Kapitel 1

Erste Woche

1.1 Krümmungen

1.1.1 Definition

Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\kappa_p(\sigma)$ bezeichne die Schnittkrümmung in einem Punkt p und einer Ebene $\sigma \subset T_pM$.
M heißt **von positiver Schnittkrümmung**, falls $\kappa_p(\sigma) > 0$ für alle $p \in M, \sigma \subset T_pM$. Bezeichnet ric die Ricci-Krümung, so heißt M **von positiver Ricci-Krümmung**, falls $\mathsf{ric}_p(v,v) > 0$ für alle $p \in M, v \in T_pM$.
Die Ricci-Krümmung von M wird von $\alpha > 0$ nach unten beschränkt, falls

$$\mathsf{ric}_p(v,v) \geq \alpha g_p(v,v)$$

für alle $p \in M, v \in T_pM$.

1.1.2 Definition: Isometrien

Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ heißt **lokal isometrisch**, falls für alle $p \in M$ das Differential $\mathsf{d}_p : T_pM \to T_pN$ eine lineare Isometrie metrischer Räume ist.

1.1.3 Bemerkung

f ist genau dann isometrisch, wenn f lokal isometrisch und diffeomorph ist.

1.1.4 Satz

Jede glatte Abbildung $f : M \to M$, die für einen Punkt eine Isometrie auf den Tangentialräumen induziert, ist eine Isometrie.
Jede glatte, abstandserhaltende Funktion $f : M \to M$ ist eine Isometrie.

1.1.5 Definition

Die **Kompakt-Offen-Topologie** auf $\mathsf{Isom}(M,M)$ wird durch eine Basis folgender Mengen generiert

$$W(K,U) := \{f \mid f(K) \subseteq U\}$$

für alle $K \subseteq M$ kompakt und $U \subseteq M$ offen.

1.1.6 Proposition: Cartan

Seien v, w normierte, orthogonale Vektoren in T_pM. Es gilt

$$d(c_v(t), c_w(t))^2 = 2t^2 - \frac{\kappa_p(\sigma_{v,w})}{6}t^4 + o(t^5)$$

1.1.7 Lemma

Ist Y ein Jacobifeld entlang c, so gilt

$$D_t(\mathcal{R}(\dot{c}, Y), \dot{c})(0) = \mathcal{R}(\dot{c}, D_tY)\dot{c}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}g(\mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, w) &= g(D_t\mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, w) + g(\mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, D_tw) \\
\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}g(\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, Y) &= g(D_t\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, Y) + g(\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, D_tY) \\
g(D_t\mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, w) &= g(D_t\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, Y) + g(\mathcal{R}(\dot{c}, w)\dot{c}, D_tY) = g(\mathcal{R}(\dot{c}, D_tY)\dot{c}, w)
\end{aligned}$$

□

1.1.8 Proposition

Seien $v, w \in T_pM$ mit $|w| = 1$. Setze $Y(t) = (\mathsf{d}\exp_p)_{tv}(tw) \in J_{c_v}$. Dann gilt

$$|Y(t)|^2 = g(Y(t), Y(t)) = t^2 - \frac{1}{3}g(\mathcal{R}(v, w)w, v)t^4 + o(t^5)$$

Beweis
Es gilt

$$Y(0) = 0, D_t(Y)(0) = w$$

Man rechnet nach

$$\begin{aligned}
g(Y, Y)(0) &= 0 \\
g(Y, Y)'(0) &= \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}_{|t=0}g(Y(t), Y(t)) = 2g(D_t(Y), Y)(0) = 0 \\
g(Y, Y)''(0) &= 2g(D_tY, D_tY)(0) + 2g(D_tD_tY, Y)(0) = 2g(w, w) = 2 \\
g(Y, Y)'''(0) &= 6g(D_tD_tY, D_tY)(0) = 6g(-\mathcal{R}(\dot{c}, Y)\dot{c}, D_tY)(0) = 0 \\
g(Y, Y)''''(0) &= 8g(\mathcal{R}(\dot{c}, D_tY)\dot{c}, D_tY) - \frac{8}{24}g(\mathcal{R}(v, w)w, v) = -\frac{1}{3}g(\mathcal{R}(v, w)w, v)
\end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Ls Vorlesungen

2.1 Räume konstanter Krümmung

2.1.1 Definition

Unter $\mathbb{M}_k^n$ verstehen wir die bis auf Isomorphie eindeutige vollständige, einfache zusammenhängende, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit von konstanter Schnittkrümmung k.

2.1.2 Bemerkung

Skaliert man die Metrik einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mt $c > 0$, so skaliert sich ihre Krümmung mit $\frac{1}{c}$.

2.1.3 Beispiel

Man führe auf $\mathbb{R}^{n+1}$ folgende Bilinearformen ein

$$(x, y) := \sum_{i=1}^{n+1} x_i \cdot y_i$$

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - x_{n+1} \cdot y_{n+1}$$

Dann gilt

$$\mathbb{M}_0^n = \mathbb{R}^n \quad \mathbb{M}_1^n = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x) = 1\} \quad \mathbb{M}_{-1}^n = \mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x, x) = 1, x_{n+1} > 0\}$$

2.1.4 Definition

Der **Index** einer symmetrischen Bilinearform ist die größte Dimension aller Unterräume, auf denen jene Bilinearform negativ definit ist.

