Mitschrieb: Differentialtopologie II
SS 18

tensor.produkt@gmx.de

23. April 2018

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesungen vom 16.04.18 bis zum ... des Kurses Differentialtopologie II an der Universität Heidelberg.
Dieses Dokument wurde „live“ in der Vorlesung getext. Sämtliche Verantwortung für Fehler übernimmt alleine der Autor dieses Dokumentes.
Auf Fehler kann gerne hingewiesen werden bei folgende E-Mail-Adresse

tensor.produkt@gmx.de

Ferner kann bei dieser E-Mail-Adresse auch der Tex-Code für dieses Dokument erfragt werden.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung in die Riemannsche Geometrie

1.1 Überblick und Ideen

Vorlesung vom 16.04.18

Bisher können wir durch die äußere Ableitung

$$\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

nur Differentialformen auf glatten Mannigfaltigkeiten ableiten, aber keine anderen Objekte wie zum Beispiel Vektorfelder. Wir können also auch nicht über Phänomene aus der Physik wie Beschleunigung zum Beispiel sprechen.

Ziel Wir wollen einen Rahmen finden, in dem Objekte wie zum Beispiel Vektorfelder abgeleitet werden können.

1.1.1 Beispiel

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Gilt $\mathrm{d}f = 0$ und ist M zusammenhängend, so ist f konstant.
Hätten wir für ein Vektorfeld ξ eine Ableitung $\mathrm{d}\xi$, dann sollte die Gleichung $\mathrm{d}\xi = 0$ implizieren, dass ξ *konstant* ist.
Ist zum Beispiel ξ auf $M = \mathbb{R}^n$ konstant, so ist ξ parallel, im Sinne von, die einzelnen Tangentialvektoren, die im Bild von ξ liegen, sind parallel.
Somit impliziert eine Ableitung für Vektorfelder ein Konzept von *Parallelismus*.

Problem Ein Konzept von Parallelismus kann nicht über Karten erklärt werden, weil Kartenwechsel im Allgemeinen nicht winkeltreu sind.

1.1.2 Beispiel

Sei $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Sei $p \in S^2$ und $\xi(p) \in T_pS^2$. γ sei ein Großkreis, der durch p in Richtung $\xi(p)$ geht. Ist p_1 ein weiterer Punkt auf γ, so lässt sich $\xi(p)$ *naiv* wie gewohnt in $\mathbb{R}^3$ von p auf p_1 verschieben. Dies hat das offensichtliche Problem, das der so parallel verschobene Vektor im Allgemeinem nicht tangential an S^2 anliegt.
Diesen kann man nun orthogonal auf den Tangentialraum $T_{p_1}S^2$ projizieren. Dadurch erhält man einen Tangentialvektor $\xi(p_1) \in T_{p_1}S^2$. Durch dieses Prozedere lässt sich ξ glatt auf S^2 fortsetzen. Wählt man weitere Punkte p_i auf γ, die gegen einen Punkt q am Äquator konvergieren und für die gilt

$$d(p_i, p_{i+1}) \longrightarrow 0$$

dann erhalten wir einen Vektor $\xi(q) \in T_qS^2$. Dies nennt man den **Paralleltransport** von $\xi(p)$ entlang γ zu $\xi(q)$.
Allerdings kann man $\xi(p)$ auch entlang eines weiteren Großkreises γ_1 verschieben. Verschiebt man entlang γ_1 wieder auf den Äquator und von dort wieder auf q, so erhält man einen anderen Tangentialvektor auf q.

Neues Phänomen Für allgemeine Mannigfaltigkeiten hängt der Paralleltransport vom Weg γ ab; im Gegensatz zum Euklidischen Raum.

1.1.3 Zurück zu Ableitungen von Vektorfeldern ξ

Auf M sei Parallelismus gegeben (zum Beispiel ist M eingebettet im $\mathbb{R}^n$). $p \in M$ sei ein Punkt und $v \in T_pM$ sei ein Tangentialvektor. ξ sei ein Vektorfeld auf M.
Sei γ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$. q sei ein Punkt auf γ. Durch den vorgegebenen Parallelismus lässt sich $\xi(p)$ entlang γ verschieben. D. h., im Punkt q haben wir die Vektoren $\xi(q)$ und $\tau_p^q\xi(p)$, wobei $\tau_p^q\xi(p)$ der Paralleltransport von $\xi(p)$ nach q entlang γ ist.

