Mitschrieb: Randomisierte Algorithmen
SS 18

tensor.produkt@gmx.de

16. April 2018

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesungen vom 16.04.18 bis zum ... des Kurses Randomisierte Algorithmen an der Universität Heidelberg.
Dieses Dokument wurde „live“ in der Vorlesung getext. Sämtliche Verantwortung für Fehler übernimmt alleine der Autor dieses Dokumentes.
Auf Fehler kann gerne hingewiesen werden bei folgende E-Mail-Adresse

tensor.produkt@gmx.de

Ferner kann bei dieser E-Mail-Adresse auch der Tex-Code für dieses Dokument erfragt werden.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung in die Riemannsche Geometrie

1.1 Überblick und Ideen

Vorlesung vom 16.04.18

Bisher können wir durch die äußere Ableitung

$$\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

nur Differentialformen auf glatten Mannigfaltigkeiten ableiten, aber keine anderen Objekte wie zum Beispiel Vektorfelder. Wir können also auch nicht über Phänomene aus der Physik wie Beschleunigung zum Beispiel sprechen.

Ziel Wir wollen einen Rahmen finden, in dem Objekte wie zum Beispiel Vektorfelder abgeleitet werden können.

1.1.1 Beispiel

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Gilt $\mathrm{d}f = 0$ und ist M zusammenhängend, so ist f konstant.
Hätten wir für ein Vektorfeld ξ eine Ableitung $\mathrm{d}\xi$, dann sollte die Gleichung $\mathrm{d}\xi = 0$ implizieren, dass ξ *konstant* ist.
Ist zum Beispiel ξ auf $M = \mathbb{R}^n$ konstant, so ist ξ parallel, im Sinne von, die einzelnen Tangentialvektoren, die im Bild von ξ liegen, sind parallel.
Somit impliziert eine Ableitung für Vektorfelder ein Konzept von *Parallelismus*.

Problem Ein Konzept von Parallelismus kann nicht über Karten erklärt werden, weil Kartenwechsel im Allgemeinen nicht winkeltreu sind.

1.1.2 Beispiel

Sei $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Sei $p \in S^2$ und $\xi(p) \in T_pS^2$. γ sei ein Großkreis, der durch p in Richtung $\xi(p)$ geht. Ist p_1 ein weiterer Punkt auf γ, so lässt sich $\xi(p)$ *naiv* wie gewohnt in $\mathbb{R}^3$ von p auf p_1 verschieben. Dies hat das offensichtliche Problem, das der so parallel verschobene Vektor im Allgemeinem nicht tangential an S^2 anliegt.
Diesen kann man nun orthogonal auf den Tangentialraum $T_{p_1}S^2$ projizieren. Dadurch erhält man einen Tangentialvektor $\xi(p_1) \in T_{p_1}S^2$. Durch dieses Prozedere lässt sich ξ glatt auf S^2 fortsetzen. Wählt man weitere Punkte p_i auf γ, die gegen einen Punkt q am Äquator konvergieren und für die gilt

$$d(p_i, p_{i+1}) \longrightarrow 0$$

dann erhalten wir einen Vektor $\xi(q) \in T_qS^2$. Dies nennt man den **Paralleltransport** von $\xi(p)$ entlang γ zu $\xi(q)$.
Allerdings kann man $\xi(p)$ auch entlang eines weiteren Großkreises γ_1 verschieben. Verschiebt man entlang γ_1 wieder auf den Äquator und von dort wieder auf q, so erhält man einen anderen Tangentialvektor auf q.

Neues Phänomen Für allgemeine Mannigfaltigkeiten hängt der Paralleltransport vom Weg γ ab; im Gegensatz zum Euklidischen Raum.

