Beweis $\Longleftarrow$ von

$$G \text{ frei } \iff G \curvearrowright_{\text{frei}} Baum$$

$$S' := \{g_e \in G \mid e \text{ wesentlich für } T_0\}$$

wesentlich heißt

$$e = \{u, v\}, u \in T_0, v \notin T_0$$

g_e so, dass $g_e^{-1} v \in V(T_0)$

2.Schritt Zeige S' erzeugt G:

$g \in G$, Ziel: finde Elemente in S' so, dass g Produkt dieser ist.

Wähle Ecke $u \in T_0$, weil T zusammenhängend, existiert Kantenpfad p in T von u nach $g.u$.
Weil $V(T) = \bigcup_{g\in G} V(g.T_0)$, weil T_0 aus jedem G-Orbit eine Ecke enthält.
$\Longrightarrow p$ durchläuft verschiedene Kopien $g_0T_0, ..., g_nT_0$ von T_0 mit $g_0 = 1, g_n = g$.
Es ist $g_{j+1} \neq g_j$ für $\forall j : k_0 \leq j \leq k_1$, wenn p reduziert.
$\Rightarrow g_jT_0$ und $g_{j+1}T_0$ sind für alle j wie oben verbunden.
$g_j^{-1}e_j$ ist wesentliche Kante für T_0; $p = e_0...e_{n-1}$
Setze $s_j := g_j^{-1}g_{j+1} \in S'$.
Dann $g = g_0 \cdots g_{k_0}^{-1} g_{k_0+1} g_{k_0+1}^{-1} \cdots g_n = s_0 \cdots s_n \in \langle S' \mid \rangle$

3.Schritt $\exists S \subset S'$, das G frei erzeugt.
aus 1.Schritt folgt, dass S' in Paare aufspaltet $\{s, s^{-1}$; für S wähle ein Element pro Paar aus.
Es reicht zu zeigen: Cay(G,S) enthält keine Kreise.
Annahme: Sei $g_0, \ldots, g_{n-1}, g_n = g_0$ Kreis in Cay(G,S)
Setze $s_j := g_j^{-1}g_{j+1} \forall j = 0, \ldots, n-1$
Es sei $s_j \in S \forall j$ (OE: S so wählbar)
Sei e_j wesentliche Kante zw. T_0 und s_jT_0
Jede Kopie von T_0 ist zusammenhängender Teilbaum, daher können wir die Ecken der Kanten g_je_j und $g_js_je_{j+1} = g_{j+1}e_{j+1}$, die in $g_{j+1}T_0$ liegen durch einen eindeutigen, reduzierten Weg in $g_{j+1}T_0$ verbinden.
Weil $g_n = g_0$, ist der erhaltene Weg geschlossen.
Starten und Enden in selber Kopie vom Baum T_0. Widerspruch zu T ist Baum.

Korollar 3.15 (Satz von Nielsen-Schreier)

Untergruppen freier Gruppen sind frei.

Beweis Eine Untergruppe wirkt frei auf den Cayleygraphen seiner Obergruppe.

Korollar 3.16

F freie Gruppe, $Rang(F) = n$, $G < F$ UG vom Index k. Dann ist G frei und vom Rang $k(n-1) + 1$. Insbesondere sind Untergruppen vom endlichen Index in freien Gruppen vom endlichen Index endlich erzeugt.

Beweis S freies EZS von F, $\Gamma := Cay(G,S)$, $G, F \curvearrowright_{frei} \Gamma$ durch Linksmult.

Bew 3.11: Rang(G) $= \frac{1}{2}E$, E $= \#$ wesentlicher Kanten für Fund.-Baum T_0 von $G \curvearrowright T$

Weil $|F : G| = k$ hat T_0 genau k Ecken.

Es gilt $d_T(v) = 2n$ für alle v in T.

Dann: (1) $\sum_{v \in V(T_0)} d_T(v) = k2n$, andererseits ist T_0 endlicher Baum mit k Ecken, also hat T_0 $k-1$ Kanten.

In (1) werden Kanten doppelt gezählt, d.h.

$$\sum_{v \in V(T_0)} d_T(v) = 2(k-1) + E$$

$$1/2E = k(n-1) + 1 = RangG$$

Korollar 3.17

F frei vom Rang $m \geq 2$, und $n \in \mathbb{N}$, Dann gibt es UG von F, die frei und vom Rang n ist.

3.18 Ping-Pong Lemma (Felix Klein)

G Gruppe, erzeugt von $S = \{a, b\}$, wobei a, b unendliche Ordnung.
$G \curvearrowright X$, X Menge, so dass für $\emptyset \neq A, B \subset X$ mit $B \not\subset A$ gilt:

$$a^n B \subset A \text{ und } b^n A \subset B, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

dann ist G frei von S erzeugt.

Beweis Zu zeigen $G \cong F_{red}(a,b)$ via Isom, der S festhält.

UAE: $\phi : F_{red}(a,b) \longrightarrow G$ mit $\phi|S = id$, dann ist ϕ surjektiv.

Zu zeigen: ϕ injektiv.