2.1.5 Definition

Sei (M, g) eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M', g'). Bezeichnet $\iota : M \hookrightarrow M'$ die Einbettung, so verstehen wir unter $\mathcal{V}'(M) := \Gamma(\iota^*(TM'))$ den Pullback der Vektorfelder auf M', d.h.

$$\mathcal{V}'(M) = \left\{ Y_{|M} \mid Y \in \mathcal{V}(M') \right\}$$

Unter $\mathcal{V}(M)^\perp \subset \mathcal{V}'(M)$ verstehen wir die Vektorfelder auf M, die normal zu M liegen.
Wir schränken den Levi-Civita-Zusammenhang von M' auf $\mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}'(M)$ ein und erhalten

$$\mathcal{D}' : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}'(M) \longrightarrow \mathcal{V}'(M)$$

Betrachte folgende Zerlegung

$$T_pM' = T_pM \oplus (T_pM)^\perp$$

Unter dem **Koindex von** M verstehen wir den Index auf $(T_pM)^\perp$. Es gilt

$$\mathrm{Index}(T_pM') = \mathrm{Index}(T_pM) + \mathrm{Index}(T_pM)^\perp$$

2.1.6 Lemma

$\mathcal{D}'$ ist wohldefiniert.

Beweis

Sei $p \in M$ ein Punkt und $U \subset M$ eine Koordinatennachbarschaft von p. Seien ferner $V \in \mathcal{V}(M), X \in \mathcal{V}'(M)$ mit Liftungen $V', X' \in \mathcal{V}(M')$. X' lässt sich auf U darstellen durch

$$X' = \sum_i f^i \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i}$$

$$\mathcal{D}'_{V'} X' = \sum_i V'(f^i) \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i} + \sum_i f^i D'_{V'} \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i} \right)$$

Für $q \in U \cap M$ gilt

$$V'(f^i)(q) = V_q(f^i) = V_q(f^i_{|U \cap M})$$

und

$$\mathcal{D}'_{V'} \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i} \right)(q) = \mathcal{D}'_{V'_q} \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x_i} \right)$$

$\square$

2.1.7 Korollar

Seien $V, W \in \mathcal{V}(M), X, Y \in V'(M)$.

- $D'_V X$ ist $\mathcal{F}(M)$-linear in V.
- $D'_V X$ ist $\mathbb{R}$-linear in X.
- $D'_V(fX) = (Vf)X + f\mathcal{D}'_V X$
- $[V, W] = \mathcal{D}'_V W - \mathcal{D}'_W V$
- $Vg(X, Y) = g(D'_V X, Y) + g(X, D'_V Y)$

2.1.8 Lemma

Sind $V, W \in \mathcal{V}(M)$, dann gilt

$$\mathcal{D}_V W = (\mathcal{D}'_V W)^T$$

Beweis

Sei $X \in \mathcal{V}(M)$ beliebig

$$2g(\mathcal{D}'_{V'}W', X') = V'g(W', X') + W'g(X', V') - X'g(V', W') + g(W', [X', V']) + g(X', [V', W'])$$

Mit dem Vorhergehenden Korollar erhalten wir durch Einschränkung auf M

$$g(\mathcal{D}'_V W, X) = g(\mathcal{D}_V W, X)$$

Es gilt ferner

$$g(\mathcal{D}'_V W, X) = g((\mathcal{D}'_V W)^T, X)$$

da X tangential an M liegt. □

2.1.9 Lemma

Definiere den **Gestalttensor** bzw. **zweiten Fundamentaltensor** durch

$$\begin{aligned} \Pi : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{V}(M) &\longrightarrow \mathcal{V}(M)^\perp \\ (V, W) &\longmapsto (\mathcal{D}'_V W)^N = \mathcal{D}'_V W - \mathcal{D}_V W \end{aligned}$$

Dann ist dieser Tensor $\mathcal{F}(M)$-bilinear und symmetrisch.

Beweis

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}'_V(fW))^N &= (f\mathcal{D}'_V W)^N + (V(f)W)^N = (f\mathcal{D}'_V W)^N \\ \Pi(V, W) - \Pi(W, V) &= (\mathcal{D}'(V, W) - \mathcal{D}'(W, V))^N = [V, W]^N = 0 \end{aligned}$$

□

2.1.10 Satz: Gauss-Gleichung

Seien $V, W, X, Y \in \mathcal{V}(M)$. Es gilt

$$g(\mathcal{R}(V, W)X, Y) = g(\mathcal{R}'(V, W)X, Y) + g(\Pi(V, X), \Pi(W, Y)) - g(\Pi(V, Y), \Pi(W, X))$$

Beweis

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(X, Y)Z &= -\mathcal{D}_{[X,Y]}Z + [\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y]Z \\ g(\mathcal{D}'_{[V,W]}X, Y) &= g(\mathcal{D}_{[V,W]}X, Y) \\ g(\mathcal{D}'_V \mathcal{D}'_W X, Y) &= g(\mathcal{D}'_V \mathcal{D}_W X, Y) + g(\mathcal{D}'_V \Pi(W, X), Y) \\ &= g(\mathcal{D}_V \mathcal{D}_W X, Y) + (V g(\Pi(W, X), Y) - g(\Pi(W, X), \mathcal{D}'_V Y)) \end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$g(\Pi(W, X), Y) = 0$$

Ergo

$$\begin{aligned} g(\mathcal{D}'_V \mathcal{D}'_W X, Y) &= g(\mathcal{D}_V \mathcal{D}_W X, Y) + (V g(\Pi(W, X), Y) - g(\Pi(W, X), \mathcal{D}'_V Y)) \\ &= g(\mathcal{D}_V \mathcal{D}_W X, Y) - g(\Pi(W, X), \Pi(V, Y)) \end{aligned}$$

□

2.1.11 Korollar

Sind $v, w \in T_pM$ linear unabhängig, so gilt

$$\kappa(v,w) = \kappa'(v,w) + \frac{g(\Pi(v,v),\Pi(w,w)) - g(\Pi(v,w),\Pi(v,w))}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2}$$

2.1.12 Proposition

Sei Y ein Vektorfeld tangential zu M entlang einer Kurve $\alpha(t)$ in M. Dann gilt

$$\mathcal{D}'_t Y = \mathcal{D}_t Y + \Pi(\dot\alpha, Y)$$

2.1.13 Korollar

α ist genau dann eine Geodäte von M, wenn $\mathcal{D}'_t(\dot\alpha)$ normal zu M steht.

