

Mitschrieb: Differentialtopologie I  
WS 17 / 18

tensor.produkt@gmx.de

3. Februar 2018

## Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesungen vom 1.12.17 bis zum 22.01.18 des Kurses DIFFERENTIALTOPOLOGIE I an der Universität Heidelberg.

Dieses Dokument wurde „live“ in der Vorlesung getext. Sämtliche Verantwortung für Fehler übernimmt alleine der Autor dieses Dokumentes.

Auf Fehler kann gerne hingewiesen werden bei folgende E-Mail-Adresse

tensor.produkt@gmx.de

Ferner kann bei dieser E-Mail-Adresse auch der Tex-Code für dieses Dokument erfragt werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>ABRISS</b>	<b>5</b>
1.1	Topologie . . . . .	5
1.2	Mannigfaltigkeiten . . . . .	7
1.3	Vektorraumbündel . . . . .	12
<b>4</b>	<b>VEKTORRAUMBÜNDEL</b>	<b>19</b>
4.1	Glatter Approximationssatz . . . . .	19
4.2	Homogenität von Mannigfaltigkeiten . . . . .	24
4.3	Theorie der Abbildungsgrade . . . . .	27
4.4	Orientierungen . . . . .	29
4.5	Anwendungen des Abbildungsgrades . . . . .	33
<b>5</b>	<b>DE RHAM KOHOMOLOGIE</b>	<b>35</b>
5.1	Äußere Algebren . . . . .	38
5.2	Äußeres Produkt . . . . .	39
5.3	Glatte Differentialformen auf Offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$ . . . . .	42
5.4	Das Äußere Produkt auf der Kohomologie . . . . .	49
5.5	Funktorialität . . . . .	50
5.6	Pullback auf die de Rham-Kohomologie . . . . .	52
5.7	De Rham-Kohomologie von Glatten Mannigfaltigkeiten . . . . .	55
5.8	Integration auf Glatten Mannigfaltigkeiten . . . . .	58
5.9	Der Allgemeine Satz von Stokes . . . . .	60
5.10	Das Homotopieaxiom für de Rham-Kohomologie . . . . .	62
5.11	Exakte Sequenzen . . . . .	66
5.12	Die Mayer-Vietoris-Sequenz . . . . .	67
<b>6</b>	<b>KOHOMOLOGIE MIT KOMPAKTEN TRÄGERN</b>	<b>71</b>
6.1	Mayer-Vietoris für $H_c^*$ . . . . .	74
6.2	Poincare-Lemma für $H_c^*$ . . . . .	75

6.3	Zurück zum Abbildungsgrad . . . . .	78
6.4	Endlich-Dimensionalität der Kohomologie . . . . .	80
6.5	Der Kohomologiering von $\mathbb{C}P^n$ . . . . .	86
6.6	Kartesische Produkte . . . . .	91
6.7	Die Signatur einer Mannigfaltigkeit . . . . .	95

# Kapitel 1

## ABRISS

Abriss  
vorher-  
gehender  
Vorlesun-  
gen

### 1.1 Topologie

#### 1.1.1 Lemma: Lebesgue

Sei  $X$  ein kompakter Raum mit Metrik  $d$ .  $(U_i)_{i \in I}$  sei eine Überdeckung von  $X$  durch offene Mengen. Dann gibt es eine Konstante  $\delta > 0$ , die sogenannte **Lebesgue-Konstante**, sodass für jede Teilmenge  $A \subset X$  gilt

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\} < \delta \implies \exists i \in I : A \subset U_i$$

#### Beweis

Für jedes  $x \in X$  wählen wir ein  $\varepsilon(x) > 0$  und ein  $i(x) \in I$  mit

$$B_{2\varepsilon(x)}(x) \subset U_{i(x)}$$

Die Menge  $\{B_{\varepsilon(x)}(x)\}_{x \in X}$  ist eine Überdeckung von  $X$  durch offene Mengen und eine Verfeinerung von  $\{U_i\}_{i \in I}$ . Da  $X$  kompakt ist, erhalten wir eine endliche Teilüberdeckung  $\{B_{\varepsilon(x_i)}(x_i)\}_{i=1}^n$  von  $X$ . Setze

$$\delta := \min\{\varepsilon(x_1), \dots, \varepsilon(x_n)\}$$

Sei nun  $A \subset X$  mit

$$\text{diam}(A) < \delta$$

Dann gibt es ein  $x \in \{x_1, \dots, x_n\}$  mit  $a_0 \in B_{\varepsilon(x)}(x) \cap A \neq \emptyset$ . Es gilt dann für alle  $a \in A$

$$d(a, x) \leq d(a, a_0) + d(a_0, x) < \delta + \varepsilon(x) \leq 2\varepsilon(x)$$

Daraus folgt

$$A \subset B_{2\varepsilon(x)}(x) \subset U_{i(x)}$$

□

### 1.1.2 Definition

Eine Überdeckung eines topologischen Raumes durch offene Mengen heißt **lokal endlich**, wenn jeder Punkt des Raumes eine Umgebung besitzt, die nur endlich viele Elemente der Überdeckung schneidet.

### 1.1.3 Definition

Ein topologischer Raum heißt **parakompakt**, wenn jede Überdeckung durch offene Mengen eine lokal endliche Verfeinerung besitzt.

### 1.1.4 Bemerkung

- Ist ein Raum parakompakt, so ist er auch **normal**, d. h., zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen besitzen in diesem Raum zwei disjunkte Umgebungen.
- Jeder metrische Raum ist parakompakt.
- Im Allgemeinen impliziert Parakompaktheit **nicht** Metrisierbarkeit.

### 1.1.5 Definition

Sei  $X$  ein topologischer Raum mit einer Überdeckung  $\{U_i\}_{i \in I}$  durch offene Mengen. Eine **Zerlegung der Eins** bzgl.  $\{U_i\}_{i \in I}$  ist eine Familie  $\{f_i\}$  von stetigen Funktionen

$$f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\text{i.) } \text{supp} f_i := \text{Cl}(\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}) \subset U_i,$$

ii.) Für alle  $x \in X$  gilt

$$f_i(x) = 0$$

für fast alle  $i \in I$

iii.) und

$$\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$$

für alle  $x \in X$ .

### 1.1.6 Satz

Ein parakompakter Raum besitzt bzgl. jeder Überdeckung durch offene Mengen eine Zerlegung der Eins.

## 1.2 Mannigfaltigkeiten

### 1.2.1 Proposition

Jede Mannigfaltigkeit, die sich durch zwei Karten mit zusammenhängendem Schnitt überdecken lässt, ist orientierbar.

### 1.2.2 Definition

Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten.

1.)  $p \in M$  heißt ein **kritischer Punkt**, falls

$$\varphi_{p,*} : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$$

nicht surjektiv ist.

2.)  $q \in N$  heißt ein **kritischer Wert**, falls es einen kritischen Punkt  $p \in \varphi^{-1}(q)$  gibt.

3.) Ist  $q \in N$  nicht kritisch, so nennen wir  $q$  einen **regulären Wert**.

### 1.2.3 Bemerkung

- Ist  $\dim M < \dim N$ , so gilt für  $q \in N$

$$q \text{ ist regulär} \iff q \notin \varphi(M)$$

- Ist  $\dim M \geq \dim N$ , so gilt für  $q \in N$

$$q \text{ ist regulär} \iff \forall p \in \varphi^{-1}(q) : \varphi_{p,*} \text{ hat als lineare Abbildung einen Rang von } \dim N$$

- Alle  $q \in N - \varphi(M)$  sind reguläre Werte.

### 1.2.4 Satz: Sard

Sei  $f : U \xrightarrow{o} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$  glatt. Setze

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ ist kein regulärer Punkt für } f\}$$

Dann ist  $f(C)$  eine Nullmenge.

#### Beweis

Wir führen eine Induktion nach  $n$ : Setze

$$C_k := \{x \in U \mid \text{alle partiellen Ableitungen von } f \text{ der Ordnung } k \text{ verschwinden in } x\}$$

Es gilt dann

$$C \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$$

Wir proklamieren folgende Dinge

- (1)  $f(C \setminus C_1)$  ist eine Nullmenge.
- (2)  $f(C_k \setminus C_{k+1})$  ist eine Nullmenge.
- (3) Es gibt ein  $k$ , sodass  $f(C_k)$  eine Nullmenge ist.

Hieraus folgt dann, dass  $f(C)$  eine Nullmenge ist.

Wir zeigen nun die proklamierten Dinge

- (1)  $f(C \setminus C_1)$  ist eine Nullmenge:

Sei  $x' \in C \setminus C_1$ . Dann gilt

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x') \neq 0$$

Betrachte

$$\begin{aligned} h : U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto (f_1(x), x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$h$  ist dann in einer Umgebung von  $x'$  invertierbar. Betrachte für ein passendes  $V \xrightarrow{o} \mathbb{R}^n$

$$g := f \circ h^{-1} : V \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

Betrachte

$$C' := h(C \cap V)$$



$C'$  ist gerade die Menge der kritischen Punkte von  $g$ . Ferner genügt es zu zeigen, dass  $g(C') = f(C \cap V)$  eine Nullmenge ist.

Betrachte die Einschränkung

$$g_t : V \cap \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$g$  ist gerade so definiert, dass gilt

$$g(x_1, \dots, x_n) = (x_1, y_2, \dots, y_p)$$

Deswegen ist der erste Eintrag der Jacobimatrix von  $g$  eine Eins. Insofern gilt

$$C' = \bigcup_t C_t$$

wobei  $C_t$  die kritischen Punkte von  $g_t$  sind. Nach der Induktionsvoraussetzung haben aber alle

$$g_t(C_t)$$

Maß 0. Nach dem Satz von Fubini hat damit auch  $g(C')$  Maß Null. Damit hat auch  $f(C - C_1)$  Maß Null.

(2)  $f(C_k \setminus C_{k+1})$  ist eine Nullmenge:

Sei  $x' \in C_k \setminus C_{k+1}$ . Dann gilt ohne Einschränkung

$$\frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial x_1 \dots \partial x_{k+1}}(x') \neq 0$$

Betrachte

$$h : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \longmapsto \left( \frac{\partial^k f_1}{\partial x_1 \dots \partial x_k}(x), x_2, \dots, x_n \right)$$

Nach der vorherigen Überlegung folgt nun für  $h$

$$h(C^h - C_1^h) \text{ hat Maß Null}$$

Hieraus folgt die Behauptung.

(3) Es gibt ein  $k$ , sodass  $f(C_k)$  eine Nullmenge ist:

Sei  $I^n \subset \mathbb{R}^n$  ein Würfel mit Seitenlängen  $\delta$ . Es genügt zu zeigen, dass  $f(C_k \cap I^n)$  Nullmaß hat.

Seien  $x$  und  $x + h$  aus  $I^n \cap C$ . Durch eine Taylorentwicklung von  $f$  bei  $x$  sieht man ein, dass

$$\|f(x + h) - f(x)\| \leq c \cdot \|h\|^{k+1}$$

Setze  $k = n$ . Durch Unterteilung von  $I^n$  erhält man  $2^n$  viele neue Unterwürfel (jedes  $I$  wird halbiert). Dadurch wird die maximale Länge von  $h$  halbiert. Ergo wird die maximale Distanz von Bildwerten von  $f$  eines Unterwürfels um den Faktor  $2^{n+1}$  reduziert. Hieraus folgt nun, dass  $f(C_n \cap I^n)$  Maß Null haben muss, da wir sonst einen Widerspruch erhalten.

□

### 1.2.5 Korollar: Satz von Brown

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt. Dann ist die Menge der regulären Werte von  $f$  in  $N$  dicht.

### 1.2.6 Definition

Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten.

- 1.)  $\varphi$  heißt **Submersion**, falls  $\varphi_{p,*} : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  für alle  $p \in M$  surjektiv ist.
- 2.)  $\varphi$  heißt **Immersion**, falls  $\varphi_{p,*} : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  für alle  $p \in M$  injektiv ist.
- 3.)  $(M, \varphi)$  heißt eine **Untermannigfaltigkeit** von  $N$ , falls  $\varphi$  eine injektive Immersion ist.
- 4.)  $(M, \varphi)$  heißt eine **Einbettung** in  $N$ , falls sie eine Untermannigfaltigkeit ist und ein  $\varphi$  einen Homöomorphismus von  $M$  auf ihr Bild ist.

### 1.2.7 Proposition

Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten der Dimensionen  $m$  bzw.  $n$ .  $p \in M$  sei ein beliebiger Punkt.

- Ist  $\varphi$  immersiv bei  $p$ , so existieren Karten  $U \subset M, V \subset N$ , um  $p$  bzw.  $\varphi(p)$  und eine Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)\end{aligned}$$

sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

- Ist  $\varphi$  submersiv bei  $p$ , so existieren Karten  $U \subset M, V \subset N$ , um  $p$  bzw.  $\varphi(p)$  und eine Abbildung

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi} & V \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

### 1.2.8 Korollar

Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten. Ist  $q \in N$  regulär, so ist  $\varphi^{-1}(q) \subset M$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\dim M - \dim N$ .

### 1.2.9 Satz

Seien  $U, V \subset M$  glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit.  $U$  und  $V$  schneiden sich **transversal**, wenn für alle  $x \in U \cap V$  gilt

$$T_x U + T_x V = T_x M$$

In einem solchen Fall ist  $U \cap V$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit der Dimension  $\dim U + \dim V - \dim M$ .

### 1.2.10 Satz: Thoms Transversalität Theorem

Sei  $f : X \rightarrow M$  glatt und  $N \subset M$  eine eingebettete Untermannigfaltigkeit. Dann existiert eine glatte Abbildung  $f' : X \rightarrow M$ , die homotop zu  $f$  ist und  $N$  **transversal** schneidet, d. h.

$$\text{Bild}(f'_{*,x}) + T_{f(x)}N = T_{f(x)}M$$

für alle  $x \in f'^{-1}(N)$ . Ferner kann  $f'$  *beliebig nahe* und isotop zu  $f$  gewählt werden.

## 1.3 Vektorraumbündel

### 1.3.1 Definition

Ein **Vektorraumbündel** von Rang  $n$  ist Tripel  $(p, E, B)$ , bei der  $E, B$  topologisch Räume und  $p : E \rightarrow B$  eine stetige Abbildung sind, die folgende Eigenschaften erfüllen

- $p$  ist **lokal trivial**, d. h., jeder Punkt  $b \in B$  hat eine Umgebung  $U \subset B$  zusammen mit einem Diffeomorphismus

$$\varphi_U : p^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow p & \swarrow \pi \\ & U & \end{array}$$

- Obiges  $\varphi_U$  induziert **faserweise** Isomorphismen, d. h., für alle  $x \in U$  hat  $p^{-1}(x)$  eine gegebene Vektorraumstruktur, für die

$$\varphi|_x : p^{-1}(x) \longrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

In diesem Setting heißt  $B$  der **Basisraum**,  $E$  der **Totalraum**,  $p$  die lokal triviale **Projektion** und  $p^{-1}(b)$  die **Faser** über  $b \in B$ .

### 1.3.2 Bemerkung

Ist ein Vektorraumbündel wie oben gegeben, so erhalten wir für zwei Karten  $U, V \subset B$  folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 & (U \cap V) \times \mathbb{R}^n & \\
 \nearrow \varphi_U & \downarrow \theta_{UV} & \\
 p^{-1}(U \cap V) & & (U \cap V) \times \mathbb{R}^n \\
 \searrow \varphi_V & & 
 \end{array}$$

$\theta_{UV}$  ist dabei von der Gestalt

$$\theta_{UV}(x, y) = (x, \mathfrak{g}_{U,V}(x) \cdot y)$$

mit  $\mathfrak{g}_{U,V} : U \cap V \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$  stetig.  $GL_n(\mathbb{R})$  nennt man hier die **Strukturgruppe** von  $(p, E, B)$  und die  $\mathfrak{g}_{U,V}$  nennt man die **Übergangsfunktionen**. Diese erfüllen funktorielle Eigenschaften:

- $\mathfrak{g}_{U,U} = \text{Id}$
- $\mathfrak{g}_{V,W} \cdot \mathfrak{g}_{U,V} = \mathfrak{g}_{U,W}$

### 1.3.3 Definition

Seien  $(p, E, B)$  und  $(p', E', B')$  zwei Vektorraumbündel. Eine **Homomorphismus** von Vektorraumbündeln ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{F} & E' \\
 \downarrow p & & \downarrow p' \\
 B & \xrightarrow{f} & B'
 \end{array}$$

wobei  $F$  und  $f$  stetig sind, und  $F$  faserweise linear ist, d. h.

$$F|_{p^{-1}(b)} : p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(f(b))$$

ist ein Homomorphismus von Vektorräumen für alle  $b \in B$ .

### 1.3.4 Bemerkung

Ein Homomorphismus  $(F, f)$  von Vektorraumbündeln ist genau dann ein Isomorphismus, wenn  $f$  homöomorph ist und  $F$  auf jeder Faser einen Isomorphismus induziert.

### 1.3.5 Definition

$(p, E, B)$  heißt **trivial**, falls  $E \cong B \times \mathbb{R}^n$ .

### 1.3.6 Definition

Eine glatte Mannigfaltigkeit heißt **parallelisierbar**, wenn ihr Tangentialbündel trivial ist.

### 1.3.7 Satz: Einbettungssatz von Whitney

Sei  $M$  eine glatte, geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Dann existiert eine Einbettung  $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  von  $M$  als Untermannigfaltigkeit.

#### Beweis

- Sei  $U_1, \dots, U_k$  eine Überdeckung von  $M$  durch Karten mit Diffeomorphismen  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ . Wir wählen zusätzlich offene Mengen  $V_1, \dots, V_k$  so, dass diese  $M$  überdecken und dass gilt

$$\overline{V_i} \subset U_i$$

Ferner wählen wir glatte Funktionen  $\lambda_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\lambda_i|_{V_i} \equiv 1 \text{ und } \text{supp} \lambda_i \subset U_i$$

Definiere nun glatte Abbildungen

$$\begin{aligned} \psi_i : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} \lambda_i(x) \varphi_i(x) & x \in U_i \\ 0 & x \notin U_i \end{cases} \end{aligned}$$

Wir erhalten nun eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned} \Theta : M &\longrightarrow (\mathbb{R}^n)^k \times \mathbb{R}^k \\ x &\longmapsto (\psi_1(x), \dots, \psi_k(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_k(x)) \end{aligned}$$

- Wir wollen zeigen, dass  $\Theta$  eine Einbettung ist.  
Sei  $p \in V_i, 0 \neq v \in T_p M$ . Angenommen es gilt

$$\Theta_{*,p}(v) = 0$$

Dann gilt insbesondere

$$\psi_{i,*,p}(v) = 0$$

$\lambda_i$  ist in einer Umgebung von  $p$  konstant 1, ergo gilt

$$\varphi_{j,p,*}(v) = 0$$

Aber  $\varphi_{j,p,*}$  ist ein Diffeomorphismus, ergo erhalten wir einen Widerspruch. Insofern ist  $\Theta$  immersiv.

Anhand der Definition sieht man auch ein, dass  $\Theta$  injektiv ist. Ferner ist  $\Theta$  ein Homöomorphismus auf sein Bild, da  $M$  kompakt und  $\mathbb{R}^{n_k+k}$  ein Hausdorffraum ist.

- Wir haben nun eine Einbettung

$$\Theta : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

und wollen  $N$  auf  $2n+1$  verringern. Dazu nehmen wir an, dass es ein  $0 \neq w \in \mathbb{R}^N$  gibt mit

$$\begin{aligned} &w \text{ ist nicht tangential zu } \Theta(M) \\ &\forall x, y \in \Theta(M) : x \neq y \implies x - y \text{ ist nicht parallel zu } w \end{aligned}$$

In diesem Fall ergibt sich folgendes Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^N & \xrightarrow{\quad} & w^\perp \\ \Theta \uparrow & \nearrow \Theta' & \\ M & & \end{array}$$

wobei  $\Theta'$  wieder eine Einbettung liefert.

