Mitschrieb: Differentialtopologie II
SS 18

tensor.produkt@gmx.de

14. Mai 2018

Vorwort

Dies ist ein Mitschrieb der Vorlesungen vom 16.04.18 bis zum ... des Kurses Differentialtopologie II an der Universität Heidelberg.
Dieses Dokument wurde „live“ in der Vorlesung getext. Sämtliche Verantwortung für Fehler übernimmt alleine der Autor dieses Dokumentes.
Auf Fehler kann gerne hingewiesen werden bei folgende E-Mail-Adresse

tensor.produkt@gmx.de

Ferner kann bei dieser E-Mail-Adresse auch der Tex-Code für dieses Dokument erfragt werden.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung in die Riemannsche Geometrie

1.1 Überblick und Ideen

Vorlesung vom 16.04.18

Bisher können wir durch die äußere Ableitung

$$\mathrm{d} : \Omega^p(M) \to \Omega^{p+1}(M)$$

nur Differentialformen auf glatten Mannigfaltigkeiten ableiten, aber keine anderen Objekte wie zum Beispiel Vektorfelder. Wir können also auch nicht über Phänomene aus der Physik wie Beschleunigung zum Beispiel sprechen.

Ziel Wir wollen einen Rahmen finden, in dem Objekte wie zum Beispiel Vektorfelder abgeleitet werden können.

1.1.1 Beispiel

Sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Gilt $\mathrm{d}f = 0$ und ist M zusammenhängend, so ist f konstant.
Hätten wir für ein Vektorfeld ξ eine Ableitung $\mathrm{d}\xi$, dann sollte die Gleichung $\mathrm{d}\xi = 0$ implizieren, dass ξ *konstant* ist.
Ist zum Beispiel ξ auf $M = \mathbb{R}^n$ konstant, so ist ξ parallel, im Sinne von, die einzelnen Tangentialvektoren, die im Bild von ξ liegen, sind parallel.
Somit impliziert eine Ableitung für Vektorfelder ein Konzept von *Parallelismus*.

Problem Ein Konzept von Parallelismus kann nicht über Karten erklärt werden, weil Kartenwechsel im Allgemeinen nicht winkeltreu sind.

1.1.2 Beispiel

Sei $M = S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die zweidimensionale Einheitssphäre. Sei $p \in S^2$ und $\xi(p) \in T_pS^2$. γ sei ein Großkreis, der durch p in Richtung $\xi(p)$ geht. Ist p_1 ein weiterer Punkt auf γ, so lässt sich $\xi(p)$ *naiv* wie gewohnt in $\mathbb{R}^3$ von p auf p_1 verschieben. Dies hat das offensichtliche Problem, das der so parallel verschobene Vektor im Allgemeinem nicht tangential an S^2 anliegt.
Diesen kann man nun orthogonal auf den Tangentialraum $T_{p_1}S^2$ projizieren. Dadurch erhält man einen Tangentialvektor $\xi(p_1) \in T_{p_1}S^2$. Durch dieses Prozedere lässt sich ξ glatt auf S^2 fortsetzen. Wählt man weitere Punkte p_i auf γ, die gegen einen Punkt q am Äquator konvergieren und für die gilt

$$d(p_i, p_{i+1}) \longrightarrow 0$$

dann erhalten wir einen Vektor $\xi(q) \in T_qS^2$. Dies nennt man den **Paralleltransport** von $\xi(p)$ entlang γ zu $\xi(q)$.
Allerdings kann man $\xi(p)$ auch entlang eines weiteren Großkreises γ_1 verschieben. Verschiebt man entlang γ_1 wieder auf den Äquator und von dort wieder auf q, so erhält man einen anderen Tangentialvektor auf q.

Neues Phänomen Für allgemeine Mannigfaltigkeiten hängt der Paralleltransport vom Weg γ ab; im Gegensatz zum Euklidischen Raum.

1.1.3 Zurück zu Ableitungen von Vektorfeldern ξ

Auf M sei Parallelismus gegeben (zum Beispiel ist M eingebettet im $\mathbb{R}^n$). $p \in M$ sei ein Punkt und $v \in T_pM$ sei ein Tangentialvektor. ξ sei ein Vektorfeld auf M.
Sei γ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$. q sei ein Punkt auf γ. Durch den vorgegebenen Parallelismus lässt sich $\xi(p)$ entlang γ verschieben. D. h., im Punkt q haben wir die Vektoren $\xi(q)$ und $\tau_p^q\xi(p)$, wobei $\tau_p^q\xi(p)$ der Paralleltransport von $\xi(p)$ nach q entlang γ ist.

Idee Betrachte

$$\xi(q) - \tau_p^q\xi(p) \in T_pM$$

für $\mathrm{d}(p,q) \to 0$. Dies bezeichnet man dann auch als die **kovariante Ableitung** von ξ in Richtung v

$$\nabla_v \xi \in T_q M$$

∇_v nennt man dabei einen **Zusammenhang.** Diese hat folgende Eigenschaften:

- ∇_v ist $\Omega^0(M)$-linear in v, d. h.

  $$\nabla_{\lambda v + w}(\xi) = \lambda \nabla_v(\xi) + \nabla_w(\xi)$$

  für glatte Funktionen $\lambda : M \to \mathbb{R}$.

- Sie ist $\mathbb{R}$-linear im zweiten Argument

  $$\nabla_v(\xi + \eta) = \nabla_v(\xi) + \nabla_v(\eta)$$

- Ist $f : M \to \mathbb{R}$ linear, so liegt folgende Produktregel vor

  $$\nabla_v(f \cdot \xi) = f \cdot \nabla_v(\xi) + \nabla_v(f) \cdot \xi$$

  wobei

  $$\nabla_v f := v(f)$$

1.1.4 Geodätische

Sei γ eine (glatte) Kurve auf M. γ heißt eine **Geodätische**, falls gilt

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

Obige Bedingung ist in lokalen Koordinaten eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Physikalisch gesprochen verschwindet die Beschleunigung. Geometrisch gesprochen ist γ parallel entlang γ.

1.1.5 Beispiel

Sei M eine Riemannsche Fläche im $\mathbb{R}^3$. Die Gleichung

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

bedeutet

$$\ddot{\gamma} \perp M$$

D. h., die Euklidische zweite Ableitung steht orthogonal auf der Fläche M.

1.1.6 Beispiel

- Geraden sind Geodätische im Euklidischen Raum.
- Großkreise sind Geodätische auf Sphären.
- Allgemein sind Geodätische lokal kürzeste Kurven.

1.1.7 Parallelogramme

Sei $p \in M$. μ, λ seien zwei Geodätische, die sich im Punkt p schneiden mit $\mu(0) = \lambda(0) = p$.
μ, λ seien parametrisiert durch die Bogenlänge, d. h.,

$$\left|\left|\dot{\lambda}(t)\right|\right| = ||\dot{\mu}(t)|| = 1$$

für alle t. Setze $v := \dot{\mu}(0)$ und $w := \dot{\lambda}(0)$. Sei $\varepsilon > 0$.
Indem wir w entlang μ verschieben, erhalten wir einen Vektor $\overline{w}$ auf $\mu(\varepsilon)$ und analog einen Vektor $\overline{v}$ auf $\lambda(\varepsilon)$.
Es gilt

$$||\overline{v}|| = ||\overline{w}|| = 1$$

da der Paralleltransport eine Isometrie ist, wenn die Riemannsche Metrik kompatibel ist zum Zusammenhang ∇.
Indem man $\overline{v}$ und $\overline{w}$ durch durch Bogenlänge parametrisierte Geodätische fortsetzt, erhält man Geodätische $\overline{\mu}$ und $\overline{\lambda}$. Dadurch erhält man dann Punkte $\overline{\lambda}(\varepsilon)$ und $\overline{\mu}(\varepsilon)$.
Im Euklidischen würden die beiden Punkte zusammen fallen und das Parallelogramm schließen. Für allgemeine Riemannsche Mannigfaltigkeiten muss dies nicht der Fall sein, aber es gilt

$$d(\overline{\mu}(\varepsilon), \overline{\lambda}(\varepsilon)) \in O(\varepsilon^2)$$

Vorlesung vom 18.04.18

1.1.8 Definition

Definiere die **Torsion** des Zusammenhangs durch

$$T(\xi,\eta) := \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - [\xi,\eta]$$

wobei $[\xi,\eta]$ die **Lie-Klammer**[1] der beiden Vektorfelder ξ und η bezeichnet.
T ist ein **Tensor**, d. h., $\mathcal{C}^\infty(M)$-linear.
∇ heißt **symmetrisch** bzw. **torsionsfrei**, falls $T = 0$.