2.1.14 Definition

Eine **semi-Riemannsche Hyperfläche** ist eine **semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit** der Kodimension Eins.

2.1.15 Definition

Das **Vorzeichen** einer semi-Riemannschen Hyperfläche M ist definiert durch

$$\varepsilon := \begin{cases} +1 & \mathsf{coindex} M = 0 \\ -1 & \mathsf{coindex} M = 1 \end{cases}$$

2.1.16 Definition

Sei U ein normierter Normalenvektorfeld einer semi-Riemannschen Hyperfläche M. Dann wird durch

$$g(S(V), W) = g(\Pi(V,W), U)$$

ein (1,1)-Tensorfeld S auf M definiert, der sogenannte **Gestaltoperator**, der durch U induziert wird.

2.1.17 Lemma

Für alle $v \in T_pM$ gilt

$$S(v) = -\mathcal{D}'_v U$$

Ferner ist S_p selbstadjungiert.

Beweis

$g(U,U)$ ist konstant gleich 1. Ergo gilt

$$g(\mathcal{D}'_V U, U) = 0$$

Daraus folgt, dass $\mathcal{D}'_V U$ für alle $V \in \mathcal{V}(M)$ tangent an M liegt.
Sei nun $W \in \mathcal{V}(M)$, dann gilt

$$g(S(V), W) = g(\Pi(V,W), U) = g(\mathcal{D}'_V W, U) \overset{g(U,W)=0}{=} g(\mathcal{D}'_V U, W)$$

□

2.1.18 Korollar

$$\kappa(v,w) = \kappa'(v,w) + \varepsilon \frac{g(Sv,v)g(Sw,w) - g(Sv,w)^2}{g(v,v)g(w,w) - g(v,w)^2}$$

Beweis

$$\Pi(v,w) = \varepsilon g(Sv,w)U \text{ und } g(U,U) = \varepsilon$$

□

2.1.19 Definition: 3 Shades of Artig-Sein

Sei $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

$$x \text{ heißt } \begin{cases} \text{zeitartig, falls } \langle x, x \rangle < 0 \\ \text{lichtartig, falls } \langle x, x \rangle = 0 \\ \text{raumartig, falls } \langle x, x \rangle > 0 \end{cases}$$

2.1.20 Proposition

Sei $M = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = -r^2 \right\}$. Dann ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der konstanten Schnittkrümmung $-\frac{1}{r^2}$ für $r > 0$.

Beweis
Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{\mathbb{R}}$ durch $x \mapsto \langle x, x \rangle$. Dann ist $\mathsf{d}f_p(v) = 2 \langle v, p \rangle$. Ergo ist $\mathsf{d}f_p$ surjektiv für alle $p \in M$. Ergo ist $f^{-1}(-r^2)$ eine glatte Hyperfläche von $\mathbb{R}^{n+1}$.
Ferner ist

$$T_pM = \mathsf{Kern}\mathsf{d}f_p = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v \rangle = 0 \right\} = p^\perp$$

Da p zeitartig ist, ist T_pM positiv definit. Ferner ist der vom Einheiten-Normalen Vektorfeld $U = \frac{p}{r}$ abgeleitete Gestaltoperator gegeben durch $S(V) = -\mathcal{D}'_V U = \frac{-V}{r}$. Es folgt

$$\kappa(v, w) = 0 - \frac{1}{r^2} = -\frac{1}{r^2}$$

$\square$

2.1.21 Definition

Unter einer **Paar-Isometrie** $\Phi : (M, M') \to (N, N')$, wobei $M \subset M', N \subset N'$, ist eine Isometrie $M' \to N'$, dergestalt, dass auch ihre Restriktion $M \to N$ eine Isometrie ist.

2.1.22 Lemma

Eine Paar-Isometrie $\Phi : (M, M') \to (N, N')$ erhält den Gestalttensor, d. h.

$$\mathsf{d}\Phi(\Pi(v, w)) = \Pi(\mathsf{d}\Phi(v), \mathsf{d}\Phi(w))$$

für alle $p \in M, v, w \in T_pM$.

2.1.23 Proposition

Seien $p, q \in M = \left\{ p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = -r^2 \right\}$ mit ONBs $e_i \in T_pM, f_i \in T_qM$. Dann existiert eine eindeutige Paar-Isometrie

$$\phi : (\mathbb{R}^{n+1}, M) \longrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, M)$$

mit

$$\phi(p) = q \text{ und } \mathsf{d}\phi_p(e_i) = f_i$$

2.1.24 Definition

Eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit $M \subset M'$ heißt **total geodätisch**, falls $\Pi = 0$.

2.1.25 Proposition

Für eine semi-Riemannsche Untermannigfaltigkeit $M \subset M'$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1.) M ist total geodätisch in M'

2.) Jede Geodäte von M bleibt eine Geodäte in M'

3.) Für $v \in T_pM \subset T_pM'$ liegt das Anfangstück von $\gamma(t) = \exp'_p(tv)$ in M

4.) Für jeden Weg in M stimmt der Paralleltransport in M mit dem in M' überein.

2.1.26 Proposition

Seien $M, N \subset M'$ vollständige, zusammenhängende, total geodätische semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Existiert ein Punkt $p \in M \cap N$ mit

$$T_pM = T_pN$$

so folgt

$$M = N$$

2.1.27 Proposition

Bezeichnet $H^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ das Hyperboloidenmodell des hyperbolischen Raumes, so sind die k-dimensionalen, vollständigen, total geodätischen, zusammenhängenden Riemannschen Untermannigfaltigkeiten von H^n genau die Schnitte

$$H^n \cap W^{k+1}$$

wobei W^{k+1} ein $k+1$-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

2.1.28 Korollar

H^n ist vollständig.

