1 Hauptklausur

1.1 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung glatter geschlossener Mannigfaltigkeiten der Dimension n. W sei eine glatte kompakte $(n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\partial W = M$. F sei eine glatte Fortsetzung von f auf W. $p \in N$ sei regulär für F und f.

Zeigen Sie:

$$\deg_p f \equiv 0 \mod 2$$

1.2 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. $N \subset \mathbb{R}^n$ sei eine glatte Untermannigfaltigkeit. $\varepsilon > 0$ sei beliebig.

Zeigen Sie: Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| < \varepsilon$, sodass die Abbildung

$$g(x) := f(x) + v$$

transversal zu N steht.

Hinweis: Benutzen Sie die Abbildung

$$\begin{aligned} F : M \times N &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto y - f(x) \end{aligned}$$

1.3 Aufgabe (4 Punkte)

Sei $f : S^3 \to S^2$ glatt. $\omega \in \Omega^2(S^2)$ sei eine glatte 2-Form.

1.3.1 Teilaufgabe (1 Punkt)

Zeigen Sie: Es gibt ein $\beta \in \Omega^1(S^3)$ mit

$$\mathrm{d}\beta = f^*(\omega)$$

1.3.2 Teilaufgabe (3 Punkte)

Zeigen Sie: Das Integral $\int_{S^3} f^*(\omega) \wedge \beta$ ist unabhängig von der Wahl von $\beta \in \Omega^1(S^3)$ mit $\mathrm{d}\beta = f^*(\omega)$.

1.4 Aufgabe (4 Punkte)

Es bezeichne T^2 den zweidimensionalen Torus. $p \in T^2$ sei ein beliebiger Punkt.

Berechnen Sie: Die Kohomologiegruppen $H^k(T^2 - \{p\})$ der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $T^2 - \{p\}$ für $k = 0, 1, 2$.

1.5 Aufgabe (4 Punkte)

1.5.1 Teilaufgabe (1 Punkt)

Geben sie Definition von *Immersion* und *Submersion* wieder.

1.5.2 Teilaufgabe (1 Punkt)

Geben sie Definition von *Parallelisierbar* wieder.

1.5.3 Teilaufgabe (1 Punkt)

Ist S^2 parallelisierbar? Warum / Warum nicht?

1.5.4 Teilaufgabe (1 Punkt)

Ist S^2 parallelisierbar? Warum / Warum nicht?