transformation $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, bei der alle Pfeile $\alpha_A : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(A)$ isomorph sind.

1.3.3 Definition: Äquivalenzen von Kategorien

Kategorien \mathcal{C}, \mathcal{D} heißen **natürlich äquivalent**, falls Funktoren $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ existieren, sodass $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}$ natürlich isomorph zu $\text{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ natürlich isomorph zu $\text{id}_{\mathcal{D}}$ sind.

1.4 Adjungierte Funktoren

1.4.1 Definition: Adjungierte

Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}, \mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ Funktoren. \mathcal{F} heißt **linksadjungiert** zu \mathcal{G} und \mathcal{G} **rechtsadjungiert** zu \mathcal{F} , falls für alle $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}$ gilt:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathcal{G}(B)) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), B)$$

1.4.2 Definition: Präsentation von Gruppen

Sei S eine Menge und R eine Teilmenge von S^* . Wir definieren $\langle S \mid R \rangle$ als die **Präsentation** \mathcal{G} , falls

$$\langle S \mid R \rangle := \mathcal{F}(S)/N(R) \cong G$$

G ist **endlich präsentiert**, falls S und R endlich sind.

1.5 Limes Konstruktionen

1.5.1 Definition: Produkt

Sind $X, Y \in \mathcal{C}$ Objekte einer Kategorie, so definieren wir das **Produkt** von X und Y als das größte Objekt $X \times Y$ zusammen mit Abbildungen $\pi_X : X \times Y \rightarrow X, \pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$, sodass folgende UAE erfüllt wird:

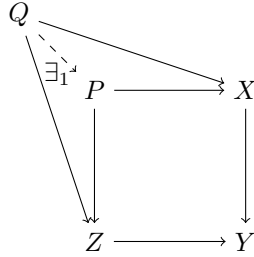
$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & \swarrow q_X & \vdots \exists_1 \Phi & \searrow q_Y & \\ X & \xleftarrow{\pi_X} & X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y} & Y \end{array}$$

1.5.2 Definition: Pullback

Seien $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ Objekte einer Kategorie mit den Abbildungen $X \rightarrow Y \leftarrow Z$. Dann ist ein **Pullback** bzw. **Faserprodukt** P das größte Objekt, das folgendes **Pullback-Diagramm** zum kommutieren bringt.

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array}$$

d.h. es erfüllt folgende UAE:

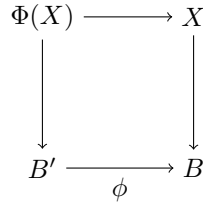


1.5.3 Beispiel: Pullback

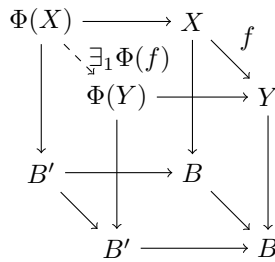
In **Set** ist der Pullback gerade $X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$ für $X \xrightarrow{f} S \xleftarrow{g} Y$. In **Top** ist der Pullback dieselbe Menge mit der entsprechenden Spurtopologie.

1.5.4 Beispiel: Überlagerung

Sei \mathbf{Cov}_B die Kategorie der Überlagerung von $B \in \mathbf{Top}$. Sei ferner $\phi : B' \rightarrow B$ eine stetige Abbildung. Dann definieren wir einen Funktor $\Phi : \mathbf{Cov}_B \rightarrow \mathbf{Cov}_{B'}$ auf Objekten $X \in \mathbf{Cov}_B$ durch den Pullback:



Und auf Pfeilen $X \xrightarrow{f} Y$ durch die UAE des folgenden Pullbacks:



1.5.5 Definition: Diagramme

Ein **Diagramm** der Gestalt \mathcal{I} ist ein Funktor von einer kleinen Kategorie \mathcal{I} in eine Kategorie.

1.5.6 Definition: Kegel

Der **Kegel** eines Diagrammes $\mathcal{D} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ mit einer Familie von Pfeilen $(A \rightarrow \mathcal{D}(i))_{i \in \mathcal{I}}$, sodass folgendes Dreieck

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{D}(i) \\ & \searrow & \nearrow \mathcal{D}(g) \\ & \mathcal{D}(j) & \end{array}$$

für alle Pfeile $i \xrightarrow{g} j$ in \mathcal{I} kommutiert.

1.5.7 Definition: Limes

Der **Limes** eines Diagrammes $\mathcal{D} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ist der größte Kegel $L \in \mathcal{C}$, d.h. es erfüllt folgende UAE für alle Kegel A von \mathcal{D}

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\exists_1} & L \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathcal{D}(i) & \end{array}$$

für alle $i \in \mathcal{I}$.

1.5.8 Beispiel: Limites

- Das Produkt einer Kategorie ist der Limes eines Diagramms der Gestalt

$$\bullet_1 \qquad \bullet_2$$

- Der Pullback einer Kategorie ist der Limes eines Diagramms der Gestalt

$$\bullet_1 \rightarrow \bullet_2 \leftarrow \bullet_3$$

1.5.9 Definition: Koproduct

Sind $X, Y \in \mathcal{C}$ Objekte einer Kategorie, so definieren wir das **Koproduct** von X und Y als das kleinste Objekt $X \oplus Y$ zusammen mit Abbildungen $\iota_X : X \rightarrow X \oplus Y, \iota_Y : Y \rightarrow X \oplus Y$, sodass folgende UAE erfüllt wird:

$$\begin{array}{ccccc} & & Q & & \\ & \nearrow q_X & \uparrow \exists_1 \Phi & \nwarrow q_Y & \\ X & \xrightarrow{\iota_X} & X \oplus Y & \xleftarrow{\iota_Y} & Y \end{array}$$

1.5.10 Definition: Freies Gruppenprodukt

Das freie Produkt $G \star H$ ist definiert als das Koproduct zweier Gruppen G und H .

1.5.11 Lemma: Freies Gruppenprodukt

In **Grp** existieren Koproducte und es gilt

$$\langle S_1 \mid R_1 \rangle \star \langle S_2 \mid R_2 \rangle \cong \langle S_1 \sqcup S_2 \mid R_1 \sqcup R_2 \rangle$$

1.5.12 Definition: Pushout

Seien $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ Objekte einer Kategorie mit den Abbildungen $Y \leftarrow X \rightarrow Z$. Dann ist ein **Pushout** bzw. **Kofaserprodukt** P das kleinste Objekt, das folgendes **Pushout-Diagramm** zum kommutieren bringt.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z & \longrightarrow & P \end{array}$$

d.h. es erfüllt folgende UAE:

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & Y & & \\ \downarrow & & \downarrow & \searrow & \\ Z & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\exists_1} & Q \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

1.5.13 Lemma: Pushouts in Top

In **Top** existieren Pushouts und sind von der Gestalt

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s} & X \\ \downarrow t & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \sqcup Y / \sim \end{array}$$

wobei $\sim \subset X \times Y$ erzeugt wird durch

$$t(a) \sim s(a) \quad \forall a \in A$$

1.5.14 Definition: Amalgirtes freies Produkt in Grp

Ist $G \hookleftarrow A \hookrightarrow H$ ein Diagramm von injektiven Gruppenhomomorphismen, so wird sein Pushout als **amalgirtes freies Produkt** $G \star_A H$ von G, H über A bezeichnet.