1.1.9 Lemma

Ist ∇ symmetrisch, dann gilt sogar

$$d(\overline{\mu}(\varepsilon), \overline{\lambda}(\varepsilon)) \in O(\varepsilon^3)$$

Sei $u \in T_p(M)$ ein weiterer Tangentialvektor. u_1 sei der Paralleltransport von u entlang $\lambda\overline{\mu}$. u_2 sei der Paralleltransport entlang $\mu\overline{\lambda}$.
Es liegt dann folgende asymptotische Gleichheit vor

$$||u_1 - u_2|| \sim \varepsilon^2 \mathrm{R}(v,w)u$$

$\mathrm{R}(v,w)u$ heißt **Riemannscher Krümmungstensor**. Er ist definiert durch

$$\mathrm{R}(v,w)u := \nabla_v \nabla_w u - \nabla_w \nabla_v u - \nabla_{[v,w]} u$$

Wir werden nun im Folgenden mit den Formalen Definitionen beginnen.

[1] Lassen sich die beiden Vektorfelder als Koordinatenrichtungen schreiben, so gilt zum Beispiel $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$

1.2 Die Lie-Klammer

Sei M im Folgenden eine glatte n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $X, Y : M \to \mathcal{T}M$ glatte Vektorfelder auf M.

1.2.1 Lemma

Es existiert genau ein glattes Vektorfeld Z auf M, sodass gilt

$$Z(f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Beachte, $X(f)$ bezeichnet die glatte Funktion, die sich ergibt durch

$$X(f)(p) := X(p)(f)$$

Beweis

- Eindeutigkeit:
  Sei $p \in M$. $\{x_i\}$ seien lokale Koordinaten bei p. X, Y lassen sich dann schreiben durch

  $$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{und} \qquad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

  und es gilt

  $$\begin{aligned} X(Yf) &= X\left(\sum_j b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_i a_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i}\left(b_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \\ &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \end{aligned}$$

  bzw.

  $$Y(Xf) = \sum_{i,j} b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{i,j} b_j a_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

In der Differenz ergibt sich

$$\begin{aligned} X(Yf) - Y(Xf) &= \sum_{i,j} a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i,j} b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \\ &= \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_i \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Lokal ist Z also bestimmt durch

$$Z = \sum_{i,j} \left(a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_i} - b_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

- Existenz:
  Durch obige Formel ist für jedes lokale Koordinatensystem ein Z gegeben. Diese lassen sich global zu einem glatten Vektorfeld auf ganz M zusammen setzen.

$\square$

1.2.2 Definition

Definiere nun die **Lie-Klammer** von X und Y durch

$$Z := [X, Y] = XY - YX$$

1.2.3 Bemerkung

Die Lie-Klammer hat folgende Eigenschaften

- $[X, Y] = -[Y, X]$
- Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$[aX_1 + bX_2, Y] = a[X_1, Y] + b[X_2, Y]$$

- Iteration: Für beliebige Vektorfelder X, Y, Z gilt

$$[[X, Y], Z] = [XY - YX, Z] = XYZ - YXZ - ZXY + ZYX$$

und

$$[[Y, Z], X] = [YZ - ZY, X] = YZX - ZYX - XYZ + XZY$$

und

$$[[Z,X],Y] = [ZX - XZ, Y] = ZXY - XZY - YZX + YXZ$$

Durch Aufsummieren ergibt sich

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

Dies nennt sich die **Jacobi-Identität**.

- Seien $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Es gilt

$$\begin{aligned}[fX, gY] &= fX(gY) - gY(fX) \\ &= f(X(g)Y - gXY) - g(Y(f)X - fYX) \\ &= fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X\end{aligned}$$

Da eine Mannigfaltigkeit lokal wie $\mathbb{R}^n$ aussieht, lassen sich die bekannten Sätze zu Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsbedingungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen von $\mathbb{R}^n$ auf M verallgemeinern.

1.2.4 Satz

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit, X ein glattes Vektorfeld auf M, $p \in M$ ein Punkt. Dann existiert eine offene Umgebung $U \subset M$ von p und ein $\delta > 0$ zusammen mit einer Abbildung

$$\varphi : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow M$$

sodass $t \mapsto \varphi(t,p)$ die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,q) &= X(\varphi(t,q)) \qquad\qquad \forall q \in U \\ \varphi(0,q) &= q\end{aligned}$$

ist.
Schreibweise:

$$\varphi_t(p) := \varphi(t,p)$$

Die glatte Abbildung

$$\varphi_t : U \to M$$

heißt **Fluss** von X (in der Umgebung von p).

1.2.5 Bemerkung

Sei $|s|, |t|, |s+t| < \delta$. Betrachte

$$\gamma_1(t) := \varphi(t, \varphi(s,p))$$

Das impliziert

$$\dot{\gamma}_1 = X(\gamma_1) \qquad \gamma_1(0) = \varphi(s,p)$$

und

$$\gamma_1(t) := \varphi(t+s,p)$$

impliziert

$$\dot{\gamma}_2 = X(\gamma_2) \qquad \gamma_2(0) = \varphi(s,p)$$

Aus der Eindeutigkeit folgt nun

$$\gamma_1 = \gamma_2$$

D. h.,

$$\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Id}_M = \varphi_t \circ \varphi_{-t}$$

Daraus folgt, dass jedes φ_t ein Diffeomorphismus ist. Die Menge aller $\{\varphi_t\}_t$ nennt man eine **Einparameter-Untergruppe** von Diffeomorphismen.

1.3 Die Lie-Ableitung

Seien X, Y zwei Vektorfelder auf M, $p \in M$ ein Punkt.
Sei φ_t der Fluss auf X mit

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,p) = X(\varphi_t(p)) \qquad \text{und} \qquad \varphi_0(p) = p$$

Definiere nun die **Lie-Ableitung durch**

$$(L_X Y)(p) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(Y_p - (\mathrm{d}\varphi_h)(Y_{\varphi_{-h}(p)})\right) \in T_p(M)$$

wobei $Y_p = Y(p), \mathrm{d}\varphi_h = \varphi_{h,*}$. Die Lie-Ableitung leitet das Vektorfeld Y bzgl. dem Fluss von X im Punkt p ab.

1.3.1 Proposition

Es gilt

$$L_X Y = [X, Y]$$

Für den Beweis dieser Proposition benötigen wir ein Lemma:

Idee Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt mit $f(0) = 0$. f hat die Taylor-Entwicklung

$$f(t) = tf'(0) + \frac{t^2}{2}f''(0) + \ldots =: t \cdot g(t)$$

Es gilt

$$f(t) = tg(t)$$

und $f'(0) = g(0)$.
Wir brauchen nun folgende Verallgemeinerung dieser Beobachtung:

1.3.2 Lemma

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \mathbb{R}$ glatt, $f(0,p) = 0$ für alle $p \in M$.
Dann existiert eine glatte Funktion $g : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t,p) = t \cdot g(t,p) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(0,p) = g(0,p)$$

Beweis

Wir definieren g durch

$$g(t,p) := \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)(s \cdot t, p)\mathrm{d}s$$

Der Rest ist nachrechnen. $\square$

Vorlesung vom 23.04.18

Beweis: 1.3.1
Sei $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Wir wollen Folgendes zeigen.

$$(L_X Y)(f) = [X,Y](f) = XYf - YXf$$

Definiere die Hilfsfunktion

$$h(t,p) := f(\varphi_t(p)) - f(p).$$

Da $h(0,p) = 0$, existiert aufgrund des Lemmas ein g mit

$$h(t,p) = t \cdot g(t,p) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p).$$

Es gilt

$$f \circ \varphi_t = f + tg_t$$

und

$$X_p(f) = \left(\frac{\partial}{\partial t}_{t=0} \varphi_t(p) \right)(f) = \frac{\partial}{\partial t}_{t=0} f(\varphi_t(p)) = \frac{\partial h}{\partial t}(0,p) = g(0,p).$$

Durch die erste der beiden obigen Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} (\mathrm{d}\varphi_h)(Y_{\varphi_{-h}(p)})(f) &= Y_{\varphi_{-h}(p)}(f \circ \varphi_h) \\ &= Y_{\varphi_{-h}(p)}(f + tg_t). \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Lie-Ableitung ein, so erhält man

$$\begin{aligned} (L_X Y)(f) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(Y_p - (\mathrm{d}\varphi_h)(Y_{\varphi_{-h}(p)})(f) \right) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(Y_p - (Y_{\varphi_{-h}(p)})(f) \right) - \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(h(Y_{\varphi_{-h}(p)})(g_h) \right). \end{aligned}$$