2.1.29 Lemma: Poincare-Scheiben-Modell

Definiere

$$H^n = \left\{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p\rangle = -1\right\} \text{ und } D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| < 1\}$$

und folgenden Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} p : H^n &\longrightarrow D^n \\ (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) &\longmapsto \frac{1}{x_{n+1}+1}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

Dann ist die Metrik auf D^n gerade gegeben durch

$$g_p^D = \left(\frac{2}{1 - ||p||^2}\right)^2 g_p^E$$

wobei g^E die euklidische Metrik von $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

2.1.30 Lemma

Es seien
$$O(n,1) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n+1\times n+1} \mid \langle v, w\rangle = \langle Av, Aw\rangle \right\}$$
und
$$O(n,1)^+ = \{A \in O(n,1) \mid A(H^n) \subset H^n\}$$
Dann ist $O(n,1)^+$ eine Index-2-Gruppe von $O(n,1)$ und
$$Isom(H^n) = O(n,1)^+$$
Ferner gilt
$$Isom(S^n) = O(n) \text{ und } Isom(\mathbb{R}^n) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$$

2.1.31 Definition

Eine k**-Ebene** von H^n ist eine vollständige, zusammenhängende, total geodätische, k-dimensionale Riemannsche Untermannigfaltigkeit von H^n.
Ist $S = H^n \cap W^n$ eine Hyperebene von H^n, so definiere die **Reflektion** an S durch
$$\begin{aligned} r_S : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (r_S)_{|W^n} &= \mathsf{id}_{W^n} \\ (r_S)_{|W^{n\perp}} &= -\mathsf{id}_{W^{n\perp}} \end{aligned}$$

2.1.32 Proposition

Die Reflektionen an Hyperebenen erzeugen $Isom(H^n)$.

2.1.33 Definition

Ein Diffeomorphismus
$$f : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$
heißt **konform**, falls eine glatte Funktion $f : M \to \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass
$$f^*(h_{f(p)}) = \lambda(p) \cdot g_p$$

2.1.34 Bemerkung

Die Poincare-Scheibe ist ein konformes Modell von $\mathbb{H}^n$, d. h., (D^n, g^E) und (D^n, g^D) sind zueinander konform.

2.1.35 Lemma

Die k-dimensionalen, vollständigen, zusammenhängenden, total geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Poincare-Scheibe sind ihre Schnitte mit k-Sphären und k-Ebenen von $\mathbb{R}^n$, die orthogonal zum Rand der Poincare-Scheibe liegen.

2.1.36 Definition

Sei $S_p(r) \subset \mathbb{R}^n$ eine Sphäre mit Radius r um p. Definiere die **Inversion** an $S_p(r)$ durch
$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \\ x &\longmapsto p + r^2 \frac{x-p}{||x-p||^2} \end{aligned}$$

2.1.37 Proposition

Jede Inversion ist konform und bildet Sphären und Ebenen auf Sphären und Ebenen ab.

2.1.38 Definition

Das **obere Halbebenen-Modell**

$$U^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

ergibt sich durch eine Inversion der Poincare-Scheibe an der Sphäre

$$S = S_{(0,\ldots,0,-1)}(\sqrt{2})$$

Insofern ist die obere Halbebene ein konformes Modell von $\mathbb{H}^n$.

2.1.39 Proposition

Die k-Ebenen von U^n sind die k-Ebenen und k-Sphären von $\mathbb{R}^n$, die orthogonal zu ∂U^n sind.

2.1.40 Proposition

Die Metrik auf U^n ist gegeben durch

$$g_x^U = \frac{1}{x_n^2} g^E$$

2.1.41 Proposition

Folgende Abbildungen sind Isometrien von U^n:

1.) Horizontale Translationen:

$$x \longmapsto x + (b_1, \ldots, b_{n-1}, 0)$$

2.) Dilationen:

$$x \longmapsto x \cdot \lambda$$

3.) Inversionen an Sphären orthogonal zu ∂U^n

2.1.42 Proposition

Die Isometrien der Poincare-Scheibe und der oberen Halbebene werden durch Inversionen an Sphären und Reflektion an Euklidischen Ebenen, die alle orthogonal zum Rand stehen, erzeugt.

2.1.43 Proposition

In den konformen Modellen sind Kugeln genau die euklidischen Kugeln mit exzentrischen Mittelpunkten.

2.1.44 Satz: Thurston

Ein Knoten in S^3 ist entweder ein Torus-Knoten, d. h., er kann auf die Oberfläche eines Torus platziert werden, ein Satellitknoten, d. h., es gibt einen echt einfacheren Knoten, sodass der Satellitknoten in der Verdickung des einfacheren lebt, oder ein hyperbolischer Knoten, d. h., sein Komplement ist eine hyperbolische Mannigfaltigkeit.

2.1.45 Satz: Cartan

Seien M, N zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension n, $p \in M, q \in N$. Ferner sei eine lineare Isometrie

$$i : T_pM \longrightarrow T_pN$$

gegeben und eine offene Umgebung $p \in V \subset_o M$, sodass

$$f := \exp_q \circ i \circ \exp_p^{-1} : V \longrightarrow f(V)$$

wohldefiniert ist. Definiere für $p' \in V$ folgende Abbildung

$$\begin{aligned}\phi_{p'} : T_pM &\longrightarrow T_qN \\ x &\longmapsto P_t^N \circ i \circ \left(P_t^M\right)^{-1}\end{aligned}$$

wobei $P_t^M : T_pM \to T_{p'}M$ den Paralleltransport entlang der Geodäte

$$\gamma : \gamma(0) = p \mapsto \gamma(t) = p'$$

und P_N den Paralleltransport entlang der Geodäte δ mit

$$\delta(0) = q \text{ und } \dot{\delta}(0) = i(\dot{\gamma}(0))$$

bezeichnet.
Gilt nun für alle $p' \in V, x, y, z, w \in T_{p'}M$

$$g(\mathcal{R}(x,y)z,w) = g(\mathcal{R}(\phi_t(x),\phi_t(y))\phi_t(z),\phi_t(w))$$

Dann ist f eine lokale Isometrie mit $\mathsf{d}f_p = i$.