1.1.3 Zurück zu Ableitungen von Vektorfeldern ξ

Auf M sei Parallelismus gegeben (zum Beispiel ist M eingebettet im $\mathbb{R}^n$). $p \in M$ sei ein Punkt und $v \in T_pM$ sei ein Tangentialvektor. ξ sei ein Vektorfeld auf M.
Sei γ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$. q sei ein Punkt auf γ. Durch den vorgegebenen Parallelismus lässt sich $\xi(p)$ entlang γ verschieben. D. h., im Punkt q haben wir die Vektoren $\xi(q)$ und $\tau_p^q\xi(p)$, wobei $\tau_p^q\xi(p)$ der Paralleltransport von $\xi(p)$ nach q entlang γ ist.

Idee Betrachte

$$\xi(q) - \tau_p^q\xi(p) \in T_pM$$

für $\mathrm{d}(p,q) \to 0$. Dies bezeichnet man dann auch als die **kovariante Ableitung** von ξ in Richtung v

$$\nabla_v \xi \in T_q M$$

∇_v nennt man dabei einen **Zusammenhang.** Diese hat folgende Eigenschaften:

- ∇_v ist $\Omega^0(M)$-linear in v, d. h.

  $$\nabla_{\lambda v + w}(\xi) = \lambda \nabla_v(\xi) + \nabla_w(\xi)$$

  für glatte Funktionen $\lambda : M \to \mathbb{R}$.

- Sie ist $\mathbb{R}$-linear im zweiten Argument

  $$\nabla_v(\xi + \eta) = \nabla_v(\xi) + \nabla_v(\eta)$$

- Ist $f : M \to \mathbb{R}$ linear, so liegt folgende Produktregel vor

  $$\nabla_v(f \cdot \xi) = f \cdot \nabla_v(\xi) + \nabla_v(f) \cdot \xi$$

  wobei

  $$\nabla_v f := v(f)$$

1.1.4 Geodätische

Sei γ eine (glatte) Kurve auf M. γ heißt eine **Geodätische**, falls gilt

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$$

Obige Bedingung ist in lokalen Koordinaten eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Physikalisch gesprochen verschwindet die Beschleunigung. Geometrisch gesprochen ist γ parallel entlang γ.

1.1.5 Beispiel

Sei M eine Riemannsche Fläche im $\mathbb{R}^3$. Die Gleichung

$$\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma = 0$$

bedeutet

$$\ddot\gamma \perp M$$

D. h., die Euklidische zweite Ableitung steht orthogonal auf der Fläche M.

1.1.6 Beispiel

- Geraden sind Geodätische im Euklidischen Raum.
- Großkreise sind Geodätische auf Sphären.
- Allgemein sind Geodätische lokal kürzeste Kurven.

1.1.7 Parallelogramme

Sei $p \in M$. μ, λ seien zwei Geodätische, die sich im Punkt p schneiden mit $\mu(0) = \lambda(0) = p$.
μ, λ seien parametrisiert durch die Bogenlänge, d. h.,

$$\left|\left|\dot{\lambda}(t)\right|\right| = ||\dot{\mu}(t)|| = 1$$

für alle t. Setze $v := \dot{\mu}(0)$ und $w := \dot{\lambda}(0)$. Sei $\varepsilon > 0$.
Indem wir w entlang μ verschieben, erhalten wir einen Vektor $\overline{w}$ auf $\mu(\varepsilon)$ und analog einen Vektor $\overline{v}$ auf $\lambda(\varepsilon)$.
Es gilt

$$||\overline{v}|| = ||\overline{w}|| = 1$$

da der Paralleltransport eine Isometrie ist, wenn die Riemannsche Metrik kompatibel ist zum Zusammenhang ∇.
Indem man $\overline{v}$ und $\overline{w}$ durch durch Bogenlänge parametrisierte Geodätische fortsetzt, erhält man Geodätische $\overline{\mu}$ und $\overline{\lambda}$. Dadurch erhält man dann Punkte $\overline{\lambda}(\varepsilon)$ und $\overline{\mu}(\varepsilon)$.
Im Euklidischen würden die beiden Punkte zusammen fallen und das Parallelogramm schließen. Für allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten muss dies nicht der Fall sein, aber es gilt

$$d(\overline{\mu}(\varepsilon), \overline{\lambda}(\varepsilon)) \in O(\varepsilon^2)$$