Annahme: ϕ nicht injektiv, dann existiert $w \in F_{red}(S)$ mit $\phi(w) = 1$

4 Fälle:

1.Fall w beginnt mit nichttriv. Potenz von a und endet mit einer solchen:

$$w = a^{n_0} b^{m_0} ... b^{m_k} a^{n_{k+1}}, n_i, m_i \in \mathbb{Z} - 0$$

Nun ist $B = 1.B = \phi(w)B = a^{n_0} b^{m_0} ... b^{m_k} a^{n_{k+1}}.B \subset A$. Widerspruch!

2.Fall w beginnt mit b und endet mit b. konjugiere mit a: 1.Fall

3.Fall w beginnt mit a und endet mit b. Konjugiere mit a^k für k groß genug

3.19 Beispiel

freie UG von SL(2,Z)

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \begin{Bmatrix} a & b \\ c & d \end{Bmatrix} \mid det = 1 \Bigg\}$$

Dann ist $G := \langle M_1, M_2 \mid \ \rangle$ frei vom Rang 2, wobei

$$M_1 = \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix}, M_1 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

Beweis Betrachte lineare Wirkung von $SL(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$(M,(x,y)) \longmapsto M.(x,y)$$

$\forall n \in \mathbb{Z} - 0$ und $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $M_1^n.(x,y) = (x + 2ny, y)$

Sei $A = \{(x,y) \mid |x| > |y|\}$, $B = \{(x,y) \mid |y| > |x|\}$, $B \not\subset A$

Dann $|x + 2ny| \geq |2ny| - |x| > |2y| - |y| = |y|$, also $M_1^n B \subset A$, analog für M_2.

3.18 zeigt: G frei.

Motivation Gruppe -> Geometrie Ziel: Konzept finden, welches Cayleygraphen einer festgelegten Gruppe als gleich (äquivalent) auffasst

0.0.1 Ein paar Definitionen

Seien $(X,d), (Y,d)$ metrische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung.

- f heißt eine **isometrische Einbettung**, falls für alle $x, y \in X$ gilt
$$d(f(x), f(y) = d(x,y)$$
- f heißt eine **Isometrie**, falls f eine surjektive isometrische Einbettung ist.
- X und Y heißen isometrisch, falls eine Isometrie $X \to Y$ existiert.
- f heißt eine **Bilipschitz-Einbettung**, falls eine reelle Konstante $c \geq 1$ existiert, sodass für alle $x, y \in X$ gilt
$$\frac{1}{c} d(x,y) \leq d(f(x), f(y) \leq cd(x,y)$$
- f heißt eine **Bilipschitz-Äquivalenz**, falls f eine surjektive Bilipschitz-Einbettung ist.

0.0.2 Bemerkung 4.4

- Isometrie -> Bil.Äqu -> QI
- Umkehrung i.A. nicht richtig
- Quasi-Isometrisch sind (R,d) und (Z,d) und $(2Z,d)$ mit den euklidischen Metriken. Die Inklusionen sind quasi-isom. Einbettungen, aber keine Bilipschitzäqu., weiter sind
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Z} & x &\longmapsto \lfloor x \rfloor \\ g : \mathbb{Z} &\longrightarrow 2\mathbb{Z} & x &\longmapsto \{x, x-1\} \cap 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

0.0.3 Quiz 4.5

- Sind $\mathbb{Z}$ und $2\mathbb{Z}$ bilipschitz-äquivalent?

0.0.4 4.6 Durchmesser metrischer Räume

Jeder nichtleere, metrische Raum (X, d) mit endlichen Durchmessern

$$diam(X) := \sup_{x,y \in X} (d(x, y))$$

ist quasi-isometrisch zu einem Punkt.

Beweis Setze $D := diam(X)$, sei $* \in X$ beliebig. definiere die Abbildung

$$f : X \longrightarrow X, x \longmapsto *$$

Dann gilt

$$d(f(x), f(y)) - D \leq d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(y)) + D$$

Daraus folgt auch, dass $d(f^2(x), id(x)) \leq D$, ergo sind X und $*$ quasi-isometrisch. $\square$

0.0.5 Korollar

Ist X beschränkt und Y quasi-isom. zu X, so ist auch Y beschränkt.

0.0.6 4.17 Satz

X, Y metrische Räume,$f : X \to Y$ eine quasi-isometrische Einbettung. Dann gilt:

$$f \text{ Quasi-Isometrie } \iff f \text{ hat quasi-dichtes Bild in } Y$$

d.h. $f(X) \subset Y$ ist δ-dicht für $\delta \geq 0$, d.h.

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : d(y, f(x)) \leq \delta$$

Beweis f Quasi-Isometrie, dann existiert quasi-Inverse $g : Y \to X$ und somit $\delta > 0$, s.d. $\forall y \in Y$ gilt

$$d((f \circ g)(y), y) \leq \delta$$

ergo quasi-Dichtes Bild.

Andere Richtung: f sei (C,D)-q.i.Einbettung mit δ-dichtem Bild, wir konstruieren quasi-Inverse via Auswahlaxiom
Setze $\lambda := \max\{C, D, \delta\} \geq 1$, dann gilt

- $\forall x, y \in X : \frac{1}{\lambda} d(x, y) - \lambda \leq d(f(x), f(y) \leq \lambda d(x, y) + \lambda$
- $\forall y \in Y \exists x \in X : d(f(x), y) \leq \lambda$

Setze $g : Y \to X, y \longmapsto x_\lambda$; wähle x_λ so, dass $d(f(x_\lambda), y) \leq \lambda$.