1.5.15 Lemma: Pushouts in Grp

Ist $G \xleftarrow{s} A \xrightarrow{t} H$, so existiert sein Pushout und ist von der Gestalt:

$$G \star_A H = G \star H / \{s(a)t(a)^{-1} \mid a \in A\}$$

1.5.16 Definition: Kolimes

Ist $\mathcal{D} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ ein Diagramm, so ist ein **Kolimes** ein Limes von \mathcal{D}^{op} .

1.6 Der Fundamentalgruppoid

1.6.1 Definition: Fundamentalgruppoid

Ist X ein topologischer Raum, dann definieren wir den **Fundamentalgruppoiden** $\Pi(X)$ wie folgt:

- Objekte sind alle Punkte $x \in X$
- Pfeile von x nach y sind die Homotopieklassen von Wegen von x nach y . Also

$$\text{Hom}_{\Pi(X)}(x, y) = \{\gamma : x \rightarrow y \mid \} / \sim$$

- Die Komposition ist die Konkatenation von Wegen.

1.6.2 Definition: Gruppoid

Eine Kategorie heißt **Gruppoid**, falls alle Pfeile isomorph sind.

1.6.3 Definition: Zusammenhängende Kategorien

Eine Kategorie heißt **zusammenhängend**, falls jedes Paar von Objekten durch eine (nicht zwangsläufig gerichtete) Sequenz von Pfeilen verbunden werden kann.

1.6.4 Lemma: Einbettungsfunktor

Ist G ein zusammenhängender Gruppoid, dann ist der Einbettungsfunktor

$$\mathcal{I}_x : \text{Aut}_G(x) = \text{Hom}_G(x, x) \longrightarrow \mathcal{G}$$

eine Äquivalenz von Kategorien für alle $x \in X$.

1.6.5 Korollar:

Ist X ein wegzusammenhängender Raum, so ist die Inklusion

$$\pi_{(X,x)} \hookrightarrow \Pi(X)$$

eine Äquivalenz von Kategorien für alle $x \in X$.

1.7 Der Satz von Seifert-van Kampen**1.7.1 Bemerkung:**

Wir definieren als **Gruppoid** die Kategorie der kleinen Gruppoide. Es existiert ein Einbettungsfunktor

$$\mathbf{Grp} \hookrightarrow \mathbf{Gruppoid}$$

1.7.2 Satz: Der Satz von Seifert-van Kampen (kategorientheoretische Version)

Sei X ein topologischer Raum, \mathcal{O} eine Überdeckung von X durch offene Mengen, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten.

Wir fassen \mathcal{O} als eine Kategorie auf, deren Objekte die offenen Mengen und deren Pfeile Teilmengen-Inklusionen sind.

In diesem Fall erhalten wir einen Funktor

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{O} &\longrightarrow \mathbf{Gruppoid} \\ U &\longmapsto \Pi(U) \\ (U \hookrightarrow V) &\longmapsto \left(\Pi(U) \xrightarrow{\Pi(\iota)} \Pi(V) \right) \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\Pi(X) = \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{O}} \Pi(U)$$

1.7.3 Satz: Der Satz von Seifert-van Kampen

Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$, \mathcal{O} eine Überdeckung von X durch offene, wegzusammenhängenden Mengen, die x enthalten, die abgeschlossen ist unter endlichen Schnitten.

Dann ist $\pi_1(X, x)$ der Kolimes von

$$\begin{aligned} \pi_1(_, x) : \mathcal{O} &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ U &\longmapsto \pi_1(U, x) \\ (U \hookrightarrow V) &\longmapsto \left(\pi_1(U, x) \xrightarrow{\pi_1(\iota, x)} \pi_1(V, x) \right) \\ \pi_1(X, x) &= \operatorname{colim}_{U \in \mathcal{O}} \pi_1(U, x) \end{aligned}$$

Beweis: „kategorischer SvK \Rightarrow normaler SvK“

Wir beweisen die Aussage nur im Fall, dass \mathcal{O} endlich ist.

Wir müssen zeigen, dass $\pi_1(X, x)$ die UAE des Kolimes von $\pi_1(_, x)$ erfüllt.

Für jedes $U \in \mathcal{O}$ ist die Einbettung

$$\mathcal{I}_U : \pi_1(U, x) \longrightarrow \Pi(U)$$

eine Äquivalenz von Kategorien. Ein *inverser* Funktor $\mathcal{F}_U : \Pi(U) \rightarrow \pi_1(U, x)$ wird definiert durch eine Zuordnung

$$y \longmapsto [c_U^y]$$

Wir definieren c_U^y induktiv für alle $U \in \mathcal{O}, y \in X$.

- Definiere $U_0 = \bigcap_{U \in \mathcal{O}} U$. Ist $y \in U_0$, so bezeichne $c_{U_0}^y$ einen beliebigen Weg $x \mapsto y$ in U_0 . $c_{U_0}^x$ bezeichne den konstanten Weg.
- Existiert ein $V \in \mathcal{O}$, sodass c_V^y bereits definiert und $V \subseteq U$ ist, so definiere $c_U^y := c_V^y$. Anderenfalls definiere c_U^y als beliebigen Pfad in U von x nach y .

Durch diese Wahl werden die Funktoren \mathcal{F}_U verträglich im Sinne, dass folgende Diagramme für $U \subset V$ kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \Pi(U) & \xrightarrow{\mathcal{F}_U} & \pi_1(U, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Pi(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}_V} & \pi_1(V, x) \end{array}$$

Ergo kommutieren auch

$$\begin{array}{ccccc} \Pi(U) & \xrightarrow{\mathcal{F}_U} & \pi_1(U, x) & \xrightarrow{f_U} & G \\ \downarrow & & & \nearrow f_V & \\ \Pi(V) & \xrightarrow{\mathcal{F}_V} & \pi_1(V, x) & & \end{array}$$

Die UAE von $\Pi(X)$ garantiert nun die Existenz eines eindeutig bestimmten Pfeils f , sodass folgende Diagramme kommutieren

$$\begin{array}{ccc} \Pi(X) & \overset{f}{\dashrightarrow} & G \\ \uparrow & \nearrow f_U \circ \mathcal{F}_U & \\ \Pi(U) & & \end{array}$$

Ergo kommutieren auch folgende Diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(X, x) & \xrightarrow{\mathcal{I}_X} & \Pi(X) & \overset{f}{\dashrightarrow} & G \\
 \uparrow & & \uparrow & \nearrow & \\
 \pi_1(U, x) & \xrightarrow{\mathcal{I}_U} & \Pi(U) & & f_U \circ \mathcal{F}_U
 \end{array}$$

Da $\mathcal{F}_U \circ \mathcal{I}_U = \text{id}_{\pi_1(U, x)}$, erfüllt $\pi_1(X, x)$ die als Kolimes geforderte UAE. \square

1.7.4 Lemma: Lebesgue Lemma

Sei X ein kompakter, metrischer Raum mit einer offenen Überdeckung durch $(U_i)_{i \in I}$. Dann existiert eine **Lebesgue Konstante** $\delta > 0$, sodass jede Teilmenge $A \subset X$ mit Durchmesser $< \delta$ komplett in einem U_i enthalten ist.