Beweis

1.) Sei $\gamma : [0,t] \to M$ eine Geodäte von p nach p' und $v \in T_pM$ beliebig. Definiere ein Jacobi-Feld J entlang γ durch

$$J(0) = 0 \text{ und } J(l) = v$$

Sei $\{e_1(t), \ldots, e_{n-1}(t), e_n(t) = \dot{\gamma}(t)\}$ eine ONB von parallelen Vektorfeldern entlang γ. Es gilt

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t)e_i(t)$$

und

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_t\mathcal{D}_tJ(t) + \mathcal{R}(\dot{\gamma}(t),J(t))\dot{\gamma}(t) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} y_i''(t)e_i(t) + \sum_{i=1}^{n} y_i(t)\mathcal{R}(e_n(t),e_i(t))e_n(t) = 0 \\ \Longleftrightarrow &\forall j : \ y_j''(t) + \sum_{i=1}^{n} y_i(t)g(e_j(t),\mathcal{R}(e_n(t),e_i(t))e_n(t)) = 0\end{aligned}$$

Definiere nun $\delta : [0,l] \to N$ durch

$$\delta(0) = q \text{ und } \dot{\delta}(0) = i(\dot{\gamma}(0))$$

und folgende ONB entlang δ durch

$$e'_i(t) := \phi_t(e_i(t))$$

und das Vektorfeld K entlang δ durch

$$K(t) := \phi_t(J(t)) = \sum_{i=1}^{n} y_i(t) e'_i(t)$$

Nun gilt aufgrund unserer Voraussetzung $\phi_t^* g(\mathcal{R},) = g(\mathcal{R},)$

$$\begin{aligned}
&\forall j:\ y''_j(t) + \sum_{i=1}^{n} y_i(t) g(e_j(t), \mathcal{R}(e_n(t), e_i(t))e_n(t)) = 0\\
\Longleftrightarrow &\forall j:\ y''_j(t) + \sum_{i=1}^{n} y_i(t) g(e'_j(t), \mathcal{R}(e'_n(t), e'_i(t))e'_n(t)) = 0\\
\Longleftrightarrow &\sum_{i=1}^{n} y''_i(t) e'_i(t) + \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \mathcal{R}(e'_n(t), e'_i(t))e'_n(t) = 0\\
\Longleftrightarrow &\mathcal{D}_t\mathcal{D}_t K(t) + \mathcal{R}(\dot\delta(t), K(t))\dot\delta(t) = 0
\end{aligned}$$

Ergo ist K ein Jacobifeld.

2.) Da Paralleltransporte isometrisch sind, gilt

$$g(J(l), J(l)) = g(\phi_t \circ J(l), \phi_t \circ J(l)) = g(K(l), K(l))$$

3.) Da $v = J(l) \in T_{p'}M$ beliebig war, bleibt nun folgendes zu zeigen

$$K(l) = \mathsf{d} f_{p'}(J(l))$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\dot K(0) &= (\mathcal{D}_t K)(0)\\
&= \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} P_t^{N\,-1}(K(t))_{|t=0}\\
&= i\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t} P_t^{M\,-1}(J(t))_{|t=0}\right)\\
&= i(\mathcal{D}_t J)(0) = i\dot J(0)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
K(l) &= (\mathsf{d}\exp_q)_{l\dot\delta(0)}(l\dot K(0))\\
&= ((\mathsf{d}\exp_q)_{l\dot\delta(0)} \circ i)(l\dot J(0))\\
&= (\mathsf{d}\exp_q)_{l\dot\delta(0)} \circ i \circ (\mathsf{d}\exp_p)^{-1}_{l\dot\gamma(0)}(J(l))\\
&= \mathsf{d} f_{p'}(J(l))
\end{aligned}$$

□

2.1.46 Korollar

Seien M, N Riemannsche Mannigfaltigkeiten derselben konstanten Schnittkrümmung und Dimension. Dann existiert für jede Wahl von Punkten $p \in M, q \in N$ und ONBs $e_i \in T_pM$ und $f_i \in T_qN$ eine lokale Isometrie

$$g : p \in V \subset_o M \longrightarrow g(V)$$

mit

$$g(p) = q \text{ und } \mathsf{d}g_p(e_i) = f_i$$

2.1.47 Definition

Für $p, q \in M$ bezeichne $P(p, q)$ die Menge aller **stetigen Wege** $c : [0, 1] \to \mathbb{R}$ von p nach q. Sind $a, b \in P(p, q)$ so verstehen wir unter einer **Homotopie** von a nach b eine **stetige** Abbildung

$$H : I^2 \longrightarrow M$$

mit

$$\begin{aligned} H_s(0) &= p \quad \forall s \\ H_s(1) &= q \quad \forall s \\ H_0(t) &= a(t) \quad \forall t \\ H_1(t) &= b(t) \quad \forall t \end{aligned}$$

Existierte eine Homotopie $a \mapsto b$, so heißen a, b zueinander **homotop**.
Homotop Sein ist eine Äquivalenzrelation von $P(p, q)$.
Definiere ferner für $a \in P(p, q), b \in P(q, r)$

$$a * b(t) := \begin{cases} a(2t) & t \leq \frac{1}{2} \\ b(2t-1) & t \geq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ und } a^{-1}(t) := a(1-t)$$

Diese Operationen sind unter Homotopie invariant.

2.1.48 Definition: Die X.te Definition der Fundamentalgruppe...

Definiere die **Fundamentalgruppe** von M in p durch

$$\pi_1(M, p) := (P(p, p)/\text{Homotopie}, *)$$

2.1.49 Bemerkung

Ist M wegzusammenhängend, so ist die Fundamentalgruppe bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl des Basispunktes.