- Wir wollen die Existenz von den oben proklamierten  $w$ s zeigen und betrachten die Projektion

$$\mathbb{R}^N \longrightarrow P^{N-1}\mathbb{R}$$

Wir erhalten zwei Abbildungen

$$\begin{aligned}\tau : \mathcal{T}M - M \subset \mathbb{R}^N &\longrightarrow P^{N-1}\mathbb{R} \\ v &\longmapsto [v] \\ \sigma : M \times M - \Delta(M) &\longrightarrow P^{N-1}\mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto [x - y]\end{aligned}$$

Laut dem Satz von Sard besitzen beide Abbildungen einen gemeinsamen regulären Wert  $[w]$ . Da

$$\dim M \times M = \dim \mathcal{T}M = 2n < N - 1 = \dim P^{N-1}\mathbb{R}$$

kann dieser Wert nicht in den Bildern von  $\tau$  und  $\sigma$  liegen, ergo erfüllt  $w$  obige Eigenschaften.

□

### 1.3.8 Definition

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale glatte Mannigfaltigkeit mit einer Einbettung  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ . Setze

$$E := \{(p, v) \in M \times \mathbb{R}^{n+k} \mid v \perp T_p M\}$$

Dann ist  $(\pi, E, M)$  das **Normalenbündel** von Rang  $k$  bzgl.  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ .

### 1.3.9 Satz: Tubenumgebung

Ist  $M$  kompakt im obigen Setting, so existiert eine offene **Tubenumgebung**  $U \subset \mathbb{R}^{n+k}$  von  $M$  mit

$$U \cong E$$

Inbesondere kommt  $U$  mit einem Deformationsretrakt  $r : U \rightarrow M$  einher.

#### Beweis

Wir setzen für  $\varepsilon > 0$

$$E(\varepsilon) := \{(p, v) \in E \mid \|v\| < \varepsilon\}$$

Offensichtlich liegt dann folgende Isomorphie vor

$$E(\varepsilon) \cong E$$



Durch die Exponentialabbildung von  $\mathbb{R}^{n+k}$  erhalten wir eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned}\exp : E(\varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+k} \\ (p, v) &\longmapsto \exp_p(v) = p + v\end{aligned}$$

Da  $M$  kompakt ist, können wir  $\varepsilon$  so klein wählen, dass  $\exp$  zu einer Einbettung der Untermannigfaltigkeit  $E(\varepsilon)$  wird. Dann setzen wir

$$U := \exp(E(\varepsilon))$$

□



# Kapitel 4

## VEKTORRAUMBÜNDEL

Vorlesung  
vom  
1.12.17

### 4.1 Glatter Approximationssatz

#### 4.1.1 Proposition

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $A \stackrel{c}{\subset} M$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  stetig, sodass  $f|_A$  glatt ist. Dann existiert für alle  $\varepsilon > 0$  eine Abbildung  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit:

- 1.)  $g$  ist glatt
- 2.)  $g|_A = f|_A$
- 3.)  $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon \quad \forall x \in M$
- 4.)  $g \simeq f$  relativ  $A$  durch eine  $\varepsilon$ -kleine Homotopie, d. h., es existiert eine Homotopie  $H : M \times I \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit
  - (a)  $H(x, t) = H(x, 0) \quad \forall t \in I, x \in A$
  - (b)  $H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in A$
  - (c)  $H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in A$
  - (d)  $d(H(x, t_1), H(x, t_2)) < \varepsilon \quad \forall x \in M, t_1, t_2 \in I$

#### Beweis

Für alle  $x \in M$  wählen wir:

Fall 1  $x \in A$ :

Dann existiert eine offene Umgebung  $V_x \subset M$  und eine glatte Abbildung  $h_x : V_x \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit

$$h_x|_{V_x \cap A} = f|_{V_x \cap A}$$

Fall 2  $x \notin A$ :

Wähle  $V_x \overset{o}{\subset} M$  mit

$$V_x \cap A = \emptyset$$

und wähle  $h_x : V_x \rightarrow \mathbb{R}^k$  glatt mit

$$h_x(y) = f(x)$$

für alle  $y \in V_x$ . Außerdem stellen wir sicher, dass die  $V_x$  so klein sind, dass für  $x, x' \notin A$  gilt

$$\|h_x(y) - f(x')\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f(y) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sei  $(U_\alpha)_\alpha$  eine lokal endliche Verfeinerung von  $(V_x)_x$  mit

$$U_\alpha \subset V_{x(\alpha)}$$

Sei  $(\lambda_\alpha)_\alpha$  eine glatte Partition der Eins mit  $\text{supp } \lambda_\alpha \subset U_\alpha$ .

Wir setzen

$$g(y) := \sum_{\alpha} \lambda_\alpha(y) h_{x(\alpha)}(y)$$

Dann ist  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  bereits glatt.

Sei  $y \in A$ . Wenn  $y \notin V_{x(\alpha)}$ , dann ist  $\lambda_\alpha(y) = 0$ , denn  $\text{supp}(\lambda_\alpha) \subset V_{x(\alpha)}$ . Daraus folgt

$$g(y) = \sum_{\alpha: y \in V_{x(\alpha)} \cap A} \lambda_\alpha(y) h_{x(\alpha)}(y) = \sum_{\alpha: y \in V_{x(\alpha)} \cap A} \lambda_\alpha(y) f(y) = f(y)$$

bzw.

$$f|_A = g|_A$$

Sei  $y \notin A$

$$g(y) - f(y) = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha(y) (h_{x(\alpha)}(y) - f(y))$$

Da  $\|h_{x(\alpha)}(y) - f(y)\| \leq \|h_{x(\alpha)}(y) - f(x)\| + \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ , folgt

$$\|g(y) - f(y)\| \leq \varepsilon$$

Wir definieren nun die Homotopie zwischen  $f$  und  $g$  durch

$$H(x, t) := t \cdot f(x) + (1 - t)g(x)$$

□

### 4.1.2 Satz: Glatter Approximationssatz

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$ , sei  $N$  eine glatte, kompakte und metrische Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Sei  $A \stackrel{c}{\subset} M$ ,  $f : M \rightarrow N$  stetig.  $f$  sei auf  $A$  eingeschränkt glatt. Dann gilt:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert eine glatte Abbildung  $h : M \rightarrow N$ , sodass gilt:

1.  $h$  stimmt auf  $A$  mit  $f$  überein.
2.  $f$  und  $h$  sind durch eine  $\varepsilon$ -kleine Homotopie relativ zu  $A$  verbunden.

#### Beweis

$N$  habe eine glatte Einbettung  $\iota : N \hookrightarrow \mathbb{R}^k$ . Da  $N$  kompakt ist, existiert für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$ , sodass für alle  $p, q \in N$  gilt

$$\|\iota(p) - \iota(q)\| < \delta \implies d(p, q) < \varepsilon$$

d. h.,  $\iota^{-1}$  ist gleichmäßig stetig.

Dies motiviert im Folgenden  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^k$  statt  $d$  auf  $N$  zu betrachten.

Wir fixieren ein  $\varepsilon > 0$ . Der Satz über Tubenumgebungen impliziert die Existenz einer  $\frac{\delta}{2}$ -Umgebung  $U \stackrel{o}{\subset} \mathbb{R}^k$  von  $\iota(N)$ , sodass  $U \cong E(\frac{\delta}{2})$ , wobei  $E$  das Normalenbündel zu  $\iota$  war.

Aus der vorhergehenden Proposition folgt nun die Existenz einer glatten Abbildung  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ , die  $\frac{\delta}{2}$ -klein und relativ zu  $A$  homotop zu  $\iota \circ f$  ist. Das Bild von  $g$  liegt dann ganz in  $U$ .

Sei  $r : U \rightarrow N$  ein glatter Deformationsretrakt. Wir können fordern, dass diese eine  $\frac{\varepsilon}{2}$ -kleine Homotopie induziert. Dann ist  $r \circ g$  glatt und homotop zu  $f$  via einer  $\varepsilon$ -kleinen Homotopie relativ zu  $A$ .  $\square$

### 4.1.3 Bemerkung

- Der Metrisierbarkeitssatz von Smirnov besagt.

Ist  $X$  ein parakompakter, lokal metrisierbarer Hausdorffraum, so ist  $X$  global metrisierbar.

Insbesondere sind Mannigfaltigkeiten immer metrisierbar.

- Sei  $f : M \rightarrow S^n$  eine stetige Abbildung.  $m = \dim M < n$ . Der Glatte Approximationssatz impliziert nun die Existenz einer glatten Abbildung  $f : M \rightarrow S^n$ , die homotop zu  $f$  ist.

Der Satz von Sard proklamiert nun die Existenz eines regulären Wert  $p \in S^n$  von  $g$ . Da  $m < n$ , folgt aber hieraus

$$p \notin g(M)$$

$S^n - p \cong \mathbb{R}^n$ , ergo erhalten wir eine glatte Abbildung  $g : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Hieraus folgt aber, dass  $g$  nullhomotop ist. Insbesondere ist auch  $f$  nullhomotop.

D. h., eine stetige Abbildung von einer glatten Mannigfaltigkeit in eine höherdimensionale Sphäre ist immer null-homotop.

- $\partial D^{n+1} = S^n$  ist kein Retrakt von  $D^{n+1}$ .

Denn angenommen, es gäbe eine Retraktion  $r : D^{n+1} \rightarrow S^n$ . Definiere

$$D_{\leq \frac{1}{2}}^{n+1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| \leq \frac{1}{2} \right\} \text{ und } \partial D_{\leq \frac{1}{2}}^{n+1} = S_{\frac{1}{2}}^n$$

Analog erhalten wir  $r_{\frac{1}{2}} : D_{\leq \frac{1}{2}}^{n+1} \rightarrow S_{\frac{1}{2}}^n$ . Betrachte ferner

$$p : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow S^n, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

Definiere nun

$$f : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow S^n$$

$$x \longmapsto \begin{cases} p(r_{\frac{1}{2}}(x)) & \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ p(x) & \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$f$  ist glatt in einer kleinen Umgebung vom  $S^n$ . Betrachte

$$f|_{D^{n+1}} \longrightarrow S^n$$

Diese Abbildung ist stetig, ergo homotop zu einer glatten Abbildung  $g : D^{n+1} \rightarrow S^n$ , wobei  $f|_{S^n} = g|_{S^n}$ .

Mit dem Satz von Sard existiert ein regulärer Wert für  $g$  (und  $g|_{S^n}$ ).

$g^{-1}(p)$  ist dann eine glatte, kompakte Untermannigfaltigkeit der Dimension 1 mit Rand. Es gilt folgende Randformel

$$\partial g^{-1}(p) = (g^{-1}(p)) \cap \partial D^{n+1}$$

Dann ist  $g^{-1}(p)$  eine endliche Vereinigung von Kreisen in  $\text{int}(D^n)$  und kompakten Intervallen mit Randpunkten in  $S^n$ . Allerdings gilt

$$\partial g^{-1}(p) = \{p\}$$

da  $g$  die ganze Faser  $g^{-1}(p)$  auf  $p$  schickt und  $g$  auf  $S^n$  die Identität ist. Deswegen kann die Zahl der Randpunkte von  $g^{-1}(p)$  nicht gerade sein.

#### 4.1.4 Lemma

Sei  $(M, \partial M)$  eine berandete Mannigfaltigkeit,  $g : M \rightarrow N$  glatt.  $p \in N$  sei regulär für  $g$  und für  $g|_{\partial M}$ . Dann gilt

$$\partial g^{-1}(p) = g^{-1}(p) \cap \partial M$$

#### 4.1.5 Beispiel

Betrachte  $g : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

$p = 1$  ist ein regulärer Wert für  $g$ , aber nicht für  $g|_{S^1} \stackrel{\text{konst.}}{=} 1$ . Es gilt

$$g^{-1}(p) \cap \partial D^2 = S^1 \cap S^1 = S^1$$

aber

$$\partial g^{-1}(p) = \partial S^1 = \emptyset$$

Vorlesung  
vom  
4.12.17

### 4.1.6 Korollar: Brownscher Fixpunktsatz

Jede stetige Abbildung  $f : D^n \rightarrow D^n$  hat einen Fixpunkt.

#### Beweis

Wir nehmen an,  $f : D^n \rightarrow D^n$  habe keinen Fixpunkt. Wir definieren dann folgende stetige Abbildung

$$\begin{aligned} r : D^n &\longrightarrow S^{n-1} \\ x &\longmapsto x + t(x - f(x)) \end{aligned}$$

s.d.  $x + t(x - f(x)) \in S^{n-1}$ . Er ist insbesondere ein Retrakt auf  $S^{n-1}$ , da  $r$  die Identität auf  $S^{n-1}$  ist. Dies steht im Widerspruch zum obigen Satz.  $\square$

### 4.1.7 Korollar

Sphären sind nicht zusammenziehbar.

#### Beweis

Angenommen,  $S^n$  wäre zusammenziehbar. Dann existiert eine Homotopie

$$H : S^n \simeq p \in S^n$$

der folgendes Diagramm induziert

$$\begin{array}{ccc} S^n \times I & \xrightarrow{H} & S^n \\ \downarrow \text{Quot} & \searrow \exists_1 \overline{H} & \nearrow \\ S^n \times I / S^n \times \{1\} & & \end{array}$$

Wir haben also eine stetige Abbildung

$$\overline{H} : D^{n+1} \longrightarrow S^n$$

wobei gilt

$$\overline{H}|_{S^n} = \text{Id}_{S^n}$$

Ergo ist  $\overline{H}$  ein Retrakt von  $D^{n+1}$  auf  $S^n$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

## 4.2 Homogenität von Mannigfaltigkeiten

Wir wollen Folgendes zeigen in diesem Kapitel.



**4.2.1 Satz**

Sei  $M$  eine zusammenhängende, geschlossene Mannigfaltigkeit und  $p, q \in M$  beliebige Punkte. Dann existiert ein Diffeomorphismus  $\varphi : M \rightarrow M$ , der sogar isotop zur Identität ist, mit

$$\varphi(p) = q$$

**4.2.2 Lemma**

Für  $p = 0 \in \mathbb{R}^n$  und  $q \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|q\| < 1$  existiert ein Diffeomorphismus  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

- i.  $\tau(p) = q$
- ii.  $\tau(x) = x$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  mit  $\|x\| \geq 1$
- iii.  $\tau$  ist isotop zu  $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}$

**Beweis**

Ohne Einschränkung liege  $q \in [0, 1)$  auf einer Achse. Wähle eine glatte Funktion  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\begin{aligned} \lambda(x) &> 0 \text{ für } \|x\| < 1 \\ \lambda(x) &= 0 \text{ für } \|x\| \geq 1 \end{aligned}$$

Sei  $v_0 \in S^{n-1}$ . Wir definieren folgendes Vektorfeld auf  $\mathbb{R}^n$

$$v(x) := \lambda(x) \cdot v_0$$

Dann ist  $v(x) = 0$  für  $\|x\| \geq 1$ .

Wir betrachten nun folgende gewöhnliche Differentialgleichung

$$\begin{cases} x'(t) = v(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Diese hat lokal eine eindeutige Lösung  $x(t)$ , die glatt von  $x_0$  abhängt. Hier existiert die Lösung für alle  $t \in \mathbb{R}$ , da  $v(x)$  außerhalb einer kompakten Menge verschwindet. Definiere

$$\begin{aligned} \tau_t(x_0) &:= x(t) \\ \tau_0(x_0) &:= x_0 \end{aligned}$$

Die  $\{\tau_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \text{Diffeo}(\mathbb{R}^n)$  bilden dann eine Einparametergruppe von Diffeomorphismen. Es gilt

$$\{\tau_t(0) \mid t \in \mathbb{R}^n\} = [0, 1)$$

Ergo erfüllt eines der  $\tau_t$  die Voraussetzungen. □

**Beweis: Satz 4.2.1**

Seien  $p, q \in M$ .

- Liegen  $p, q$  im Definitionsbereich einer Karte  $U \subset M$ , dann konstruieren wir ein Koordinatensystem  $x$  um  $p$  mit

$$\begin{aligned} x(p) &= 0 \\ x(q) &= \left(\frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right) \end{aligned}$$

Dann verwenden wir das  $\tau : U \rightarrow U$  aus dem vorhergehenden Lemma, um  $p$  auf  $q$  abzubilden und setzen  $\tau$  durch die Identität zu einem Diffeomorphismus auf  $M$  fort.

- Sind  $p, q$  beliebig auf  $M$  verteilt, so können wir  $M$  mit endlich vielen Karten überdecken und eine Sequenz von Punkten

$$p = p_0 \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow \dots \rightarrow p_k = q$$

finden, bei denen zwei hintereinander folgende Punkte in einer Karte liegen. Wir konstruieren nun induktiv Diffeomorphismen  $\tau : p \mapsto p_i$ .

□

### 4.3 Theorie der Abbildungsgrade

Seien  $M, N$  glatte, geschlossene Mannigfaltigkeiten derselben Dimension  $n$ .

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung.

Wir wollen  $f$  einen **Abbildungsgrad**  $\deg f \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  zuordnen, sodass gilt

$$\deg f = \deg g$$

für  $f \simeq g$ . Dadurch wird der Abbildungsgrad zu einer Homotopieinvariante von  $f$ .

Sei  $p \in N$  ein regulärer Wert von  $f$ . Dann ist  $f^{-1}(p)$  eine nulldimensionale, kompakte Untermannigfaltigkeit von  $M$ , also eine endliche Menge von Punkten. Wir setzen

$$\deg_p f := \#f^{-1}(p) \mod 2$$

#### 4.3.1 Lemma

Seien  $f, g : M \rightarrow N$  glatt und sei  $H : M \times I \rightarrow N$  eine Homotopie von  $f$  nach  $g$ . Ist  $p$  ein regulärer Wert für  $f, g$  und  $H$ , so gilt

$$\deg_p f = \deg_p g \mod 2$$

##### Beweis

$H^{-1}(p)$  ist eine kompakte eindimensionale Untermannigfaltigkeit von  $M \times I$  mit Rand

$$\partial H^{-1}(p) = \partial(M \times I) \cap H^{-1}(p) = f^{-1}(p) \times \{0\} \cup g^{-1}(p) \times \{1\}$$

$H^{-1}(p)$  ist eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen Kreisen und kompakten Intervallen. Daraus folgt

$$\#\partial H^{-1}(p) \equiv 0 \mod 2$$

Nun gilt aber

$$\#\partial H^{-1}(p) = \#f^{-1}(p) + \#g^{-1}(p)$$

Daraus folgt die Behauptung. □

#### 4.3.2 Lemma

In Lemma 4.3.1 genügt es anzunehmen, dass  $p$  ein regulärer Wert für  $f$  und  $g$  ist.

**Beweis**

Auf einer hinreichend kleinen Umgebung eines Urbildes von  $p$  unter  $f$  ist  $f$  ein lokaler Diffeomorphismus, da  $p$  regulär ist und  $\dim M = \dim N$ .

Also ist jeder Punkt, der hinreichend nahe bei  $p$  liegt, auch ein regulärer Wert von  $f$  und  $g$ .