Beweis: „kategorischer SvK“

Wir müssen zeigen, dass $\Pi(X)$ die UAE erfüllt, d.h. für jeden Kokegel G existiert genau ein $\Pi(X) \xrightarrow{f} G$, sodass folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi(X) & \overset{f}{\dashrightarrow} & G \\
 \uparrow & \nearrow & \\
 \Pi(U) & & f_U
 \end{array}$$

Für $x \in U$, definieren wir

$$f(x) := f_U(x)$$

Ist c ein Weg in X , so definieren wir

$$f([c]) := f_U([c])$$

falls c in einem U enthalten ist. Ist c beliebig, so ist $c^{-1}(\mathcal{O})$ eine offene Überdeckung von $[0, 1]$. Ergo existiert eine Lebesgue Konstante $\delta > 0$; wir unterteilen $[0, 1]$ in n viele Intervalle mit Länge $< \delta$ und erhalten eine Unterteilung von $c = c_1 \cdots c_n$, wobei jedes c_i in einem U_j liegt. Folglich definieren wir nun

$$f([c]) = f([c_1]) \circ \dots \circ f([c_n])$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Definition von $f([c])$ unabhängig von der Wahl

- (i) der Unterteilung von $[0, 1]$ und
- (ii) des Repräsentanten c von $[c]$ ist.

\square

1.8 Anwendungen des Satzes von Seifert-van Kampen

1.8.1 Bemerkung: Meistgenutzte Anwendung

Ist $X = U \cup V$ mit $U, V \stackrel{o}{\subset} X$, so erhalten wir folgendes Pushout Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \longrightarrow & X \end{array}$$

Mit Seifert-van Kampen folgt nun für alle $x \in U \cap V$, dass $\pi_1(_, x)$ Pushouts erhält:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x) & \rightarrow & \pi_1(U, x) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(V, x) & \longrightarrow & \pi_1(X, x) \end{array}$$

Ergo

$$\pi_1(X, x) = \pi_1(U, x) \underset{\pi_1(V \cap U, x)}{\star} \pi_1(V, x)$$

1.8.2 Satz: Anhängen von Zellen

Sei $(S^{n-1}, *) \xrightarrow{f} (X, x)$ ein Pfeil, dann existiert folgender Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \iota & & \downarrow j \\ D^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

- Ist $n \geq 3$, dann ist $\pi_1(X, x) \xrightarrow{j_*} \pi_1(Y, j(x))$ ein Isomorphismus.
- Ist $n = 2$, dann ist j_* surjektiv und $\text{Kern } j_*$ ist die normale Untegruppe, die von $[f]$ in $\pi_1(X, x)$ erzeugt wird.

Beweis: „“

Definiere $y = j(x)$, $U = \overset{o}{D^n}$, $V = X \underset{f}{\cup} (D^n - 0)$. Dann ist $U \cap V \simeq S^{n-1}$

- Sei $y' \in U - 0$ und u ein Pfad in Y von y zu y' .
Für $n \geq 3$ ist $\pi_1(U \cap V, y') = 1$. Mit Seifert-van Kampen folgt:

$$\pi_1(Y, y') = \pi_1(U, y') \underset{\pi_1(U \cap V, y')}{\star} \pi_1(V, y') = \pi_1(V, y')$$

Da y und y' durch einen Weg verbunden werden, gilt:

$$\pi_1(V, y) \cong \pi_1(V, y')$$

Da $(V, y) \rightarrow (X, x)$ ein NDR ist, gilt schließlich

$$\pi_1(V, y) \cong \pi_1(X, x)$$

- Ist $n = 2$, so ist $U \cap V \simeq S^1$. Mit Seifert-van Kampen folgt abermals

$$\pi_1(Y, y') = \pi_1(U, y') \underset{\pi_1(U \cap V, y')}{\star} \pi_1(V, y') = \pi_1(V, y') / N([f])$$

Da $f_*(\mathbb{Z}) = N([f])$.

□

1.8.3 Beispiel: Flächenwort

Die orientierbare, geschlossene, zusammenhängende Fläche von Geschlecht g ist definiert durch den Pushout

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f} & \bigvee_{i=1}^{2g} S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^2 & \longrightarrow & F_g \end{array}$$

wobei wir die $2g$ Kreise in $\bigvee_{i=1}^{2g} S^1$ mit $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ bezeichnet werden. f wird bestimmt durch das **Flächenwort** $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i]$. Es folgt mit obigen Satz

$$\pi_1(F_g) = \left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \right\rangle$$

1.8.4 Satz:

Sei $G = \langle S \mid R \rangle$ eine endlich präsentierte Gruppe. Dann existiert ein 2-dimensionaler Zellen-Komplex (X, x) mit

$$\pi_1(X, x) \cong G$$

1.9 Eigenschaften von Pushouts in Top

1.9.1 Definition: Identifizierungsabbildung

$f : X \rightarrow Y$ heißt **Identifizierungsabbildung**

$:\Leftrightarrow f$ ist surjektiv und

$$U \overset{o}{\subset} Y \Longleftrightarrow f^{-1}(U) \overset{o}{\subset} X$$

$\Leftrightarrow f$ induziert einen Homöomorphismus

$$X / \sim \xrightarrow{\sim} Y$$

wobei $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.

\Leftrightarrow Für alle mengentheoretischen Abbildungen $g : Y \rightarrow W$ gilt:

$$g \circ f \text{ ist stetig} \Longleftrightarrow g \text{ ist stetig}$$

1.9.2 Satz:

Seien A, X, Y, Z Räume und K ein lokal kompakter Hausdorffraum.

1. Ist X kompakt, so ist die Projektion $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$ abgeschlossen.
2. Ist $X \xrightarrow{f} Y$ eine Identifizierungsabbildung, so ist auch $f \times \text{id}_K : X \times K \rightarrow Y \times K$ eine Identifizierungsabbildung.
3. Ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_2} & Y \\ f_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ X & \xrightarrow{g_1} & Z \end{array}$$

ein Pushout-Diagramm, so ist es auch

$$\begin{array}{ccc} A \times K & \xrightarrow{f_2 \times \text{id}_K} & Y \times K \\ f_1 \times \text{id}_K \downarrow & & \downarrow g_2 \times \text{id}_K \\ X \times K & \xrightarrow{g_1 \times \text{id}_K} & Z \times K \end{array}$$

Beweis: „ „

1. Sei $C \subset X \times Y$ abgeschlossen, $y \in Y - \pi_Y(C)$. Dann gilt für alle $x \in X : (x, y) \notin C$. Dann existiert für jedes $x \in X$ eine Umgebung $U_x \overset{o}{\subset} X$ zusammen mit einer Umgebung $V_x \overset{o}{\subset} Y$ von y , s.d. $U_x \times V_x \cap C = \emptyset$. X ist kompakt, ergo erhält man x_1, \dots, x_k , s.d. $\bigcup_{i=1}^k U_{x_i} = X$. Setzt man $V := \bigcap_{i=1}^k V_{x_i}$, so gilt $(X \times V) \cap C = \emptyset$. Ergo findet man zu jedem $y \in Y - \pi_Y(C)$ eine offene Umgebung V .
2. Seien folgende Pfeile gegeben

$$\begin{aligned} g : Y \times K &\longrightarrow W \\ h : X \times K &\xrightarrow{f \times \text{id}_K} Y \times K \xrightarrow{g} W \end{aligned}$$

Angenommen h sei stetig. Sei $U \overset{o}{\subset} W, g(y_0, k_0) \in U, f(x_0) = y_0$. Dann ist ein $h(x_0, k_0) \in U$, also existiert eine kompakte Nachbarschaft N von k_0 , s.d. $h(x_0, N) \subset U$. Definiere

$$A = \{y \in Y \mid g(y \times N) \subset U\}$$

Dann ist sicherlich $y_0 \in A$. $f^{-1}(A)$ ist offen in X , da

$$X - f^{-1}(A) = \pi_X(h^{-1}(W - U) \cap (X \times N))$$

laut (1) abgeschlossen ist. Ergo ist $A \times N$ eine offene Umgebung von (y_0, k_0) , ergo ist $g^{-1}(U)$ offen. Also ist g stetig.