2.1.50 Definition

M heißt einfach zusammenhängend, wenn M wegzusammenhängend ist und eine triviale Fundamentalgruppe hat.

2.1.51 Definition

Eine glatte, surjektive Abbildung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten $M' \to M$ heißt **Überlagerung**, falls jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset_o M$ besitzt, sodass das Urbild dieser Umgebung ausschließlich aus Zusammenhangkomponenten besteht, die diffeomorph zu U sind.

2.1.52 Lemma

Eine Überlagerung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten $\varphi : M' \to M$ gehorcht folgender **Universellen Abbildungseigenschaft**:
Ist $\alpha : I \to M$ eine glatte Kurve mit Anfangspunkt p, so existiert für jedes Urbild $q \in \varphi^{-1}(p)$ genau eine **Liftung** $\alpha' : I \to M'$ mit Anfangspunkt q und

$$\varphi \circ \alpha' = \alpha$$

2.1.53 Lemma

Sei $M' \to M$ eine Überlagerung und $a, b : I \to M$ homotope Kurven in M. Besitzen ihre Liftungen $a', b' : I \to M'$ denselben Anfangspunkt, so sind diese ebenfalls homotop.

2.1.54 Korollar

Sei $\varphi : M' \to M$ eine Überlagerung von Riemannschen Mannigfaltigkeiten.
Ist $f : P \to M$ eine glatte Abbildung, P wegzusammenhängend und $p \in f(P)$, so existiert für jedes Urbild $q \in \varphi^{-1}(p)$ höchstens eine **Liftung** $f' : P \to M'$ mit Anfangspunkt q und

$$\varphi \circ f' = f$$

Ist P einfach zusammenhängend, so existiert diese Liftung immer.

2.1.55 Satz

Jede zusammenhänge Mannigfaltigkeit besitzt eine einfach zusammenhängende Überdeckung.

Beweis: Skizze
Für $p \in M$ sei Ω_p die Mannigfaltigkeit aller Pfade in M, die in p starten. Setze $M' := \Omega_p/\text{Homotopie}$, dann ist folgende Überdeckung gegeben

$$\begin{aligned} M' &\longrightarrow M \\ [\gamma]_H &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

□

2.1.56 Korollar

Ist M eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, so gibt es bis auf Diffeomorphie nur eine einfach zusammenhängende Überlagerung $M' \to M$. In diesem Sinne nennen wir M' die **universelle Überlagerung** von M.

2.1.57 Definition

Eine Überlagerung $M' \to M$ heißt **trivial**, wenn das Urbild jeder Zusammenhangskomponente von M ausschließlich aus Zusammenhangskomponenten besteht, die jeweils diffeomorph zu ihrem Bild sind.

2.1.58 Korollar

Jede Überlagerung einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit ist trivial.

2.1.59 Definition

Sei $k : M' \to M$ eine Überlagerung. Unter einer **Deck-Transformation** verstehen wir einen Diffeomorphismus $\phi : M' \to M'$ mit

$$k \circ \phi = k$$

Bezeichnet D die Gruppe aller Deck-Transformationen, so heißt k **normal**, wenn für alle $p, q \in M'$ mit $k(p) = k(q)$ ein $\phi \in D$ mit $\phi(p) = q$ existiert.

2.1.60 Korollar

Jede einfach zusammenhängende Überlagerung ist normal.

2.1.61 Satz

Ist $k : M' \to M$ eine universelle Überlagerung, so ist $D \cong \pi_1(M)$.

2.1.62 Definition

Sei $G \subset \mathrm{Diffeo}(M)$ eine Untergruppe. Wir sagen G agiert **eigentlich diskontinuierlich (und frei)**, falls gilt

PD1) Jedes $p \in M$ hat eine Umgebung $U \subset M$, sodass für alle $g \in G$ gilt

$$g.U \cap U \neq \emptyset \Longrightarrow g = 1$$

PD2) Punkte $p, q \in M$ aus verschiedenen G-Orbiten haben Umgebungen $U, V \subset M$, sodass für alle $g \in G$ gilt

$$g.U \cap V = \emptyset$$

2.1.63 Bemerkung

Die Deck-Transformationsgruppe ist immer eigentlich diskontinuierlich.

2.1.64 Lemma

Sei $G \subset \mathrm{Diffeo}(M)$ eine eigentlich diskontinuierliche Untergruppe. Es gibt genau eine Struktur auf M/G, durch die

$$M \longrightarrow M/G$$

zu einer Überlagerung (Riemannscher) Mannigfaltigkeiten wird. Ist M zusammenhängend, so gilt $D = G$ und die Überlagerung ist normal.

Kapitel 3

Ws Vorlesungen

3.1 Symmetrische Räume

3.1.1 Definition: Lokal Symmetrisch

Eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt **lokal symmetrisch**, falls für jeden Punkt $P \in M$ eine Zahl $r > 0$ und eine Isometrie

$$s_p : B_p(r) \longrightarrow B_p(r)$$

sodass

1.) $s_p(p) = p$

2.) $(\mathsf{d}s_p)_{|p} = -\mathsf{id}_{T_pM}$

3.1.2 Bemerkung

Für jede Isometrie $L : T_pM \xrightarrow{T}_p M$ lässt sich lokal eine Abbildung durch

$$l_p := \exp_p \circ L \circ \exp_p^{-1}$$

definieren, die im Allgemeinem keine Isometrie ist.

3.1.3 Satz

Für eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M sind folgende Aussagen äquivalent:

1.) M ist lokal symmetrisch

2.) der Krümmungstensor ist **parallel**, d. h., $\nabla\mathcal{R} = 0$, d. h., für alle $X, Y, Z, U \in \mathcal{T}M$

$$\nabla_U \mathcal{R}(X, Y)Z = 0$$

3.) Für jede Geodäte c ist die Abbildung

$$\mathcal{R}_{\dot{c}}X := \mathcal{R}(X, \dot{c})\dot{c}$$

parallel entlang c.