Zu Zeigen: g ist quasi-invers zu f.

$$\forall y \in Y : d(f(g(y)), id(y)) = d(f(x_\lambda), y) \leq \lambda$$

$$\forall x \in X : d(g(f(x)), id(x)) = d(x_{f(x)}, x) \leq \lambda \cdot d(f(x_{f(x)}), f(x)) + \lambda^2 \leq 2\lambda^2$$

Noch zu zeigen: g ist quasi-isometrische Einbettung

Seien dazu $y, y' \in Y$

$$d(g(y), g(y')) = d(x_y, x_{y'}) \leq \lambda d(f(x_y), f(x_{y'})) + \lambda^2$$

$$\leq \lambda \left(d(f(x_y), y) + d(y, y') + d(y', f(x_{y'}))\right) + \lambda^2$$

$$\leq \lambda^2 + \lambda d(y, y') + \lambda^2 + \lambda^2$$

Setze $C = \lambda, D = 3\lambda^2$

Für $y, y' \in Y$ ist noch zu zeigen

$$d(g(y), g(y') \geq \frac{1}{C} d(y, y') - D$$

4.18 Definition: Geodäten

Eine **Geodäte** ist ein eine isometrische Einbettung $\gamma : [0, L] \to X$ eines Intervalls in einen metrischen Raum.

4.20 Definition Quasigeodäte

Eine (C, D)-**Quasigeodäte** für $C \geq 1, D \geq 0$ ist eine (C, D)-Quasiisometrische Einbettung von $[0, L]$ nach X.

X heißt (C, D)-quasigeodätisch, falls $\forall x, y \in X$ eine verbindende Quasigeodäte

$$\gamma : [0, d(x, y)] \to X$$

existiert.

4.22 Satz von Schwarz-Milner

G Gruppe, X metr. Raum, $G \curvearrowright X$ durch Isometrien. Weiter gelte: X quasi-geod. für (C, D) mit $D > 0$ $\exists B \subset X$ beschränkt mit $\bigcup_{g \in G} gB = X$ $S := \{g \in G \mid gB' \cap B' \neq \emptyset\}$ ist endlich mit $B' := \{x \in X \mid \exists y \in B : d(x, y) \leq 2D\}$

Dann gilt: G wird von S erzeugt $\forall x \in X$ ist $(G, d_S) \to (X, d); g \mapsto g.x$ eine quasi-Isometrie.

Beweis ZZ: S erzeugt G

Sei $g \in G$, $x \in B$. Dann existiert (C, D)-Quasigeodäte von x nach $g.x$, $\gamma : [0, d(x, g.x)] \to X$.

Setze $n := \lceil \frac{CL}{D} \rceil$ und für alle $j = 0, \dots, n-1$ Setzte $t_j = \frac{jD}{C}$ und $t_n := L$ $x_j := \gamma(t_j)$ für $j = 0, \dots, n$

Die Translate von B unter G überdecken X, also existiert für alle x_j ein g_j, s.d. $x_j \in g_j.B$, $g_0 = 1$, $g_n \in g$

Beh.: $\forall j = 1, \dots, n$ ist $s_j := g_{j-1}^{-1} g_j \in S$ Bew.: γ Quasi-Geodäte $d(x_{j-1}, x_j) \le C|t_{j-1} - t_j| + D \le C\frac{D}{C} + D = 2D$ also $x_j \in B_{2D}(g_{j-1}.B) \overset{G \curvearrowright X isom.}{=} g_{j-1}.B_{2D}(B) = g_{j-1}.B'$ andererseits ist $x_j \in g_j.B \subset g_j.B'$ also $g_j.B \cap g_{j-1}.B' \neq \emptyset$ also $g_{j-1}^{-1} g_j \in S$ $\square$

Also $g = g_n = g_{n-1}(g_{n-1}^{-1} g_n) = g_{n-1} s_n = g_{n-2}(g_{n-2}^{-1} g_{n-1}) s_n = s_1 \dots s_n \in \langle S \mid \rangle_G$

ZZ. $G \sim_{QI} X$:

Wir zeigen $\forall x \in X : \phi : G \to X, g \mapsto g.x$ quasi-isom. Einbettung mit quasi-dichtem Bild.

OE: $x \in B$, weil $\bigcup_{g \in G} g.B = X$ und $G \curvearrowright X$ isom., sonst ersetze B durch passendes Translat.