3. Die Kolimes-Eigenschaft garantiert die Existenz eines eindeutig bestimmten $h : (X \times K \sqcup Y \times K) / \sim \rightarrow Z \times K$. Es gilt gerade

$$(x_1, k_1) \sim (x_2, k_2) \iff g(x_1) = g(x_2) \wedge x_1 = x_2$$

Ergo ist $X \times K \sqcup Y \times K \rightarrow Z \times K$ eine Identifikationsabbildung, da $X \sqcup Y \rightarrow Z$ eine Identifikationsabbildung ist.

□

1.9.3 Definition: Nachbarschaftsdeformationsretrakt

Ein abgeschlossener Teilraum $A \overset{\iota}{\hookrightarrow} X$ heißt **Nachbarschaftsdeformationsretrakt**, falls eine offene Nachbarschaft $A \overset{c}{\subset} U \overset{o}{\subset} X$, eine stetige Abbildung $r : U \rightarrow A$ und eine Homotopie $h : U \times [0, 1] \rightarrow U$ existiert, sodass

- $h : \text{id} \simeq \iota \circ r$ **relativ** zu A , d.h.
- $h_t(_) = \text{id}_A$ für alle $t \in [0, 1]$

1.10 Noch mehr Anwendungen des Satzes von Seifert-van Kampen

1.10.1 Satz:

Sei folgender Pushout gegeben, wobei A, X, Y wegzusammenhängend sind:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_2} & Y \\ i_1 \downarrow & & \downarrow j_1 \\ X & \xrightarrow{j_2} & Z \end{array}$$

wobei i_1, i_2 Einbettungen und $A \stackrel{c}{\subset} X, \stackrel{c}{\subset} Y$ ein Nachbarschaftsdeformationsretrakt sind. Dann erhalten wir folgenden Pushout in **Grp** für alle $x \in A$:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, x) & \xrightarrow{\pi_1(i_2)} & \pi_1(Y, i_2(x)) \\ \pi_1(i_1) \downarrow & & \downarrow \pi_1(j_1) \\ \pi_1(X, i_1(x)) & \xrightarrow{\pi_1(j_2)} & \pi_1(Z, (j_2 \circ i_1)(x_0)) \end{array}$$

Beweis: „“

Betrachte folgende Deformationsretrakte

$$\begin{array}{ll} X \stackrel{o}{\supset} U_x \xrightarrow{r_x} A & h_x : \text{id} \simeq i_1 \circ r_x \text{ relativ zu } A \\ Y \stackrel{o}{\supset} U_y \xrightarrow{r_y} A & h_y : \text{id} \simeq i_2 \circ r_y \text{ relativ zu } A \end{array}$$

Definiere folgende Verdickungen von A, X, Y in Z :

$$V_A := U_X \cup U_Y \quad V_X := X \cup U_Y \quad V_Y := Y \cup U_X$$

Dann sind $X \subset V_X, Y \subset V_Y, A \subset V_A$ Deformationsretrakte. Es ergibt sich folgende Situation

$$\begin{array}{ccc} V_A & \longrightarrow & V_X \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

woraus sich ein Pushout für die entsprechenden Fundamentalgruppen ergibt. Aufgrund der Deformationsretrakte gilt aber

$$\pi_1(V_A) = \pi_1(A) \qquad \pi_1(V_X) = \pi_1(X) \qquad \pi_1(V_Y) = \pi_1(y)$$

□

1.10.2 Beispiel:

$X = S^1 \times [0, 1] / \sim$, \sim generated by

$$(z, 0) \sim (e^{2\pi/n}z, 0); (z, 1) \sim (e^{2\pi/m}z, 1)$$

identifying points that are an angle $2\pi/n$, $2\pi/m$ apart

It follows:

$$top \cong S^1; bottom \cong S^1$$

Pushout: (1)

The inclusions

$$top \hookrightarrow X_T, bottom \hookrightarrow X_B$$

are deformation retracts, in particular homotopy equivalences.

In the first case,

$$r : X_T \longrightarrow Top, [(z, t)] \longmapsto [(z, 1)]$$

$$h : X_T \times [0, 1] \longrightarrow X_T, [(z, s)], t \longmapsto [(z, s \cdot t)]$$

provides the data of a deformation retract. Similiar for bottom.

van Kampen yields a pushout of groups, when applying π_1 to (1). (2)

How do the induced morphisms look like?

In the case of top:

$$r_* : \pi_1(X_T) \longrightarrow \pi_1(Top), \gamma \longmapsto \gamma^n$$

One gains

$$\pi_1(S^1 \times \{\frac{1}{2}\}) \longrightarrow \pi_1(X_T) \xrightarrow{\sim} \pi_1(Top) \xrightarrow{\sim} \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Be γ a generator of $\pi_1(Top)$, r applied to the generator of $\pi_1(S^1 \times \frac{1}{2})$ wraps around m times the top circle.

Because of (2) we obtain a group presentation

$$\pi_1(X) \cong \langle a, b \mid a^m = b^n \rangle$$

We have an epimorphism

$$\pi_1(X) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m \star \mathbb{Z}/n$$

$$a \longmapsto 1_{\mathbb{Z}/m}$$

$$b \longmapsto 1_{\mathbb{Z}/n}$$

Kapitel 2

Homology - the axiomatic approach

2.1 The Eilenberg-Steenrod axioms

Let R be a commutative Ring.

A sequence of morphisms of R -modules

$$M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}}$$

is called **exact** if

$$\text{Kern } f_i = \text{im } f_{i+1} \forall i$$

Definition

A **homology theory** (H_*, ∂_*) with values in R -modules consists of a family $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ of functors

$$H_n : \mathbf{Top}^2 \longrightarrow R\text{-Mod}$$

from the category of pairs of spaces to the category of R -modules and a family of natural transformations $(\partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$

$$\partial_n : H_n \longrightarrow H_{n-1} \circ J$$

where J is the functor

$$\begin{aligned} J : \mathbf{Top}^2 &\longrightarrow \mathbf{Top}^2 \\ (X, A) &\longmapsto (A, \emptyset) \end{aligned}$$

such that the following axioms are true

- **Homotopy invariance**

If $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ are maps of pairs of spaces and $h_t : f \simeq g$ is a homotopy with $h_t(A) \subset B \forall t \in [0, 1]$ then

$$H_n(f) = H_n(g)$$

- **Long exact sequence**

For every pair (X, A) the following sequence of R -modules is exact:

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X, A)} H_n(A, \emptyset) \xrightarrow{H_n(\iota)} H_n(X, \emptyset) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A, \emptyset) \longrightarrow \dots$$

is exact where

$$\iota : (A, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$$

$$j : (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$$

This maps $\partial_i(X, A)$ are called **boundary homomorphisms**.