Idee Betrachte

$$\xi(q) - \tau_p^q\xi(p) \in T_pM$$

für $\mathrm{d}(p,q) \to 0$. Dies bezeichnet man dann auch als die **kovariante Ableitung** von ξ in Richtung v

$$\nabla_v \xi \in T_q M$$

∇_v nennt man dabei einen **Zusammenhang.** Diese hat folgende Eigenschaften:

- ∇_v ist $\Omega^0(M)$-linear in v, d. h.

  $$\nabla_{\lambda v+w}(\xi) = \lambda \nabla_v(\xi) + \nabla_w(\xi)$$

  für glatte Funktionen $\lambda : M \to \mathbb{R}$.

- Sie ist $\mathbb{R}$-linear im zweiten Argument

  $$\nabla_v(\xi + \eta) = \nabla_v(\xi) + \nabla_v(\eta)$$

- Ist $f : M \to \mathbb{R}$ linear, so liegt folgende Produktregel vor

  $$\nabla_v(f \cdot \xi) = f \cdot \nabla_v(\xi) + \nabla_v(f) \cdot \xi$$

  wobei

  $$\nabla_v f := v(f)$$

1.1.4 Geodätische

Sei γ eine (glatte) Kurve auf M. γ heißt eine **Geodätische**, falls gilt

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$$

Obige Bedingung ist in lokalen Koordinaten eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Physikalisch gesprochen verschwindet die Beschleunigung. Geometrisch gesprochen ist γ parallel entlang γ.

1.1.5 Beispiel

Sei M eine Riemannsche Fläche im $\mathbb{R}^3$. Die Gleichung

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$$

bedeutet

$$\ddot\gamma \perp M$$

D. h., die Euklidische zweite Ableitung steht orthogonal auf der Fläche M.

1.1.6 Beispiel

- Geraden sind Geodätische im Euklidischen Raum.
- Großkreise sind Geodätische auf Sphären.
- Allgemein sind Geodätische lokal kürzeste Kurven.

1.1.7 Parallelogramme

Sei $p \in M$. μ, λ seien zwei Geodätische, die sich im Punkt p schneiden mit $\mu(0) = \lambda(0) = p$.
μ, λ seien parametrisiert durch die Bogenlänge, d. h.,

$$\left|\left|\dot{\lambda}(t)\right|\right| = ||\dot{\mu}(t)|| = 1$$

für alle t. Setze $v := \dot{\mu}(0)$ und $w := \dot{\lambda}(0)$. Sei $\varepsilon > 0$.
Indem wir w entlang μ verschieben, erhalten wir einen Vektor $\overline{w}$ auf $\mu(\varepsilon)$ und analog einen Vektor $\overline{v}$ auf $\lambda(\varepsilon)$.
Es gilt

$$||\overline{v}|| = ||\overline{w}|| = 1$$

da der Paralleltransport eine Isometrie ist, wenn die Riemannsche Metrik kompatibel ist zum Zusammenhang ∇.
Indem man $\overline{v}$ und $\overline{w}$ durch durch Bogenlänge parametrisierte Geodätische fortsetzt, erhält man Geodätische $\overline{\mu}$ und $\overline{\lambda}$. Dadurch erhält man dann Punkte $\overline{\lambda}(\varepsilon)$ und $\overline{\mu}(\varepsilon)$. Im Euklidischen würden die beiden Punkte zusammen fallen und das Parallelogramm schließen. Für allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten muss dies nicht der Fall sein, aber es gilt

$$d(\overline{\mu}(\varepsilon), \overline{\lambda}(\varepsilon)) \in O(\varepsilon^2)$$

Vorlesung vom 18.04.18

1.1.8 Definition

Definiere die **Torsion** des Zusammenhangs durch

$$T(\xi,\eta) := \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - [\xi,\eta]$$

wobei $[\xi,\eta]$ die **Lie-Klammer**[1] der beiden Vektorfelder ξ und η bezeichnet.
T ist ein **Tensor**, d. h., $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear.
∇ heißt **symmetrisch** bzw. **torsionsfrei**, falls $T = 0$.

1.1.9 Lemma

Ist ∇ symmetrisch, dann gilt sogar

$$d(\overline{\mu}(\varepsilon), \overline{\lambda}(\varepsilon)) \in O(\varepsilon^3)$$

Sei $u \in T_p(M)$ ein weiterer Tangentialvektor. u_1 sei der Paralleltransport von u entlang $\lambda\overline{\mu}$. u_2 sei der Paralleltransport entlang $\mu\overline{\lambda}$.
Es liegt dann folgende asymptotische Gleichheit vor

$$||u_1 - u_2|| \sim \varepsilon^2 \mathrm{R}(v,w)u$$

$\mathrm{R}(v,w)u$ heißt **Riemannscher Krümmungstensor**. Er ist definiert durch

$$\mathrm{R}(v,w)u := \nabla_v \nabla_w u - \nabla_w \nabla_v u - \nabla_{[v,w]} u$$

Wir werden nun im Folgenden mit den Formalen Definitionen beginnen.