Laut dem Satz von Sard existiert ein  $p'$  hinreichend nahe bei  $p$ , sodass  $p'$  ein regulärer Wert von  $H$  ist.  $p'$  ist dann insbesondere regulär für  $f$  und  $g$ .  $\square$

**4.3.3 Lemma**

Sei  $N$  zusammenhängend. Seien  $p, q$  reguläre Werte von  $f$ . Dann gilt

$$\deg_p f = \deg_q f \pmod{2}$$

**Beweis**

Aus der Homogenität von  $N$  folgt die Existenz eines Diffeomorphismus  $\tau : p \mapsto q$ , der isotop zur Identität ist. Es gilt

$$(\tau f)^{-1}(q) = f^{-1}(p)$$

Nun gilt

$$\deg_q f \equiv \deg_q \tau \circ f = \deg_p f \pmod{2}$$

$\square$

## 4.4 Orientierungen

Seien  $V, W$  reelle Vektorräume der Dimension  $n$ .

Vorlesung  
vom  
8.12.17

### 4.4.1 Definition

Eine **Orientierung** von  $V$  ist die Äquivalenzklasse einer geordneten Basis  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  von  $V$ , wobei zwei geordnete Basen  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  und  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  genau dann äquivalent sind, wenn die Determinante des Isomorphismus  $\Phi$ , der  $\alpha_i$  auf  $\beta_i$  abbildet, positiv ist.

### 4.4.2 Bemerkung

Ist  $n > 0$ , so hat  $V$  genau eine Orientierung. Anderenfalls hat  $V$  genau eine Orientierung.

### 4.4.3 Definition

Die **kanonische Orientierung** von  $\mathbb{R}^1$  ist gegeben durch

$$[(+1)]$$

### 4.4.4 Bemerkung

Sind  $V$  und  $W$  orientiert<sup>1</sup>, so ist auch  $V \oplus W$  orientiert. D. h.

$$\frac{\begin{array}{l} V : [(\alpha_1, \dots, \alpha_n)] \\ W : [(\beta_1, \dots, \beta_n)] \end{array}}{V \oplus W : [(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n)]}$$

Insbesondere ist  $\mathbb{R}^n$  kanonisch orientiert.<sup>2</sup>

### 4.4.5 Definition

Eine **stabile Orientierung** von  $V$  ist eine Orientierung  $V \oplus \mathbb{R}^1$ .<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>Ein **orientierter** Vektorraum ist ein Vektorraum zusammen mit einer fixierten Orientierung.

<sup>2</sup>Haben  $V \oplus W$  und  $W \oplus V$  dieselbe Orientierung?

<sup>3</sup>Also eigentlich eine von  $V \oplus \mathbb{R}^n$  für  $n > 0$ . Beachte, dass  $\mathbb{R}^n$  kanonisch orientiert ist für alle  $n > 0$ , und diese Orientierungen können kompatibel gewählt werden, d. h.,  $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^{n+m}$  ist kanonisch orientiert, wenn  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  beide kanonisch bzw. antikanonisch orientiert sind.

### 4.4.6 Bemerkung

Jeder Vektorraum hat genau zwei stabile Orientierungen.

### 4.4.7 Beispiel

Der nulldimensionale Vektorraum hat die beiden stabilen Orientierungen

$$[(+1)] \text{ und } [(-1)]$$

die wir kurz auch einfach nur als  $+$  und  $-$  bezeichnen werden.

### 4.4.8 Prinzip

Sind zwei der Elemente aus  $\{V, W, V \oplus W\}$  stabil orientiert, so ist auch das dritte auf kanonische Weise stabil orientiert.

### 4.4.9 Beispiel

Es sei  $V = 0$ .  $W = \mathbb{R}^1$  kanonisch orientiert.  $V \oplus W = \mathbb{R}^1$  sei antikanonisch orientiert<sup>4</sup>. Dann erhält  $V$  die stabile Orientierung  $-$ .

### 4.4.10 Definition

Ein Vektorraumhomomorphismus  $\Phi : V \rightarrow W$  heißt **orientierungserhaltend**, falls

$$[(\Phi(\alpha_1), \dots, \Phi(\alpha_n))] = [(\beta_1, \dots, \beta_n)]$$

Anderenfalls heißt  $\Phi$  **orientierungsumkehrend**.

### 4.4.11 Definition

Sei  $p : E \rightarrow B$  ein Vektorraumbündel von Rang  $n$  mit lokaler Trivialisierung

$$p^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

Eine **Orientierung** von  $p$  ist eine Familie von Orientierungen der  $p^{-1}(b), b \in B$ , sodass alle

$$p^{-1}(b) \xrightarrow{\varphi_\alpha} \{b\} \times \mathbb{R}^n$$

---

<sup>4</sup>An dieser Stelle ist es wichtig zu erwähnen, dass der kanonische Isomorphismus  $V \oplus W \cong \mathbb{R}^1$  hier orientierungserhaltend gewählt ist.

orientierungserhaltend sind, wobei  $\{b\} \times \mathbb{R}^n$  kanonisch orientiert ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Übergangsfunktionen

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

nur orientierungserhaltende Isomorphismen als Bilder annehmen, d. h.

$$\det \varphi_{\alpha\beta}(x) > 0 \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

#### 4.4.12 Bemerkung

Ein orientierbares Vektorraumbündel mit einem zusammenhängenden Basisraum hat genau zwei stabile Orientierungen.

Denn, seien  $\alpha, \beta$  zwei Orientierungen von  $p : E \rightarrow B$ . Die Menge der  $b \in B$  an denen  $\alpha$  und  $\beta$  übereinstimmen ist offen. Die Menge, in denen sich  $\alpha$  und  $\beta$  unterscheiden ist aber auch offen. Allgemein können wir eine Orientierung als eine stetige Abbildung

$$\mathrm{or} : B \longrightarrow \{+, -\}$$

auffassen.

#### 4.4.13 Beispiel

Das Möbiusbündel ist nicht orientierbar.

#### 4.4.14 Prinzip

Sind zwei Elemente aus der Menge der Vektorbündel  $E, E', E \oplus E'$  über  $B$  orientiert, so bestimmt dies eindeutig und kanonisch eine Orientierung des Dritten.

#### 4.4.15 Bemerkung

Vektorraumbündel über nullhomotopen Basisräumen sind immer orientierbar.

##### Beweis

Definiere

$$\widehat{X} := \{(x, \alpha) \mid x \in X, \alpha : \text{Orientierung von } p^{-1}(x)\}$$

Dies liefert eine Überlagerung von Grad 2.

□

### 4.4.16 Proposition

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit.  $M$  ist genau dann orientierbar, wenn  $\mathcal{T}M$  orientierbar ist.

#### Beweis

Die  $\varphi_{\alpha\beta}$  sind gerade die Jacobimatrizen der Kartenwechsel. □

### 4.4.17 Bemerkung

Sei  $(M, \partial M)$  eine glatte berandete Mannigfaltigkeit. Es gilt

$$\mathcal{T}M|_{\partial M} = \mathcal{T}(\partial M) \oplus \mathbb{R}^1$$

Denn auf  $\partial M$  können wir einen Schnitt angeben, indem wir einen Vektor im Tangentialraum identifizieren, der vom Rand nach **innen** rein geht.

Ist  $M$  orientiert, so ist es auch  $\mathcal{T}M$ , dadurch auch  $\mathcal{T}\partial M$  und ergo auch  $\partial M$ . Beachte, dass wir immer den nach innen weisenden Randvektor für  $\mathbb{R}^1$  instrumentalisieren.

### 4.4.18 Definition

Seien  $M, N$  geschlossene orientierte glatte Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$ .

$f : M \rightarrow N$  sei glatt.

Sei ferner  $p \in N$  ein regulärer Wert von  $f$ . Definiere

$$\deg_p f := \sum_{q \in f^{-1}(p)} \varepsilon_q$$

wobei

$$\varepsilon_q := \begin{cases} +1 & df_q : T_q M \rightarrow T_p N \text{ ist orientierungserhaltend} \\ -1 & df_q : T_q M \rightarrow T_p N \text{ ist orientierungsumkehrend} \end{cases}$$

### 4.4.19 Bemerkung

Wie im nicht orientierten Fall zeigt man, dass  $\deg_p f$  unabhängig von  $p$  und eine Homotopieinvariante bzgl.  $f$  ist.

Denn ist  $M$  orientiert,  $f \simeq g$ , so ist  $M \times I$  orientiert, da  $I$  kanonisch orientiert ist. Ergo ist auch  $f^{-1}(p)$  orientiert, da  $\partial H^{-1}(p)$  orientiert ist. Alle Punkte in  $f^{-1}(p)$  und  $g^{-1}(p)$  haben eine Orientierung. Ihre Epsilonwerte subtrahieren sich zu Null.



## 4.5 Anwendungen des Abbildungsgrades

Im Folgenden seien  $M, N$  geschlossene glatte orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$ .

Vorlesung  
vom  
11.12.17

### 4.5.1 Lemma

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt. Ist  $\deg f \neq 0$ , dann ist  $f$  surjektiv.

#### Beweis

Wäre  $f$  nicht surjektiv, dann wählen wir  $p \in N - f(M)$ . Damit ist  $p$  regulär und es gilt

$$\deg f = \deg_p f = 0$$

□

### 4.5.2 Satz: Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nichtkonstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle.

#### Beweis

Sei  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ein nichtkonstantes komplexes Polynom. Ohne Einschränkung hat  $f$  folgende Gestalt

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

Es gilt notorischerweise

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

$f$  induziert somit eine stetige Fortsetzung  $\bar{f}$  auf der Ein-Punkt-Kompaktifizierung von  $\mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned} \bar{f} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ z \in \mathbb{C} &\longmapsto f(z) \\ \infty &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

Wir fassen im Folgenden  $\mathbb{C} \cup \infty$  als  $S^2$  auf. Wir wollen den Abbildungsgrad von  $\bar{f}$  bestimmen. Betrachte hierzu folgende Homotopie

$$\begin{aligned} H : S^2 \times I &\longrightarrow S^2 \\ (z, t) &\longmapsto z^n + a_{n-1}tz^{n-1} + \dots + a_1tz + a_0t \end{aligned}$$

hierdurch werden  $\bar{f}$  und  $\bar{g}$  homotop für  $g(z) := z^n$ . Ergo haben  $\bar{f}$  und  $\bar{g}$  den selben Abbildungsgrad. Der Abbildungsgrad von  $\bar{g}$  ist gerade  $n$ . Betrachte zum Beispiel den regulären Wert 1. Dieser hat  $n$   $n$ -te Einheitswurzeln.

Ergo verschwindet der Abbildungsgrad von  $\bar{f}$  nicht, ergo ist  $\bar{f}$  surjektiv, ergo ist  $f$  surjektiv, ergo hat  $f$  eine Nullstelle.  $\square$

### 4.5.3 Bemerkung

Es liegt folgender Isomorphismus vor

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{punktierter Homotopieklassen von} \\ \text{stetigen Abbildungen } f : S^n \rightarrow S^n \end{array} \right\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

$$[f] \mapsto \deg f$$

# Kapitel 5

## GLATTE DIFFERENTIALFORMEN UND DE RHAM KOHOMOLOGIE

### Motivation

Für jede glatte Funktion  $f : U \stackrel{o}{\subset} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  existiert eine glatte **Stammfunktion**  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ , d. h.

$$\frac{d}{dx}F = f$$

Kann das auf Funktionen in mehreren Veränderlichen verallgemeinert werden?  
Betrachten wir hierzu eine glatte Abbildung

$$f : U \stackrel{o}{\subset} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

**Frage** Existiert ein **Potential**  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  sodass

$$f = \left( \frac{d}{dx}F, \frac{d}{dy}F \right) =: (f_1, f_2)$$

Wenn ja, dann gilt auch

$$\frac{df_1}{dy} = \frac{d^2F}{dx dy} = \frac{d^2F}{dy dx} = \frac{df_2}{dx}$$

Dadurch erhalten wir folgende notwendige Bedingung

$$\frac{df_1}{dy} = \frac{df_2}{dx}$$

**Frage** Ist diese Bedingung hinreichend?

Schauen wir uns dazu folgendes Beispiel an:

$$f : \mathbb{R}^2 - 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}(-x_2, x_1)$$

$f$  erfüllt obige Bedingung. Angenommen es gäbe ein Potential  $F : \mathbb{R}^2 - 0 \rightarrow \mathbb{R}$  für  $f$ . Betrachte

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = F(\cos 2\pi, \sin 2\pi) - F(\cos 0, \sin 0) = 0$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} F(\cos \theta, \sin \theta) &= -\sin \theta \frac{\partial F}{\partial x_1}(\cos \theta, \sin \theta) + \cos \theta \frac{\partial F}{\partial x_2}(\cos \theta, \sin \theta) \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1 \end{aligned}$$

woraus folgen würde

$$\int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi$$

Dies ist ein Widerspruch, ergo ist obige Bedingung nicht hinreichend.

### 5.0.1 Definition

Eine Menge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt **sternförmig** bzgl.  $x_0 \in U$ , wenn für alle  $x \in U$  die Strecke

$$\{tx + (1-t)x_0 \mid t \in [0, 1]\}$$

in  $U$  enthalten ist.

### 5.0.2 Proposition

Ist  $U \subset \mathbb{R}^2$  sternförmig und erfüllt die glatte Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Bedingung

$$\frac{df_1}{dx_2} = \frac{df_2}{dx_1}$$

dann hat  $f$  ein Potential auf  $U$ .

**Beweis**

Ohne Einschränkung ist  $x_0 = 0$  das Zentrum von  $U$ . Dann setzen wir

$$F(x_1, x_2) = \int_0^1 x_1 f_1(tx_1, tx_2) + x_2 f_2(tx_1, tx_2) dt$$

□

**5.0.3 Bemerkung**

Die Existenz eines Potentials hängt also irgendwie von der Topologie der Definitionsmenge ab.

**Umformulierung**

Sei  $U \subset \mathbb{R}^2$ . Wir definieren den **Gradient** durch

$$\begin{aligned} \nabla : C^\infty(U, \mathbb{R}) &\longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}^2) \\ f &\longmapsto \left( \frac{df}{dx_1}, \frac{df}{dx_2} \right) \end{aligned}$$

Die **Rotation** definieren wir durch

$$\begin{aligned} \text{rot} : C^\infty(U, \mathbb{R}^2) &\longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}) \\ f_1, f_2 &\longmapsto \frac{df_1}{dx_2} - \frac{df_2}{dx_1} \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$\text{rot} \circ \nabla = 0$$

D. h.,  $\text{Bild} \nabla \subset \text{Kern rot}$ . Wir definieren die **erste Kohomologiegruppe** von  $U$  durch

$$H^1(U) := \text{Kern rot} / \text{Bild} \nabla$$

**5.0.4 Beispiel**

Wir wissen bereits

$$H^1(\text{sternförmig}) = 0$$

und

$$H^1(\mathbb{R}^2 - 0) \neq 0$$

## 5.1 Äußere Algebren

Sei  $V$  ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum. Es bezeichne  $V^k$  das  $k$ -fache kartesische Produkt von  $V$  mit Vektorraumstruktur.

### 5.1.1 Definition

Eine  $k$ -lineare Abbildung  $\omega : V^k \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **alternierend**, wenn

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$$

für alle  $v_1, \dots, v_k$ , in denen ein Vektor  $v_i$  mindestens an zwei Stellen vorkommt. Das ist äquivalent dazu zu fordern, dass  $\omega$  für alle linear abhängige System  $v_1, \dots, v_k$  verschwindet.

### 5.1.2 Bemerkung

Für ein alternierendes  $\omega$  gilt

$$\omega(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -\omega(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k)$$

### 5.1.3 Definition

Unter  $Alt^k(V) \subset \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V^k, \mathbb{R})$  verstehen wir den reellen Vektorraum der alternierenden Formen. Wir legen ferner folgende Konvention fest

$$Alt^0(V) := \mathbb{R}$$

### 5.1.4 Beispiel

Ist  $k = \dim V$ , so ist  $Alt^k(V)$  eindimensional und wird von der Determinante erzeugt.

### 5.1.5 Lemma

- 1.)  $Alt^k(V) = 0$  für  $k > \dim V$
- 2.)  $\omega(v_1, \dots, v_n) = \text{sgn}(\sigma) \cdot \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$   
für eine Permutation  $\sigma \in S_k = \text{Bij}(\{1, \dots, k\}, \{1, \dots, k\})$

## 5.2 Äußeres Produkt

Wir wollen ein Produkt auf dem System der  $Alt^k(V)$  konstruieren.

$$\wedge : Alt^p(V) \times Alt^q(V) \longrightarrow Alt^{p+q}(V)$$

Für  $p = q = 1$  legen wir fest

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_1(v_2)\omega_2(v_1)$$

### 5.2.1 Definition

Eine Permutation  $\sigma \in S_{p+q}$  heißt  $(p, q)$ -**Shuffle**, wenn gilt

$$\begin{aligned} \sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(p) \\ \text{und } \sigma(p+1) < \sigma(p+2) < \dots < \sigma(p+q) \end{aligned}$$

Ein  $(p, q)$ -Shuffle ist eindeutig durch sein Verhalten auf  $\{1, \dots, p\}$  festgelegt. Daraus folgt

$$\#S_{p,q} = \binom{p+q}{p}$$

wobei  $S_{p,q} \subset S_{p+q}$  die Menge aller  $(p, q)$ -Shuffles bezeichnet.

### 5.2.2 Definition

Seien  $p, q$  beliebig,  $\omega_1 \in Alt^p(V), \omega_2 \in Alt^q(V)$ . Wir definieren das **Wedge-Produkt** der beiden Funktionale durch

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \dots, v_{p+q}) := \sum_{\sigma \in S_{p,q}} \text{sgn}(\sigma) \omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

Dann erhalten wir eine bilineare Abbildung

$$\wedge : Alt^p(V) \otimes Alt^q(V) \longrightarrow Alt^{p+q}(V)$$

Es gilt ferner

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \text{sgn}(\sigma) \omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \omega_2(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

Vorlesung  
vom  
15.12.17

### 5.2.3 Lemma

Das Wedge-Produkt ist assoziativ, bilinear und ein graduiert kommutatives Produkt, d. h.

- i.  $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$
- ii.  $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_3 + \omega_2 \wedge \omega_3$
- iii.  $(\lambda \omega_1) \wedge \omega_2 = \lambda(\omega_1 \wedge \omega_2) = \omega_1 \wedge (\lambda \omega_2)$
- iv.  $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq}(\omega_2 \wedge \omega_1)$

für  $\omega_1 \in \text{Alt}^p(V), \omega_2 \in \text{Alt}^q(V), \omega_3 \in \text{Alt}^t(V), \lambda \in \mathbb{R}$ .

### 5.2.4 Definition

Setze

$$\text{Alt}^*(V) = \bigcup_{p \geq 0} \text{Alt}^p(V)$$

$(\text{Alt}^*(V), +, \wedge)$  bildet eine graduierte  $\mathbb{R}$ -Algebra, die sogenannte **Äußere Algebra** von  $V$ . Sie ist graduiert kommutativ.

### 5.2.5 Lemma

Für 1-Formen  $\omega_1, \dots, \omega_p \in \text{Alt}^1(V)$  gilt

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(v_1, \dots, v_p) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \dots & \omega_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \dots & \omega_p(v_p) \end{pmatrix}$$

#### Beweis

Wir beweisen dies durch Induktion nach  $p$ .