- **Excision axiom**

Let X be a space and $A, B \subset X$ be a subspace such that $\overline{A} \subset B^\circ$. Then the R -homomorphisms

$$H_n(X \setminus A, B \setminus A) \longrightarrow H_n(X, B)$$

induced by

$$(X \setminus A, B \setminus A) \hookrightarrow (X, A)$$

is an isomorphism for all n .

If (H_*, ∂_*) in addition satisfies the following, we say (H_*, ∂_*) satisfies the **dimension axiom**:

$$H_n(\{*\}, \emptyset) \cong R, \text{ if } n = 0; 0 \text{ if } n \neq 0$$

Notation: In the sequel we write $H_n(X)$ instead of $H_n(X, \emptyset)$.

Remark

In a nutshell, (H_*, ∂_*) is the following:

- $(X, A) \rightsquigarrow R\text{-Modules } H_n(X, A), n \in \mathbb{Z}$
- $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B) \rightsquigarrow H_n(X, A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y, B)$
- boundary homom. (3)

Remark

Long exact sequence for (X, X)

$$H_{n+1}(X, X) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X) \xrightarrow{\sim} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, X) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(X)$$

$$\text{Kernid} = \text{im}(\partial_n) = 0 \implies \partial_n = 0$$

$$\text{im}H_n(j) = \text{Kern}\partial_n = H_n(X, X)$$

$$\text{Ker}H_n(j) = \text{imid} = H_n(X)$$

Therefore $H_n(X, X) = 0$

2.2 First conclusions from the axioms

2.2.1 Satz: Fünferlemma

Consider the following commuting diagram of R -modules (4) such that both rows are exact and f_1 is surjective, f_5 is injective and f_2 and f_4 are isomorphisms. Then f_3 is an isomorphism.

Proof by Diagrammjagd Im folgenden ist (H_n, ∂_n) eine Homologietheorie, die nicht zwangsläufig das Dimensionsaxiom erfüllt.

2.2.2 Korollar:

Sei $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)$ ein Pfeil. Sind $H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y)$ und $H_n(A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(B)$ isomorph für alle n , so ist es auch $H_n(X, A) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y, B)$ für alle n .

2.2.3 Lemma:

Seien $A \subset B \subset X$ topologische Räume; dann existiert eine natürliche lange Sequenz (die sogenannte **Dreier-Sequenz**)

$$\longrightarrow H_{n+1}(X, A) \longrightarrow H_{n+1}(X, B) \xrightarrow{\partial_{n+1}(X; B, A)} H_n(B, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow$$

induziert durch die Inklusionen

$$(B, A) \xhookrightarrow{i} (X, A) \xhookrightarrow{j} (X, B)$$

Beweis: „“

Definiere

$$\partial_n(X; B, A) = H_{n-1}(l) \circ \partial_n(X, B)$$

wobei $(B, \emptyset) \xhookrightarrow{l} (B, A)$

□

2.2.4 Definition: Excisive Triad

Seien $X_1, X_2 \subset X$ Räume. (X, X_1, X_2) heißt ein **Schneidungs-Trias**, falls die Inklusion

$$(X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X, X_2)$$

einen Isomorphismus

$$H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \longrightarrow H_n(X, X_2)$$

für alle n induziert.

2.2.5 Bemerkung:

Sind $X_1, X_2 \overset{o}{\subset} X$ und $X = X_1 \cup X_2$, dann ist (X, X_1, X_2) aufgrund des Excision-Axioms excisiv.

2.2.6 Satz: Mayer-Vietoris

Sei (X, X_1, X_2) ein excisives Trias. Sei $A \subset X_0 = X_1 \cap X_2$. Dann existiert eine natürliche exakte Sequenz (sogenannte **Mayer-Vietoris Sequenz**)

$$\rightarrow H_{n+1}(X_1, A) \oplus H_{n+1}(X_2, A) \xrightarrow{H_{n+1}(j_1) - H_{n+1}(j_2)} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(X_0, A) \xrightarrow{H_n(i_1) + H_n(i_2)} H_n(X_1, A) \oplus H_n(X_2, A) \rightarrow$$

induziert durch die Inklusionen

$$(X_0, A) \xrightarrow{i_1} (X_1, A) \xrightarrow{j_1} (X, A) \quad (X_0, A) \xrightarrow{i_2} (X_2, A) \xrightarrow{j_2} (X, A)$$

2.2.7 Satz: Mayer-Vietoris für Pushouts

Sei

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ i \downarrow & & \downarrow j \\ X & \xrightarrow{g} & Z \end{array}$$

ein Pushout, wobei $A \xrightarrow{i} X$ die Einbettung eines abgeschlossenen Teilraumes und $A \subset X$ ein NDR ist.

Dann induziert $(f, g) : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$ Isomorphismen

$$H_n(X, A) \xrightarrow{\cong} H_n(Z, Y)$$

Ferner existiert folgende natürliche exakte Sequenz (**Mayer-Vietoris Sequenz**)

$$\rightarrow H_{n+1}(Z) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A) \xrightarrow{H_n(i) + H_n(f)} H_n(X) \oplus H_n(Y) \xrightarrow{H_n(g) - H_n(j)} H_n(Z)$$

Ab sofort fordern wir, dass unsere Homologietheorie das Dimensionsaxiom erfüllt.

2.2.8 Bemerkung:

Für alle $n \geq 1$

$$H_i(S^n) = \begin{cases} R & i = n \text{ oder } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$H_i(S^0) = \begin{cases} R \oplus R & i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2.3 Grade der Selbstabbildungen der Sphäre

In diesem Kapitel erfüllt unsere Theorie das Dimensionsaxiom.

2.3.1 Definition: Reduzierte Homologie

Definiere die **reduzierte Homologie** durch

$$\tilde{H}_n(X) := \text{Kern}(H_n(X) \rightarrow H_n(\bullet))$$

Dann gelten

- \tilde{H} ist funktoriell.
- $\tilde{H}_n(X) = H_n(X) \iff n \neq 0$
- $H_n(X) = R \oplus \tilde{H}_n(X) \iff n = 0$

2.3.2 Definition: Grad

Sei $R = \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Dann ist der **Grad** einer Abbildung $S^n \xrightarrow{f} S^n$ definiert als die eindeutig bestimmte Zahl $\deg f \in \mathbb{Z}$, die folgendes Diagramm zum kommutieren bringt:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S_n) & \xrightarrow{\tilde{H}_n(f)} & \tilde{H}_n(S_n) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot \deg f} & \mathbb{Z} \end{array}$$

2.3.3 Bemerkung:

- Ist das Bild von f null-homotop, so ist $\deg f = 0$.
- $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$
- $\deg \text{id}_{S^n} = 1$
- Der Grad ist unabhängig von der Wahl der Homologietheorie.