[1] Lassen sich die beiden Vektorfelder als Koordinatenrichtungen schreiben, so gilt zum Beispiel $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$

1.2 Die Lie-Klammer

Sei M im Folgenden eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X, Y : M \to \mathcal{T}M$ glatte Vektorfelder auf M.

1.2.1 Lemma

Es existiert genau ein glattes Vektorfeld Z auf M, sodass gilt

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Beachte, $X(f)$ bezeichnet die glatte Funktion, die sich ergibt durch

$$X(f)(p) := X(p)(f)$$

Beweis

- Eindeutigkeit:
  Sei $p \in M$. $\{x_i\}$ seien lokale Koordinaten bei p. X, Y lassen sich dann schreiben durch

  $$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{und} \qquad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

  und es gilt

  $$\begin{aligned} X(Yf) &= X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_i a_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \end{aligned}$$

  bzw.

  $$Y(Xf) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

In der Differenz ergibt sich

$$\begin{aligned} X(Yf) - Y(Xf) &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Lokal ist Z also bestimmt durch

$$Z = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

- Existenz:
  Durch obige Formel ist für jedes lokale Koordinatensystem ein Z gegeben. Diese lassen sich global zu einem glatten Vektorfeld auf ganz M zusammen setzen.

□

1.2.2 Definition

Definiere nun die **Lie-Klammer** von X und Y durch

$$Z := [X, Y] = XY - YX$$

1.2.3 Bemerkung

Die Lie-Klammer hat folgende Eigenschaften

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$$

- Iteration: Für beliebige Vektorfelder X, Y, Z gilt

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

und

$$[[Y, Z], X] = [YZ - ZY, X] = YZX - ZYX - XYZ + XZY$$

und

$$[[Z,X],Y] = [ZX - XZ, Y] = ZXY - XZY - YZX + YXZ$$

Durch Aufsummieren ergibt sich

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

Dies nennt sich die **Jacobi-Identität**.

- Seien $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Es gilt

  $$[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX) = f(X(g)Y - gXY) - g(Y(f)X - fYX) = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

Da eine Mannigfaltigkeit lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, lassen sich die bekannten Sätze zu Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsbedingungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen von $\mathbb{R}^n$ auf M verallgemeinern.

1.2.4 Satz

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, X ein glattes Vektorfeld auf M, $p \in M$ ein Punkt. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset M$ von p und ein $\delta > 0$ zusammen mit einer Abbildung

$$\varphi : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow M$$

sodass $t \mapsto \varphi(t,p)$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,q) &= X(\varphi(t,q)) \qquad\qquad \forall q \in U \\ \varphi(0,q) &= q \end{aligned}$$

ist.
Schreibweise:

$$\varphi_t(p) := \varphi(t,p)$$

Die glatte Abbildung

$$\varphi_t : U \to M$$

heißt **Fluss** von X (in der Umgebung von p).

1.2.5 Bemerkung

Sei $|s|, |t|, |s+t| < \delta$. Betrachte

$$\gamma_1(t) := \varphi(t, \varphi(s,p))$$

Das impliziert

$$\dot{\gamma}_1 = X(\gamma_1) \qquad \gamma_1(0) = \varphi(s,p)$$

und

$$\gamma_1(t) := \varphi(t+s,p)$$

impliziert

$$\dot{\gamma}_2 = X(\gamma_2) \qquad \gamma_2(0) = \varphi(s,p)$$

Aus der Eindeutigkeit folgt nun

$$\gamma_1 = \gamma_2$$

D. h.,

$$\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Id}_M = \varphi_t \circ \varphi_{-t}$$

Daraus folgt, dass jedes φ_t ein Diffeomorphismus ist. Die Menge aller $\{\varphi_t\}_t$ nennt man eine **Einparameter-Untergruppe** von Diffeomorphismen.

1.3 Die Lie-Ableitung

Seien X, Y zwei Vektorfelder auf M, $p \in M$ ein Punkt.
Sei φ_t der Fluss auf X mit

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,p) = X(\varphi_t(p)) \qquad \text{und} \qquad \varphi_0(p) = p$$

Definiere nun die **Lie-Ableitung durch**

$$(L_X Y)(p) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(Y_p - (\mathrm{d}\varphi_h)(Y_{\varphi_{-h}(p)})\right) \in T_p(M)$$

wobei $Y_p = Y(p), \mathrm{d}\varphi_h = \varphi_{h,*}$. Die Lie-Ableitung leitet das Vektorfeld Y bzgl. dem Fluss von X im Punkt p ab.