Sei $x' \in X$. Dann gibt es $g \in G$ mit $x' \in g.B$ $d(x', \phi(g)) = d(x', gx) \le diam(gB) = diam(B) = \delta$ $\Longrightarrow$ δ-dichtes Bild

Noch ZZ: qi. Einbettung

Betrachte (C, D)-quasi-geodäte $\gamma : [0, L] \to X$ von x nach $g.x$ Dann gilt $d(\phi(e), \phi(g)) = d(x, g.x) = d(\gamma(0), \gamma(L)) \ge \frac{L}{C} - D \ge \frac{1}{C}(\frac{D(n-1)}{C} D) = \frac{D}{C^2} n - \frac{D}{C^2} - D \ge \frac{D}{C^2} d_S(e, g) - (\frac{D}{C^2} + D)$

Abschätzung nach oben: Setze $n = d_S(e, g)$

$$d(\phi(e), \phi(g)) = d(x, g.x) \le d(x, s_1.x) + d(s_1.x, s_1 s_2.x) + \dots + d(s_1 \dots s_{n-1}.x, g.x) \overset{G wirkt isom.}{=} d(x, s_1.x) + d(x, s_2.x) + \dots + s($$

wähle für (C_0, D_0)-qi Einbettung die Konstanten $C_0 = \max \left\{ C^2/D, 2(\dots) \mid \right\}$ $D_0 = D/C^2 + D$ allgemeiner Fall folgt aus der Linksinvarianz von d und d_S. $\square$

0.0.7 4.23 Definition

Ein metrischer Raum X heißt **eigentlich**, falls alle abgeschlossene Bälle von endlichem Radius kompakt sind.
Eine Wirkung $G \curvearrowright X$ ist **eigentlich**, wenn für alle kompakten Teilmengen $K \subset X$, die Menge

$$\{g \in G \mid g.K \cap K \neq \emptyset\}$$

endlich ist.
Manchmal sagt man auch **eigentlich diskontinuierlich**.

0.0.8 Bemerkung

f eigentlich, wenn Urbilder kompakter Mengen wieder kompakt sind.
Hier $G \curvearrowright X$ eigentlich

$$\Longleftrightarrow G \times X \longrightarrow X$$

$$(g, x) \longmapsto g.x$$

ist eigentliche Abbildung. (Wobei man auf G die diskrete Topologie betrachtet.)

0.0.9 4.24 Beispiel

- $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ via Translation ist eigentlich.
- $G \curvearrowright X$ eigentlich $\Longrightarrow Stab_G(x)$ ist endlich für $x \in X$, d.h. G-Bahnen haben keinen Häufungspunkt
- $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2$ Rotation um Ursprung um Winkel mal z
  $(0,0)$ ist Fixpunkt, also kann diese Wirkung nicht eigentlich sein.
- $\mathbb{Z} \curvearrowright S^1$ via Rotation um α ist nicht eigentlich, da S^1 kompakt.
- $unendlicheGruppe \curvearrowright kompakterRaum$ ist nicht eigentlich
- G erzeugt von S, $|S| < \infty$, dann ist $G \curvearrowright Cay(G,S) =: \Gamma$ eigentlich.

  Beweis $K \subset \Gamma$ kompakt $\Longrightarrow diam(K) < \infty \Longrightarrow \forall g \in G$ mit $d_S(e,g) = |g|_S > diam(K)$ gilt: $K \cap g.K = \emptyset$, sonst $\exists x \in K \cap g.K \Longrightarrow x \in K$ und $g^{-1}.x \in K$ mit $d_S(x, g^{-1}.x) = |g^{-1}|_S = |g|_S$ ein Widerspruch
  Insbesondere nur endlich viele g mit $|g|_S \leq D$. $\square$

0.0.10 4.25 Erinnerung

X topologischer Raum

- X **hausdorffsch**, g.d.w.

$$\forall x \in X \exists U_x \subset_O, x \in U_x, U_y \subset_O, y \in U_y : U_x \cap U_y = \emptyset$$

- X **lokal kompakt**, g.d.w. Für alle $x \in X$ enthält jede offene Umgebung von x eine kompakte Umgebung von x.
- X metrischer Raum $\Longrightarrow$ hausdorffsch
- eigentliche metrische Räume $\Longrightarrow$ lokal kompakt

0.0.11 4.26 Bemerkung/Lemma: Quotientenräume

(X,d) metrischer Raum, eigentlich

$$\alpha : G \to Isom(X) \text{ Wirkung von G auf X}$$

$$p : X \to X/G \text{ natürliche Projektion auf Quotienten}$$

Setze $f(x,y) := \inf\{d(x,y)|p(x) = x, p(y) = y\}$ für $x, y \in X/G$
Dann gilt:

1. $inf = min$, d.h. $\exists x, y \in X : f(x,y) = d(x,y) \forall x, y \in X/G$
2. f ist Metrik auf X/G

Beweis Seien $z, w \in X/G$, $x = p^{-1}(w)$; setze $R = f(z, w)$
Annahme: inf $\neq$ min
Dann existieren unendliche Folgen (x_n, y_n) mit $d(x_n, y_n) \to R$ und $p(x_n) = w, p(y_n) = z$.
Weil $p(x_n) = p(x)$ gilt: $\exists h_n \in G$ mit $h_n x_n = x$
$\Longrightarrow d(h_n x_n, h_n y_n) = d(x_n, y_n)$, da α isom.
daraus folgt x_n kann durch konstante Folge x und y_n durch $y_n h_n$ ersetzt werden.
Daraus folgt $y_n \in B_{R+\epsilon}(x_n)$, $p(y_n) = z$
Weil $B_{R+\epsilon}(x)$ kompakt ist, hat $(y_n)_n$ einen HP in $B_{R+\epsilon}(x)$. Widerspruch zu 4.24