Es sei  $p = 2$ . Dann gilt

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, v_2) = \omega_1(v_1)\omega_2(v_2) - \omega_2(v_1)\omega_1(v_2) = \det \begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \omega_1(v_2) \\ \omega_2(v_1) & \omega_2(v_2) \end{pmatrix}$$

Im Induktionsschritt rechnen wir nun

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_p)(v_1, \dots, v_p) = \sum_j (-1)^{j+1} \omega_1(v_j) (\omega_2 \wedge \dots \wedge \omega_p)(v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_p)$$



die Aussage ergibt sich nun, indem man

$$\begin{pmatrix} \omega_1(v_1) & \cdots & \omega_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_p(v_1) & \cdots & \omega_p(v_p) \end{pmatrix}$$

nach der ersten Zeile entwickelt. □

### 5.2.6 Lemma

Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine Basis von  $V$  und  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  die dazu duale Basis von  $\text{Alt}^1(V) = V^*$ . Dann ist

$$\{\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n\}$$

eine Basis für  $\text{Alt}^p(V)$ . Insbesondere gilt

$$\text{Alt}_p(V) = \binom{n}{p}$$

#### Beweis

Es gilt nach Lemma 1 für  $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{i_1} \wedge \varepsilon_{i_2} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) &= \det \begin{pmatrix} \varepsilon_{i_1}(e_{j_1}) & \cdots & \varepsilon_{i_1}(e_{j_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_{i_p}(e_{j_1}) & \cdots & \varepsilon_{i_p}(e_{j_p}) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \delta_{i_1, j_1} & \cdots & \delta_{i_1, j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_{i_p, j_1} & \cdots & \delta_{i_p, j_p} \end{pmatrix} = \begin{cases} \text{sign}(\sigma) & \{i_1, \dots, i_p\} = \{j_1, \dots, j_p\} \text{ und } \exists \sigma \in S_p : \sigma(i_k) = j_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für eine  $p$ -Form  $\omega \in \text{Alt}^p(V)$

$$\omega(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \cdot (\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$$

Definiert man  $c_{i_1, \dots, i_p} = \omega(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$ , so folgt mit der Linearität von  $\omega$

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} c_{i_1, \dots, i_p} (\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p})$$

Ergo wird  $Alt^p(V)$  linear von den Produkten  $\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}$  erzeugt. Diese Produkte sind linear unabhängig, denn wenn

$$\sum_{i_1 < \dots < i_p} b_{i_1, \dots, i_p} (\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}) = 0$$

für Koeffizienten  $b_{i_1, \dots, i_p} \in \mathbb{R}$ , dann gilt

$$b_{j_1, \dots, j_p} = \sum_{i_1 < \dots < i_p} b_{i_1, \dots, i_p} (\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p})(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = 0$$

für alle  $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$ . □

### 5.2.7 Beispiel

Für  $p = n$  ist  $Alt^p(V)$  eindimensional und erzeugt durch  $\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n$ .

## 5.3 Glatte Differentialformen auf Offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$

Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen.

### 5.3.1 Definition

Eine glatte **Differentialform** vom Grad  $p$  auf  $U$  ist eine glatte Abbildung

$$\omega : U \rightarrow Alt^p(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{p}}$$

Es gilt

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} f_{i_1, \dots, i_p}(x) (\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p})$$

für glatte Funktionen  $f_{i_1, \dots, i_p} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ .

Es bezeichne  $\Omega^p(U)$  den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller glatten Differentialformen vom Grad  $p$  auf  $U$ .

**Schreibweise** Schreibt man für  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$

$$I = (i_1, \dots, i_p)$$

so schreibe man weiterhin

$$f_I = f_{i_1, \dots, i_p}$$

und

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}$$

und

$$\omega = \sum_I f_I \varepsilon_I$$

### 5.3.2 Definition

Wir definieren **Richtungsableitungen** bei  $x \in U$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_x \omega : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \text{Alt}^p(\mathbb{R}^n) \\ e_i &\longmapsto \frac{d\omega}{dx_i}(x) := \frac{d}{dt}_{t=0} \omega(x + te_i) \end{aligned}$$

Für  $\omega = \sum_I f_I \varepsilon_I$  ist

$$(\mathcal{D}_x \omega)(e_i) = \sum_I \frac{\partial f_I}{\partial x_i}(x) \varepsilon_I$$

### 5.3.3 Definition

Mithilfe von  $\mathcal{D}_x$  definieren wir die **äußere Ableitung**

$$\begin{aligned} d : \Omega^p(U) &\longrightarrow \Omega^{p+1}(U) \\ \omega &\longmapsto d\omega \end{aligned}$$

mit

$$(d\omega)(x)(v_1, \dots, v_{p+1}) := \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} (\mathcal{D}_x \omega)(v_j)(v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{p+1})$$

### 5.3.4 Beispiel

$d : \Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^1(U)$  mit

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \varepsilon_i$$

Insbesondere gilt für  $f = x_j$

$$dx_j = \varepsilon_j$$

Insofern werden wir in Zukunft  $dx_i$  statt  $\varepsilon_i$  schreiben und ferner

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p} = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} =: dx_I$$

### 5.3.5 Lemma

Für  $\omega = f\varepsilon_I$  gilt

$$d\omega = (df) \wedge \varepsilon_I$$

**Beweis**

$$(d\omega)(x)(v_1, \dots, v_{p+1}) = \sum_j (-1)^{j+1} (\mathcal{D}_x \omega)(v_j)(v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{p+1})$$

es gilt dabei mit  $v = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(v) e_i$

$$(\mathcal{D}_x \omega)(v) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(v) \mathcal{D}_x (f\varepsilon_I)(e_i)$$

Ferner gilt

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(v) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \varepsilon_I = df(x)(v) \varepsilon_I$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (d\omega)(x)(v_1, \dots, v_{p+1}) &= \sum_j (-1)^{j+1} df(x)(v_j) \varepsilon_I(v_1, \dots, \widehat{v_j}, \dots, v_{p+1}) \\ &= ((df)(x) \wedge \varepsilon_I)(v_1, \dots, v_{p+1}) \end{aligned}$$

□

### 5.3.6 Lemma

Die Zusammensetzung

$$\Omega^p(U) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(U) \xrightarrow{d} \Omega^{p+2}(U)$$

verschwindet.

#### Beweis

Es genügt dies für Formen der Gestalt  $\omega = f\varepsilon_I$  zu zeigen. Es gilt laut vorhergehendem Lemma

$$d\omega = df \wedge \varepsilon_I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \varepsilon_i \wedge \varepsilon_I$$

und

$$d(d\omega) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \varepsilon_i \wedge \varepsilon_j \wedge \varepsilon_I = \sum_{i < j} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \varepsilon_j \wedge \varepsilon_i \wedge \varepsilon_I$$

Das verschwindet aber, da

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

□

### 5.3.7 Definition

Vorlesung

vom  
18.12.17

Wir definieren ein äußeres Produkt auf der Menge der glatten Differentialformen durch

$$\begin{aligned}\wedge : \Omega^p(U) \times \Omega^q(U) &\longrightarrow \Omega^{p+q}(U) \\ (\omega, \eta) &\longmapsto [x \in U \mapsto \omega(x) \wedge \eta(x)]\end{aligned}$$

Dies ist zulässig, da  $\omega \wedge \eta$  tatsächlich eine glatte Abbildung  $U \rightarrow \text{Alt}^{p+q}(\mathbb{R}^n)$  ist. Es gilt dann

$$(f \cdot \omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta) = \omega \wedge (f\eta)$$

und

$$f \wedge \omega = f \cdot \omega$$

### 5.3.8 Lemma

Seien glatte Differentialformen  $\omega \in \Omega^p(U), \eta \in \Omega^q(U)$ . Dann gilt folgende **Produktregel** für Differentialformen

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta)$$

#### Beweis

Es genügt dies auf Ebene von erzeugenden Formen der Gestalt

$$\omega = f\varepsilon_I \text{ und } \eta = g\varepsilon_J$$

zu zeigen für  $I = (i_1, \dots, i_p), J = (j_1, \dots, j_q)$ . Es gilt

$$\omega \wedge \eta = (fg)\varepsilon_I \varepsilon_J$$

und deswegen

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) &= d(fg) \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J \\
&= \sum_i \frac{\partial(fg)}{\partial x_i} \varepsilon_i \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J \\
&= \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) \varepsilon_i \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J \\
&= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} g \varepsilon_i \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J + \sum_i f \frac{\partial g}{\partial x_i} \varepsilon_i \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J \\
&= g \cdot (df) \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J + f \cdot (dg) \wedge \varepsilon_I \wedge \varepsilon_J \\
&= (df) \wedge \varepsilon_I \wedge (g \cdot \varepsilon_J) + (-1)^p (f \cdot \varepsilon_I) \wedge (dg \wedge \varepsilon_J) \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta)
\end{aligned}$$

□

### 5.3.9 Definition

Wir definieren die Algebra der glatten Differentialformen durch

$$(\Omega^*(U) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(U), +, \wedge, d)$$

$(\Omega^*(U) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega^p(U), +, \wedge)$  ist eine graduiert-kommutative graduierte  $C^\infty(U, \mathbb{R})$ -Algebra.  $(\Omega^*(U), d)$  ist ferner ein Komplex von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen, d. h.  $d^2 = 0$ . Zwischen diesen beiden Strukturen existiert eine Interaktion<sup>1</sup>, nämlich ist  $d$  eine Derivation auf der Algebra, d. h., es gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta)$$

### 5.3.10 Proposition: Eindeutigkeit von $d$

Es existiert genau eine Familie linearer Abbildungen

$$d : \Omega^p(U) \longrightarrow \Omega^{p+1}(U)$$

sodass gilt:

---

<sup>1</sup>Im Englischen nennt man eine solche Struktur **Differential graded algebra**.

- (i)  $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$  für  $f \in \Omega^0(U)$
- (ii)  $d^2 = 0$
- (iii)  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta)$  für  $\omega \in \Omega^p(U), \eta \in \Omega^q(U)$

### 5.3.11 Beispiel: Klassische Integralsätze von Green, Stokes und Gauß

Betrachte  $U \stackrel{\circ}{\subset} \mathbb{R}^2$ . Alle nicht verschwindenden Gruppen von Differentialformen sind  $\Omega^0(U), \Omega^1(U), \Omega^2(U)$ . Ab  $p \geq 3$  verschwinden die Gruppen, da ab da die alternierenden Räume verschwinden. Es gilt für  $f \in \Omega^0(U) = C^\infty(U, \mathbb{R})$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = \nabla f \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{pmatrix}$$

Für  $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 \in \Omega^1(U)$  gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= df_1 \wedge dx_1 + df_2 \wedge dx_2 \\ &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_1 + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \right) \wedge dx_2 \\ &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \\ &= \text{rot}(f_1, f_2) dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

Sei nun  $U \stackrel{\circ}{\subset} \mathbb{R}^3$ . Wir betrachten  $d : \Omega^1(U) \rightarrow \Omega^2(U)$  und  $\omega = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$ . Es gilt

$$\begin{aligned} d\omega &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left( \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1 \\ &= \text{rot}(f_1, f_2, f_3) \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \wedge dx_2 \\ dx_2 \wedge dx_3 \\ dx_3 \wedge dx_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Betrachte nun  $\omega = g_3 dx_1 \wedge dx_2 + g_1 dx_2 \wedge dx_3 + g_2 dx_3 \wedge dx_1 \in \Omega^2(U)$ . Es gilt

$$d\omega = \left( \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \text{div}(g) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

In der klassischen Physik gilt, was hier wg.  $d^2 = 0$  offensichtlich ist

$$\text{rot} \circ \nabla = 0$$

$$\text{div} \circ \text{rot} = 0$$



### 5.3.12 Definition

Wir definieren die  $p$ -te Kohomologiegruppe der **de Rham-Kohomologie** durch

$$H^p(U) := \ker(d : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p+1}(U)) / \text{Bild}(d : \Omega^{p-1}(U) \rightarrow \Omega^p(U))$$

Wir setzen ferner  $H^p(U) = \Omega^p(U) = 0$  für  $p < 0$ .

### 5.3.13 Bemerkung

$$\begin{aligned} H^0(U) &= \ker d = \{f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \mid df = 0\} = \{f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \mid \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0\} \\ &= \{f \in C^\infty(U, \mathbb{R}) \mid f \text{ ist lokal konstant auf } U\} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(U) = \text{Zahl der Wegshgkomp. von } U$$

## 5.4 Das Äußere Produkt auf der Kohomologie

### 5.4.1 Definition

Wir definieren auf den Kohomologiegruppen ein Produkt durch

$$\begin{aligned} \wedge : H^p(U) \times H^q(U) &\longrightarrow H^{p+q}(U) \\ ([\omega], [\eta]) &\longmapsto [\omega \wedge \eta] \end{aligned}$$

Dies ist wohldefiniert, denn für  $\omega \in \Omega^p(U), \eta \in \Omega^q(U)$  mit  $d\omega = 0, d\eta = 0$  gilt

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta) = 0$$

ergo liegt  $\omega \wedge \eta$  ebenfalls im Kern von  $d$ . Ferner gilt für andere Repräsentanten  $[\omega'] = [\omega], [\eta'] = [\eta]$

$$\omega' = \omega + d\alpha \text{ und } \eta' = \eta + d\beta$$

und somit

$$\begin{aligned} \omega' \wedge \eta' &= (\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) \\ &= \omega \wedge \eta + d\alpha \wedge \eta + \omega \wedge d\beta + d\alpha \wedge d\beta \\ &= \omega \wedge \eta + d(\alpha \wedge \eta + (-1)(\omega \wedge \beta) + (\alpha \wedge d\beta)) \end{aligned}$$

Insofern bildet  $(H^*(U), +, \wedge)$  eine graduiert-kommutative graduierte Algebra.  $\wedge$  nennt man in diesem Zusammenhang auch *Cup-Produkt*.

## 5.5 Funktorialität

### 5.5.1 Beispiel: Lineare Algebra

Seien  $V, W$  reelle Vektorräume und  $A : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Sei  $\eta \in \text{Alt}^p(W)$ ,  $v_1, \dots, v_p \in V$ . Dann setze

$$\omega(v_1, \dots, v_p) := \eta(A(v_1), \dots, A(v_p))$$

Dann ist  $\omega \in \text{Alt}^p(V)$ . Setze  $\text{Alt}^p(A)(\eta) := \omega$ . Dadurch erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\text{Alt}^p(A) : \text{Alt}^p(W) \longrightarrow \text{Alt}^p(V)$$

Für eine weitere lineare Abbildung  $B : W \rightarrow P$  gilt

$$\text{Alt}^p(B \circ A) = \text{Alt}^p(A) \circ \text{Alt}^p(B)$$

Ferner gilt

$$\text{Alt}^p(\text{Id}_V) = \text{Id}_{\text{Alt}^p(V)}$$

Insofern liefern die  $(\text{Alt}^p)_p$  eine Familie kontravarianter Funktoren von der Kategorie der reellen Vektorräume in die Kategorie der reellen Vektorräume.

### 5.5.2 Definition

Vorlesung  
vom  
22.12.17

Seien  $U_1 \subset \mathbb{R}^n, U_2 \subset \mathbb{R}^m$  offen und  $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  eine glatte Abbildung. Wir definieren folgenden Vektorraumhomomorphismus

$$\begin{aligned}\varphi^* : \Omega^p(U_2) &\longrightarrow \Omega^p(U_1) \\ \eta &\longmapsto \text{Alt}^p(\varphi_*)(\eta \circ \varphi)\end{aligned}$$

D. h., für  $x \in U_1$  ist folgender Vektorraumhomomorphismus gegeben

$$\begin{aligned}\varphi^*(\eta)(x) : (\mathcal{T}_x U_1)^p &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \dots, v_p) &\longmapsto \eta(\varphi(x))(\varphi_{*,x} v_1, \dots, \varphi_{*,x} v_p)\end{aligned}$$

### 5.5.3 Bemerkung

Die Zuweisung  $\varphi \mapsto \varphi^*$  ist funktoriell, d. h., es gilt

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* \text{ und } \text{Id}_U^* = \text{Id}_{\Omega^p(U)}$$

### 5.5.4 Bemerkung

Die Zuweisung  $\varphi \mapsto \varphi^*$  ist eindeutig durch folgende Rechenregeln bestimmt:

- $\varphi^*(f\omega) = f\varphi^*(\omega)$  für  $f \in \Omega^0(U_2)$
- $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$
- $d \circ \varphi^* = \varphi^* \circ d$

### 5.5.5 Beispiel

- $\varphi^*(dx_i) = d(\varphi^*(x_i)) = d(x_i \circ \varphi) = d\varphi_i$
- Sei  $\gamma : (a, b) \rightarrow U \stackrel{o}{\subset} \mathbb{R}^n$  eine glatte Kurve,  $\omega = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$  sei eine 1-Differentialform auf  $U$ . Es gilt

$$\begin{aligned}\gamma^*(\omega) &= \gamma^*(f_1) \wedge \gamma^*(dx_1) + \dots + \gamma^*(f_n) \wedge \gamma^*(dx_n) \\ &= f_1(\gamma(t)) d\gamma_1 + \dots + f_n(\gamma(t)) d\gamma_n \\ &= \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt\end{aligned}$$

- Für die Volumenform  $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  von  $U_2$  gilt

$$\begin{aligned}
 \varphi^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) &= d\varphi_1 \wedge \dots \wedge d\varphi_n \\
 &= \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} dx_i \right) \\
 &= \det \left( \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\
 &= \det(J_\varphi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n
 \end{aligned}$$

- Betrachte die glatte Abbildung  $\varphi : U \times \mathbb{R} \rightarrow U, U \stackrel{o}{\subset} \mathbb{R}^n$ , mit

$$\varphi(x, t) = \psi(t) \cdot x$$

für eine glatte Funktion  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es gilt

$$\varphi^*(dx_i) = d\varphi_i = d(\psi(t) \cdot x_i) = x_i \cdot d\psi(t) + \psi(t) \cdot dx_i = x_i \psi'(t) dt + \psi(t) dx_i$$

## 5.6 Pullback auf die de Rham-Kohomologie

Im Folgenden sei  $\varphi : U_1 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U_2 \subset \mathbb{R}^m$  immer eine glatte Abbildung.

### 5.6.1 Definition

Eine Form  $\omega \in \Omega^p(U)$  heißt **geschlossen**, falls  $d\omega = 0$ .

$\omega$  heißt **exakt**, wenn es ein  $\eta \in \Omega^{p-1}(U)$  gibt, mit  $\omega = d\eta$ .

### 5.6.2 Bemerkung

$\varphi : U_1 \rightarrow U_2$  induziert einen Ringhomomorphismus

$$\varphi^* : H^*(U_2) \longrightarrow H^*(U_1)$$

da  $\varphi^*$  den Kern und das Bild von  $d$  erhält. Dadurch folgt, dass die de Rham-Kohomologie ein kontravarianter Funktor ist.

### 5.6.3 Satz: Poincare-Lemma

Sei  $U \subset \mathbb{R}$  offen und sternförmig. Dann gilt

$$H^p(U) \cong \begin{cases} 0 & p > 0 \\ \mathbb{R} & p = 0 \end{cases}$$

#### Beweis

- Ohne Einschränkung sei 0 der Mittelpunkt des sternförmigen Gebietes  $U$ . Setze dann

$$\begin{aligned} ev : \Omega^0(U) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \omega(0) \end{aligned}$$

Wir wollen im Folgenden eine Kettenhomotopie  $s_p : \Omega^p(U) \rightarrow \Omega^{p-1}(U)$  konstruieren, für die gilt

$$ds_p + s_{p+1}d = \begin{cases} \text{Id} & p > 0 \\ \text{Id} - ev & p = 0 \end{cases}$$

Dann folgt nämlich für  $\omega \in \Omega^p(U), p > 0$ ,

$$d\omega = 0 \implies ds_p(\omega) = ds_p(\omega) + s_{p+1}d\omega = \omega$$

also  $[\omega] = 0$ , da  $\omega \in \text{Bild } d$ . Ferner gilt für  $p = 0$

$$\omega - \omega(0) = s_1d\omega = 0$$

also  $\omega = \omega(0)$  ist konstant.