Beweis

1. 1.) $\Rightarrow$ 2.)
   Betrachte $s_p^*(\nabla\mathcal{R}) = (\nabla\mathcal{R}) \circ \mathsf{d}s_p$. Da s_p eine Isometrie ist, gilt
   $$s_p^*(\nabla\mathcal{R}) = \nabla\mathcal{R}$$
   Ferner gilt
   $$-\nabla_U\mathcal{R}(X,Y)Z = \mathsf{d}s_p(\nabla_U\mathcal{R}(X,Y)Z) = s_p^*(\nabla_U\mathcal{R}(X,Y)Z)$$
   Es folgt ergo
   $$\nabla\mathcal{R} = 0$$

2. 3.) $\Rightarrow$ 1.)
   Sei $p \in M$, $r < inj_p(M)$.
   $$s_p := \exp_p \circ(-\mathsf{id}_{T_pM}) \exp_p^{-1} : B_p(r) \longrightarrow B_p(r)$$
   Wir zeigen durch Jacobi-Felder, dass s_p isometrisch ist:
   Sei dazu $E_1, \ldots, E_n$ eine Basis paralleler Vektorfelder entlang c, die Eigenvektoren von $\mathcal{R}_{\dot{c}}$ an der Stelle p sind, d. h.
   $$\left(\mathcal{R}_{\dot{c}}(E_i)\right)(p) = \lambda_i E_i(p)$$
   Da diese Vektorfelder parallel entlang c sind, bleiben sie Eigenvektoren entlang c mit konstanten Eigenwerten λ_i, da $\mathcal{R}$ parallel entlang c ist. Definiere folgendes Jacobi-Feld entlang c
   $$J(t) = \sum_{i=1} y_i(t)E_i(t)$$
   mit
   $$y_i''(t) = -\lambda_i y_i(t)$$
   Da $J(0) = 0$, gilt
   $$y_i(t) = y_i(-t)$$
   Für J und $q = \exp_p(v)$ gilt nun
   $$||(\mathsf{d}s_p)_q(J(t))|| = \left|\left|(\mathsf{d}s_p)_q\left((\mathsf{d}\exp_p)_v(tJ'(0))\right)\right|\right| = \left|\left|(\mathsf{d}\exp_p)_v(-tJ'(0))\right|\right| = ||J(-t)|| = ||J(t)||$$
   Da diese Gleichung für alle Jacobi-Felder in p gilt, folgt für alle $w \in T_qM$
   $$||(\mathsf{d}s_p)_q w|| = ||w||$$
   ergo ist s_p isometrisch.

□

3.1.4 Bemerkung

Analog gilt für eine Isometrie $L : T_pM \to T_pM$ mit
$$l_p = \exp_p \circ L \circ \exp_p^{-1}$$
folgende Implikation
$$L^*(\mathcal{R}_p) = \mathcal{R}_p \Longrightarrow l_p \text{ ist isometrisch}$$

3.1.5 Definition

Ein lokal symmetrischer Raum heißt **(global) symmetrisch**, falls jede punktweise Spiegelung zu einer globalen Isometrie fortgesetzt werden kann.

3.1.6 Satz

Folgende Aussagen sind für eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit M äquivalent:

1.) M ist lokal symmetrisch

2.) M ist symmetrisch

3.) Jede lineare Isometrie
$$L : T_pM \longrightarrow T_qM$$
die den Krümmungstensor erhält, d. h.
$$L^*\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_p$$
wird durch eine eindeutig bestimmte globale Isometrie induziert.

3.1.7 Korollar

Die universelle Überdeckung einer lokal symmetrischen Mannigfaltigkeit ist symmetrisch.

3.1.8 Bemerkung

Noch allgemeiner kann man durch den Beweis von Satz 3.1.3 Folgendes zeigen:
Ist $L : T_pM \to T_qN$ eine lineare Isometrie von Tangentialräumen lokal symmetrischer Mannigfaltigkeiten mit der Eigenschaft
$$L^*\mathcal{R}_q = \mathcal{R}_p$$
so ist
$$\begin{aligned} f : B_p(r) &\longrightarrow B_q(r) \\ x &\longmapsto \exp_q \circ L \circ \exp_p^{-1}(x) \end{aligned}$$
eine Isometrie für $r > 0$ klein genug.

3.1.9 Lemma

Sind M, N lokal symmetrisch, M einfach zusammenhängend und N vollständig, so lässt sich die Abbildung f von obiger Bemerkung fortsetzen zu folgender lokalen Isometrie
$$f : M \longrightarrow N$$

Beweis

1.) Setze $f : B_p(r) \to B_q(r)$ durch Wege $c : p \mapsto x$ fort für alle $x \in M$

2.) Zeige, dass die Fortsetzung $f(x)$ ausschließlich vom Homotopietyp des Weges c abhängt

3.) Da M einfach zusammenhängend ist, ist die Fortsetzung von f wohldefiniert

Zu 1.)
Setze $I = \{s \in [0,1] \mid f$ kann fortgesetzt werden auf $c([0,s])\}$. Dann ist I offen in $[0,1]$, da der Definitionsbereich von f immer offen ist. Es bleibt also die Abgeschlossenheit zu zeigen, d. h.

$$S := \sup I \in I$$

Sei $(s_i)_i \in I$ eine gegen S konvergente Folge. Dann konvergiert

$$f(c(s_i)) \to q$$

da f lokal isometrisch ist. Setze $r > 0$ so, dass $B_{c(s)}(3r), B_q(3r)$ normale Nachbarschaften sind. Dann existiert ein $s \in I$, sodass

$$c(s) \in B_{c(S)}(r) \text{ und } f(c(s)) \in B_q(r)$$

Dann setzt sich aber f fort auf $B_{c(S)}(2r)$, ergo liegt $S \in I$.