Da gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(h(Y_{\varphi_{-h}(p)})(g_h) \right) = \lim_{h \to 0} (Y_{\varphi_{-h}(p)})(g_h) = Y_p(g_0) = YXf,$$

folgt

$$\begin{aligned} (L_X Y)(f) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left((Yf)_p - (Yf)_{\varphi_{-h}(p)} \right) - Y_p Xf \\ &= X_p Yf - Y_p Xf. \end{aligned}$$

$\square$

Folgerungen

$$L_Y X = -L_X Y, \qquad L_X X = 0$$

Seien Vektorfelder X, Y gegeben. Man kann zeigen, dass lokale Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ existieren mit

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Gilt ferner

$$Y = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

so folgt

$$[X, Y] = \frac{\partial\partial}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial\partial}{\partial x_2 \partial x_1} = 0.$$

Insofern ist das Verschwinden von $[X, Y]$ eine notwendige Bedingung für die Existenz von lokalen Koordinaten $x_1, \dots, x_n$ mit

$$X = \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad \text{und} \qquad Y = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

1.3.3 Geometrische Interpretation der Lie-Klammer

Seien X, Y Vektorfelder. φ und ψ seien korrespondierende Flüsse, $p \in M$ sei ein Punkt. Setze

$$c(h) := \psi_{-h}\varphi_{-h}\psi_h\varphi_h(p).$$

Die Zuordnung $h \mapsto c(h)$ definiert eine glatte Kurve. Man kann zeigen

$$\dot{c}(h) = 0.$$

Für Kurven $\gamma(t)$ mit $\dot{\gamma}(0) = 0$ lässt sich die zweite Ableitung definieren durch

$$\ddot{\gamma}(t)(0) := \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}_{t=0} f(\gamma(t)).$$

Dann ist $\ddot{\gamma}(0)$ eine Derivation.
Daraus folgt, dass $\ddot{c}(0)$ definiert ist, und es gilt

$$\ddot{c}(0) = 2[X, Y]_p.$$

1.4 Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Sei M eine glatte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

1.4.1 Definition

Eine **Riemannsche Metrik** auf M ist eine Zuordnung

$$p \longmapsto \langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$$

für $p \in M$, wobei $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$ jeweils ein inneres Produkt[2] auf T_pM ist. Ferner soll diese Zuordnung**glatt** sein in dem Sinne, dass für lokale Koordinaten (U, x) die Funktionen

$$g_{i,j}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \mid \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \right\rangle_p$$

für alle i, j glatt sind auf U.
Wir werden manchmal $g(p)$ anstatt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_p$ schreiben.
Das Paar $(M, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ heißt **Riemannsche Mannigfaltigkeit**.

1.4.2 Definition

Ein Diffeomorphismus $\varphi : (M, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_M) \to (N, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_N)$ heißt **Isometrie**, falls für alle $p \in M$ und $u, v \in T_pM$ gilt

$$\langle u, v \rangle_{M,p} = \langle \mathrm{d}\varphi_p u, \mathrm{d}\varphi_p v \rangle_{N,\varphi(p)} .$$

(1) ### 1.4.3 Beispiel

Sei $M = \mathbb{R}^n$. x seien die Standardkoordinaten auf $\mathbb{R}^n$. Setzt man

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p = \delta_{i,j}$$

so erhält man die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^n$.

(2) Sei $f : M \to N$ eine glatte Immersion. $(N, \langle \cdot \mid \cdot \rangle_N)$ sei eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, M eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann induziert f eine Riemannsche Metrik $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_M$ auf M durch

$$\langle u|v \rangle_M := \langle \mathrm{d}f(u), \mathrm{d}f(v) \rangle_N .$$

Da $\mathrm{d}f$ injektiv ist, ist $\langle u|v \rangle_{M,p}$ positiv definit.

[2] Inneres Produkt heißt hier eine symmetrische, positiv definite Bilinearform.

(3) 1.4.4 Beispiel

Es bezeichne $S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$ die Einheitssphäre. Durch die Einebettung $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ erhalten wir eine Riemannsche Metrik auf S^n. S^n zusammen mit dieser Metrik nennt man **Standardsphäre**.

(4) **Produktmetrik**: Seien $(M, g_m), (N, g_N)$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. π_1, π_2 seien die korrespondierenden Projektionen von $M \times N$ auf M bzw. N. Seien $u, v \in T_{(p,q)}(M \times N)$, setze

$$\langle u, v\rangle_{p,q} := \langle \mathrm{d}\pi_1(u), \mathrm{d}\pi_1(v)\rangle_{M,p} + \langle \mathrm{d}\pi_2(u), \mathrm{d}\pi_2(v)\rangle_{N,q}\,.$$

$\langle u, v\rangle_{p,q}$ ist eine Riemannsche Metrik auf $M \times N$, die sogenannte **Produktmetrik**.

(5) 1.4.5 Beispiel

Betrachte $T^n := S^1 \times \ldots \times S^1$. Ist S^1 mit der Standardmetrik versehen, so induziert uns dies eine Produktmetrik auf T^n. In diesem Fall spricht man vom **flachen Torus**.
Für $n = 2$ kann man T^2 in den $\mathbb{R}^3$ einbetten. Dadurch erhält man eine andere induzierte Metrik auf T^2, die nicht äquivalent zu obiger Produktmetrik ist. Diese beiden Tori sind nicht isometrisch.

1.4.6 Proposition

Jede glatte Mannigfaltigkeit besitzt eine Riemannsche Metrik.

Beweis
Sei $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ eine offene Überdeckung von M durch Karten und $\{f_\alpha\}$ eine glatte Partition der Eins bzgl. dieser Überdeckung.
Über U_α betrachte man die eindeutige Riemannsche Metrik g^α, sodass

$$(U_\alpha, g^\alpha) \xrightarrow{x_\alpha} (\mathbb{R}^n, g_{eukl})$$

eine Isometrie ist. Auf M erhält man nun eine Riemannsche Metrik durch

$$g_p := \sum_{p \in U_\alpha} f_\alpha(p) g_p^\alpha.$$

$\square$

1.4.7 Definition

Sei $c : \mathbb{R} \to M$ eine glatte Kurve. Ein **Vektorfeld entlang einer Kurve** c ist eine glatte Zuordnung

$$t \longmapsto V(t) \in T_{c(t)}M$$

1.4.8 Bemerkung

Ein Vektorfeld entlang einer Kurve lässt sich im Allgemeinem nicht auf ein Vektorfeld einer offenen Umgebung der Kurve fortsetzen. Zum Beispiel könnte sich die Kurve selbst schneiden und V die Ableitung der Kurve sein.

Notation Wir schreiben auch für $v \in T_pM$

$$||v|| := \sqrt{\langle v|v\rangle_p}$$

1.4.9 Definition

Für eine Kurve c definiere wir die **Länge** durch

$$L_a^b(c) := \int_a^b ||\dot{c}(t)|| \,\mathrm{d}t$$

Vorlesung vom 25.04.18

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, die obendrein orientiert ist. (U,x) und (V,y) seien orientierte Karten auf M, die sich schneiden.
Wir erinnern an folgendes Lemma aus Differentialtopologie I.

1.4.10 Lemma

Auf $U \cap V$ gilt

$$f \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = g \mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n$$

genau dann, wenn

$$f = \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) g$$

gilt.