- Eine Differentialform  $\omega \in \Omega^p(U \times \mathbb{R})$  hat die Gestalt

$$\omega = \sum_I f_I(x, t) dx_I + \sum_J g_J(x, t) dt \wedge dx_J$$

Definiere daher folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \widehat{S}_p : \Omega^p(U \times \mathbb{R}) &\longrightarrow \Omega^{p-1}(U) \\ \omega &\longmapsto \sum_J \left( \int_0^1 g_J(x, t) dt \right) dx_J \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mathrm{d}\widehat{S}_p(\omega) + \widehat{S}_{p+1}(\mathrm{d}\omega) = \sum_I \left( \int_0^1 \frac{\partial f_I}{\partial t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x_I = \sum_I (f_I(x, 1) - f_I(x, 0)) \mathrm{d}x_I$$

- Sei nun  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion mit

$$\psi(t) \in \begin{cases} \{0\} & t \leq 0 \\ [0, 1] & t \in [0, 1] \\ \{1\} & t \geq 1 \end{cases}$$

Definiere dann

$$\begin{aligned} \varphi : U \times \mathbb{R} &\longrightarrow U \\ (x, t) &\longmapsto \psi(t) \cdot x \end{aligned}$$

und setze

$$s_p(\omega) := \widehat{S}_p \circ \varphi^*(\omega)$$

Die so definierte Funktion tut das Gewünschte.

□

## 5.7 De Rham-Kohomologie von Glatten Mannigfaltigkeiten

Vorlesung  
vom 8.1.18

### 5.7.1 Definition

Sei  $M$  eine (kompakte) glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Durch Whitneys Einbettungssatz erhalten wir eine glatte Einbettung  $M \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ . Durch den Satz über Tubenumgebungen wissen wir um die Existenz einer offenen Umgebung  $U$  von  $M$  in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , sodass

$$U \cong E(\nu)$$

wobei  $E \xrightarrow{p} M$  der Totalraum des Normalenbündels ist. Dieser induziert einen Deformationsretrakt  $r : U \rightarrow M$ .

$H^*$  soll eine Homotopieinvariante sein. Dies würde einen Isomorphismus

$$r^* : H^*(M) \xrightarrow{\sim} H^*(U)$$

implizieren. In diesem Sinne definieren wir die **Kohomologiegruppen** von  $M$  durch

$$H^k(M) := H^k(U)$$

Diese Definition hängt von der Einbettung von  $M$  ab. Insofern wäre es wünschenswert eine intrinsische Definition von  $H^*(M)$  zu finden.

### 5.7.2 Definition

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ .

Wir betrachten Familien  $\omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$  mit  $\omega_p \in \text{Alt}^k(T_p M)$ . Sei eine glatte Karte

$$\varphi : U' \xrightarrow{o} M \xrightarrow{o} U \xrightarrow{o} \mathbb{R}^n$$

gegeben. Betrachte für jedes  $p \in U'$  die Abbildung

$$\text{Alt}^k(\varphi_{*,\varphi(p)}^{-1}) : \text{Alt}^k(T_p M) \xrightarrow{\sim} \text{Alt}^k(T_{\varphi(p)} U) \cong \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$$

Wir definieren den **Pullback** von  $\omega$  durch

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1})^* \omega : U &\longrightarrow \text{Alt}^k(\mathbb{R}^n) \\ x &\longmapsto \text{Alt}^k(\varphi_{x,*}^{-1})(\omega_{\varphi^{-1}(x)}) \end{aligned}$$

$\omega$  heißt eine **glatte Differential- $k$ -Form** auf  $M$ , wenn  $(\varphi^{-1})^* \omega$  für jede Karte  $\varphi$  glatt ist.

Es bezeichne  $\Omega^k(M)$  den reellen Vektorraum aller glatter Differential- $k$ -Formen auf  $M$ .

### 5.7.3 Definition

Die Karte  $\varphi$  von  $M$  induziert einen Isomorphismus

$$\varphi_{*,p} : T_p M \xrightarrow{\sim} T_x U$$

für  $x = \varphi(p)$ . Dadurch erhalten wir einen Isomorphismus

$$Alt^{k+1}(\varphi_{*,p}) : Alt^{k+1}(T_x U) \xrightarrow{\sim} Alt^{k+1}(T_p M)$$

Wir können so folgende  $k+1$ -Form definieren

$$d\omega_p := Alt^{k+1}(\varphi_{*,p}) (d((\varphi^{-1})^* \omega)(\varphi(p)))$$

Dadurch erhalten wir eine glatte Differentialform  $d\omega$  auf  $M$ . Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Karte  $\varphi$ . Es gilt  $d^2 = 0$  auf  $\Omega^*(M)$ . Wir erhalten folglich einen Kokettenkomplex  $(\Omega^*(M), d)$ .

### 5.7.4 Definition

Die **de Rham-Kohomologie** von  $M$  ist definiert als die Kohomologie des Kokettenkomplexes  $(\Omega^*(M), d)$ , d. h.

$$H^k(M) := H^k(\Omega^*(M), d) = \frac{\text{Kern}(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M))}{\text{Bild } d : (\Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M))}$$

### 5.7.5 Definition

Zu glatten Differentialformen  $\omega = \{\omega_p\}, \eta = \{\eta_p\}$  auf  $M$  definieren wir das **äußere Produkt** punktweise durch

$$(\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p$$

$\omega \wedge \eta$  ist wieder eine glatte Differentialform auf  $M$ . Ferner gilt hierfür offensichtlich wieder die Produktregel, d. h.

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d(\eta)$$

für  $\omega \in \Omega^k(M)$ . Wir erhalten dadurch wieder eine graduiert kommutative Algebra  $\Omega^*(M)$ .

Das äußere Produkt auf  $\Omega^*(M)$  steigt wie im affinen Fall wohldefiniert auf  $H^*(M)$  ab. Dadurch wird auch  $H^*(M)$  zu einer graduiert kommutativen Algebra.



### 5.7.6 Definition

Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung und  $\omega = \{\omega_q\}_{q \in N} \in \Omega^k(N)$  eine glatte Differentialform. Für einen Punkt  $p \in M$  erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\text{Alt}^k(\varphi_{*,p}) : \text{Alt}^k(T_{\varphi(p)}M) \longrightarrow \text{Alt}^k(T_pM)$$

In diesem Sinn setzen wir

$$(\varphi^*\omega)_p := \text{Alt}^k(\varphi_{*,p})(\omega_{\varphi(p)})$$

und erhalten eine glatte Differentialform

$$\varphi^*\omega := \{(\varphi^*\omega)_p\}_{p \in M}$$

auf  $M$ . Dadurch erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\varphi^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$$

Wie im affinen Fall ist die Zuweisung

$$\begin{aligned} M &\longmapsto \Omega^k(M) \\ \varphi &\longmapsto \varphi^* \end{aligned}$$

ein kontravarianter Funktor.

Es gilt wieder

- $\varphi^*(\omega \wedge \eta) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\eta)$
- $d_M \circ \varphi^* = \varphi^* \circ d_N$

$\varphi^*$  steigt wohldefiniert auf die Kohomologie ab und liefert Abbildungen

$$\varphi^* : H^k(N) \longrightarrow H^k(M)$$

Dadurch wird die de Rham-Kohomologie zu einem kontravarianten Funktor von der Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der reellen Vektorräume.

## 5.8 Integration auf Glatten Mannigfaltigkeiten

### 5.8.1 Definition

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\omega \in \Omega^n(U)$  sei eine  $n$ -Form.

Wir definieren den **Träger** von  $\omega$  durch

$$\text{supp}\omega := \text{Cl}_U\{x \in U \mid \omega_x \neq 0\}$$

wobei  $\text{Cl}_U$  den Abschluss einer Menge in  $U$  bezeichnet.

Hat  $\omega$  einen kompakten Träger, so hat  $\omega$  eine glatte Fortsetzung durch Null auf  $\mathbb{R}^n$ .

Da  $\omega$  eine  $n$ -Form ist, hat es die Gestalt

$$\omega = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Wir definieren folgendes Integral zu  $\omega$

$$\int_U \omega := \int_{\mathbb{R}^n} \omega := \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n$$

### 5.8.2 Bemerkung

Seien  $V, U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\theta : V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus.

Sei ferner  $\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \in \Omega^n(U)$  mit kompakten Träger. Dies induziert uns eine Differentialform  $\theta^*\omega \in \Omega^n(V)$ , welche ebenfalls kompakten Träger hat. Es gilt

$$\theta^*\omega = \theta^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = f \circ \theta \cdot \theta^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = f \circ \theta \cdot \det(J_\theta) \cdot dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Es ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \int_V \theta^*\omega &= \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \theta \cdot \det(J_\theta) dx_1 \dots dx_n \\ &\stackrel{\text{Traforegel in } \mathbb{R}^n}{=} \pm \int_{\mathbb{R}^n} f dx_1 \dots dx_n = \pm \int_U \omega \end{aligned}$$

Ist  $U$  zusammenhängend, so ist das Vorzeichen hier gerade das Vorzeichen der Jacobie-Determinante.

Ist  $\theta$  orientierungserhaltend und  $U$  zusammenhängend, so gilt also

$$\int_V \theta^*\omega = \int_U \omega$$

### 5.8.3 Definition

Sei nun  $M$  eine glatte, orientierte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  und  $\omega \in \Omega^n(M)$ . Sei  $\varphi : U' \rightarrow U$  eine orientierte Karte von  $M$ . Es gelte ferner

$$\text{supp}(\omega) \subset U' \text{ ist kompakt}$$

Wir setzen dann

$$\int_M \omega := \int_U (\varphi^{-1})^* \omega$$

Dies ist wohldefiniert. Ist nämlich  $\psi : U' \rightarrow U$  eine weitere orientierte Karte, so gilt

$$(\varphi^{-1})^* = (\varphi^{-1})^* \psi^* (\psi^{-1})^* \omega$$

Setzt man  $\psi \circ \varphi^{-1} =: \theta$ , so folgt mit obiger Bemerkung

$$\int_U (\varphi^{-1})^* \omega = \int_U (\psi^{-1})^* \omega$$

### 5.8.4 Definition

Sei nun  $\omega \in \Omega^n(M)$  mit kompakten Träger. Im Allgemeinen liegt  $\text{supp} f$  nicht in einer einzelnen Karte von  $M$ .

Deswegen sei  $(f_i)_i$  eine glatte Partition der Eins auf  $M$ , sodass  $\text{supp} f_i \subset U_i$ , wobei die Paare  $(U_i, \varphi_i)_i$  orientierte Karten seien, die  $\text{supp} f$  überdecken, und, bei denen  $\overline{U_i}$  kompakt ist.

Wir setzen

$$\int_M \omega := \sum_i \int_M f_i \omega$$

Dies ist ein wohldefiniertes Integral. Es ist unabhängig von der Wahl der Partition, denn sei  $(g_j)_j$  eine weitere Partition der Eins, dann gilt ja

$$f_i = \sum_j f_i g_j \text{ und } g_j = \sum_i f_i g_j$$

Ergo folgt

$$\sum_i \int f_i \omega = \sum_{i,j} \int f_i g_j \omega = \sum_j \int g_j \omega$$

## 5.9 Der Allgemeine Satz von Stokes

Vorlesung  
vom  
12.1.18

### 5.9.1 Definition

Sei  $(M, \partial M)$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.  $M$  sei orientiert, dadurch ist auch  $\partial M$  orientiert.  $\iota : \partial M \rightarrow M$  bezeichne die Inklusion des Randes. Für  $\omega \in \Omega^*(M)$  erhalten wir unter  $\iota$  eine Pullbackform

$$\omega|_{\partial M} := \iota^* \omega \in \Omega^*(\partial M)$$

Wir nennen dies die **Einschränkung auf den Rand** von  $\omega$ .

### 5.9.2 Satz: Allgemeiner Satz von Stokes

Sei  $(M, \partial M)$  eine  $n$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand.  $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$  sei eine  $n-1$ -Form auf  $M$  mit kompakten Träger. Dann hat  $d\omega \in \Omega^n(M)$  kompakten Träger und es gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega$$

#### Beweis

Wir führen den Beweis in lokalen Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$ . Der Rand soll lokal beschrieben werden durch

$$\partial M = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = 0\}$$

wobei allgemeine Punkte  $x_1 \leq 0$  erfüllen.

$\omega$  habe die Gestalt

$$\omega = \sum_{j=1}^n f_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \iota^* \omega &= \sum_{j=1}^n (f_j \circ \iota) (dx_1 \circ \iota) \wedge \dots \wedge (\widehat{dx_j} \circ \iota) \wedge \dots \wedge (dx_n \circ \iota) \\ &= (f_1)|_{\partial M} dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= f_1(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

da  $x_1 \circ \iota = 0$ .

Ohne Einschränkung nehmen wir nun an, dass  $\omega$  folgende Form hat

$$\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{j-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \end{aligned}$$

Wir nehmen nun ferner an, dass  $\omega$  kompakten Träger folgender Gestalt habe

$$\text{supp}\omega \subset \{x \mid -a \leq x_1 \leq 0, |x_j| \leq a \forall j = 2, \dots, n\}$$

Es gilt nun

$$\int_M d\omega = (-1)^{j-1} \int_{-a}^{+a} \dots \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^0 \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_n$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Beachte hierbei, dass  $f$  auf dem Rand von  $\text{supp}\omega$  verschwindet.

Fall 1  $j \neq 1$ : In diesem Fall gilt

$$\int_M d\omega = (-1)^{j-1} \int_{-a}^{+a} \dots \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^0 f|_{x_j=-a}^{x_j=a} dx_1 \dots \widehat{dx_j} \dots dx_n = 0$$

$$\text{da } f|_{x_j=-a}^{x_j=a} = 0, \text{ da } f|_{x_j=a \neq 0} = 0.$$

Fall 2  $j = 1$ : In diesem Fall gilt

$$\int_M d\omega = \int_{-a}^{+a} \dots \int_{-a}^{+a} f|_{x_1=-a}^{x_1=0} dx_2 \dots dx_n = \int_{-a}^{+a} \dots \int_{-a}^{+a} f(0, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n = \int \iota^* \omega$$

$$\text{da } f(-a, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Es sei  $\omega$  nun beliebig. Sei  $\{g_j\}_j$  eine glatte Partition der Eins mit

$$\text{supp}g_j \subset \{x \mid -a \leq x_1 \leq 0, |x_j| \leq a \forall j = 2, \dots, n\}$$

Es gilt  $\omega = \sum_j g_j \omega$  und somit

$$\int_M d\omega = \int_M d(\sum_j g_j \omega) = \sum_j \int_M d(g_j \omega) = \sum_j \int_{\partial M} \iota^*(g_j \omega) = \int_{\partial M} \iota^*(\sum_j g_j \omega) = \int_{\partial M} \iota^* \omega$$

□

## 5.10 Das Homotopieaxiom für de Rham-Kohomologie

### 5.10.1 Definition

Ein **Komplex** bzw. **Kokettenkomplex**  $(C^*, d)$  ist eine Familie  $(C^p)_{p \in \mathbb{Z}}$  reeller Vektorräume mit einer Familie linearer Abbildungen

$$d : C^p \longrightarrow C^{p+1}$$

für die gilt

$$d \circ d = 0$$

### 5.10.2 Definition

Sind  $(C^*, d_C)$  und  $(D^*, d_D)$  Komplexe, so ist ein **Homomorphismus** von Komplexen  $\varphi : C^* \rightarrow D^*$  eine Familie von linearen Abbildungen

$$\varphi^p : C^p \longrightarrow D^p$$

so, dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} C^p & \xrightarrow{\varphi^p} & D^p \\ \downarrow d_C & & \downarrow d_D \\ C^{p+1} & \xrightarrow{\varphi^{p+1}} & D^{p+1} \end{array}$$

### 5.10.3 Definition

Unter einer **(Ketten)-Homotopie** zwischen Morphismen  $\varphi, \psi : C^* \rightarrow D^*$  verstehen wir einen Kettenmorphismus  $K : C^* \rightarrow D^{*-1}$ , d. h.

$$K^p : C^p \longrightarrow D^{p-1}$$

sodass gilt

$$dK - Kd = \varphi - \psi$$

Wir schreiben in diesem Fall

$$\varphi \simeq \psi$$

### 5.10.4 Lemma

Gilt  $\varphi \simeq \psi$ , so folgt

$$H(\varphi) = H(\psi) : H^*(C^*) \longrightarrow H^*(D^*)$$

**Beweis**

Sei  $[c] \in H^*(C^*)$ , d. h.,  $dc = 0$ . Es gilt

$$H(\varphi)[c] - H(\psi)[c] = [\varphi(c)] - [\psi(c)] = [(\varphi - \psi)(c)] = [(dK - Kd)(c)] = [dKc] = 0$$

□

**5.10.5 Bemerkung**

Betrachte die Projektion

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\longmapsto x \end{aligned}$$

und den Schnitt

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

Formen auf  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$  sind Linearkombinationen von Formen des Types

$$(i) \quad f(x, t)(\pi^*\eta)$$

$$(ii) \quad (\pi^*\eta) \wedge f(x, t)dt$$

wobei  $\eta \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$ .

**5.10.6 Bemerkung**

Wir definieren eine Homotopie  $K : \Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \Omega^{*-1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$  durch

$$K(f(x, t)(\pi^*\eta)) = 0$$

$$K((\pi^*\eta) \wedge f(x, t)dt) = (\pi^*\eta) \cdot \int_0^t f(x, t)dt$$

Durch die Rechnung im Beweis des Poincare-Lemmas wissen wir nun, dass gilt

$$dK - Kd = \pm(\text{Id}_{\Omega^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)} - \Omega(\pi) \circ \Omega(s))$$

Daraus folgt

$$H^*(\pi) \circ H^*(s) = \text{Id}$$

Trivialerweise gilt

$$H^*(s) \circ H^*(\pi) = \text{Id}$$

da  $\pi \circ s = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ . Daraus folgt, dass  $H^*(\pi) : H^*(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^*(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1)$  ein Isomorphismus ist.

### 5.10.7 Korollar

$$H^p(\mathbb{R}^n) \cong H^p(\mathbb{R}^{n-1}) \cong \dots \cong H^p(\mathbb{R}^0) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0 \\ 0 & p > 0 \end{cases}$$

### 5.10.8 Bemerkung

Sei nun  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit. Betrachte die Projektion

$$\pi : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$$

und den dazu gehörenden Schnitt  $s : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ . Es gilt dann bereits

$$H^*(s)H^*(\pi) = \text{Id}$$

Seien Karten  $\{U_\alpha\}_\alpha$  auf  $M$  gegeben. Dann ist  $\{U_\alpha \times \mathbb{R}\}_\alpha$  ein korrespondierender Atlas für  $M \times \mathbb{R}$ . Mithilfe dieser Karten kann  $K$  wie zuvor definiert werden, d. h., wir erhalten

$$K : \Omega^*(M \times \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^{*-1}(M \times \mathbb{R})$$

mit

$$dK - Kd = \pm(\text{Id}_{\Omega^*(M \times \mathbb{R})} - \Omega(\pi)\Omega(s))$$

Dadurch folgt wieder

$$H^*(\pi)H^*(s) = \text{Id}$$

Und  $H^*(\pi) : H^*(M) \rightarrow H^*(M \times \mathbb{R})$  ist ein Isomorphismus.

### 5.10.9 Satz: Homotopieaxiom

Seien  $f, g : M \rightarrow N$  zueinander homotope glatte Abbildungen. Dann gilt

$$H^*(f) = H^*(g) : H^*(N) \rightarrow H^*(M)$$

#### Beweis

Sei  $F : M \times \mathbb{R}^1 \rightarrow N$  eine glatte Homotopie,  $F(x, t) = f(x)$  für alle  $t \geq 1$  und  $F(x, t) = g(x)$  für alle  $t \leq 0$ .

Betrachte ferner  $s_0, s_1 : M \rightarrow M \times \mathbb{R}^1$  mit  $s_0(x) = (0, x)$  und  $s_1(x) = (1, x)$ .