1.3.1 Proposition

Es gilt

$$L_X Y = [X, Y]$$

Für den Beweis dieser Proposition benötigen wir ein Lemma:

Idee Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit $f(0) = 0$. f hat die Taylor-Entwicklung

$$f(t) = tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \ldots =: t \cdot g(t)$$

Es gilt

$$f(t) = tg(t)$$

und $f'(0) = g(0)$.
Wir brauchen nun folgende Verallgemeinerung dieser Beobachtung:

1.3.2 Lemma

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \mathbb{R}$ glatt, $f(0,p) = 0$ für alle $p \in M$.
Dann existiert eine glatte Funktion $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t,p) = t \cdot g(t,p) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$$

Beweis

Wir definieren g durch

$$g(t,p) := \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)(s \cdot t, p) \mathrm{d}s$$

Der Rest ist nachrechnen. $\square$

Vorlesung vom 23.04.18

Beweis: 1.3.1

Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Wir wollen Folgendes zeigen.

$$(L_X Y)(f) = [X, Y](f) = XYf - YXf$$

Definiere die Hilfsfunktion

$$h(t, p) := f(\varphi_t(p)) - f(p).$$

Da $h(0, p) = 0$, existiert aufgrund des Lemmas ein g mit

$$h(t, p) = t \cdot g(t, p) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial h}{\partial t}(0, p) = g(0, p).$$

Es gilt

$$f \circ \varphi_t = f + t g_t$$

und

$$X_p(f) = \left(\frac{\partial}{\partial t}_{t=0} \varphi_t(p) \right)(f) = \frac{\partial}{\partial t}_{t=0} f(\varphi_t(p)) = \frac{\partial h}{\partial t}(0, p) = g(0, p).$$

Durch die erste der beiden obigen Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\varphi_h)(Y_{\varphi_{-h}(p)})(f) &= Y_{\varphi_{-h}(p)}(f \circ \varphi_h) \\ &= Y_{\varphi_{-h}(p)}(f + t g_t).\end{aligned}$$

Setzt man dies in die Lie-Ableitung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}(L_X Y)(f) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(Y_p - (\mathrm{d}\varphi_h)(Y_{\varphi_{-h}(p)})(f) \big) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(Y_p - (Y_{\varphi_{-h}(p)})(f) \big) - \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(h(Y_{\varphi_{-h}(p)})(g_h) \big).\end{aligned}$$

Da gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(h(Y_{\varphi_{-h}(p)})(g_h) \big) = \lim_{h \to 0} (Y_{\varphi_{-h}(p)})(g_h) = Y_p(g_0) = YXf,$$

folgt

$$\begin{aligned}(L_X Y)(f) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big((Yf)_p - (Yf)_{\varphi_{-h}(p)} \big) - Y_p X f \\ &= X_p Y f - Y_p X f.\end{aligned}$$

□

Folgerungen

$$L_Y X = -L_X Y, \qquad\qquad L_X X = 0$$

Seien Vektorfelder X, Y gegeben. Man kann zeigen, dass lokale Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ existieren mit

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Gilt ferner

$$Y = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

so folgt

$$[X, Y] = \frac{\partial\partial}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial\partial}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Insofern ist das Verschwinden von $[X, Y]$ eine notwendige Bedingung für die Existenz von lokalen Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ mit

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \text{und} \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

1.3.3 Geometrische Interpretation der Lie-Klammer

Seien X, Y Vektorfelder. φ und ψ seien korrespondierende Flüsse, $p \in M$ sei ein Punkt. Setze

$$c(h) := \psi_{-h}\varphi_{-h}\psi_h\varphi_h(p).$$

Die Zuordnung $h \mapsto c(h)$ definiert eine glatte Kurve. Man kann zeigen

$$\dot{c}(h) = 0.$$

Für Kurven $\gamma(t)$ mit $\dot{\gamma}(0) = 0$ lässt sich die zweite Ableitung definieren durch

$$\ddot{\gamma}(t)(0) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}_{t=0} f(\gamma(t)).$$

Dann ist $\ddot{\gamma}(0)$ eine Derivation.
Daraus folgt, dass $\ddot{c}(0)$ definiert ist, und es gilt

$$\ddot{c}(0) = 2[X, Y]_p.$$

1.4 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Sei M eine glatte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