f nichtneg. und symmetrisch, da d so.
$f(z, w) = 0 \Longrightarrow \exists x, y : d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y \Longrightarrow z = w$
Dreiecksungleichung: $u, v, w \in X/G$, wähle $x, y \in X$, s.d. $d(x, y) = f(u, v)$, $p(x) = u, p(y) = v$.
Wähle y_1 mit $d(x, y_1) = f(u, v)$, $p(y_1) = v$; y_2, $p(y_2) = v$ und $d(z, y_2) = f(v, w)$
weil $y_1, y_2 \in p^{-1}(v)$ existiert g mit $g.y_2 = y_1$
$\Longrightarrow f(u, v) + f(v, w) = d(x, y_1) + d(y_2, z) = d(x, g.y_2) + d(g.y_2, g.z) \geq d(x, g.z) \geq f(u, w)$ □

0.0.12 4.27 Definition

Eine Gruppenwirkung $G \curvearrowright X$ heißt kokompakt, wenn X/G kompakt.
Betrachte auf X/G Topologie, die durch Quotientenmetrik f induziert wird, wenn wir mit metrischen Raum gestartet sind.

0.0.13 4.28 Beispiele

- $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}^2$ durch Translation längs x-Achse.
  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ = Zylinder ist nicht kompakt, also keien kokompakte Wirkung.

- X kompakt, wegzusammenhängend top. Raum, $\widetilde{X}$ universelle Überlagerung.
  $\pi_1(X) \curvearrowright \widetilde{X}$ durch Decktransformationen ist kokompakt und eigentlich
  $X = \widetilde{X}/\pi_1(X)$

- $G \curvearrowright Cay(G, S) =: X$ mit kombinatorischer Metrik
  $n := |S|$, $X/G = R_n$, Rose mit n Blättern, kompakt

0.0.14 4.29 (topologischer) Satz von Schwarz-Milner

G wirke eigentlich, kokompakt, durch Isometrien auf einen nichtleeren, eigentlichen, geodätischen metrischen Raum (X, d) , dann gilt G endlich erzeugt und für alle $x \in X$ ist

$$G \longrightarrow X, g \longmapsto g.x$$

eine Quasi-Isometrie.
Wenn $G \curvearrowright X$ eigentlich, kokompakt und durch Isometrien, so sagt man auch G wirkt **geometrisch**.

Beweis Suche B.

- nach Vorr. ist X $\forall \epsilon > 0$, $(1, \epsilon)$-quasi-geodätisch.
- Sei für bel. $x_0 \in X$: $B := \{x \in X \mid d(x, x_0) \leq D\}$;
  $D := diam(X/G) < \infty$, da $G \curvearrowright X$ kokompakt.

Dann gilt: $\bigcup_{g \in G} g.B = X$, $B' := B_{2\epsilon}(B)$ endlicher Radius, also kompakt, da X eigentlich.
$G \curvearrowright X$ eigentlich, also $\{g \in G \mid g.B' \cap B' \neq \emptyset\}$ endlich.
4.22 zeigt Beh.$\square$

0.0.15 Korollar

Sei $H < G$, G endlich erzeugt mit $(G : H) < \infty$. Dann ist H endlich erzeugt und quasi-isom. zu G.

Bew: S sei endl. EZS von G
$\Longrightarrow H \curvearrowright Cay(G, S) =: \Gamma$ mit Wortmetrik d_S isom., eigentlich, kokompakt.
Sei B endliches Vertretersystem von G/H, existiert, weil Anzahl Nebenklassen von H in G endlich ist.
Dann ist $HB = G$
$B' := B_2(B)$ endlich, $\{h \in H \mid h.B' \cap B' \neq \emptyset\}$ endlich.
Schwarz-Milner: H endlich erzeugt und $H \sim_{qi} \gamma \sim_{qi} G\square$

0.0.16 4.31 Definition

1. Zwei Gruppen G, H heißen **kommensurabel**, wenn es Untergruppen $G' < G, H < H'$ mit endlichem Index gibt, s.d. $G' \cong H'$.
2. Zwei Gruppen G, H heißen **schwach kommensurabel**, wenn es Untergruppen $G' < G, H < H'$ mit endlichem Index gibt, s.d. normale Untergruppen $N \lhd H', M \lhd G'$ mit

$$H'/N \cong G'/M$$

0.0.17 Bemerkung

$\sim_C, \sim_{WC}$ sind ÄQ (kommensurabel, schwach ...) $G \sim_C H \Longrightarrow G \sim_{QI} H (falls G endlich erzeugt)$

0.0.18 Korollar

Sei G eine Gruppe und

1. $G' < G$ eine UG mit endlichem Index. Dann gilt:

$$G' \text{ endlich erzeugt } \Longleftrightarrow G \text{ endlich erzeugt}$$

   Falls G, G' endlich erzeugt, dann $G \sim_{QI} G'$

2. $N \lhd G$ ein endliche normale Untergruppe. Dann gilt:

$$G/N \text{ endlich erzeugt } \Longleftrightarrow \text{G endlich erzeugt}$$

   Falls G, N endlich erzeugt, dann $G/N \sim_{QI} G$

Insbesondere: Ist G endl. erz. und $H \sim_W CG$, dann ist H endlich erzeugt und $G \sim_Q IH$