Auf einer orientierten Karte U sind Funktionen $g_{i,j} : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g_{i,j} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} | \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$$

für $p \in U$. Setze ferner $X_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$.
Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Orthonormalbasis (ONB) für T_pM bzgl. g_p. Dann lässt sich X_i darstellen durch

$$X_i = \sum_j a_{i,j} e_j.$$

Wir erhalten so eine $n \times n$-Matrix $A := (a_{i,j})_{i,j}$. Es gilt

$$\begin{aligned} g_{i,j} &:= \langle X_i | X_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_k a_{i,k} e_k | \sum_l a_{j,l} e_l \right\rangle \\ &= \sum_{k,l} a_{i,k} a_{j,l} \langle e_k | e_l \rangle \\ &= \sum_k a_{i,k} a_{j,k}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(g_{i,j})_{i,j} = AA^T.$$

Dies impliziert insbesondere

$$\det(g_{i,j}) = \det(A)^2 > 0.$$

Insbesondere ist $\sqrt{\det(g_{i,j})} = |\det A|$ wohldefiniert. Durch den Transformationssatz folgt nun im Punkt p

$$vol(X_1, \ldots, X_n) = |\det A| \cdot vol(e_1, \ldots, e_n) = |\det A|\,,$$

da $vol(e_1, \ldots, e_n) = 1$. Daraus folgt insbesondere

$$vol(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}) = \sqrt{\det(g_{i,j})}.$$

Auf (V, y) erhält man analog

$$vol(Y_1, \ldots, Y_n) = \sqrt{\det(h_{i,j})}.$$

für

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$$

und

$$h_{i,j} = \langle Y_i | Y_j \rangle\,.$$

Man erhält hierdurch

$$\begin{aligned}\sqrt{\det(h_{i,j})} &= vol(Y_1, \ldots, Y_n)\\ &= \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) vol(X_1, \ldots, X_n)\\ &= \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) \sqrt{\det(g_{i,j})}.\end{aligned}$$

Mit dem obigen Lemma folgt nun auf $U \cap V$

$$\sqrt{\det(g_{i,j})}\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n = \sqrt{\det(h_{i,j})}\mathrm{d}y_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}y_n.$$

Durch Verkleben erhalten wir eine glatte n-Form $\nu \in \Omega^n(M)$.

1.4.11 Definition

ν heißt **Riemannsche Volumenform** von M. ν ist durch die Riemannsche Metrik eindeutig festgelegt.

1.4.12 Definition

Wenn M kompakt ist, setzen wir

$$vol(M) := \int_M \nu < \infty.$$

$vol(M)$ heißt das **Riemannsche Volumen**.
Wenn $vol(K)$ unbeschränkt ist über kompakte Untermannigfaltigkeiten (mit Rand) $K \subset M$, dann sagen wir, dass M unendliches Volumen habe.

1.4.13 Bemerkung

Oft sieht man in der Literatur $\nu = \mathrm{d}V = \mathrm{d}vol$, obwohl ν im Allgemeinem nicht im Bild des Randhomomorphismus

$$\mathrm{d} : \Omega^{n-1}(M) \longrightarrow \Omega^n(M)$$

liegt.

1.5 Zusammenhänge

Sei $\Gamma(\mathcal{T}M)$ der Vektorraum der glatten Schnitte von $\mathcal{T}M$, d. h., $\Gamma(\mathcal{T}M)$ ist der Vektorraum der glatten Tangentialvektorfelder auf M.

1.5.1 Definition

Ein **Zusammenhang** auf M ist eine Abbildung

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(\mathcal{T}M) \times \Gamma(\mathcal{T}M) &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{T}M)\\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y,\end{aligned}$$

sodass:

(1) Für $f, g \in \mathcal{C}^\infty(M)$ gilt

$$\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + g\nabla_{X_2} Y.$$

(2) Ferner gilt

$$\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2.$$

(3) Zuletzt wird folgende Produktregel gefordert

$$\nabla_X(f \cdot Y) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$$

In Lokalen Koordinaten Sei (U, x) eine Karte. X, Y seien Vektorfelder der Gestalt

$$X = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad\qquad Y = \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_i a_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (\sum_j \frac{\partial}{\partial y_j})\\ &= \sum_i a_i \sum_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} (b_j \frac{\partial}{\partial y_j})\\ &= \sum_{i,j} a_i \left(\frac{\partial b_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_j} \right).\end{aligned}$$

Wir dröseln die Terme $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_j}$ weiter auf und erhalten

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial y_j} = \sum_k \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Die Funktionen $\Gamma_{i,j}^k$ nennt man **Christoffel-Symbole** des Zusammenhangs.
Wir erhalten final

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \sum_{i,k} a_i \left(\frac{\partial b_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,j} a_i b_j \sum_k \Gamma_{i,j}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_k \left(\sum_i a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.\end{aligned}$$

1.5.2 Bemerkung

Die Gleichung

$$\nabla_X Y = \sum_k \left(\sum_i a_i \frac{\partial b_k}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

impliziert, dass $\nabla_X Y$ eine lokale Operation ist. Denn für $p \in M$ gilt

$$(\nabla_X Y)(p) = \sum_k \left(\sum_i a_i(p) \frac{\partial b_k}{\partial x_i}(p) + \sum_{i,j} a_i(p) b_j(p) \Gamma_{i,j}^k(p) \right) \frac{\partial}{\partial x_k}_{|p}.$$

D. h., $(\nabla_X Y)(p)$ hängt nur von $X(p), Y(p)$ und $\frac{\partial b_k}{\partial x_i}(p)$ ab.

1.5.3 Definition

Sei $V = V(t)$ ein Vektorfeld entlang einer Kurve $c(t)$ in M.
Eine **kovariante Ableitung** ist eine Zuordnung

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} : \mathcal{V}_c \longrightarrow \mathcal{V}_c,$$

wobei $\mathcal{V}_c$ den Raum aller Vektorfelder entlang c bezeichnet, sodass

(1) $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(V + W) = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V + \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}W$

(2) und $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(fV) = f\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V + \frac{\partial f}{\partial t}V$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt gelten.

(3) Wenn ferner ein Vektorfeld X auf M existiert mit $X(c(t)) = V(t)$, dann soll gelten
$$\nabla_{\dot{c}} X = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}(V).$$

1.5.4 Proposition

Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang ∇. Sei c eine Kurve auf M. Dann existiert eindeutig eine kovariante Ableitung $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ mit obigen Eigenschaften.

Beweis

- Eindeutigkeit: Sei $V(t)$ ein Vektorfeld entlang $c(t)$. In lokalen Koordinaten $x_1, \dots, x_n$:
$$V(t) = \sum_i v_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$
Es gilt dann
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V &= \sum_i \left(v_i \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}_{|c(t)}\right) + v_i' \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\ &= \sum_i \left(v_i \nabla_{\dot{c}(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} + v_i' \frac{\partial}{\partial x_i}\right). \end{aligned}$$

- Existenz: Sei (U_α, x^α) eine offene Überdeckung von M durch Karten. Definiere $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ auf U_α durch
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V := \sum_i \left(v_i \nabla_{\dot{c}(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} + v_i' \frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$
Auf $U_\alpha \cap U_\beta$ stimmen diese $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ überein wegen Eindeutigkeit und definieren somit $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}$ überall.

$\square$

1.5.5 Proposition

Sei c eine Kurve in M, $p = c(0)$. Sei ferner $V^0 \in T_pM$ ein Tangentialvektor. Dann existiert genau ein Vektorfeld V entlang c mit

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V = 0$$

und

$$V(0) = V^0.$$

1.5.6 Definition

Sei V ein Vektorfeld entlang einer Kurve c. V heißt **parallel** entlang c, falls

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V = 0.$$

Vorlesung vom 30.04.18

1.5.7 Proposition

Sei c eine Kurve in M und $V^0 \in T_{c(t_0)}M$ ein Vektor bei $c(t_0)$. Dann existiert genau ein Vektorfeld $V(t)$ entlang $c(t)$, das die Eigenschaften

$$V(t_0) = V^0$$
$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V = 0$$

erfüllt.

Beweis

- Existenz und Eindeutigkeit in lokalen Koordinaten:
  Existiert so ein V, so gilt
  $$0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V = \sum_k (v_k' + \sum_{i,j} x_i' v_j \Gamma_{i,j}^k) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$
  Daraus folgt
  $$v_k' = -\sum_{i,j} (x_i' \Gamma_{i,j}^k) v_j$$
  für alle $k = 1, \ldots, n$. Dadurch ergibt sich ein System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wissen wir, dass es in kleinen Umgebungen von t eindeutige Lösungen für $v_k(t)$ gibt für alle t. Da obiges DGL linear ist, sind die $v_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert.

- Globale Existenz:
  Sei $t_1 > t_0$ beliebig. Der Kurvenabschnitt $c[t_0, t_1]$ ist kompakt und wird folglich überdeckt durch endlich viele Karten. Man kann nun eine lokale Lösung von Karte zu Karte fortsetzen. Die lokalen Lösungen stimmen auf den Durchschnitten der Karten überein wegen ihrer Eindeutigkeit.

$\square$

1.5.8 Bemerkung

1.) Wir erhalten folgende Abbildung

$$\begin{aligned} \tau : T_{c(t_0)}M &\longrightarrow T_{c(t_1)}M \\ V^0 &\longmapsto V(t_1). \end{aligned}$$

Diese Abbildung nennt man den **Paralleltransport** von $c(t_0)$ nach $c(t_1)$ entlang c.
Die Linearität des vorangegangenen Differentialgleichungssystems stellt die Linearität von τ sicher. Durch Umkehren der Zeit erhält man eine lineare Abbildung

$$\tau' : T_{c(t_1)}M \longrightarrow T_{c(t_0)}M.$$

Naheliegenderweise gilt

$$\tau' = \tau^{-1}.$$

Hierdurch folgt insbesondere, dass τ ein Isomorphismus ist. D. h., wir können Tangentialräume an verschiedenen Punkten mittels Paralleltransporte vergleichen.
Daher die Terminologie *Zusammenhang*.