Da  $H(\pi)H(s_0) = \text{Id} = H(\pi)H(s_1)$  und  $H(\pi)$  isomorph ist, folgt

$$H(s_0) = H(s_1)$$



Da  $F \circ s_0 = g$  und  $F \circ s_1 = f$ , gilt nun

$$H(g) = H(s_0) \circ H(F) = H(s_1) \circ H(F) = H(f)$$

□

Vorlesung  
vom  
15.1.18

### 5.10.10 Korollar

Sind  $M, N$  Homotopie-äquivalente, glatte Mannigfaltigkeiten, so gilt

$$H^*(M) \cong H^*(N)$$

## 5.11 Exakte Sequenzen

### 5.11.1 Definition

Im folgenden seien  $A, B$  und  $C$  reelle Vektorräume und  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  lineare Abbildungen.

Die Sequenz

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

heißt **exakt** bei  $B$ , falls

$$\text{Kern } g = \text{Bild } f$$

Eine **kurze exakte Sequenz** ist eine Sequenz der Form

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

die exakt bei  $A, B$  und  $C$  ist.

### 5.11.2 Beispiel

Sind  $U \subset V$  Vektorräume, so ist folgende kurze exakte Sequenz gegeben

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow V \longrightarrow V/U \longrightarrow 0$$

### 5.11.3 Definition

Seien  $A^*, B^*$  und  $C^*$  Koketten-Komplexe reeller Vektorräume zusammen mit Morphismen  $i : A^* \rightarrow B^*$  und  $j : B^* \rightarrow C^*$ .

Die Sequenz

$$A^* \xrightarrow{i} B^* \xrightarrow{j} C^*$$

heißt **exakt** bei  $B^*$ , falls sie gradweise exakt ist, d. h.

$$A^p \longrightarrow B^p \longrightarrow C^p$$

ist exakt bei  $B^p$  für alle  $p \in \mathbb{Z}$ .

### 5.11.4 Lemma: Zick-Zack- bzw. Schlangenlemma

Eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A^* \xrightarrow{i} B^* \xrightarrow{j} C^* \longrightarrow 0$$

von Koketten-Komplexen induziert eine lange exakte Sequenz der Kohomologiegruppen

$$\dots \xrightarrow{j^*} H^{p-1}(C^*) \xrightarrow{\delta} H^p(A) \xrightarrow{i^*} H^p(B) \xrightarrow{j^*} H^p(C) \xrightarrow{\delta} H^{p+1}(A) \xrightarrow{i^*} \dots$$

#### Beweis

Benutze Diagrammjagd. □

## 5.12 Die Mayer-Vietoris-Sequenz

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $U, V \subset M$  offen mit  $M = U \cup V$ . Es ergeben sich folgende kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xleftarrow{i_U} & U \\ \downarrow i_V & & \downarrow j_U \\ V & \xleftarrow{j_V} & M \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccc} \Omega^*(U \cap V) & \xleftarrow{i_U^*} & \Omega^*(U) \\ i_V^* \uparrow & & j_U^* \uparrow \\ \Omega^*(V) & \xleftarrow{j_V^*} & \Omega^*(M) \end{array}$$

### 5.12.1 Proposition

Definiert man im obigen Setting folgende Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*(M) & \xrightarrow{(i_U^*, j_V^*)} & \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \\ \omega & \longmapsto & (j_U^* \omega, j_V^* \omega) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) & \longrightarrow & \Omega^*(U \cap V) \\ (\omega, \eta) & \longmapsto & i_V^* \eta - i_U^* \omega \end{array}$$

So liegt folgende kurze exakte Sequenz vor

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

**Beweis**

1)  $i_V^* - i_U^*$  ist surjektiv:

Sei  $\{f_U, f_V\}$  eine Partition der Eins auf  $M$  bzgl.  $\{U, V\}$ . Ist  $\omega$  in  $\Omega^*(U \cap V)$ , so ist  $f_U\omega$  in  $\Omega^*(V)$  und  $f_V\omega$  in  $\Omega^*(U)$ . Es gilt

$$(i_V^* - i_U^*)(-f_V\omega, f_U\omega) = f_U\omega|_{U \cap V} - (-f_V\omega)|_{U \cap V} = (f_U + f_V)(\omega) = \omega$$

2)  $(j_U^*, j_V^*)$  ist injektiv:

Sei  $\omega \in \Omega^*(M)$  mit  $j_U^*(\omega) = 0$  und  $j_V^*(\omega) = 0$ . Dann verschwindet  $\omega$  auf  $U$  und  $V$ , also auch auf  $M = U \cup V$ . Ergo  $\omega = 0$ .

3) Exaktheit in der Mitte:

Ist  $(\omega, \eta) \in \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V)$ , s. d.

$$\eta|_{U \cap V} - \omega|_{U \cap V} = 0$$

dann stimmen  $\omega$  und  $\eta$  auf  $U \cap V$  überein. Dann ist es möglich  $\omega$  durch  $\eta$  auf  $V$  fortzusetzen und dadurch eine glatte Form  $\tau \in \Omega^*(M)$  zu erhalten mit

$$\tau|_U = \omega \text{ und } \tau|_V = \eta$$

Ist umgekehrt ein  $\tau \in \Omega^*(M)$  gegeben, so gilt offensichtlich

$$(i_V^* - i_U^*) \circ (j_U^*, j_V^*)(\tau) = (i_V^* - i_U^*)(\omega|_U, \omega|_V) = \omega|_{U \cap V} - \omega|_{V \cap U} = 0$$

□

**5.12.2 Bemerkung**

Durch das Zick-Zack-Lemma erhalten wir folgende lange exakte Sequenz der Kohomologie-Gruppen

$$\dots \rightarrow H^{p-1}(U \cap V) \rightarrow H^p(M) \rightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \rightarrow H^p(U \cap V) \rightarrow H^{p+1}(M) \rightarrow \dots$$

### 5.12.3 Beispiel

Wir wollen die Kohomologiegruppen von  $\mathbb{R}^2 - \{0\} \sim S^1$  berechnen. Dazu sollen  $U$  und  $V$  Umgebungen von zwei Hälften von  $S^1$  sein. Dann besteht  $U \cap V$  aus zwei Wegzusammenhangskomponenten.

Vorlesung  
vom  
19.1.18

$U, V$  sind homotop zu Punkten und  $U \cap V$  ist homotop zu zwei Punkten. Es ergibt sich folgende Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(S^1) &\longrightarrow H^0(U) \oplus H^0(V) \longrightarrow H^0(U \cap V) \\ &\longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow H^1(U) \oplus H^1(V) \longrightarrow H^1(U \cap V) \\ &\longrightarrow H^2(S^1) \longrightarrow H^2(U) \oplus H^2(V) \longrightarrow H^2(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Wir kennen nun folgende Kohomologiegruppen

$$H^p(U) \cong H^p(V) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Da  $H^0(U \cap V)$  genau von den Wegzusammenhangskomponenten von  $U \cap V$  abhängt, folgt

$$H^0(U \cap V) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

Es ergibt sich nun folgende exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(S^1) &\longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \\ &\longrightarrow H^1(S^1) \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow H^1(U \cap V) \\ &\longrightarrow H^2(S^1) \longrightarrow 0 \oplus 0 \longrightarrow H^2(U \cap V) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

$f$  ist dabei gegeben durch

$$f(u, v) = u - v$$

Ergo hat  $f$  einen eindimensionalen Kern und ein eindimensionales Bild. Es folgt aufgrund der Exaktheit

$$H^0(S^1) \cong \text{Kern } f \cong \mathbb{R} \text{ und } H^1(S^1) \cong \mathbb{R}^2 / \text{Bild } f \cong \mathbb{R}$$

Für den Rest gilt nun

$$H^{p+1}(S^1) \cong H^p(U \cap V) = 0$$

da  $H^{p+1}(S^1) = 0$  für  $p \geq 1$ . Unterm Strich erhalten wir

$$H^p(\mathbb{R}^2 - 0) \cong H^p(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & p = 0, 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



# Kapitel 6

## KOHOMOLOGIE MIT KOMPAKTEN TRÄGERN

### 6.0.1 Definition

Für  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen definieren wir den Raum der **Differentialformen mit kompakten Träger** durch

$$\Omega_c^p(U) := \{\omega \in \Omega^p(U) \mid \text{supp } \omega \text{ ist kompakt}\}$$

Ist  $\text{supp } \omega$  kompakt, so ist auch  $\text{supp } d\omega$  kompakt. Dadurch können wir  $d$  wohldefiniert auf  $\Omega_c^*(U)$  einschränken. Dadurch erhalten wir folgenden Koketten-Komplex von reellen Vektorräumen

$$d| : \Omega_c^p(U) \longrightarrow \Omega_c^{p+1}(U)$$

Die Kohomologiegruppen dieses Komplexes definieren die **Kohomologiegruppen mit kompakten Trägern**

$$H_c^p(U) := H^p(\Omega_c^*(U))$$

### 6.0.2 Beispiel

Wir wollen  $H_c^1(\mathbb{R}^1)$  bestimmen. Betrachte dazu die Abbildung

$$\begin{aligned} \int : \Omega_c^1(\mathbb{R}^1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^1} \omega \end{aligned}$$

$\int$  ist offensichtlich linear und surjektiv. Wir wollen den Kern bestimmen. Zuerst zeigen wir

$$\text{Bild } d| \subset \ker \int$$

Sei dazu  $\omega = df, f \in \Omega_c^0(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\int \omega = \int df = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} dx$$

Der kompakte Träger von  $f$  sei enthalten in  $[a, b]$ . Dann haben wir

$$\int \omega = \int df = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} dx = f(a) - f(b) = 0 - 0 = 0$$

Ferner behaupten wir

$$\ker \int \subset \text{Bild } d|$$

Denn sei  $\omega = g(x)dx \in \Omega_c^1(\mathbb{R}^1)$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$ . Ferner hat  $g$  kompakten Träger. Wir definieren dann die wohldefinierte Funktion

$$G(x) := \int_{-\infty}^x g(x)dx$$

Es gilt dann

$$dG = G'dx = gdx = \omega$$

$G$  hat tatsächlich einen kompakten Träger, denn  $g$  ist kompakt und  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$ . Insofern ist  $G$  nur auf einem kompakten Intervall ungleich Null.

Es gilt nun

$$H_c^1(\mathbb{R}^1) = \ker d|/\text{Bild } d| = \Omega_c^1(\mathbb{R}^1)/\ker \int \cong \mathbb{R}^1$$

Dies unterscheidet sich von der gewöhnlichen De-Rham-Kohomologie, für die gilt

$$H^1(\mathbb{R}^1) = 0$$

Insbesondere ist  $H_c^*$  **keine** Homotopieinvariante.

### 6.0.3 Definition

Ist  $M$  eine beliebige, glatte Mannigfaltigkeit, dann definieren wir

$$\Omega_c^p(M) := \{\omega \in \Omega^p(M) \mid \text{supp } \omega \text{ ist kompakt}\}$$

und

$$H_c^p(M) := H^p(\Omega_c^*(M))$$



### 6.0.4 Bemerkung

Sei  $\Phi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung. Der Pullback unter  $\varphi$  induziert im Allgemeinen **keine** Abbildung auf  $H_c^*$ .

Z. Bsp. kann man

$$\varphi : \mathbb{R}^1 \longrightarrow *$$

betrachten. Der Pullback einer Differentialform auf dem einpunktigen Raum  $*$  gibt eine konstante Abbildung auf  $\mathbb{R}^1$ , die im Allgemeinen keinen kompakten Träger hat.

### 6.0.5 Bemerkung

Wir klassifizieren zwei Abbildungen von glatten Mannigfaltigkeiten, die trotzdem Abbildungen auf den Kohomologiegruppen induzieren:

#### 1) 6.0.6 Definition

Eine stetige Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  topologischer Raum heißt **eigentlich**<sup>1</sup>, falls das Urbild jeder kompakten Menge wieder kompakt ist, d. h.

$$A \subset Y \text{ kompakt} \implies f^{-1}(A) \subset X \text{ kompakt}$$

### 6.0.7 Beispiel

Ist  $F$  ein kompakter Raum, so ist

$$\mathbb{R}^n \times F \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eigentlich.

Die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow *$$

ist nicht eigentlich.

Eigentliche, glatte Abbildungen  $\varphi : M \rightarrow N$  von Mannigfaltigkeiten induzieren **kontravariant** Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi^* : H_c^*(N) &\longrightarrow H_c^*(M) \\ [\omega] &\longmapsto [\varphi^*\omega] \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Im Englischen *proper*.

- 2) Sei  $\iota : U \hookrightarrow M$  die Inklusion einer offenen Teilmenge. Dann wird **kovariant** eine Abbildung

$$\iota_* : H_c^*(U) \longrightarrow H_c^*(M)$$

induziert, indem  $\omega \in \Omega_c^*(U)$  durch die Null auf  $M$  fortgesetzt wird.

## 6.1 Mayer-Vietoris für $H_c^*$

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit,  $U, V \subset M$  offen mit  $U \cup V = M$ . Wir erhalten folgende kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \xhookrightarrow{i_U} & U \\ \downarrow i_V & & \downarrow j_U \\ V & \xhookrightarrow{j_V} & M \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} \Omega_c^*(U \cap V) & \xrightarrow{i_{U,*}} & \Omega_c^*(U) \\ \downarrow i_{V,*} & & \downarrow j_{U,*} \\ \Omega_c^*(V) & \xrightarrow{j_{V,*}} & \Omega_c^*(M) \end{array}$$

Dadurch erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega_c^*(U \cap V) \longrightarrow \Omega_c^*(U) \oplus \Omega_c^*(V) \longrightarrow \Omega_c^*(M) \longrightarrow 0$$

und die folgende lange exakte Sequenz

$$\dots \longrightarrow H_c^p(U \cap V) \longrightarrow H_c^p(U) \oplus H_c^p(V) \longrightarrow H^p(M)_c \longrightarrow H_c^{p+1}(U \cap V) \longrightarrow \dots$$

Beachte, diese Sequenz ist analog zu der langen exakten Sequenz auf den normalen Kohomologiegruppen bis auf die Tatsache, dass  $M$  und  $U \cap V$  hier die Positionen getauscht haben.

## 6.2 Poincaré-Lemma für $H_c^*$

Betrachte die Projektion

$$\pi : M \times \mathbb{R}^1 \longrightarrow M$$

$\pi$  ist nicht eigentlich. Trotzdem behaupten wir, dass  $\pi$  kovariant eine Abbildung

$$\pi_* : \Omega_c^p(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow \Omega_c^{p-1}(M)$$

induziert. Diese Abbildung nennt man **Integration entlang der Faser**. Wir unterscheiden dazu zwei Typen von Elementen in  $\Omega_c^*(M \times \mathbb{R}^1)$

- (1)  $\pi^*\eta \cdot f(x, t)$  mit  $\eta \in \Omega^*(M)$  und  $f$  hat kompakten Träger
- (2)  $(\pi^*\eta) \wedge f(x, t)dt$  mit  $\eta \in \Omega^{*-1}(M)$

Wir definieren  $\pi_*$  durch

$$\begin{aligned} \pi_*(\pi^*\eta \cdot f(x, t)) &= 0 \\ \pi_*((\pi^*\eta) \wedge f(x, t)dt) &= \eta \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t)dt \end{aligned}$$

Es bleibt nun nachzuprüfen

$$d\pi_* = \pi_*d$$

Dadurch erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_* : H_c^*(M \times \mathbb{R}^1) \longrightarrow H_c^{*-1}(M)$$

Wir behaupten, dass  $\pi_*$  ein Isomorphismus auf den Kohomologiegruppen ist, und wollen eine Umkehrabbildung konstruieren.

Sei hierzu  $e(t)$  eine glatte Funktion auf  $\mathbb{R}$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} e(t)dt = 1$  und  $\text{supp } e(t) \subset \mathbb{R}$  kompakt. Definiere

$$e := e(t)dt \in \Omega_c^1(\mathbb{R}^1)$$

und

$$\begin{aligned} e_* : \Omega_c^{*-1}(M) &\longrightarrow \Omega_c^*(M \times \mathbb{R}) \\ \eta &\longmapsto (\pi^*\eta) \wedge e(t)dt \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall rechnet man nach

$$d \circ e_* = e_* \circ d$$

Dadurch ergibt sich eine wohldefinierte Abbildung

$$e_* : H_c^{*-1}(M) \longrightarrow H_c^*(M \times \mathbb{R}^1)$$

Es bleibt nun zu zeigen, dass  $e_*$  und  $\pi_*$  auf Ebene der Kohomologiegruppen tatsächlich invers zueinander sind.

Wir erhalten hierdurch folgende Isomorphie

$$H_c^k(M \times \mathbb{R}^1) \xrightarrow{\pi_*} H_c^{k-1}(M)$$

### 6.2.1 Lemma: Poincare für $H_c^*$

$$H_c^n(\mathbb{R}^n) = H_c^0(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}$$

### 6.2.2 Satz

Sei  $M$  eine glatte, zusammenhängende, orientierbare Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  ohne Rand. Dann gilt

$$H_c^n(M) \cong \mathbb{R}$$

#### Beweis

Schritt 1  $\dim_{\mathbb{R}} H_c^n(M) \geq 1$ :

Sei dazu  $U \subset M$  eine Karte  $U \cong \mathbb{R}^n$ .  $\omega \in \Omega_c^n(U)$  sei eine  $n$ -Form mit

$$\int_U \omega \neq 0$$

Der Satz von Stokes impliziert nun, dass  $\omega$  ist nicht exakt, d. h.,  $\omega \notin \text{Bild d.}$   
Damit folgt aber auch

$$0 \neq [\omega] \in H_c^n(M)$$

Schritt 2  $\dim_{\mathbb{R}} H_c^n(M) \leq 1$ :

Sei  $\omega' \in \Omega_c^n(M)$ . Wir müssen zeigen, dass es ein  $c \in \mathbb{R}$  und ein  $\eta \in \Omega_c^{n-1}(M)$  gibt, sodass

$$\omega' = c\omega + d\eta$$

Dazu nehmen wir uns Karten  $U_1, \dots, U_k \subset M$  mit  $U_i \cong \mathbb{R}^n$  und

$$\text{supp } \omega' \subset U_1 \cup \dots \cup U_k$$

Sei ferner  $f_1, \dots, f_k$  eine glatte Partition der Eins mit  $\text{supp } f_i \subset U_i$  kompakt. Dann gilt

$$\omega' = \sum_i f_i \omega'$$

Angenommen, es gäbe  $c_i \in \mathbb{R}$  und  $\eta \in \Omega_c^{n-1}(U_i)$  mit

$$f_i \omega' = c_i \omega + d\eta_i$$

für alle  $i$ . Dann ergäbe sich

$$\omega' = \left(\sum_i c_i\right)\omega + d\left(\sum_i \eta_i\right)$$

Insofern genügt es also, die Existenz von  $c_i$  und  $\eta_i$  nachzuweisen. D. h., wir können ohne Einschränkung annehmen, dass  $\omega'$  kompakten Träger in einer Karte  $V \subset M$ ,  $V \cong \mathbb{R}^n$ , hat.