0.0.19 Bemerkung

Man kann zeigen, dass nicht alle qi Gruppen kommensurabel sind. Z.Bsp.: $(F_3 \times F_3) * F_3 \sim_Q I(F_3 \times F_3) * F_4$, aber die Gruppen sind nicht kommensurabel (Eulercharakteristik)

0.0.20 4.33 Korollar

Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand mit Riemannscher Metrik und M' die Riem. universelle Überlagerung. Dann gilt:

1. $\pi_1(M)$ endl. erz.
2. $\forall c \in M'$ ist $\pi_1(M) \to M'$, $g \longmapsto g.x$ eine QI

Beweis Zeige mit Standard-Argumenten der Geometrie und alg. Topo, dass M' eig. und geod. $\pi(M) \curvearrowright M'$ eig., kokompakt und durch Isom.

0.1 Quasi-Isometrie-Invarianten

0.1.1 Definition

Sei V eine menge. Eine **QI-Invariante** mit Werten in V ist eine Abb.

$$I : X \longrightarrow V$$

$X \subset \{G : Gruppe \mid Gendl.erz\}$, s.d. gilt

$$G \sim_Q IH \Longrightarrow I(G) = I(H)$$

0.1.2 Bemerkung

1. QI-Invarianten sind hilfreich, um $G \not\sim_Q IH$ zu zeigen
2. i.A. ist es nicht möglich zu entscheiden, ob $G \sim_Q IH$ gilt

0.1.3 Beispiel

1. $V = \{1\}$, dann keine Infos
2. $V = \{0, 1\}$, $I(G) = 1, Gunendl., sonst0$ ist QIInv.
3. $V = \mathbb{N}$, $I(F) = rangF$, F endl. erz. freie Gruppe, ist keine QIInv., weil $F_n \sim_Q IF_m$ für $n, m \geq 2$

0.1.4 Definition

Eine Eigenschaft P von endl. erz. Gruppen heißt **geometrisch**, wenn gilt: G hat P und H qi G, dann H hat P

0.1.5 Beispiel

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ ist die Eigenschaft **virtuell** $\mathbb{Z}^n$ zu sein eine geom. ES.

2. **endlich sein** ist geometrisch.

3. **endlich erzeugt und virtuell frei** ist geometrisch ES.

4. **abelsch** ist kein geom. ES.

1 bis 3 ist schwer zu beweisen, wir zeigen:

1. **endlich präsentiert** ist geom. ES.

2. Wachstum von Gruppen liefert geom. ES.

3. einige Ränder/Enden von einigen Gruppen liefert geom. ES.

0.1.6 Einschub: Simplizialkomplexe und CW-Komplexe

Definition Ein (abstrakter) **Simplizialkomplex** Δ ist eine Menge von Teilmengen einer Menge V, s.d. gilt:

1. $\{v\} \in \Delta$ für alle $v \in V$

2. $\emptyset \neq A \subset B \in \Delta \Longrightarrow A \in \Delta$

Dimension von $a \in \Delta$ ist $dim(a) := |a| - 1$ Dimension von Δ ist $dim(\Delta) = \sup_{a \in A} dim(a)$ Schreibe: a ist K-Simplex, falls $dim(a) = K$

Beispiel

1. $V = \{1, 2, 3\}, \Delta = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$ ist Simplizialkomplex für V

2. $V = \{1, 2, 3\}, \Delta = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ist kein Simplizialkomplex für V

3. ungerichtete, einfache Graphen sind Simplizialkomplexe

4. V Menge, $\Delta = P(V) - \{\emptyset\} =: \langle V \mid \rangle$ ist Simplizialkomplex;

Allgemeiner: CW-Komplexe Ein CW-Komplex ist ein top. Raum, der schrittweise aus sog. Zellen zusammengeklebt worden ist.

Definition Sei $X^{(0)} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Menge, diese Menge besteht aus den sogenannten **0-Zellen**.
Das n**-Skelett** $X^{(n)}$ entsteht aus den $X^{(n-1)}$ durch Ankleben von n-Zellen D_i^n durch stetige Abb.

$$\phi_i : S^{n-1} = \partial D_n \longrightarrow X^{(n-1)}$$

Formal:

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \cup \bigcup_{i \in I} D_i^n / \sim$$

wobei $x \sim \phi_i(x)$ für $x \in \partial D_i^n$
Definiere den CW-Komplex durch $X = \bigcup_{n \geq 0} X^{(n)}$.

Beispiele

1. Graphen mit Doppelkanten sind CW-Komplexe

Definition

G, H schwach kommensurabel, falls $\exists$

$$N \lhd G' \leq G$$

$$M \lhd H' \leq H$$

wobei $N, M, (G' : G), (H' : H)$ endlich sind.