2.3.4 Lemma:

Sei

$$\begin{aligned} f : S^n &\longrightarrow S^n \\ (x_0, \dots, x_i, \dots, x_n) &\longmapsto (x_0, \dots, -x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Dann ist

$$\deg f = -1$$

2.3.5 Satz:

Sei $n \geq 2$ gerade, $S^n \xrightarrow{f} S^n$. Dann existiert ein x mit

$$f(x) \in \{x, -x \mid \}$$

2.3.6 Satz:

Sei $n \geq 2$ gerade. Dann existiert für jedes stetige Vektorfeld auf S^n mindestens ein Verschwindungspunkt.

2.3.7 Satz:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n+1 \times n+1}$ regulär.

$$\deg(x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|}) = \text{sign}(\det A)$$

2.3.8 Satz:

Die Abbildung $S^1 \xrightarrow{z \mapsto z^k} S^1$ hat Grad k

2.3.9 Satz:

Sei $f : S^n \rightarrow S^n$ differenzierbar. $q \in S^n$ regulärer Punkt, $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k \mid \}$. $d_i = \text{sign}(\det f'(p_i))$, wobei die Jacobimatrix durch Karten von p_i und q berechnet wird, die sich um ein Element aus $SO(n+1)$ unterscheiden.

$$\deg f = \sum_i d_i$$

2.3.10 Korollar:

Der Grad ist unabhängig von der Wahl der Homologietheorie.

2.3.11 Lemma:

Sei $g : S^n \rightarrow S^n$ glatt, q ein regulärer Punkt, sodass $g^{-1} = p$.

Dann ist der Grad von g das Vorzeichen der Determinante der Jacobimatrix von g bei p , berechnet durch Karten, die sich ausschließlich um eine Rotation unterscheiden.

Kapitel 3

The construction of singular homology

3.1 Algebraische Vorbereitungen

Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

3.1.1 Definition: Kettenkomplex

Ein R -**Kettenkomplex** ist eine Familie von R -Moduln $(C_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit Pfeilen $c_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$, sodass $c_{n-1} \circ c_n = 0$.

Ein Pfeil $f : C_n \rightarrow D_n$ von R -Kettenkomplexen ist eine Familie von Modulmorphismen $f_n : C_n \rightarrow D_n$, sodass die sich ergebenden Diagramme kommutierten.

3.1.2 Definition: Homologie

Die n -te Homologie eines Kettenkomplexes ist definiert durch

$$H_n(C_*, c_*) := \text{Kern}(c_n) / \text{Bild } c_{n+1}$$

Elemente $c \in \text{Kern } c_n$ heißen **Zykel**, $b \in \text{Bild } c_{n+1}$ heißen **Ränder**. Zwei Zykel, die sich nur um einen Rand unterscheiden, heißen **homolog**.

3.1.3 Bemerkung:

Eine Kettenabbildung $f : C_n \rightarrow D_n$ induziert einen wohldefinierten Pfeil von R -Moduln $H_n(f) : H_n(C_n) \rightarrow H_n(D_n)$ durch $H_n(f)([c]) = [f(c)]$. Insofern ist H_n ein Funktor $R\text{-}\mathbf{Chain} \rightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$.

3.1.4 Definition: Homotopie

Eine **Kettenhomotopie** zwischen Kettenpfeilen $f_n, g_n : C_n \rightarrow D_n$ ist eine Familie von Modulmorphismen $h_n : C_n \rightarrow D_{n+1}$, sodass

$$f_n - g_n = d_{n+1}h_n + h_{n+1}c_n$$

Man schreibt in diesem Fall $f \simeq g$

3.1.5 Lemma:

Zwei homotope Pfeile von Kettenkomplexen induzieren in der Homologie dieselbe Abbildung.

3.1.6 Bemerkung:

- Ketten-Homotopie ist eine Äquivalenzrelation
- Ketten-Homotopie ist verträglich mit der Verkettung von Pfeilen.

3.1.7 Definition:

Eine Sequenz von Kettenkomplexen

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

heißt **exakt**, falls sie gradweise **exakt** ist

$$A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n$$

3.1.8 Satz:

Sei folgende kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen gegeben

$$0 \longrightarrow C_* \xrightarrow{i_*} D_* \xrightarrow{p_*} E_* \longrightarrow 0$$

Dann existiert folgende natürliche lange exakte Sequenz in der Homologie

$$\longrightarrow H_{n+1}(E_*) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(C_*) \xrightarrow{H_n(i_*)} H_n(D_*) \xrightarrow{H_n(p_*)} H_n(E_*) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(C_*) \longrightarrow$$

3.2 Definition der singulären Homologie

3.2.1 Definition:

Der **Standard n -Simplex** ist definiert als

$$\Delta_n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|_1 = 1, x_i \geq 0\}$$

3.2.2 Definition:

Sei X ein top. Raum. Ein **singulärer n -Simplex** ist eine Abbildung

$$\delta : \Delta_n \longrightarrow X$$

Die Menge aller singulärer n -Simplizes wird durch $s_n(X)$ bezeichnet.

3.2.3 Definition:

Sei X ein Raum, definiere die n -te **singuläre Kettengruppe** als den freien R -Modul mit Basis $s_n(X)$:

$$C_n^{sing}(X; R) := \begin{cases} R[s_n(X)] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

3.2.4 Definition:

Definiere die k -te **Facette** eines Simplex durch

$$\begin{aligned} i_k^n : \Delta_{n-1} &\longrightarrow \Delta_n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_k, \dots, x_n) \end{aligned}$$

3.2.5 Definition:

Wir machen aus $C_*^{sing}(X; R)$ einen Kettenkomplex, indem wir folgende Differentiale einführen

$$\begin{aligned} c_n^{sing}(X; R) : C_n^{sing}(X; R) &\longrightarrow C_{n-1}^{sing}(X; R) \\ \delta &\longmapsto \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \delta \circ i_k^n(\delta) \end{aligned}$$

3.2.6 Lemma:

$c_n^{sing} \circ c_{n+1}^{sing} = 0$, d.h. (C_n^{sing}, c_n^{sing}) ist ein Kettenkomplex.

3.2.7 Bemerkung:

C_*^{sing} ist ein Funktor von **Top** zu R -**Ketten**, wobei für $f : X \rightarrow Y$

$$C_n^{sing}(f)(\delta) = f \circ \delta$$

Sei $A \xhookrightarrow{i} X$ die Inklusion eines Teilraumes, definiere

$$C_n^{sing}(X, A; R) := \text{Kokern}(C_n^{sing}(i)) = C_n^{sing}(X; R) / \text{Bild } C_n^{sing}(i)$$

Die Differentiale $c_*^{sing}(X; R)$ machen aus $C_*^{sing}(X, A; R)$ einen Kettenkomplex.

3.2.8 Definition:

Für ein Paar (X, A) definieren wir die n -te **singuläre Homologie** durch

$$H_n^{sing}(X, A; R) := H_n(C_*^{sing}(X, A; R))$$

3.2.9 Satz:

$(H_*^{sing}(_, R), \partial_*)$ ist eine Homologietheorie mit Koeffizienten in R , die das Dimensionsaxiom erfüllt.

