# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Differente und Diskriminante

### 1.0.1 Definition: Ausartung

Sei $R$ ein kommutativer Ring, $M, N$ seien $R$-Moduln.
Eine Bilinearform $\langle\rangle : M \times N \to R$ heißt **perfekt** oder **nicht ausgeartet**, falls die **Ausartungsräume**

$$M^{\perp} := \{n \in N \mid \forall m \in M : \langle m, n\rangle = 0\}$$
$$N^{\perp} : 0\{m \in M \mid \forall n \in N : \langle m, n\rangle = 0\}$$

verschwinden.

### 1.0.2 Bemerkung

Verschwinden die Ausartungsräume, so sind die natürlichen Abbildungen

$$M \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(N, R) \text{ und } N \longrightarrow \mathsf{Hom}_R(M, R)$$

injektiv. Ist ferner $R$ ein Körper, so sind jene Abbildungen sogar isomorph.
Sind die Ausartungsräume trivial, so existiert zu jeder Basis $b_1, \ldots, b_n$ von $M$ genau eine Basis $b_1^{\vee}, \ldots, b_n^{\vee}$ von $N$, sodass gilt

$$\left\langle b_i, b_j^{\vee}\right\rangle = \delta_{i,j}$$

## 1.1 Komplementärmoduln

### 1.1.1 Bemerkung

Sei $A$ ein Dedekindring, $K = Quot(A)$, $L|K$ eine endliche, separable Körpererweiterung. $B$ bezeichne den ganzen Abschluss von $A$ in $L$.
Die **Spurpaarung**

$$\begin{aligned} Tr : L \times L &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto Tr_{L|K}(xy) \end{aligned}$$

ist $K$-linear und nicht ausgeartet. Es folgt

$$\mathsf{Hom}_K(L, K) \cong L$$

Aber im Allgemeinem ist es falsch, anzunehmen

$$\mathsf{Hom}_A(B, A) \cong B$$

### 1.1.2 Definition: Komplementärmodul

Sei $M \subset L$ ein $A$-Untermodul. Dann heißt

$$D_A(M) := \{x \in L \mid Tr_{L|K}(xM) \subset A\}$$

der **Komplementärmodul** von $M$.

### 1.1.3 Satz

Seien $M \subseteq N \subseteq L$ $A$-Untermoduln, $\mathfrak{b}$ ein gebrochenes Ideal von $L$.

- $D_A(M)$ ist ein $A$-Untermodul von $L$. Ist $M$ ein $B$-Modul, so auch $D_A(M)$.
- $D_A(N) \subset D_A(M)$
- $B \subset D_B(B)$
- Ist $w_1, \ldots, w_n$ eine $K$-Basis von $L$, so gilt
$$D_A(Aw_1 + \ldots + Aw_n) = Aw_1^\vee + \ldots + Aw_n^\vee$$
- $D_A(\mathfrak{b})$ ist ein gebrochenes Ideal von $L$.
- $D_A(\mathfrak{b}) = D_A(B) \cdot \mathfrak{b}^{-1}$
- $D_A(D_A(\mathfrak{b})) = \mathfrak{b}$

### 1.1.4 Definition

Definiere die **Differente** von $B|A$ als das ganze Ideal

$$D_{B/A} := D_A(B)^{-1} \subset B$$

### 1.1.5 Satz

Sei $L = K(\alpha), n = [L : K]$. $f \in K[X]$ sei das Mimimalpolynom von $\alpha$, es bezeichne

$$\frac{f}{X - \alpha} = X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \ldots + b_1 X + b_0$$

Dann ist

$$\frac{1}{f'(\alpha)}, \frac{b_{n-2}}{f'(\alpha)}, \ldots, \frac{b_0}{f'(\alpha)}$$

die duale Basis zu

$$1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$$

### 1.1.6 Korollar

Sei $\alpha \in L$, $C = A[\alpha]$. Dann gilt

$$D_A(C) = (f'(\alpha))^{-1} C$$

Gilt $B = A[\alpha]$, so folgt insbesondere

$$D_{B/A} = f'(\alpha) B$$

### 1.1.7 Satz

- Seien $K \subset L \subset E$ endliche, separable Erweiterungen. $C$ bezeichne den ganzen Abschluss von $A$ in $E$. Dann gilt
$$D_{C/A} = D_{B/A} \cdot D_{C/B}$$
- Ist $S \subset K^\times$ ein Untermonoid, so gilt
$$S^{-1}D_{B/A} = D_{S^{-1}B/S^{-1}A}$$
- Sind $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ Primideale in $B$ bzw. $A$ und $\widehat{B}_\mathfrak{P}$ bzw. $\widehat{A}_\mathfrak{p}$ diesbezügliche Komplettierungen, so gilt
$$D_{B/A}\widehat{A}_\mathfrak{P} = D_{\widehat{B}_\mathfrak{P}/\widehat{A}_\mathfrak{p}}$$