1.4.1 Definition

Eine **Riemannsche Metrik** auf M ist eine Zuordnung

$$p \longmapsto \langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$$

für $p \in M$, wobei $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$ jeweils ein inneres Produkt[2] auf T_pM ist. Ferner soll diese Zuordnung**glatt** sein in dem Sinne, dass für lokale Koordinaten (U, x) die Funktionen

$$g_{i,j}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \mid \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$$

für alle i, j glatt sind auf U.
Wir werden manchmal $g(p)$ anstatt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$ schreiben.
Das Paar $(M, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

1.4.2 Definition

Ein Diffeomorphismus $\varphi : (M, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_M) \to (N, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_N)$ heißt **Isometrie**, falls für alle $p \in M$ und $u, v \in T_pM$ gilt

$$\langle u, v \rangle_{M,p} = \langle \mathrm{d}\varphi_p u, \mathrm{d}\varphi_p v \rangle_{N,\varphi(p)} .$$

(1) ### 1.4.3 Beispiel

Sei $M = \mathbb{R}^n$. x seien die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^n$. Setzt man

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p = \delta_{i,j}$$

so erhält man die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

(2) Sei $f : M \to N$ eine glatte Immersion. $(N, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_N)$ sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann induziert f eine Riemannsche Metrik $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_M$ auf M durch

$$\langle u | v \rangle_M := \langle \mathrm{d}f(u), \mathrm{d}f(v) \rangle_N .$$

Da $\mathrm{d}f$ injektiv ist, ist $\langle u | v \rangle_{M,p}$ positiv definit.

[2]Inneres Produkt heißt hier eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

(3) **1.4.4 Beispiel**

Es bezeichne $S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$ die Einheitssphäre. Durch die Einebettung $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ erhalten wir eine Riemannsche Metrik auf S^n. S^n zusammen mit dieser Metrik nennt man **Standardsphäre**.

(4) **Produktmetrik**: Seien $(M, g_m), (N, g_N)$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. π_1, π_2 seien die korrespondierenden Projektionen von $M \times N$ auf M bzw. N. Seien $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$, setze

$$\langle u, v\rangle_{p,q} := \langle \mathrm{d}\pi_1(u), \mathrm{d}\pi_1(v)\rangle_{M,p} + \langle \mathrm{d}\pi_2(u), \mathrm{d}\pi_2(v)\rangle_{N,q}\,.$$

$\langle u, v\rangle_{p,q}$ ist eine Riemannsche Metrik auf $M \times N$, die sogenannte **Produktmetrik**.

(5) **1.4.5 Beispiel**

Betrachte $T^n := S^1 \times \ldots \times S^1$. Ist S^1 mit der Standardmetrik versehen, so induziert uns dies eine Produktmetrik auf T^n. In diesem Fall spricht man vom **flachen Torus**.
Für $n = 2$ kann man T^2 in den $\mathbb{R}^3$ einbetten. Dadurch erhält man eine andere induzierte Metrik auf T^2, die nicht äquivalent zu obiger Produktmetrik ist. Diese beiden Tori sind nicht isometrisch.

1.4.6 Proposition

Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik.

Beweis

Sei $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ eine offene Überdeckung von M durch Karten und $\{f_\alpha\}$ eine glatte Partition der Eins bzgl. dieser Überdeckung.
Über U_α betrachte man die eindeutige Riemannsche Metrik g^α, sodass

$$(U_\alpha, g^\alpha) \xrightarrow{x_\alpha} (\mathbb{R}^n, g_{eukl})$$

eine Isometrie ist. Auf M erhält man nun eine Riemannsche Metrik durch

$$g_p := \sum_{p \in U_\alpha} f_\alpha(p) g_p^\alpha.$$

□

1.4.7 Definition

Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine glatte Kurve. Ein **Vektorfeld entlang einer Kurve** c ist eine glatte Zuordnung

$$t \longmapsto V(t) \in T_{c(t)}M$$

1.4.8 Bemerkung

Ein Vektorfeld entlang einer Kurve lässt sich im Allgemeinem nicht auf ein Vektorfeld einer offenen Umgebung der Kurve fortsetzen. Zum Beispiel könnte sich die Kurve selbst schneiden und V die Ableitung der Kurve sein.

Notation Wir schreiben auch für $v \in T_pM$

$$||v|| := \sqrt{\langle v|v\rangle_p}$$

1.4.9 Definition

Für eine Kurve c definiere wir die **Länge** durch

$$L_a^b(c) := \int_a^b ||\dot{c}(t)|| \,\mathrm{d}t$$