3.3 Verifikation der Eilenberg-Steenrod Axiome

3.3.1 Homotopie Invarianz

Sei $i_t : x \mapsto (x, t)$. Wir konstruieren eine natürliche Homotopie

$$h_*(X) : C_*^{sing}(i_0) \simeq C_*^{sing}(i_1)$$

sodass

1. $h_n(X) : C_n^{sing}(X; R) \longrightarrow C_{n+1}^{sing}(X \times I; R)$
2. $c_{n+1}^{sing}(X \times I) \circ h_n(X) + h_{n-1}(X) \circ c_n^{sing}(X) = C_n^{sing}(i_0) - C_n^{sing}(i_1)$
3. Für alle $g : X \rightarrow Y$ kommutiert

$$\begin{array}{ccc} C_n^{sing}(X; R) & \xrightarrow{h_n(X)} & C_{n+1}^{sing}(X \times I; R) \\ C_n^{sing}(g) \downarrow & & \downarrow C_{n+1}^{sing}(g \times \text{id}_I) \\ C_n^{sing}(Y; R) & \xrightarrow{h_n(Y)} & C_{n+1}^{sing}(Y \times I; R) \end{array}$$

$h_*(X)$ ist eindeutig bestimmt durch

$$\begin{array}{ccc} C_n^{sing}(\Delta_n; R) & \xrightarrow{h_n(\Delta_n)} & C_{n+1}^{sing}(\Delta_n \times I; R) \\ C_n^{sing}(\delta) \downarrow & & \downarrow C_{n+1}^{sing}(\delta \times \text{id}_I) \\ C_n^{sing}(X; R) & \xrightarrow{h_n(X)} & C_{n+1}^{sing}(X \times I; R) \end{array}$$

3.3.2 Ausschneidung

3.3.3 Definition:

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Überdeckung von X . $\delta \in s_n(X)$ heißt **U -klein**, falls $\text{Bild} \delta \subset U_i$. Sei $C_*^U(X; R) \subset C_*^{sing}(X; R)$ der Unterkettenkomplex, der durch die U -kleinen Simplizes generiert wird.

3.3.4 Lemma: Kleine Simplizes Lemma

$C_*^U(X; R) \hookrightarrow C_*^{sing}(X; R)$ induziert Isomorphismen auf allen Homologiemoduln.

Zeige durch die Überdeckung $U = \{B, X - A \mid \}$, dass $H_*^{sing}(X, B; R) \cong H_*^{sing}(X - A, B - A; R)$

3.3.5 Additivität

Für jede Homologie gilt

$$H_*\left(\bigsqcup_{i=1}^n X_i\right) = \bigoplus_{i=1}^n H_*(X_i)$$

3.3.6 Definition:

Eine Homologie erfüllt das **Additivitätsaxiom**, falls für jede Menge I gilt

$$H_*\left(\bigsqcup_{i \in I} X_i\right) = \bigoplus_{i \in I} H_*(X_i)$$

Die singuläre Homologie erfüllt das Additivitätsaxiom.

3.4 Singuläre Homologie in den Graden 0 und 1

3.4.1 Definition:

Definiere die **Vergrößerungsabbildung**

$$\begin{aligned} \varepsilon : C_0^{sing}(X; R) &\longrightarrow R \\ \sum n_x x &\longmapsto \sum n_x \end{aligned}$$

Dann ist $\varepsilon = 0$ auf $\text{Bild } c_1^{sing}$ und induziert einen Homomorphismus

$$\varepsilon : C_0^{sing}(X; R) / \text{Bild } c_1^{sing} = H_0^{sing}(X; R) \longrightarrow R$$

3.4.2 Satz:

Ist $X \neq \emptyset$ wegzusammenhängend, so ist

$$\varepsilon : H_0^{sing}(X; R) \longrightarrow R$$

ein Isomorphismus.

3.4.3 Korollar:

$H_0^{sing}(X; R)$ ist ein freier R -Modul mit $\pi_0(X)$ als Basis.

3.4.4 Satz: Hurewicz' Satz in Grad 1

Die Abbildung

$$\begin{aligned} h : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow H_1^{sing}(X; \mathbb{Z}) \\ [f]_{\sim} &\longmapsto [f] \end{aligned}$$

ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus.

Ist X wegzusammenhängend, so ist h surjektiv und $\text{Kern } h = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$

Kapitel 4

Applications of singular homology

Im folgenden betrachten wir ausschließlich die singuläre Homologie.

4.1 Fundamentalsatz der Algebra

4.1.1 Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nichtkonstante Polynom über \mathbb{C} hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .

4.2 Das Theorem von Borsuk-Ulam

4.2.1 Satz: Borsuk-Ulam

Für jede stetige Abbildung $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existiert ein $x \in S^n$, sodass

$$f(x) = f(-x)$$

4.2.2 Satz: Ham Sandwich theorem

Seien $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ Borelmengen mit endlichem Lebesguemaß $\lambda(A_i) < \infty$. Dann existiert eine Hyperebene, die jedes A_i maßtechnisch halbiert.

4.2.3 Satz: Äquivarianz Theorem

Sei $g : S^n \rightarrow S^m$ dergestalt, dass

$$g(-x) = -g(x) \forall x \in S^n$$

Dann ist $n \leq m$

4.3 Invarianz der Dimension

4.3.1 Satz:

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \iff n = m$$

4.4 Brouwers Fixpunktsatz

4.4.1 Satz:

Sei $n \geq 0$. Jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ hat einen Fixpunkt.

Kapitel 5

CW-complexes and cellular homology

5.1 CW-Komplexe

5.1.1 Definition:

Eine k -**dimensionale Zelle** $e \subset X$, die bzgl. ihrer Spurtopologie homöomorph zu $E^k = \overset{o}{D^k}$ ist. Jeder Punkt in X ist eine 0-Zelle.

5.1.2 Definition:

Ein **Whitehead Komplex** ist ein Raum X zusammen mit einer Zellzerlegung $(e_i)_{i \in I}$, sodass

- $\bigcup_{i \in I} e_i = X$
- X ist Hausdorff
- Für jede n -Zelle e_i existiert eine Abbildung $\Phi : D^n \rightarrow X$, sodass $\Phi|_{E^n} : E^n \xrightarrow{\cong} e_i$ ist und $\Phi(S^n)$ in der Vereinigung der $\leq n - 1$ -Zellen liegt.

Closure finiteness Der Abschluss einer Zelle schneidet sich nur mit endlichen vielen Zellen.

Weak topology

$$A \overset{c}{\subset} X \iff A \cap \overline{e_i} \overset{c}{\subset} \overline{e_i} \quad \forall i \in I$$

5.1.3 Definition:

Eine Teilmenge $A \subset X$ eines Whitehead Komplexes heißt ein **Subkomplex**, falls es eine Vereinigung von Zellen ist und der Abschluss jeder Zelle von ihr in A liegt.

5.1.4 Bemerkung:

$$\Phi(D^n) = \bar{e}_i$$

5.1.5 Satz:

Sei X ein Whitehead Komplex.