Satz 5.5

G endlich erzeugt von S mit Relationen R, R endlich. Sei H endlich erzeugte Gruppe von S' und $H \sim_{QI} G$, dann gilt: H ist endlich präsentiert und es existiert eine endliche Menge R' von Relationen, s.d.

$$H = \langle S' \mid R' \rangle$$

Idee Baue 2-dim. CW-Komplex, der die Darstellung kodiert (aufbauend auf Cayleygraphen).

Erinnerung $G = \langle S \mid R \rangle = F(S) / \langle R \mid \rangle_G \lhd$
$\exists \pi : F(S) \twoheadrightarrow \langle S \mid R \rangle, kern\pi = \langle R \mid \rangle_G \lhd$

0.1.7 Definition 5.6: Präsentationskomplex

OE: $1 \in S, G \cong \langle S \mid R \rangle$ endlich präsentiert.

$$\Gamma := Cay(G, S) / \sim$$

wobei zwei Kanten e, e' verklebt werden (äquiv. sind), wenn gilt $\delta(e) = \delta(e')$

Der **Präsentations(zwei)komplex** $K = K(S, R)$ von G ist der Quotient K'/G von folgendem 2-Komplex K':

1-Skelett von K' ist Γ
$\forall$ Kreise γ in Γ der Form $\gamma = g^{-1}.(1, s_1, s_1 s_2, \ldots, s_1 \cdots s_n)$ wobei $g \in G, s_1 \cdots s_n \in R$; klebe 2-Zelle an γ um K' zu erhalten.
K' heißt **Cayley-Komplex** von $\langle S \mid R \rangle$

Bemerkung Man kann mittels Seifert-Van Kampen zeigen, dass K' einfach zusammenhängend. K' ist univ. Überlagerung und $G = \pi(K) = \pi(K'/G)$

0.1.8 Beispiel 5.8

1. $G = \mathbb{Z}^2 = \left\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \right\rangle$
   $K' = \mathbb{R}^2, K = T^2$

2. Flächengruppen: $G := \left\langle a, b, c, d \mid a^{-1}b^{-1}abc^{-1}d^{-1}cd \right\rangle$ K' kann aufgefasst werden als Parkettierung von H^2
   K ist Torus mit 2 Löchern, S^2-Fläche von Geschlecht 2

0.1.9 Bemerkung 5.9: alternative Definition von $K(S, R)$

hier K_G, K_G enthält

1. eine 0-Zelle v

2. eine 1-Zelle für jedes $s \in S$, die von v nach v führt, orientiere diese 1-Zellen

3. eine 2-Zelle $d_r \forall r \in R$ verklebt so, dass Kanten $g \to gs$ orientierungserhaltend verklebt werden über $1 \to s_1 \to s_1 s_2 \to \ldots \to s_1 \cdots s_n$, wobei $r = s_1 \cdots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}$

Man kann zeigen $K_G \cong K(S, R)$ und K' ist univ. Überlagerung von K_G

Beweis von 5.5 Setze $G_1 := G, G_2 := H, S_1 := S, S_2 := S', \Gamma = Cay(G_i, S_i)/\sim$ wie in 5.6.

Sei ρ die Länge der längsten Relation in R

- Cayleykomplex K_1' ist einfach zusammenhängend

- Seien $f : \Gamma_2 \to \Gamma_1, f' : \Gamma_1 \to \Gamma 2$ (C, D)-quasi Isometrien (existieren, da $G \sim_{QI} H$)

Sei $\mu > 0$, s.d. $d(f'(f(v)), v) \le \mu \forall v \in \Gamma_2$
Setze $m := \max\{\rho, \mu, C, D \mid \}, M := 3(3m^2 + 5m + 1)$.
Sei K_2' 2-Komplex, den man durch Ankleben von 2-Zellen an jeden Kreis der Länge $\le M$ in Γ_2 erhält.

Sei l Kantenkreis in Γ_2, d.h. $l = (g_1, \ldots, g_n, g_1)$
Betrachte l als Abb. $\partial D \to \Gamma_2$, D ist hier eine 2-Zelle.

Zwischenlemma (Formalisierung der Bemerkung 5.7.2) G erzeugt von S, $R \le Kern\pi$, $\pi : F(S) \to G$; X Komplex den man, durch Ankleben von 2-Zellen an Kantenkreisen geg. durch Wörtern in R an $Cay(G, S)/\sim$ erhält. Dann gilt:

$$X \text{ einfach zusammenhängend } \iff \langle R \mid \rangle_G^{\lhd} = kern(\pi)$$

Beweis von Zwischenlemma: Lemma 8.9 in Bridson-Haefliger, S.135

Wir sind fertig, wenn wir zeigen können:
l besitzt stetige Fortsetzung $l' : D \to K_2'$, d.h. K_2' einfach zusammenhängend.
Seien v_i Urbilder der g_i unter l
Sei $\phi : \partial D \to \Gamma_1$ eine Abb., die v_i auf $f(g_i)$ in Γ_1 und die Kante $\{v_i, v_{i+1}\}$ auf ∂D auf Geodäten von $f(g_i)$ nach $f(g_{i+1})$.
K_1' ist einfach zusammenhängend $\Longrightarrow \phi$ erweitert zu $\phi' : D \to K_1'$

- $\forall x \in D$ definiere Elemente h_x in $V(\Gamma_1) = G$ wie folgt:
  - ist $\phi'(x)$ Ecke, so ist $h_x = \phi'(x)$
  - ist $\phi'(x)$ in einer offenen Kante oder offenen 2-Zelle enthalten, so wähle nächste Ecke der Kante / 2-Zelle als h_x

  Weil ϕ' stetig ist, ist $d(h_x, h_y) \leq \rho \forall x, y$, wenn x, y nah genug aneinander sind in D.
  Es gilt $d(\phi(x), h_x) \leq \frac{1}{2} \forall x \in \partial D$ (alle Kanten in ∂D haben Länge 1).