### 1.1.8 Korollar

Die Differente ist das formale Produkt

$$D_{B/A} = \prod_{\mathfrak{P}\subset B \text{ prim}} D_\mathfrak{P}$$

wobei $D_\mathfrak{P} = D_{\widehat{B}_\mathfrak{P}/\widehat{A}_\mathfrak{p}} \cap = D_{B_\mathfrak{P}/A_\mathfrak{p}} \cap B$

## 1.2 Differente und Verzweigungen

### 1.2.1 Lemma

Sei $L|K$ eine endliche separable Körpererweiterung mit Ganzheitsringen $B|A$.
Zusätzlich sei $L = K[\alpha]$ für $\alpha \in B$ und

$$F = \{x \in A[\alpha] \mid xB \subset A[\alpha]\}$$

Dann gilt

$$F = f'(\alpha)D_{B/A}^{-1}$$

wobei $f \in K[X]$ das Minimalpolynom von $\alpha$ ist.

### 1.2.2 Korollar

Die Differente $D_{B/A}$ teilt $f'(\alpha)B$. Ferner gilt

$$D_{B/A} = f'(\alpha)B \Longleftrightarrow B = A[\alpha]$$

### 1.2.3 Satz

Seien $A, B$ diskrete Bewertungsringe, deren Restklassenkörpererweiterung separabel ist. Dann existiert ein $\alpha \in B$, sodass $B = A[\alpha]$.

### 1.2.4 Satz

Sei $\mathfrak{P} \subset B$ ein Primideal über $\mathfrak{p} \subset A$ und sei $B/\mathfrak{P}|A/\mathfrak{p}$ separabel. Es gilt:

- $\mathfrak{p}$ verzweigt in $L$ genau dann, wenn $\mathfrak{p}$ die Differente $D_{B/A}$ teilt.
- Sei $s = v_{\mathfrak{P}}(D_{B/A})$ und $e = e_{\mathfrak{p}}$.
  - Ist $\mathfrak{p}$ zahm verzweigt, so gilt
  $$s = e - 1$$
  - Ist $\mathfrak{p}$ wild verzweigt, so gilt
  $$e \leq s \leq e - 1 + v_{\mathfrak{p}}(e)$$

### 1.2.5 Satz

Seien alle Restklassenkörpererweiterungen separabel. Dann ist $D_{B/A}$ das Ideal, das von allen $f'_\alpha(\alpha)$ erzeugt wird, wobei $\alpha$ alle Elemente mit $L = K(\alpha)$ durchläuft und $f_\alpha$ sein Minimalpolynom bezeichnet.

### 1.2.6 Definition: Diskriminante

Das Ideal $\delta_{B|A} := N_{L|K}(D_{B/A})$ heißt **Diskriminante** von $B|A$.

### 1.2.7 Satz

Sei $K = \mathbb{Q}$, dann ist
$$\delta_{\mathcal{O}_L/\mathbb{Z}} = d(L) \cdot \mathbb{Z}$$
wobei $d(L)$ definiert ist durch
$$d(L) := \det\left(\left(Tr_{L|\mathbb{Q}}(w_i w_j)\right)_{i,j}\right)$$
für eine $\mathbb{Z}$-Basis $w_1, \ldots, w_n$ von $\mathcal{O}_L$.

### 1.2.8 Satz

- Seien $K \subset L \subset E$ endliche, separable Erweiterungen. $C$ bezeichne den ganzen Abschluss von $A$ in $E$. Dann gilt
$$\delta_{C/A} = N_{L|K}(\delta_{C/B}) \cdot \delta_{B/A}$$
- Ist $S \subset K^\times$ ein Untermonoid, so gilt
$$S^{-1}\delta_{B/A} = \delta_{S^{-1}B/S^{-1}A}$$
- Sind $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ Primideale in $B$ bzw. $A$ und $\widehat{B}_{\mathfrak{P}}$ bzw. $\widehat{A}_{\mathfrak{p}}$ diesbezügliche Komplettierungen, so gilt
$$\delta_{B/A}\widehat{A}_{\mathfrak{P}} = \delta_{\widehat{B}_{\mathfrak{P}}/\widehat{A}_{\mathfrak{p}}}$$

### 1.2.9 Satz

Sei $\mathfrak{p} \subset A$ prim, $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}$ die Zerlegung in $B$. $p = \mathsf{char}(A/\mathfrak{p})$. Dann gilt
$$v_{\mathfrak{p}}(\delta_{B/A}) \begin{cases} = (e_1 - 1)f_1 + \ldots + (e_r - 1)f_r & \text{falls } p \nmid e_i \forall i \\ < (e_1 - 1)f_1 + \ldots + (e_r - 1)f_r & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere gilt
$$\mathfrak{p} \text{ verzweigt in } L \Longleftrightarrow \mathfrak{p} \mid \delta_{B/A}$$

### 1.2.10 Satz

Sei $S$ eine endliche Menge von maximalen Idealen eines Zahlkörpers $K$, $n \in \mathbb{N}$.
Dann gibt es nur endlich viele Erweiterungen von $K$, die außerhalb von $S$ unverzweigt sind.

### 1.2.11 Satz

Es gibt keine unverzweigten Erweiterungen von $\mathbb{Q}$.