Beachte, dass

$$\text{supp } \omega \subset U \text{ und } \text{supp } \omega' \subset V$$

Da  $M$  zusammenhängend ist, finden wir offene Karten  $U_1, \dots, U_r \subset M$  mit

$$\begin{array}{ll} U_i \cong \mathbb{R} & U_1 = U \\ U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset & U_r = V \end{array}$$

Sei  $\omega_1 \in \Omega_c^n(U_1)$  mit  $\emptyset \neq \text{supp } \omega_1 \subset U_1 \cap U_2$ . Dies führen wir für  $i = 2, \dots, r-1$  fort und erhalten

$$0 \neq \omega_i \in \Omega_c^n(U_i \cap U_{i+1})$$

Mit dem Poincaré Lemma folgt nun

$$H_c^n(U_i) \cong \mathbb{R}$$

Deswegen existieren  $c_1 \in \mathbb{R}$  und  $\eta_1 \in \Omega_c^{n-1}(U_1)$  mit

$$\omega_1 = c_1 \omega + d\eta_1$$

Und analog folgt die Existenz von  $c_2, \dots, c_{r-1} \in \mathbb{R}$  und  $\eta_2, \dots, \eta_r$  mit

$$\omega_i = c_i \omega_{i-1} + d\eta_i$$

Zusammenfügen ergibt

$$\omega' = c_1 \cdots c_{r-1} \omega + d(\eta_{r-1} + c_{r-1} \eta_{r-2} + \dots + c_1 \cdots c_{r-2} \eta_1)$$

□

### 6.2.3 Bemerkung

Ist  $M$  nicht orientierbar, so gilt

$$H_c^n(M) = 0$$

Der Beweis hierfür wird ähnlich geführt wie oben.

## 6.3 Zurück zum Abbildungsgrad

### 6.3.1 Definition

Sei  $\varphi : M \rightarrow N$  eine glatte Abbildung glatter, orientierter, zusammenhängender, geschlossener Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$ .

Sei  $\omega_0 \in \Omega_c^n(N)$  eine Form mit

$$\int_M \omega_0 \neq 0$$

Dann ist  $\varphi^*\omega$  eine  $n$ -Form auf  $M$ . Definiere

$$d(\varphi) := \frac{\int_M \varphi^*\omega_0}{\int_N \omega_0}$$

$d(\varphi)$  ist unabhängig von der Wahl von  $\omega_0$ , denn ist  $\omega \in \Omega_c^n(N)$  eine weitere  $n$ -Form, so gilt

$$\omega = c\omega_0 + d\eta$$

und es gilt

$$\frac{\int_M \varphi^*\omega}{\int_N \omega} = \frac{\int_M c\varphi^*\omega_0 + \varphi^*d\eta}{\int_N c\omega_0 + d\eta} = \frac{\int_M \varphi^*\omega_0}{\int_N \omega_0} = d(\varphi)$$

da  $\int_N d\eta = 0$ , da  $N$  keinen Rand hat.

### 6.3.2 Bemerkung

$d(\varphi)$  ist auch dann wohldefiniert, wenn  $M, N$  nicht kompakt sind, aber  $\varphi$  eigentlich ist.

### 6.3.3 Satz

In obiger Situation gilt

$$d(\varphi) = \deg(\varphi)$$

Insbesondere ist  $d(\varphi)$  immer eine ganze Zahl.

**Beweis**

Sei  $p \in N$  ein regulärer Wert von  $\varphi$  und  $\varphi^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_k\} \subset M$ . Wir haben Isomorphismen

$$\varphi_{*,q_i} : T_{q_i}M \xrightarrow{\cong} T_pN$$

Nach dem Satz über umkehrbare Funktionen ist  $\varphi$  lokal in der Nähe der  $q_i$  ein Diffeomorphismus. Ergo existiert eine Karte  $\mathbb{R}^n \cong V \subset N$  um  $p$  und weitere Karten  $\mathbb{R}^n \cong U_i \subset M$  um  $q_i$ , sodass

$$\varphi|_{U_i} : U_i \longrightarrow V$$

ein Diffeomorphismus ist für alle  $i$ .

Sei  $\omega_0 \in \Omega_c^n(V)$  mit

$$\int_N \omega_0 \neq 0$$

Dann ist der Träger  $\text{supp } \varphi^* \omega_0$  in  $U_0 \cup \dots \cup U_k$  enthalten. Wir erhalten  $k$  Kopien von  $\omega_0$

$$\varphi|_{U_i}^* \omega_0 \in \Omega_c^n(U_i)$$

Es folgt

$$\int_M \varphi^* \omega_0 = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} \varphi|_{U_i}^* \omega_0$$

und es gilt

$$\int_{U_i} \varphi|_{U_i}^* \omega_0 = \varepsilon_i \int_V \omega_0$$

wobei

$$\varepsilon_i = \begin{cases} +1 & \varphi_{*,q_i} \text{ ist orientierungserhaltend} \\ -1 & \varphi_{*,q_i} \text{ ist orientierungsumkehrend} \end{cases}$$

Dadurch folgt

$$d(\varphi) = \frac{\int_M \varphi^* \omega_0}{\int_N \omega_0} = \frac{\sum_{i=1}^k \varepsilon_i \int_N \omega_0}{\int_N \omega_0} = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i = \deg(\varphi)$$

□

## 6.4 Endlich-Dimensionalität der Kohomologie

Vorlesung  
vom  
26.1.18

Sei  $M$  eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ .

### 6.4.1 Definition

Eine offene Überdeckung  $\{U_\alpha\}_\alpha$  von  $M$  heißt **gut**, wenn alle nichtleeren endlichen Schnitte  $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$  sind.

### 6.4.2 Lemma

$M$  besitzt eine gute Überdeckung. Diese kann endlich gewählt werden, wenn  $M$  kompakt ist.

#### Beweisskizze

Wähle eine Riemannsche Metrik auf  $M$ . Man kann zeigen, dass jeder Punkt von  $M$  eine geodätisch konvexe Umgebung besitzt. Der Durchschnitt geodätischer konvexer Mengen ist wieder geodätisch konvex, sofern die beiden Mengen klein genug sind. Außerdem sind geodätische konvexe Mengen diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .

Insofern genügt es eine Überdeckung von  $M$  durch geodätisch konvexe Mengen zu wählen, die klein genug sind. ■

### 6.4.3 Satz

Hat  $M$  eine gute endliche Überdeckung, so gilt für alle  $p$

$$\dim_{\mathbb{R}} H^p(M) < \infty$$

#### Beweis

Schritt 1: Seien  $U, V \subset M$  offen mit

$$\dim H^p(U) < \infty$$

$$\dim H^p(V) < \infty$$

$$\dim H^p(U \cap V) < \infty$$

für alle  $p$ . Betrachte folgende exakte Sequenz

$$H^p(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} H^p(U \cup V) \xrightarrow{\iota^*} H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V)$$



Es gilt dann

$$H^p(U \cup V) \cong \text{Bild} \iota^* \oplus \text{Bild} \delta^*$$

Da  $H^p(U \cap V)$ ,  $H^p(U)$  und  $H^p(V)$  endliche Dimension haben, haben dies auch die Bilder von  $\iota^*$  und  $\delta^*$ . Ergo auch  $H^p(U \cap V)$ .

Schritt 2: Wir führen eine vollständige Induktion nach der Kardinalität  $\kappa$  einer endlichen guten Überdeckung:

- $\kappa = 1$ :  
Dann ist  $M \cong \mathbb{R}^n$ . Damit folgt auch

$$H^p(M) \cong H^p(\mathbb{R}^n)$$

$H^p(\mathbb{R}^n)$  ist nach dem Poincare-Lemma endlich dimensional.

- $\kappa - 1 \rightarrow \kappa$ :  
Sei  $U_1, \dots, U_\kappa$  eine gute Überdeckung von  $M$ . Setze

$$U := U_1 \cup \dots \cup U_{\kappa-1}$$

und

$$V := U_\kappa \cong \mathbb{R}^n$$

Durch die Induktionsannahme folgt

$$\dim H^p(U) < \infty \text{ und } \dim H^p(V) < \infty$$

für alle  $p$ . Betrachte

$$U \cap V = (U_1 \cap U_\kappa) \cup \dots \cup (U_{\kappa-1} \cap U_\kappa)$$

$U \cap V$  besitzt die gute Überdeckung

$$U_1 \cap U_\kappa, \dots, U_{\kappa-1} \cap U_\kappa$$

der Kardinalität  $\kappa - 1$ . Mit der Induktionsannahme gilt also

$$\dim H^p(U \cap V) < \infty$$

für alle  $p$ . Mit Schritt 1 folgt nun

$$\dim H^p(M) = \dim H^p(U \cup V) < \infty$$

für alle  $p$ .

□

Wir wollen Folgendes zeigen: *Ist  $M$  orientiert und hat keinen Rand, so gilt*

$$\dim H^p(M) = \dim H_c^{n-p}(M)$$

Dies nennt man **Poincare-Dualität**.

Wir wollen eine Beschreibung des Verbindungshomomorphismus

$$\delta^* : H^p(U \cap V) \longrightarrow H^{p+1}(U \cup V)$$

in der Mayer-Vietoris-Sequenz erarbeiten. Sie ergibt sich durch eine Diagrammjagd aus folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Omega^p(U \cup V) & \longrightarrow & \Omega^p(U) \oplus \Omega^p(V) & \longrightarrow & \Omega^p(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d & & \downarrow d \oplus d & & \downarrow d & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{p+1}(U \cup V) & \longrightarrow & \Omega^{p+1}(U) \oplus \Omega^{p+1}(V) & \longrightarrow & \Omega^{p+1}(U \cap V) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Es gilt somit für  $\omega \in \Omega^p(U \cap V)$

$$\begin{aligned} \delta^*[\omega]_U &= -[d(f_V \cdot \omega)] \\ \delta^*[\omega]_V &= [d(f_U \cdot \omega)] \end{aligned}$$

wobei

$$\omega = (f_U \omega)|_V + (f_V \omega)|_U$$

Wir können  $\delta^* : H_c^{n-p-1}(U \cup V) \rightarrow H_c^{n-p}(U \cap V)$  beschreiben, indem wir für ein  $[\omega] \in H_c^{n-p-1}(U \cup V)$  eine Fortsetzung durch Null von  $\delta^*[\omega]$  auf  $U$  und  $V$  erhalten durch jeweils

$$-[d(f_V \omega)] \text{ und } [d(f_U \omega)]$$

#### 6.4.4 Lemma: Fünfer-Lemma

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \downarrow \delta & & \downarrow \varepsilon \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

Kommutiert obiges Diagramm und sind  $\alpha, \beta, \delta$  und  $\varepsilon$  Isomorphismen, so ist auch  $\gamma$  isomorph.

**Beweis**Diagrammjagd. □**6.4.5 Bemerkung**

Sei  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$  eine Bilinearform,  $V, W$  seien endlich-dimensionale Vektorräume.

Man erinnere sich daran, dass

$$V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$$

gilt.  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  induziert lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow W^* \\ v &\longmapsto \langle v | \cdot \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} W &\longrightarrow V^* \\ w &\longmapsto \langle \cdot | w \rangle \end{aligned}$$

Man erinnere sich daran, dass  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  **nicht-ausgeartet** heißt, wenn für alle  $0 \neq v \in V$  und  $0 \neq w \in W$  Vektoren  $v' \in V, w' \in W$  existieren mit

$$\langle v | w' \rangle \neq 0 \text{ und } \langle v' | w \rangle \neq 0$$

**6.4.6 Lemma**

$\langle \cdot | \cdot \rangle$  ist genau dann nicht-ausgeartet, wenn die beiden obigen induzierten Abbildungen Isomorphismen sind.

**6.4.7 Definition**

Sei  $M$  eine orientierte, glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension  $n$ . Wir definieren eine Paarung durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : H^p(M) \times H_c^{n-p}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\eta]) &\longmapsto \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

$\omega \wedge \eta$  ist in  $\Omega_c^n(M)$ , da  $\eta$  kompakten Träger hat. Insofern ist obiges Integral wohldefiniert.

Die Paarung ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten  $\omega, \eta$ . Dies folgt aus der Produktregel und dem Satz von Stokes, da  $M$  keinen Rand hat.

### 6.4.8 Satz: Poincare-Dualität

Sei  $M$  eine orientierte glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand der Dimension  $n$ , die eine endliche gute Überdeckung besitzt.

Dann ist

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : H^p(M) \times H_c^{n-p}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht-ausartet für alle  $p$ .

#### Beweis

Seien  $U, V \subset M$  offen. Die Poincare-Dualität gelte für  $U, V$  und  $U \cap V$ .

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^p(U \cup V) & \xrightarrow{\iota^*} & H^p(U) \oplus H^p(V) & \longrightarrow & H^p(U \cap V) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{p+1}(U \cup V) \\
 \downarrow \oplus & & \downarrow \oplus & & \downarrow \oplus & & \downarrow \oplus \\
 H_c^{n-p}(U \cup V) & \xleftarrow{\iota_*} & H_c^{n-p}(U) \oplus H_c^{n-p}(V) & \xleftarrow{\quad} & H_c^{n-p}(U \cap V) & \xleftarrow{\delta_*} & H_c^{n-p-1}(U \cup V) \\
 \downarrow \langle \cdot \mid \cdot \rangle & & \downarrow \langle \cdot \mid \cdot \rangle & & \downarrow \langle \cdot \mid \cdot \rangle & & \downarrow \langle \cdot \mid \cdot \rangle \\
 \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R} & & \mathbb{R}
 \end{array}$$

Indem wir den kontravarianten, exakten Funktor  $\_*$  auf die untere Zeile anwenden, erhalten wir

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 H^{p-1}(U) \oplus H^{p-1}(V) & \longrightarrow & H^{p-1}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta^*} & H^p(U \cup V) & \xrightarrow{\iota^*} & H^p(U) \oplus H^p(V) & \longrightarrow & H^p(U \cap V) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow f & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 H_c^{n-p+1}(U)^* \oplus H_c^{n-p+1}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-p+1}(U \cap V)^* & \xrightarrow{\delta^*} & H_c^{n-p}(U \cup V)^* & \xrightarrow{\iota^*} & H_c^{n-p}(U)^* \oplus H_c^{n-p}(V)^* & \longrightarrow & H_c^{n-p}(U \cap V)^*
 \end{array}$$

Mit dem Fünferlemma würde nun folgen, dass  $f$  ein Isomorphismus ist, unter der Voraussetzung, dass obiges Diagramm kommutiert.

Für die Kommutativität ist zu zeigen

$$\langle \delta^* \omega, \eta \rangle = \langle \omega, \delta^* \eta \rangle$$

Tatsächlich gilt

$$\langle \delta^* \omega, \eta \rangle = \int_{U \cap V} \delta^* \omega \wedge \eta = \int d(f_U \omega) \wedge \eta = \int df_U \wedge \omega \wedge \eta$$

und

$$\langle \omega, \delta^* \eta \rangle = \int \omega \wedge \delta_* \eta = \int \omega \wedge d(f_V \eta) = \int \omega \wedge df_U \wedge \omega = (-1)^p \int df_U \wedge \omega \wedge \eta$$

Somit kommutiert obiges Diagramm bis auf Vorzeichen. Ergo ist

$$f : H^p(U \cup V) \rightarrow H_c^{n-p}(U \cup V)^*$$

ein Isomorphismus.

Um den Beweis abzuschließen, führen wir wieder Induktion nach der Kardinalität einer endlichen guten Überdeckung von  $M$ .

Der Induktionsanfang ist hierbei gegeben durch die Poincare-Lemmata.  $\square$

### 6.4.9 Korollar

Insbesondere folgt aus obigem Satz

$$H^p(M) \cong H_c^{n-p}(M)^*$$

für alle  $p$ .

## 6.5 Der Kohomologiering von $\mathbb{C}P^n$

Vorlesung  
vom  
29.1.18

### 6.5.1 Definition

Wir definieren den **komplexen projektiven Raum** durch

$$\mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}) / \sim$$

wobei

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1})$$

für alle  $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$  und  $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

Die Punkte von  $\mathbb{C}P^n$  lassen sich durch **homogene Koordinaten** beschreiben:

$$(x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}) := [(x_1, \dots, x_{n+1})]_{\sim}$$

### 6.5.2 Beispiel

Betrachte  $\mathbb{C}P^1$  in  $\mathbb{C}P^2$  gegeben durch

$$\mathbb{C}P^1 = \{(0 : x_1 : x_2)\} \subset \mathbb{C}P^2$$

Es gilt nun

$$\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1 = \{(1 : x_1 : x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}^2$$

Dies zeigt, dass  $\mathbb{C}P^2$  eine glatte reelle Mannigfaltigkeit der Dimension 4 ist. Allgemeiner gilt

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}P^n = 2n$$

Im Detail haben wir für  $\mathbb{C}P^2$  folgende Karten

$$\begin{aligned} \{(1 : u : v) \mid u, v \in \mathbb{C}\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (1 : u : v) &\longmapsto (u, v) \\ \{(u : 1 : v) \mid u, v \in \mathbb{C}\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u : 1 : v) &\longmapsto (u, v) \\ \{(u : v : 1) \mid u, v \in \mathbb{C}\} &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (u : v : 1) &\longmapsto (u, v) \end{aligned}$$

### 6.5.3 Definition

Wir führen **Polarkoordinaten** auf  $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1$  ein

$$\begin{aligned} u &= re^{2\pi i\theta} \\ v &= se^{2\pi i\varphi} \end{aligned}$$

für  $(u, v) \in \mathbb{C}^2$  und  $r, s \geq 0, \theta, \varphi \in [0, 1)$ .

Wir deklarieren folgende 1-Formen auf  $\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1$

$$\eta(u, v) = \frac{r^2 d\theta + s^2 d\varphi}{1 + r^2 + s^2}$$

Allerdings ist  $r$  im Allgemeinen nicht glatt in Abhängigkeit von  $u$ , aber  $r^2 = x^2 + y^2 = u \cdot \bar{u}$  ist glatt für  $x = \operatorname{Re}(u), y = \operatorname{Im}(u)$ .

$\theta$  ist nicht einmal stetig. Aber  $2\pi r^2 d\theta$  ist glatt, denn

$$\begin{aligned} 2\pi r^2 d\theta &= 2\pi(x^2 + y^2) d\left(\frac{1}{2\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\ &= (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) dy \right) \\ &= (x^2 + y^2) \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left( -\frac{y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy \right) \\ &= (x^2 + y^2) \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left( -y \frac{dx}{x^2} + x \frac{dy}{x^2} \right) \\ &= x dy - y dx \end{aligned}$$

D. h.,  $\eta \in \Omega^1(\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1)$ . Setze

$$\omega := d\eta \in \Omega^2(\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1)$$

$\omega$  ist dann geschlossen auf  $\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1$ . Ferner lässt sich  $\omega$  glatt auf  $\mathbb{C}P^2$  fortsetzen. Betrachte die Karte  $(u_1 : 1 : v_1) \mapsto (u_1, v_1)$ :

$$(u_1 : 1 : v_1) = (r_1 e^{2\pi i\theta_1} : 1 : s_1 e^{2\pi i\varphi_1})$$

Ist zum Beispiel  $u_1 \neq 0$ , so gilt

$$\begin{aligned} (u_1 : 1 : v_1) &= \left( 1 : \frac{1}{r_1 e^{2\pi i\theta_1}} : \frac{s_1 e^{2\pi i\varphi_1}}{r_1 e^{2\pi i\theta_1}} \right) \\ &= \left( 1 : \frac{1}{r_1} e^{-2\pi i\theta_1} : \frac{s_1}{r_1} e^{2\pi i(\varphi_1 - \theta_1)} \right) \end{aligned}$$

Dies lässt sich in obige Formel einsetzen. Da  $\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1$  dicht in  $\mathbb{C}P^2$  liegt und  $\omega$  stetig ist, ist die Fortsetzung auf  $\mathbb{C}P^2$  eindeutig. Aus dem selben Grund gilt

$$d\omega = 0$$

auf ganz  $\mathbb{C}P^2$ . Wir erhalten so  $\omega \in \text{Kern } d \subset \Omega^2(\mathbb{C}P^2)$ . Ergo ist  $\omega$  geschlossen auf ganz  $\mathbb{C}P^2$ .  $\eta$  lässt sich nicht glatt auf  $\mathbb{C}P^2$  fortsetzen, insofern ist  $\omega$  nicht exakt auf ganz  $\mathbb{C}P^2$ .