- Eine kompakte Teilmenge $K \subset X$ schneidet nur endlich viele Zellen.
- Ein endlicher Subkomplex (besteht nur aus endlich vielen Zellen) ist kompakt in X .
- Ist $L \subset X$, so bezeichnet $X(L)$ den kleinsten Subkomplexen, der L enthält. Dann ist $X(e) = X(\bar{e})$ ein endlicher Subkomplex für jede Zelle e .
- Jede kompakte Teilmenge von X ist in einem endlichen Subkomplexen enthalten.
-

$$A \stackrel{c}{\subset} X \iff A \cap L \stackrel{c}{\subset} L \quad \forall L : \text{endlicher Subkomplex}$$

- Jeder Subkomplex ist abgeschlossen.

5.1.6 Satz:

Ein Subkomplex eines Whitehead-Komplexes ist ein Whitehead-Komplex.

5.1.7 Lemma: Hilfslemma

Sei folgendes Diagramm mit abgeschlossenen Einbettungen j, J gegeben.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ j \downarrow & & \downarrow J \\ X & \xrightarrow{F} & Z \end{array}$$

F soll eine Bijektion $X - A \longrightarrow Z - Y$ induzieren. Ferner soll $F(X) \stackrel{c}{\subset} Z$ und $F : X \rightarrow F(X)$ eine Identifikation sein.

Dann ist das obige Diagramm ein Pushout.

5.1.8 Definition:

Definiere das n -Skelett eines Whitehead-Komplexes

$$X^n = \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{e: i\text{-Zelle}} e$$

5.1.9 Satz:

Sei X ein Whitehead-Komplex

- X trägt die **Kolimes-Topologie**, d.h.

$$A \overset{c}{\subset} X \iff A \cap X^i \overset{c}{\subset} X^i \quad \forall i$$

- Sei $(e_i)_{i \in I(n)}$ eine Familie von n -Zellen in X mit charakteristischen Abbildungen $\Phi_i : D_i^n \rightarrow e_i$ und Einschränkungen $\varphi_i = \Phi_i|_{S_i^{n-1}}$. Dann ist folgendes Diagramm ein Pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I(n)} S_i^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{i \in I(n)} \varphi_i} & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I(n)} D_i^{n-1} & \xrightarrow{\coprod_{i \in I(n)} \Phi_i} & X^n \end{array}$$

5.1.10 Definition:

Sei $A \subset X$, eine **CW-Zerlegung** von (X, A) besteht aus einer Filtration von Teilräumen

$$A \subset X^{-1} \subset X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X = \bigcup_i X_i$$

sodass

- X trägt die Kolimes-Topologie
- Für jedes $n \geq 0$ existiert folgender Pushout

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i \in I(n)} S_i^{n-1} & \longrightarrow & X^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{i \in I(n)} D_i^{n-1} & \longrightarrow & X^n \end{array}$$

Ein Paar (X, A) zusammen mit einer CW-Zerlegung heißt ein **relativer CW-Komplex**. Ist $A = \emptyset$, so nennt man X einfach **CW-Komplex**. Ein Raum mit einer CW-Zerlegung heißt auch **CW-Raum**. Die **zelluläre Dimension** von (X, A) ist definiert als das kleinste $n \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, sodass $X^n = X^{n+1}$.

5.1.11 Satz:

Jeder Whitehead Komplex ist ein CW-Komplex und umgekehrt.

5.1.12 Satz:

Sind X und Y CW-Komplexe, von denen mindestens einer lokal kompakt ist, so ist $X \times Y$ ebenfalls ein CW-Komplex, wobei

$$(X \times Y)^n = \bigcup X^i \times Y^{n-i}$$

5.1.13 Definition:

Eine **zelluläre Abbildung** $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung, sodass

$$f(X^n) \subset Y^n$$

5.2 Zelluläre Homologie**5.2.1 Definition:**

Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex. Definiere den **zellulären Kettenkomplex** $C_*^{CW}(X, A; R)$ durch

$$C_n^{CW}(X, A; R) := H^n(X^n, X^{n-1}; R)$$

$$c_n^{CW} : C_n^{CW}(X, A; R) \longrightarrow C_{n-1}^{CW}(X, A; R)$$

wobei die Randmorphismen durch die Dreiersequenz des Tripels $X^{n-2} \subset X^{n-1} \subset X^n$ bestimmt werden.

Die Homologie

$$H_n^{CW}(X, A; R) := H_n(C_*^{CW}(X, A; R))$$

wird **zelluläre Homologie** genannt.

5.2.2 Satz:

Es gibt Isomorphismen (natürlich, unter Berücksichtigung der zellulären Struktur)

$$H_n^{CW}(X, A; R) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; R) \quad \forall n \geq 0$$

5.2.3 Definition:

Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex mit Pushouts

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_{i \in I(n)} S_i^{n-1} & \xrightarrow{\varphi^n = \coprod_{i \in I(n)} \varphi_i} & X^{n-1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\coprod_{i \in I(n)} D_i^{n-1} & \xrightarrow{\Phi^n = \coprod_{i \in I(n)} \Phi_i} & X^n
\end{array}$$

betrachte außerdem den Pushout

$$\begin{array}{ccc}
S^{n-1} & \longrightarrow & * \\
\downarrow & & \downarrow \\
D^n & \xrightarrow{u_n} & S^n
\end{array}$$

Definiere für $n \geq 2, i \in I(n), j \in I(n-1)$ die **Inzidenznummer** $\text{inc}_{i,j}^n \in \mathbb{Z}$ als den Grad der Komposition

$$S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_i} X^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}/(X^{n-1} - e_j) \xrightarrow{\Phi_j^{-1}} D^{n-1}/S^{n-2} \xrightarrow{u_{n-1}} S^{n-1}$$

Für $n = 1$ definiere

$$\text{inc}_{i,j}^1 = \begin{cases} 1 & \varphi_i(1) = e_j \text{ und } \varphi_i(-1) \neq e_j \\ -1 & \varphi_i(-1) = e_j \text{ und } \varphi_i(1) \neq e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Definiere induktiv Erzeuger

$$s^n \in \tilde{H}_n(S^n; R) \qquad b^n \in H_n(D^n, S^{n-1}; R)$$

sodass

$$\begin{aligned}
[\delta^+] - [\delta^-] &= s^0 \in \tilde{H}_0(S^0; R) \\
\partial b^n &= s^{n-1} \text{ wobei } \partial : H_n(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}; R) \\
s^n &= H_n(u_n)(b^n) \text{ wobei } H_n(u_n)(b^n) : H_n(D^n, S^{n-1}; R) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(S^n; R)
\end{aligned}$$

5.2.4 Satz:

Folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{I(n)} R & \xrightarrow{\text{INC}^n = (\text{inc}_{i,j}^n)_{j \in I(n-1), i \in I(n)}} & \bigoplus_{I(n-1)} R \\
\downarrow \cong, 1 \mapsto b^n & & \downarrow \cong, 1 \mapsto b^{n-1} \\
\bigoplus_{I(n)} H_n(D^n, S^{n-1}; R) & & \bigoplus_{I(n-1)} H_{n-1}(D^{n-1}, S^{n-2}; R) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
C_n^{CW}(X, A; R) & \xrightarrow{c_n^{CW}} & C_{n-1}^{CW}(X, A; R)
\end{array}$$