2.) $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V$ ordnet auch Vektoren an Punkten mit $\dot{c}(t) = 0$ zu. Diese Vektoren müssen nicht Null sein!

1.5.9 Beispiel

Wenn $c(t) = p$ konstant ist, dann ist $V(t)$ eine Kurve in T_pM. $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V$ ist dann einfach die Ableitung von $V(t)$ nach t, also $V'(t)$ im euklidischen Sinne.

1.6 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

1.6.1 Definition

Ein Zusammenhang ∇ auf M heißt **kompatibel** mit der Riemannschen Metrik g, falls für jede Kurve c und für alle parallele Vektorfelder V, W entlang c gilt:

$$\langle V, W \rangle = \text{konst.}$$

d. h., der Paralleltransport ist in diesem Fall sogar eine Isometrie.

1.6.2 Proposition

g und ∇ sind genau dann kompatibel, wenn für alle Vektorfelder V, W entlang einer beliebigen Kurve c gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} W \right\rangle.$$

Beweis

$\Leftarrow$) Seien V, W parallele Vektorfelder entlang c. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} W \right\rangle = \langle 0, W \rangle + \langle V, 0 \rangle = 0.$$

$\langle V, W \rangle$ ist als Funktion in t konstant.

$\Rightarrow$) $\langle , \rangle$ und ∇ seien kompatibel. Sei $\{P_1(t_0), \ldots, P_n(t_0)\} \subset T_{c(t_0)}M$ eine Orthonormalbasis. Durch den Paralleltransport erhalten wir die parallelen Vektorfelder $P_1, \ldots, P_n$ entlang c.
Durch die Kompatibilität bleiben die $P_1, \ldots, P_n$ an jeder Stelle auf c eine Orthonormalbasis. Seien V, W nun beliebige Vektorfelder entlang c. Wir können dann schreiben

$$V = \sum_i v_i P_i \qquad \text{und} \qquad W = \sum_j w_j P_j.$$

Es gilt dann

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V = \sum_i (v_i' P_i + v_i \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} P_i) = \sum_i v_i' P_i.$$

Und somit

$$\left\langle \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} V, W \right\rangle = \left\langle \sum_i v_i' P_i, \sum_j w_j P_j \right\rangle = \sum_{i,j} v_i' w_j \langle P_i, P_j \rangle = \sum_i v_i' w_i.$$

Und analog

$$\left\langle V, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} W \right\rangle = \sum_i v_i w_i'.$$

Zusammen also

$$\left\langle \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} V, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} W \right\rangle = \sum_i (v_i' w_i + v_i w_i').$$

Ferner gilt

$$\langle V, W \rangle = \ldots = \sum_i v_i w_i.$$

Mit der Produktregel folgt nun

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle V, W \rangle = \sum_i (v_i' w_i + v_i w_i').$$

□

1.6.3 Korollar

g und ∇ sind genau dann kompatibel, wenn gilt

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_x Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

für beliebige Tangentialvektorfelder X, Y, Z auf M.

Beweis

Für einen Punkt $p \in M$ wähle eine Kurve c mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X(p)$. Es gilt dann

$$X(p) \langle Y, Z \rangle = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \left\langle Y_{c(t)}, Z_{c(t)} \right\rangle.$$

□

1.6.4 Definition: Symmetrie von Zusammenhängen

Ein Zusammenhang ∇ heißt **symmetrisch**, wenn gilt

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

In lokalen Koordinaten für $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial y_j}$ gilt dann

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0.$$

Daraus folgt dann

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Für die Christoffel-Symbole bedeutet dies

$$\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k.$$

1.6.5 Bemerkung

Definiere die **Torsion** durch

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

T ist linear über $\mathcal{C}^\infty(M)$. D. h., T ist ein Tensor.
Ferner ist ein Zusammenhang genau dann symmetrisch, wenn er torsionsfrei ist.

1.6.6 Satz: Levi-Civita

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert genau ein Zusammehang ∇ auf M, sodass gilt:

1.) ∇ und g sind kompatibel.

2.) ∇ ist symmetrisch.

Diesen Zusammenhang nennen wir den **Levi-Civita-Zusammenhang** bzw. den **Riemannschen Zusammenhang**.

Beweis

Eindeutigkeit Seien X, Y, Z beliebige Tangentialvektorfelder auf M. Es gilt dann

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

und

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle$$

und

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle .$$

Wir addieren die ersten beiden Zeilen und subtrahieren die dritte. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} & X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle \\ &= \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X \rangle + \langle X, \nabla_Y Z - \nabla_Y Z \rangle \\ &+ \langle Z, \nabla_X Y + \nabla_Y X \rangle \\ &\overset{\nabla \text{ symm}}{=} \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] + 2 \nabla_Y X \rangle \\ &= \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle + \langle Z, [X, Y] \rangle + 2 \langle Z, \nabla_Y X \rangle \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir für ∇

$$\langle Z, \nabla_Y X \rangle = \\ \frac{1}{2} \left(X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Z, [X, Y] \rangle \right)$$

Daraus folgt die Eindeutigkeit von ∇.

Existenz Definiere $\nabla_Y X$ durch obige Gleichung. Dann bleibt nachzurechnen, dass ∇ ein symmetrischer und kompatibler Zusammenhang ist.

□

Vorlesung vom 02.05.18

1.7 Geodätische Kurven

1.7.1 Definition

Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf M.
Geodätische sind Kurven auf M mit Beschleunigung Null, d. h., eine glatte Kurve $c : I \to M$ heißt **geodätisch**, falls

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\dot{c} = 0$$

gilt.

1.7.2 Beispiel

Betrachte $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik. Durch den Levi-Civita-Zusammenhang werden alle Christoffel-Symbole Null. Gilt

$$0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\dot{\gamma} = \ddot{\gamma},$$

so muss $\dot{\gamma}$ konstant gleich a sein. Ergo ist $\gamma(t) = at + b$ eine Gerade.

Sei γ eine Geodätische. Betrachte

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 2 \left\langle \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\dot{\gamma}, \dot{\gamma} \right\rangle = 2 \langle 0, \dot{\gamma} \rangle = 0,$$

da γ geodätisch ist. Somit ist $||\gamma'(t)||$ konstant gleich $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
Sei $c \neq 0$. $0, t$ seien in I. Dann

$$L_0^t(\gamma) = \int_0^t ||\dot{\gamma}(\tau)||\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t c\mathrm{d}\tau = ct.$$

D. h., die Bogenlänge ist proportional zum Parameter t. Ist insbesondere $c = 1$, dann sagen wir, dass γ durch die Bogenlänge parametrisiert sei.

In lokalen Koordinaten x lässt sich γ darstellen durch

$$\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)).$$

Sei $V(t)$ ein Vektorfeld entlang γ. V hat die Gestalt

$$V(t) = \sum_i v_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}_{|\gamma(t)}.$$

Es gilt allgemein

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} V = \sum_k \left(v_k' + \sum_{i,j} x_i' v_j \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Für $V(t) = \dot{\gamma(t)}$ gilt $v_k(t) = x_k'(t)$. Dann gilt

$$0 = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} \dot{\gamma} = \sum_k \left(x_k'' + \sum_{i,j} x_i' x_j' \Gamma_{i,j}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Daraus folgt für alle k

$$x_k'' = - \sum_{i,j} x_i' x_j' \Gamma_{i,j}^k.$$

Dadurch erhalten wir ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung. Auf dem Tangentialbündel $\mathcal{T}M$ kann dieses System umgeschrieben werden in ein System 1. Ordnung. Seien die Koordinaten x definiert auf $U \subset M$. Ein Tangentialvektor kann geschrieben werden als eine Linearkombindation

$$\sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Dann sind $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ lokale Koordinaten auf $\mathcal{T}M$, definiert in $\mathcal{T}U$.
Die Abbildung

$$t \longmapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$$

definiert eine glatte Kurve in $\mathcal{T}M$. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} y_k &= x_k \\ y_k' &= - \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k y_i y_j. \end{aligned}$$

Dies ist ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung auf $\mathcal{T}M$. Wir wenden den Satz über Existenz, Eindeutigkeit und Abhängigkeit von Anfangsbedingungen an auf dieses System. Es folgt dann:

1.7.3 Proposition

Für alle $p \in M$ existieren $\delta, \varepsilon_1 > 0$, eine offene Umgebung $V \subset M$ von p und eine glatte Abbildung

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times U \longrightarrow M,$$

wobei

$$U = \{(q, v) \in V \times T_q M \mid ||v|| < \varepsilon_1\},$$

sodass

$$t \longmapsto \gamma(t, q, v)$$

die eindeutige Geodätische in M ist mit

$$\gamma(0, q, v) = q \qquad \text{und} \qquad \dot{\gamma(0, q}, v) = v.$$

1.7.4 Lemma: Homogenität von Geodätischen

Ist die Geodäte $\gamma(t, q, v)$ definiert für $|t| < \delta$, so ist die Geodäte $\gamma(at, q, v)$ definiert für $a > 0$ und $|t| < \frac{q}{a}$, und es gilt

$$\gamma(at, q, v) = \gamma(t, q, av).$$

Beweis
Setze $c(t) := \gamma(at, q, v)$. Dann ist $c(0) = q$ und $\dot{c}(0) = a\dot{\gamma}(0, q, v) = av$. Damit erfüllt c dieselben Anfangsbedingungen wie $\gamma(t, q, av)$. Es bleibt zu zeigen, dass c tatsächlich eine Geodätische ist. Es gilt

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\dot{c} = \nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \nabla_{a\dot{\gamma}}(a\dot{\gamma}) = a^2 \nabla_{\{}\dot{\gamma}\}\dot{\gamma} = a^2 \cdot 0 = 0.$$

Aus der Eindeutigkeit folgt nun

$$c(t) = \gamma(t, q, av).$$

$\square$

Betrachte insbesondere $|t| < 2 = \frac{\delta}{\delta/2}$ und $a = \frac{\delta}{2}$. Setze $\varepsilon = \frac{\delta \varepsilon_1}{2}$. Dann ist $\gamma(t, q, v)$ definiert für $|t| < 2$ und $||v|| < \varepsilon$.

1.7.5 Definition: Die Exponentialabbildung

Sei $q \in V$, $v \in T_qM$ mit $||v|| < \varepsilon$. Definiere die Abbildung

$$\exp_q(v) = \gamma(1, q, v).$$

Für $v \neq 0$ gilt

$$\exp_q(v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(||v||, q, \frac{v}{||v||})$$

. Bezeichnet $B_0(\varepsilon)$ den ε-Ball in T_qM, so ist $\exp_q$ eine Abbildung vom Typ

$$\exp_q : B_0(\varepsilon) \subset T_qM \longrightarrow M.$$

Wir schreiben allgemein auch exp statt $\exp_q$.

1.7.6 Bemerkung

Die Bezeichnung obiger Abbildung als Exponentialabbildung kommt aus der Theorie der Lie-Gruppen. Ist G eine Lie-Gruppe, so erhält man eine Abbildung

$$\exp : \mathfrak{g} := T_1G \longrightarrow G,$$

wobei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von G bezeichnet. D. h., in diesem Fall gilt

$$\exp(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \exp(\mathfrak{a}) \cdot \exp(\mathfrak{b}).$$

1.7.7 Proposition

Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\exp : B_0(\varepsilon) \to M$$

ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist.

Beweis

Betrachte

$$(\mathrm{d}\exp)_0(v) = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \exp(tv) = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \gamma(1, q, tv) = \frac{\partial}{\partial t}_{|t=0} \gamma(t, q, v) = v.$$

D. h., $\mathrm{d}\exp_0$ ist die Identität auf $B_0(\varepsilon)$. Der Satz über umkehrbare Funktionen impliziert, dass exp ein lokaler Diffeomorphismus in der Nähe von 0 ist. □

1.7.8 Beispiel

1) Sei $M = \mathbb{R}^n$. Betrachte
$$\exp_0 : T_0\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \xrightarrow{\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}} \mathbb{R}^n$$

2) Sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre. Betrachte
$$\exp_q : B_0(\pi) \longrightarrow S^n - \{-q\}$$
wobei q den Nordpol bezeichnet. $\exp_q$ ist dann tatsächlich surjektiv auf $S^n - \{-q\}$. Allerdings gilt
$$\exp_q(\partial B_0(\pi)) = \{-q\}.$$

1.7.9 Satz: Gauss-Lemma

Es gilt
$$\langle \mathrm{d}\exp_v(v), \mathrm{d}\exp_v(w)\rangle = \langle v, w\rangle$$
für $v, w \in T_qM$. Dabei wurde stillschweigend die Identifikation
$$T_v(T_qM) \cong T_qM$$
angenommen.

Beweis

Wir schreiben $w = w_{||} + w_{\perp}$ mit $w_{||} \in \mathbb{R}\cdot v$ und $w_{\perp} \in v^{\perp}$. Die Linearität impliziert, dass es genügt die Aussage für $w_{||}$ und für $w_{\perp}$ jeweils zu beweisen.

1) Für $w_{||} = \lambda v$:
Es gilt
$$\langle \mathrm{d}\exp_v(v), \mathrm{d}\exp_v(\lambda v)\rangle = \lambda\, ||\mathrm{d}\exp_v(v)||^2$$
und
$$\langle v, \lambda v\rangle = \lambda\, ||v||^2 .$$
Zu zeigen bleibt
$$||\mathrm{d}\exp_v(v)|| = ||v|| .$$
Es gilt nun
$$||\mathrm{d}\exp_v(v)|| = \left|\left|\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0}\gamma(1, q, v + tv)\right|\right| = \left|\left|\frac{\partial}{\partial t}_{|t=0}\gamma(1 + t, q, v)\right|\right| = ||v||$$

2) Für $w_\perp$:
Wir schreiben $w = w_\perp$ und es gilt $\langle v, w\rangle = 0$. Zu zeigen ist

$$\langle \mathrm{d}\exp_v(v), \mathrm{d}\exp_v(w)\rangle = 0.$$

Sei $v(s)$ eine Kurve in T_qM mit $v(0) = v, \dot{v} = w$ und $||v(s)||$ konstant. Setze

$$f(t,s) := \exp(tv(s)).$$

f ist eine parametrisierte Fläche. Es gilt dann

$$\langle \mathrm{d}\exp_v(v), \mathrm{d}\exp_v(w)\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle (t = 1, s = 0).$$

Wir behaupten, dass $\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\rangle$ unabhängig von t ist, denn:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle = \left\langle \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle$$

Nun ist $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial t}$ gleich Null, da γ eine Geodätische ist. Es gilt nun

$$\left\langle \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle \overset{Symmetrie}{=} \left\langle \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left|\left|\frac{\partial f}{\partial t}\right|\right|^2 = 0,$$

da $||v(s)||$ konstant ist.

Betrachte wieder

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle (1, s) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right\rangle (0, s).$$

Nun gilt

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, s) = 0,$$

da $f(0, s) = \exp(0 \cdot v(s)) = \exp(0) = q$ konstant in s ist.

□

Vorlesung vom 07.05.18

1.7.10 Definition

Sei $\exp_p : T_pM \to M$ die Exponentialabbildung und $\varepsilon > 0$ so, dass $\exp_p$ auf $B_0(\varepsilon)$ injektiv ist.
Für $0 < r < \varepsilon$ nennen wir dann

$$B_p(r) := \exp_p(B_0(r))$$

den **geodätischen Ball** und

$$S_p(r) := \exp_p(\partial B_0(r))$$

die **geodätische Sphäre** um p von Radius r.

1.7.11 Bemerkung: Interpretation: Gauss-Lemma

Wir können nun das Gauss-Lemma wie folgt ausdrücken:

Geodätische Kurven durch p stehen senkrecht auf geodätischen Sphären.

1.7.12 Proposition: Geodätische minimieren lokal die Länge von Kurven.

Sei $p \in M$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $\exp_p : B_0(\varepsilon) \to M$ injektiv ist. Sei $\gamma : [0,1] \to B := B_p(r)$ für $r < \varepsilon$ mit $\gamma(0) = p$ eine Geodätische.
Sei $c : [0,1] \to M$ eine stückweise glatte Kurve mit $c(0) = p$ und $c(1) = q := \gamma(1)$.
Dann gilt

$$L(c) \geq L(\gamma).$$

Ferner gilt Gleichheit genau dann, wenn c und γ dasselbe Bild haben.