Zu 2.)
Ähnliches Argument. Sei $H : [0,1]^2 \to M$ eine Homotopie und f^s die Fortsetzung entlang $H(s,[0,1])$. Setze

$$I = \{s \in [0,1] \mid \forall \alpha \in [0,s] : f^\alpha(1) = f^s(1)\}$$

und zeige analog, dass I abgeschlossen ist. □

3.1.10 Proposition

Ist M symmetrisch, so ist M vollständig.

3.1.11 Definition

Eine Isometrie f von M heißt **Transvektion**, falls ein Punkt $p \in M$ und ein Weg $c : p \mapsto f(p)$, sodass $\mathsf{d}f_p : T_pM \to T_{f(p)}M$ der Paralleltransport entlang c ist.

3.1.12 Proposition

Ist M symmetrisch, so existiert für jedes Paar von Punkten $p, q \in M$, eine Transvektion, die p auf q abbildet.

3.1.13 Korollar

Ist M symmetrisch, so ist jede vollständige Geodäte ist der Orbit einer 1-Parameter Untegruppe von $Isom(M)$.

Beweis
Sei $\gamma : \mathbb{R} \to M$ vollständig geodätisch. Definiere

$$\tau_s := s_{\gamma(\frac{s}{2})} \circ s_{\gamma(0)}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow Isom(M) \\ s &\longmapsto \tau_s \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus. □

3.1.14 Korollar

Sei M symmetrisch.
Bezeichnet $G = Isom(M)^0$ die Zusammenhangskomponente der Eins in $Isom(M)$, so agiert G transitiv auf M.
Ferner ist die Untergruppe

$$K = Stab_G(m) = \{g \in G \mid gm = m\}$$

kompakt. Ferner ist folgender Homöomorphismus gegeben

$$\begin{aligned} G/K &\longrightarrow M \\ gK &\longmapsto g.m \end{aligned}$$

Fasst man G/K als Lie-Gruppe auf, so handelt es sich hierbei sogar um einen Diffeomorphismus.

3.1.15 Beispiel

Es sei M die Mannigfaltigkeit der symmetrisch positiv definiten reellen $n \times n$-Matrizen. M besitzt dann eine Dimension von $\frac{n(n+1)}{2}$.
Für $p \in M$ gilt

$$\begin{aligned} T_pM &= \mathrm{Symm}(n, \mathbb{R}) \\ g_p(A, B) &= spur(p^{-1}Ap^{-1}B) \end{aligned}$$

Die Symmetrie gestaltet sich nun durch

$$\begin{aligned} S_p : M &\longrightarrow M \\ A &\longmapsto pA^{-1}p \end{aligned}$$

$GL(n, \mathbb{R})$ agiert auf M durch

$$g.p := gpg^T$$

$G = GL(n, \mathbb{R})^+, K = SO(n, \mathbb{R})$

3.1.16 Definition

Eine **Lie-Algebra** V ist ein reeller Vektorraum mit einer Bilinearform

$$[,] : V \otimes_{\mathbb{R}} V \longrightarrow V$$

mit

1.) $[X, Y] = -[Y, X]$

2.) **Jacobi-Identität**: $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

3.1.17 Bemerkung

Sei G eine Lie-Gruppe, setze

$$\mathfrak{g} = T_1G$$

Dann ist $\mathfrak{g}$ isomorph zum Raum der **links-invarianten Vektorfelder** auf G, d. h. der Vektorfelder X, für die gilt

$$X(gp) = \mathsf{d}g_{|p}X(p)$$

Ergo können wir die Lie-Klammer der Vektorfelder auf $\mathfrak{g}$ einschränken, wodurch $\mathfrak{g}$ zu einer Lie-Algebra wird.
Für $x \in \mathfrak{g}$ definieren wir die **Adjunktion** durch

$$\begin{aligned} ad(x) : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ v &\longmapsto [x, v] \end{aligned}$$

Und die **Killing-Form** durch

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ x \otimes y &\longmapsto spur(ad(x) \circ ad(y)) \end{aligned}$$

Beachte, für jedes $x \in \mathfrak{g}$ existiert genau ein glatter Gruppenmorphismus

$$\Theta : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

sodass $\Theta'(0) = x, \Theta(0) = 1$.
Wir definieren hierdurch folgende Exponentialabbildung

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto \Theta(1) \end{aligned}$$

Dann existiert ein Zusammenhang auf G, sodass exp der Riemannschen Exponential-Abbildung entspricht und jedes Θ eine Geodäte ist.
Ist $h \in G$, so definiere

$$\begin{aligned} Int(h) : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto hgh^{-1} \end{aligned}$$

und die **adjungierte Aktion** durch

$$Ad(h) := \mathsf{d}Int(h)_{|1} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(Ad(h)x) &= h \exp(x) h^{-1} \\ Ad(\exp(x)) &= e^{ad(x)} \end{aligned}$$

3.1.18 Bemerkung

Ist $G = GL(n, \mathbb{R})$, so ist $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(x, y) = c \cdot spur(xy)$ und $[x, y] = xy - yx$.

3.1.19 Bemerkung

Sei M ein symmetrischer Raum, $G = Isom(M)^0$. Definiere folgende Involution

$$\begin{aligned} \sigma : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto s_m g s_m \end{aligned}$$

Dann ist auch folgende Abbildung eine Involution für $m \in M$

$$Ad(s_m) = \mathsf{d}\sigma_{|1} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

Wir erhalten dann folgende **Aktionszerlegung**

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= K \oplus P \\ &= \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathsf{d}\sigma_{|1} x = x\} \oplus \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathsf{d}\sigma_{|1} x = -x\} \end{aligned}$$

Dabei ist $K \subset \mathfrak{g}$ eine Lie-Subalgebra.