- Trianguliere D so, dass $v_i \in \partial D$ wieder Ecken von T sind und $\forall$ benachbarten $t, t' \in T$ gilt:

  $$d(h_t, h_{t'}) \leq \rho$$

  Metrik auf D dazu so gewählt, dass D reguläres M-Polygon in R^2 ist

- Setze $l'_{|\partial D} = l$ und $l'(x) = f'(h_x) \forall x \in D^o$

  Behauptung Für alle benachbarten Ecken t, t' in der Triangulierung T gilt:

  $$d(t, t') \leq M/3$$

  Gilt diese Behauptung, so erweitert l' auf D so, dass Kanten in T auf Geodäten in Γ_2 geschickt werden und nach Konstruktion Kreise der Länge $\leq M$ eine 2-Zelle beranden. Daraus würde folgen, dass l' eine stetige Fortsetzung wäre.

  Bew. Beh.: einziger interessanter Fall: $t \in D^o, t' \in \partial D$. Sei t' zwischen v_i und v_{i+1}. Es gilt:

  $$d(l'(t), l'(t')) = d(f'(h_t), l(t')) \overset{ganzviele \triangle - Ugl.en}{\leq} d(f'(h_t), f'(h_t)) + d(f'(h_{t'}), f'(\phi(t'))) + d(f'(\phi(t')) + f'(\phi(v_i))) +$$

0.2 Hyperbolische Gruppen

0.2.1 Oberes Halbebenenmodell von $\mathbb{H}^2$

$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \mid Imz > 0\}$$

Riemannsche Struktur:

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

hyberbolische Norm für Tangentenvektoren $v \in \mathcal{T}_z\mathbb{H}^2 = \mathbb{R}^2$

$$||v||_{hyp} := \frac{||v||_{eukl}}{imz}$$

direkte Definition einer Metrik auf $\mathbb{H}^2$:
Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}^2$ glatte Kurve, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, dann ist die **Länge** von γ definiert durch

$$L_{hyp}(\gamma) := \int_0^1 \frac{||\gamma'(t)||_{eukl}}{y(t)} dt$$

wir definieren die **hyperbolische Metrik** auf $\mathbb{H}^2$

$$d(z,w) := \inf_{\gamma: z \to w, glatt} L_{\mathbb{H}}(\gamma)$$

0.2.2 Beispiel

1. $c : [0,1] \to \mathbb{H}^2, c(t) = i + (a-1)it,\ a \in \mathbb{R}$

$$L_{\mathbb{H}}(c) = \ln(a)$$

   Außerdem gilt für beliebiges $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ von i nach a

$$L_{\mathbb{H}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{y'(t)}{y(t)} = \ln a$$

$$\Longrightarrow d(i,a) = \ln a$$

2. $\gamma(t) = ai + t, a > 0, \gamma'(t) = 1, y(t) = a, x(t) = t$

$$\Longrightarrow L^{\mathbb{H}}(\gamma) = \frac{1}{a}$$

$$L(\gamma) \to 0, a \to \infty$$

$$L(\gamma) \to \infty, a \to 1$$

   Insbesondere ist γ keine Geodäte.

0.2.3 Isometrien

Isometrien von $\mathbb{H}^2$ sind die Möbiustransformationen. Eine **Möbiustransformation** (MT) ist eine Abbildung $\pi : \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \overline{\mathbb{C}}$ definiert durch

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

0.2.4 Eigenschaften

1. MT sind dreifach transitiv auf $\overline{\mathbb{C}}$, d.h. sind $(z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) \in \overline{\mathbb{C}}^3$, dann existiert genau eine MT T mit $T(z_i) = w_i$.

2. MT bilden Kreise bzw. Geraden auf Kreise bzw. Geraden ab.

3. $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\pm I$ operiert auf $\mathbb{H}^2$ durch Möbiustransformationen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} =: A.z$$

$$Im(A.z) = \frac{Imz}{|cz+d|^2} > 0$$

0.2.5 Satz

Die Wirkung von $PSL(2,\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ durch MT ist isometrisch und

$$PSL(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow Isom(\mathbb{H}^2)$$

Beweisskizze:

- Bestimme Erzeuger von $PSL(2,\mathbb{R})$ (Gaußverfahren)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} arg1 & arg2 \\ arg3 & arg4 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}, \right\}$$

  für Injektivität:

  - betrachte: $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} = id_{\mathbb{H}^2}$
  - $\{I, -I\} \triangleleft SL(\mathbb{R}^2)$
  - $T_A(z) = z \Longleftrightarrow A = \pm I$