Beweis

Idee: Wir schreiben $c = c(s)$ in Polarkoordinaten:

$$c(s) = \exp(r(s) \cdot v(s))$$

für $r > 0, s > 0$ und $||v(s)|| = 1$. Wir nehmen dabei zunächst an, dass $c[0,1] \subset B$. Ferner nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $c(s) \neq p$ für $s > 0$. Setze

$$f(r,s) := \exp(r \cdot v(s)).$$

Dann gilt

$$c(s) = f(r(s), s).$$

Daraus folgt

$$\dot{c}(s) = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot r' + \frac{\partial f}{\partial s}.$$

Und hieraus

$$\begin{aligned} ||\dot{c}(s)||^2 &= \left|\left|\frac{\partial f}{\partial r} \cdot r'\right|\right|^2 + 2\left\langle \frac{\partial f}{\partial r} r, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle + \left|\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|\right|^2 \\ &= |r'|^2 \cdot \left|\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|\right|^2 + 2r' \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle + \left|\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|\right|^2 \\ &= |r'|^2 \cdot 1 + 2r' \cdot 0 + \left|\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|\right|^2, \end{aligned}$$

denn $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r} r, \frac{\partial f}{\partial s} \right\rangle = 0$ nach Gauss-Lemma und $\left|\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right|\right| = ||v(s)|| = 1$.
Es folgt also

$$||\dot{c}(s)||^2 = |r'|^2 + \left|\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|\right|^2 \geq |r'|^2.$$

Wähle nun $\delta > 0$ klein, und betrachte

$$\int_\delta^1 ||\dot{c}(s)||\,\mathrm{d}s \geq_\delta^1 |r'(s)|\,\mathrm{d}s \geq \int_\delta^1 r'(s)\mathrm{d}s = r(1) - r(\delta) \overset{\delta \to 0}{\to} r(1) = L(\gamma).$$

Ferner gilt

$$\int_\delta^1 ||\dot{c}(s)||\,\mathrm{d}s \overset{\delta \to 0}{\to} L(c).$$

Gilt Gleichheit, so muss

$$\left|\left|\frac{\partial f}{\partial s}\right|\right| = 0$$

gelten. Daraus folgt aber, dass $f(r,s)$ konstant in s ist. Ergo

$$f(r,s) = \exp(r \cdot v(0)).$$

Insofern haben in diesem Fall c und γ tatsächlich dasselbe Bild.

Wenn nun $c[0,1]$ nicht in B enthalten ist, dann sei s_0 der kleinste Wert s, sodass $c(s_0) \in \partial B$. Es gilt

$$L_0^1(c) \geq L_0^{s_0}(c) \geq L(\gamma_1) = r \geq L(\gamma).$$

$\gamma_1 : p \mapsto c(s_0)$ ist eine Geodätische. □

1.7.13 Bemerkung

1.) Man kann auch zeigen:
Ist γ eine Kurve parametrisiert proportional zur Bogenlänge, sodass

$$L(\gamma) \leq L(c)$$

für alle Kurven c mit denselben Randpunkten gilt, so muss γ eine Geodätische sein.

2.) Isometrien erhalten Geodätische.

1.8 Krümmung

1.8.1 Beispiel

- Die Krümmung eines Kreises von Radius r definieren wir durch $\frac{1}{r}$.

- Wir betrachten nun Kurven in $\mathbb{R}^2$, die durch die Bogenlänge parametrisiert sind.
  Sei dazu c eine solche Kurve mit $\ddot{c}(s) \neq 0$ für ein s. Betrachte s_1, s_2, s_3 nahe bei s. Da die zweite Ableitung nicht verschwindet, sind $c(s_1), c(s_2)$ und $c(s_3)$ nicht kolinear.
  Daraus folgt, dass $c(s_1), c(s_2)$ und $c(s_3)$ auf einem eindeutig bestimmten Kreis mit Radius R liegen. Für $s_1, s_2, s_3 \to s$ erhält man einen Grenzkreis, den sogenannten oskulierenden Kreis in $c(s)$.
  Die Krümmung von c im Punkt $c(s)$ definiert man nun als $\frac{1}{R}$, die Krümmung dieses oskulierenden Kreises.
  Es gilt nun ferner
  $$\frac{1}{R} = |\ddot{c}(s)| \, .$$

- Kurven in $\mathbb{R}^3$:
  Wir fixieren wieder s. Sei $\ddot{c}(s) \neq 0$. $c(s_1), c(s_2)$ und $c(s_3)$ definieren dann eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Laufen s_1, s_2, s_3 nach s, so definieren sie eine Grenzebene, die oskulierende Ebene.
  Ferner erhält man in dieser oskulierenden Ebene den oskulierenden Kreis mit Radius R. Die Krümmung bei $c(s)$ definieren wir dann wieder als die Krümmung $\frac{1}{R}$ des oskulierenden Kreises. Es gilt nun
  $$0 = \frac{\partial}{\partial s} \left|\left|\dot{c}(s)\right|\right|^2 = \frac{\partial}{\partial s} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2 \langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle$$
  ergo steht $\ddot{c}(s)$ orthogonal auf $\dot{c}(s)$. Beide liegen in der oskulierenden Ebene und spannen diese auf.

- Flächen und Euler:
  Sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Sei $p \in M$ und ν_p ein Einheitsnormalenvektor, d. h.,
  $$\nu_p \perp T_p M \text{ und } ||\nu_p|| = 1.$$

Sei ferner $v \in T_pM$ mit $||v|| = 1$. ν_p und v spannen eine Ebene E_v auf. Schneidet man diese mit M, so erhält man eine Kurve

$$E_v \cap M = \text{ Kurve } c_v.$$

c_v sei hierbei durch Bogenlänge parametrisiert mit $c_v(0) = p$ und $\dot{c_v}(0) = v$. Es gilt nun

$$\ddot{c_v}(0) \perp T_pM.$$

Dann existiert genau ein $\kappa_v \in \mathbb{R}$, sodass

$$\ddot{c_v}(0) = \kappa_v \nu_p.$$

Es gilt

$$\kappa_{-v} = \kappa_v,$$

insofern erhalten wir eine Funktion

$$\kappa : \mathbb{R}P^1 \longrightarrow\longrightarrow \mathbb{R}.$$

1.8.2 Satz: Satz von Euler

Es existieren eindeutige Richtungen $v_1, v_2 \in \mathbb{R}P^1$, sodass

$$k_1 := \kappa_{-v_1} = \min_v \kappa_v$$

und

$$k_2 := \kappa_{v_2} = \max_v \kappa_v.$$

Es gilt ferner

$$v_1 \perp v_2$$

und

$$\kappa_v = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$$

wobei $\theta = \angle(v, v_1)$.

Vorlesung vom 09.05.18

Krümmung von Flächen nach Gauss Sei $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche, $p \in M$. Sei ferner $\nu_p \in T_pM^\perp$ ein Einheitsnormalenvektor orthogonal auf M am Punkt p, sodass (ν_p, v, w) positiv orientiert ist, wobei (v, w) positiv orientiert in T_pM sei.
Dies induziert die **Gauss-Abbildung**:

$$\begin{aligned} \nu : M &\longrightarrow S^2 \\ p &\longmapsto \nu_p \end{aligned}$$

Ist $A \subset M$ eine Umgebung um p, so kann man die **Gauss-Krümmung** definieren durch

$$\kappa(p) := \lim_{A \to p} \frac{\mathrm{vol}(\nu(A))}{\mathrm{vol}(A)}.$$

1.8.3 Beispiel

1.) Sei $M = S^2 = S_1^2$ die Einheitssphäre. Dann ist $\nu = \mathrm{Id}_{S^2}$. Daraus folgt $\kappa(p) = 1$ für alle $p \in M$.

2.) Sei $M = S_r^2$ die Sphäre von Radius r. Dann gilt

$$\mathrm{vol}(\nu(A)) = \frac{1}{r^2}\mathrm{vol}(A).$$

Daraus folgt

$$\kappa(p) = \lim_{A \to p} \frac{\mathrm{vol}(\nu(A))}{\mathrm{vol}(A)} = \frac{1}{r^2}.$$

3.) Ist M eine Ebene, so sind alle ν_p parallel zueinander. Daraus folgt, dass ν konstant ein Punkt ist. Und somit gilt $\kappa(p) = 0$ für alle $p \in M$.

4.) Sei M ein Zylinder, $p \in M$. Ist A eine kleine Umgebung um p, so induziert die Nabe bei b eine Strecke auf dem Äquator von S^2. Die Längsachse des Zylinders induziert nur einen Punkt in S^2. Insofern ist $\nu(A)$ eine Strecke in S^2. Es folgt $\mathrm{vol}(\nu(A)) = 0$ und $\kappa(p) = 0$.
Daraus folgt, der Zylinder ist **nicht** gekrümmt!