Es gilt nun

$$\omega \wedge \omega = \frac{8rs}{(1+r^2+s^2)^3} drd\theta dsd\varphi \in \Omega^4(\mathbb{C}P^2)$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}P^2} \omega \wedge \omega &= 8 \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^1 \frac{8rs}{(1+r^2+s^2)^3} drd\theta dsd\varphi \in \Omega^4(\mathbb{C}P^2) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{rs}{(1+r^2+s^2)^3} drds = 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\omega^2$  ist nicht exakt auf  $\mathbb{C}P^2$ . Es gilt somit

$$\begin{aligned} 0 &\neq [\omega] \in H^2(\mathbb{C}P^2) \\ 0 &\neq [\omega]^2 \in H^4(\mathbb{C}P^2) \end{aligned}$$

Wir wissen, dass  $\mathbb{C}P^2$  geschlossen und orientiert ist. Mit der Poincare-Dualität folgt nun

$$\dim H^4(\mathbb{C}P^2) = \dim H^0(\mathbb{C}P^2) = 1$$

da  $\mathbb{C}P^2$  zusammenhängend ist. Insofern wird  $H^4(\mathbb{C}P^2)$  von  $[\omega^2]$  als reeller Vektorraum erzeugt.

Ferne folgt aus obigem

$$\dim H^2(\mathbb{C}P^2) \geq 1$$

Um  $\dim H^2(\mathbb{C}P^2)$  genau zu bestimmen, brauchen wir nun *relative Kohomologie*.

#### 6.5.4 Definition: Relative Kohomologie

Sei  $\iota : N \hookrightarrow M$  eine geschlossene glatte eingebettete Untermannigfaltigkeit. Setze

$$\Omega^k(M, N) := \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \iota^*(\omega) = 0\} = \text{Kern}(\iota^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(N))$$



Ist  $\omega \in \Omega^k(M, N)$ , so gilt

$$\iota^*(d\omega) = d(\iota^*\omega) = 0$$

d. h.,  $d$  steigt wohldefiniert auf  $\Omega^*(M, N)$  ab. Dadurch erhalten wir den **relativen de Rham-Komplex**  $(\Omega^*(M, N), d)$ .

Wir definieren die  $k$ -te **relative Kohomologiegruppe** durch

$$H^k(M, N) := H^k(\Omega^*(M, N), d)$$

Wir erhalten insbesondere folgende kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M, N) \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{\iota^*} \Omega^*(N) \longrightarrow 0$$

Die Surjektivität von  $\iota^*$  gilt, denn:

Lokal ist  $\iota$  gegeben durch

$$\iota : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$$

mit einer Projektion

$$\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Daraus folgt

$$\pi \circ \iota = \text{Id}$$

und damit

$$\iota^* \circ \pi^* = \text{Id}$$

Daraus folgt die Surjektivität von  $\iota^*$ .

Global folgt die Surjektivität durch eine Zerlegung der Eins.

Wir erhalten dadurch folgende lange exakte Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\delta^*} H^k(M, N) \longrightarrow H^k(M) \xrightarrow{\iota^*} H^k(N) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}(M, N) \longrightarrow \dots$$

### 6.5.5 Proposition: Alternative Beschreibung der Relativen Kohomologie

Durch Fortsetzung durch Null erhält man eine Abbildung

$$\Omega_c^*(M - N) \longrightarrow \Omega^*(M, N)$$

Diese vertauscht mit  $d$ . Sind  $M, N$  kompakt, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$H_c^*(M - N) \xrightarrow{\cong} H^*(M, N)$$

### 6.5.6 Bemerkung: Zurück zu $\mathbb{C}P^2$

Betrachte  $N = \mathbb{C}P^1 \xhookrightarrow{\iota} \mathbb{C}P^2 = M$ . Es liegt folgende exakte Sequenz vor

$$H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1) \longrightarrow H^2(\mathbb{C}P^2) \longrightarrow H^2(\mathbb{C}P^1) \longrightarrow H^3(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1)$$

Ferner gilt<sup>2</sup>

$$H^3(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1) \cong H_c^3(\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1) \cong H_c^3(\mathbb{R}^4) = 0$$

und

$$H^2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1) = H_c^2(\mathbb{R}^4) = 0$$

Daraus folgt

$$H^2(\mathbb{C}P^1) \cong H^2(\mathbb{C}P^2)$$

Es gilt nun

$$H^2(\mathbb{C}P^2) \cong H^0(\mathbb{C}P^1)^* \cong \mathbb{R}$$

Daraus folgt

$$H^2(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{R} \langle \omega \rangle$$

Betrachte ferner

$$H^1(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1) \longrightarrow H^1(\mathbb{C}P^2) \xrightarrow{\iota^*} H^1(\mathbb{C}P^1)$$

Es gilt nun

$$H^1(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}P^1) \cong H_c^1(\mathbb{R}^4) = 0$$

und

$$H^1(\mathbb{C}P^1) \cong H^1(S^2) = 0$$

Daraus folgt

$$H^1(\mathbb{C}P^2) = 0$$

Mit der Poincare-Dualität folgt nun, da  $\mathbb{C}P^2$  orientierbar ist.

$$H^3(\mathbb{C}P^2) = 0$$

Unterm Strich erhalten wir folgende Isomorphie von graduierten  $\mathbb{R}$ -Algebren

$$H^*(\mathbb{C}P^2) \cong \mathbb{R}[\omega] / ([\omega]^3 = 0)$$

wobei  $[\omega]$  Grad 2 hat.

Allgemeiner gilt

$$H^*(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{R}[\omega] / ([\omega]^{n+1} = 0)$$

---

<sup>2</sup>Anmerkung des Autors: Die Isomorphie  $H_c^3(\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1) \cong H_c^3(\mathbb{R}^4)$  gilt, obwohl  $H_c^*$  keine Homotopie-Invariante ist, weil  $\mathbb{C}P^2 - \mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{R}^4$  ein eigentlicher Diffeomorphismus ist.

## 6.6 Kartesische Produkte

Seien  $M, N$  glatte Mannigfaltigkeiten. Wir fragen uns, wie wir die Kohomologie von  $H^*(M \times N)$  berechnen können.

### 6.6.1 Bemerkung: Tensorprodukte

Seien  $V, W$  reelle endlich-dimensionale Vektorräume. Wir definieren das **Tensoprodukt**  $V \otimes W$  durch

$$V \otimes W := \mathbb{R} \langle V \times W \rangle / I$$

wobei  $I$  der Untervektorraum ist, der durch folgende Elemente erzeugt wird

$$\begin{aligned} (v + v', w + w') - (v, w) - (v, w') - (v', w) - (v', w') \\ (\lambda v, \eta w) - \lambda \eta (v, w) \end{aligned}$$

für  $v, v' \in V, w, w' \in W, \lambda, \eta \in \mathbb{R}$ . Die Klasse von  $(v, w)$  in  $V \otimes W$  bezeichnen wir mit  $v \otimes w$ . Es gilt dann

$$\begin{aligned} (v + v') \otimes (w + w') &= v \otimes w + v' \otimes w + v \otimes w' + v' \otimes w' \\ (\lambda v) \otimes (\eta w) &= \lambda \eta (v \otimes w) \end{aligned}$$

Vorlesung  
vom  
02.02.18

Elemente von  $V \oplus W$  sind endliche Linearkombinationen der Gestalt

$$\lambda_1 \cdot v_1 \otimes w_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k \otimes w_k$$

für  $\lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in V$  und  $w_i \in W$ . In diesem Sinne nennt man Elemente der Gestalt  $v \otimes w$  **Elementartensoren**.

Ist  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und  $w_1, \dots, w_m$  eine Basis von  $W$ , so ist

$$\{v_i \otimes w_j \mid i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m\}$$

eine Basis von  $V \otimes W$ .

Es liegt eine kanonische Abbildung

$$\begin{aligned} V \times W &\longrightarrow V \otimes W \\ (v, w) &\longmapsto v \otimes w \end{aligned}$$

vor. Diese ist bilinear, aber nicht linear. Tatsächlich liegt folgende Äquivalenz vor:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bilineare Abbildungen} \\ V \times W \longrightarrow U \\ (v, w) \longmapsto \beta(v, w) \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Lineare Abbildungen} \\ V \otimes W \longrightarrow U \\ v \otimes w \longmapsto \beta(v, w) \end{array} \right\}$$

### Zurück zu Produktmannigfaltigkeiten

Es seien wieder  $M, N$  glatte Mannigfaltigkeiten. Dann ist  $M \times N$  ebenfalls eine glatte Mannigfaltigkeit mit Projektionen

$$\begin{aligned} \pi : M \times N &\longrightarrow M \\ \rho : M \times N &\longrightarrow N \end{aligned}$$

Betrachte die bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} H^p(M) \times H^q(N) &\longrightarrow H^{p+q}(M \times N) \\ ([\omega], [\eta]) &\longmapsto [\pi^* \omega \wedge \eta^* \eta] \end{aligned}$$

bzw. die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \kappa_{p,q} : H^p(M) \otimes H^q(N) &\longrightarrow H^{p+q}(M \times N) \\ [\omega] \otimes [\eta] &\longmapsto [\pi^* \omega \wedge \eta^* \eta] \end{aligned}$$

Diese induzieren uns eine lineare Abbildung

$$\kappa = \sum_{p+q=k} \kappa_{p,q} : \bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N) \longrightarrow H^k(M \times N)$$

### 6.6.2 Satz: Satz von Künneth

$\kappa$  ist ein Isomorphismus, d. h.

$$\bigoplus_{p+q=k} H^p(M) \otimes H^q(N) \cong H^k(M \times N)$$

#### Beweis

Wir zeigen die Aussage nur im Fall, dass  $M$  eine endliche gute Überdeckung hat. Wir führen wieder eine Induktion nach der Kardinalität einer endlichen guten Überdeckung.

Induktionsbasis:  $M \cong \mathbb{R}^n$

Daraus folgt  $M \times N = \mathbb{R}^n \times N$ . In diesem Fall folgt die Behauptung aus dem Poincare-Lemma.

Induktionsschritt: Wir wollen wieder ein Argument via Mayer-Vietoris-Sequenz und Fünferlemma machen. Dazu seien  $U, V \subset M$  gegeben, dann erhalten wir folgende exakte Sequenz

$$H^p(U \cup V) \longrightarrow H^p(U) \oplus H^p(V) \longrightarrow H^p(U \cap V) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(U \cup V)$$

Tensorieren mit  $H^q(N)$  erhält die Exaktheit, da Vektorräume flach sind. Dadurch erhalten wir folgende exakte Sequenz

$$H^p(U \cup V) \otimes H^q(N) \longrightarrow H^p(U) \otimes H^q(N) \oplus H^p(V) \otimes H^q(N) \longrightarrow H^p(U \cap V) \otimes H^q(N) \xrightarrow{\delta^*} H^{p+1}(U \cup V) \otimes H^q(N)$$

Wir bilden für alle  $p+q=k$  die direkte Summe der Sequenzen. Dies erhält weiterhin die Exaktheit, ergo erhalten wir folgende exakte Sequenz

$$\bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cup V) \otimes H^q(N) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=k} H^p(U) \otimes H^q(N) \oplus \bigoplus_{p+q=k} H^p(V) \otimes H^q(N) \longrightarrow \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cap V) \otimes H^q(N) \xrightarrow{\delta^*} \bigoplus_{p+q=k+1} H^p(U \cup V) \otimes H^q(N)$$

Da  $U \times N$  und  $V \times N$  offene Teilmengen von  $M \times N$  sind, haben diese ihrerseits eine exakte Mayer-Vietoris-Sequenz

$$H^k((U \cup V) \times N) \longrightarrow H^k(U \times N) \oplus H^k(V \times N) \longrightarrow H^k((U \cap V) \times N) \xrightarrow{\delta^*} H^{k+1}((U \cup V) \times N)$$

Ferner erhalten wir durch die Abbildungen  $\kappa$  ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cup V) \otimes H^q(N) & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=k} H^p(U) \otimes H^q(N) \oplus \bigoplus_{p+q=k} H^p(V) \otimes H^q(N) & \longrightarrow & \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cap V) \otimes H^q(N) & \xrightarrow{\delta^*} & \bigoplus_{p+q=k+1} H^p(U \cup V) \otimes H^q(N) \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa \oplus \kappa & & \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa \\ H^k((U \cup V) \times N) & \longrightarrow & H^k(U \times N) \oplus H^k(V \times N) & \longrightarrow & H^k((U \cap V) \times N) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{k+1}((U \cup V) \times N) \end{array}$$

Wegen der Induktionshypothese können wir annehmen, dass alle  $\kappa$  außer

$$\kappa : \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cup V) \otimes H^q(N) \longrightarrow H^k((U \cup V) \otimes N)$$

Isomorphismen sind. Wir wollen die Kommutativität des Diagramms zeigen. Für alle Quadrate, die nicht das  $\delta^*$  involvieren, ist dies klar. Für

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cap V) \otimes H^q(N) & \xrightarrow{\delta^*} & \bigoplus_{p+q=k+1} H^p(U \cup V) \otimes H^q(N) \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \kappa \\ H^k((U \cap V) \times N) & \xrightarrow{\delta^*} & H^{k+1}((U \cup V) \times N) \end{array}$$

gilt

$$\begin{aligned} \kappa \delta^*(\omega \otimes \eta) &= \kappa((\delta^* \omega) \otimes \eta) \\ &= \kappa(d(f_U \omega) \otimes \eta) \\ &= \pi^*(d(f_U \omega)) \wedge \rho^* \eta \\ &= d(\pi^* f_U \cdot \pi^* \omega \wedge \rho^* \eta) \\ &= d(\pi^* f_U \cdot \kappa(\omega \otimes \eta)) \\ &= \delta^* \kappa(\omega \otimes \eta) \end{aligned}$$

wobei  $f_U \circ \pi, f_V \circ \pi$  eine Partition der Eins bzgl.  $U \times N$  und  $V \times N$  ist. Daraus folgt, dass

$$\kappa : \bigoplus_{p+q=k} H^p(U \cup V) \otimes H^q(N) \longrightarrow H^k((U \cup V) \otimes N)$$

ein Isomorphismus ist. □

### 6.6.3 Beispiel

$$\begin{aligned} H^*(S^3 \times S^2) &= H^*(S^3) \otimes H^*(S^2) \\ &= (H^0(S^3) \oplus H^3(S^3)) \otimes (H^0(S^2) \oplus H^2(S^2)) \\ &= H^0(S^3) \otimes H^0(S^2) \oplus H^0(S^3) \otimes H^2(S^2) \oplus H^3(S^3) \otimes H^0(S^2) \oplus H^3(S^3) \otimes H^2(S^2) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$H^p(S^3 \times S^2) = \begin{cases} H^0(S^3) \otimes H^0(S^2) = \mathbb{R} & p = 0 \\ H^0(S^3) \otimes H^2(S^2) = \mathbb{R} & p = 2 \\ H^3(S^3) \otimes H^0(S^2) = \mathbb{R} & p = 3 \\ H^3(S^3) \otimes H^2(S^2) = \mathbb{R} & p = 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

## 6.7 Die Signatur einer Mannigfaltigkeit

Sei  $M$  eine glatte orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit der Dimension  $n = 4k$ . Betrachte die Bilinearform

$$\begin{aligned} \langle \cdot | \cdot \rangle : H^{2k}(M) \times H^{2k} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\eta]) &\longmapsto \int_M \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

Diese Bilinearform ist symmetrisch und nicht ausgeartet wegen der Poincare-Dualität. Deswegen existiert eine Basis  $v_1, \dots, v_{s+t}$  von  $H^{2k}(M)$ , in der die Matrixdarstellung von  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  diagonal ist. D. h.

$$\langle v_i | v_j \rangle_{i,j} = \begin{pmatrix} p_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & p_s & & & \\ & & & n_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & n_t \end{pmatrix}$$

mit  $p_i > 0$  und  $n_i < 0$ . Die **Signatur**

$$\sigma(\langle \cdot | \cdot \rangle) := s - t$$

ist dann definiert als die Anzahl der positiven Eigenwerte von  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  minus die Anzahl der negativen Eigenwerte von  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

Wir definieren die **Signatur** der Mannigfaltigkeit  $M$  durch

$$\sigma(M) := \sigma(\langle \cdot | \cdot \rangle : H^{2k}(M) \otimes H^{2k}(M) \rightarrow \mathbb{R}) = s - t$$

Die Signatur einer Mannigfaltigkeit ist offenbar eine orientierte Homotopieinvariante.

**Frage** Wann ist  $\sigma(\langle \cdot | \cdot \rangle)$  gleich Null für eine beliebige symmetrische nicht-ausgeartete Bilinearform  $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \otimes V \rightarrow \mathbb{R}$ ?

### 6.7.1 Definition

Ein Untervektorraum  $L \subset V$  heißt **Lagrangscher Untervektorraum** bzgl.  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ , falls

i.)  $\langle \cdot | \cdot \rangle_L = 0$

ii.)  $\dim L = \frac{1}{2} \dim V$

### 6.7.2 Satz

$\sigma(\langle \cdot | \cdot \rangle)$  ist genau dann Null, wenn  $V$  einen Lagrangschen Untervektorraum hat.



# Index

- (Ketten)-Homotopie, 62
- Äußere Algebra, 40
- Übergangsfunktionen, 13
- äußere Ableitung, 43
- äußere Produkt, 56
  
- Abbildungsgrad, 27
- alternierend, 38
  
- Basisraum, 12
  
- de Rham-Kohomologie, 49, 56
- Differentialform, 42
- Differentialformen mit kompakten Träger, 71
  
- eigentlich, 73
- Einbettung, 10
- Einschränkung auf den Rand, 60
- Elementartensoren, 92
- erste Kohomologiegruppe, 37
- exakt, 52, 66
  
- Faser, 12
- faserweise, 12
  
- geschlossen, 52
- glatte Differential- $k$ -Form, 55
- Gradient, 37
- gut, 80
  
- homogene Koordinaten, 86
- Homomorphismus, 13, 62
  
- Immersion, 10
- Integration entlang der Faser, 75
  
- kanonische Orientierung, 29
- Kohomologiegruppen, 55
- Kohomologiegruppen mit kompakten Trägern, 71
- Kokettenkomplex, 62
- Komplex, 62
- komplexen projektiven Raum, 86
- kritischer Punkt, 7
- kritischer Wert, 7
- kurze exakte Sequenz, 66
  
- Lagrangscher Untervektorraum, 96
- Lebesgue-Konstante, 5
- lokal endlich, 6
- lokal trivial, 12
  
- nicht-ausgeartet, 83
- normal, 6
- Normalenbündel, 16
  
- orientierter, 29
- Orientierung, 29, 30
- orientierungserhaltend, 30
- orientierungsumkehrend, 30
  
- parakompakt, 6
- parallelisierbar, 14
- Poincare-Dualität, 82
- Polarkoordinaten, 87
- Potential, 35

Produktregel, 46

Projektion, 12

Pullback, 55

regulären Wert, 7

relative Kohomologiegruppe, 89

relativen de Rham-Komplex, 89

Richtungsableitungen, 43

Rotation, 37

Shuffle, 39

Signatur, 95

stabile Orientierung, 29

Stammfunktion, 35

sternförmig, 36

Strukturgruppe, 13

Submersion, 10

Tensoprodukt, 91

Totalraum, 12

Träger, 58

transversal, 11, 12

trivial, 14

Tubenumgebung, 16

Untermannigfaltigkeit, 10

Vektorraumbündel, 12

Wedge-Produkt, 39

Zerlegung der Eins, 6