1.8.4 Satz: Beziehung Gauss-Euler

Es gilt

$$\kappa(p) = \kappa_1(p) \cdot \kappa_2(p),$$

wobei $\kappa(p)$ die Gauss-Krümmung und $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ die Eulerschen Minimal- und Maximal-Krümmungen bezeichnet.

1.8.5 Beispiel

1) Betrachte $S_r^2 \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist $\kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{r}$. Insbesondere gilt

$$\kappa_1 \kappa_2 = \frac{1}{r^2} = \kappa(p).$$

2) Betrachte den Zylinder. Dann ist $\kappa_2 = \frac{1}{r}$ bei einem Radius von r und $\kappa_1 = 0$. Es folgt

$$\kappa(p) = 0 = \kappa_1 \kappa_2.$$

3) Betrachte die Fläche $z = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)$ für $a > 0$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\frac{ax^2}{2}) = a = \kappa_2 > 0$$

und

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}(-\frac{ay^2}{2}) = -a = \kappa_1 < 0$$

bei $p = (0, 0, 0)$. Folglich gilt

$$\kappa_1 \kappa_2 = -a^2 < 0.$$

Insofern handelt es sich hierbei um eine Fläche negativer Krümmung.

Krümmung nach Riemann Idee: Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Sei $\sigma \subset T_pM$ ein zweidimensionaler Untervektorraum. Betrachte

$$\exp_p : B_0(\varepsilon) \subset T_pM \xrightarrow{\cong} U,$$

wobei U den geodätischen Ball um p bezeichnet. $F^2 := \exp_p(\sigma \cap B_\varepsilon(0))$ ist dann eine Fläche in U. F erhalte die induzierte Metrik von M.
Dann sei $\kappa(p, \sigma)$ definiert als die Krümmung von F im Punkt p nach Euler-Gauss.

Formell: Sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(M, \langle , \rangle)$. Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} R : \Gamma(\mathcal{T}M)^3 &\longrightarrow \Gamma(\mathcal{T}M) \\ (X, Y, Z) &\longmapsto R(X, Y)Z \end{aligned}$$

wobei

$$R(X, Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z.$$

In lokalen Koordinaten $\{x_i\}$ mit $X = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und $Y = \frac{\partial}{\partial x_j}$ gilt

$$[X, Y] = 0$$

und insbesondere

$$R(X, Y) = \nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y.$$

Ferner

$$R(X, Y)\frac{\partial}{\partial x_k} =: \sum_l R^l_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_l}.$$

Eigenschaften Sind $f, g : M \to \mathbb{R}$ und $X, Y \in \Gamma(\mathcal{T}M)$ glatt, so gilt:

- $R(fX_1 + gX_2, Y)Z = fR(X_1, Y)Z + gR(X_2, Y)Z.$
- $R(X, fY_1 + gY_2)Z = fR(X, Y_1)Z + gR(X, Y_2)Z.$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} R(X, Y)(fZ) &= \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_X \nabla_Y (fZ) + \nabla_{[X,Y]}(fZ) \\ &= \nabla_Y (f\nabla_X Z + X(f)Z) - \nabla_X (f\nabla_Y Z + Y(f)Z) + f\nabla_{[X,Y]} Z + [X, Y](f)Z \\ &= f\nabla_Y \nabla_X Z + Y(f)\nabla_Y Z + YX(f)Z \\ &- f\nabla_X \nabla_Y Z - X(f)\nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - XY(f)Z \\ &+ f\nabla_{[X,Y]} Z + XY(f)Z - YX(f)Z \\ &= fR(X, Y)Z \end{aligned}$$

und insbesondere

$$R(X, Y)(fZ_1 + gZ_2) = fR(X, Y)Z_1 + gR(X, Y)Z_2.$$

Daraus folgt, dass R ein Tensor ist, der sogenannte **Riemannsche Krümmungstensor**. (Dies erklärt den Term $\nabla_{[X,Y]} Z$.)
Es folgt auch, dass $(R(X, Y)Z)_p$ am Punkt $p \in M$ nur von den Vektoren $X(p), Y(p)$ und $Z(p)$ abhängt.
Ferner gilt:

1) $R(X,Y)Z + R(Y,X)Z = 0$ (offensichtlich).

2) Symmetrie von ∇ + Jacobi-Identität für $[,]$ impliziert die **Bianchi-Identität**

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

3) Es gilt $\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle = 0$, denn

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,Z\rangle &= \left\langle \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, Z\right\rangle \\ &= \langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + \left\langle \nabla_{[X,Y]}Z, Z\right\rangle \\ &= Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle - X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle + \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle \\ &= 0,\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle &= \langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle \\ X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle &= \langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle \\ [X,Y]\langle Z,Z\rangle &= 2\left\langle \nabla_{[X,Y]}Z, Z\right\rangle.\end{aligned}$$

4) Ferner gilt

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)Z,W\rangle + \langle R(Y,Z)X,W\rangle + \langle R(Z,X)Y,W\rangle &= 0 \\ \langle R(Y,Z)W,X\rangle + \langle R(Z,W)Y,X\rangle + \langle R(W,Y)Z,X\rangle &= 0 \\ \langle R(Z,W)X,Y\rangle + \langle R(W,X)Z,Y\rangle + \langle R(X,Z)W,Y\rangle &= 0 \\ \langle R(W,X)Y,Z\rangle + \langle R(X,Y)W,Z\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle &= 0.\end{aligned}$$

Indem man alle Zeilen aufaddiert, erhält man

$$\begin{aligned}0 &= \langle R(Z,X)Y,W\rangle + \langle R(W,Y)Z,X\rangle + \langle R(X,Z)W,Y\rangle + \langle R(Y,W)X,Z\rangle \\ &= 2\langle R(Z,X)Y,W\rangle - 2\langle R(Y,W)Z,X\rangle.\end{aligned}$$

Ergo gilt auch folgende Symmetrie

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = \langle R(Z,W)X,Y\rangle.$$

In lokalen Koordinaten $(x_1,\ldots,x_n)$ setzen wir

$$X_i := \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

$X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{T}M)$ schreiben wir als

$$X = \sum_i x_i X_i, \quad Y = \sum_i y_i X_i \quad \text{und} \quad Z = \sum_i z_i X_i.$$

Dann gilt

$$R(X,Y)Z = \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k R(X,i,X_j)X_k = \sum_{i,j,k} x_i y_j z_k R^l_{ijk} X_l$$

wobei

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R^l_{jjk} X_l.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k \\ &= \nabla_{X_j} \sum_l \Gamma^l_{ik} X_l - \nabla_{X_i} \sum_l \Gamma^l_{jk} X_l \\ &= \sum_l \sum_a (\Gamma^l_{ik} \Gamma^a_{jl} - \Gamma^l_{jk} \Gamma^a_{il}) X_a \end{aligned}$$

Ergo

$$R^a_{ijk} = \sum_l (\Gamma^l_{ik} \Gamma^a_{jl} - \Gamma^l_{jk} \Gamma^a_{il})$$

Schnittkrümmung Sei $p \in M$ ein Punkt und $\sigma \subset T_pM$ ein zweidimensionaler Untervektorraum. Sei $\{x, y\}$ eine Basis für σ. Die Fläche des von x und y aufgespannten Parallelogramms ist Vorlesung vom 14.05.18

$$A(x,y) := \sqrt{||x||^2\,||y||^2 - \langle x, y\rangle}.$$

Wir betrachten

$$\kappa(x,y) := \frac{\langle R(x,y)x, y\rangle}{A(x,y)^2}.$$

1.8.6 Lemma

$\kappa(x, y)$ hängt nicht von der Wahl der Basisvektoren x, y für σ ab.

Beweis

Jede andere Basis von σ erhält man aus $\{x, y\}$ durch Anwendung der folgenden drei elementaren Transformationen:

$$\begin{aligned}
\{x,y\} &\Longrightarrow \{y,x\} \\
\{x,y\} &\Longrightarrow \{\lambda x, y\} \text{ für } \lambda \neq 0 \\
\{x,y\} &\Longrightarrow \{x + \lambda y, y\}
\end{aligned}$$

Überprüfe dann, dass $\kappa(x, y)$ invariant bleibt unter diesen drei Transformationen. □

Aufgrund obigen Lemmas dürfen wir die **Schnittkrümmung** von M entlang σ in p definieren:

$$\kappa_p(\sigma) := \kappa(x,y)$$

Die Familie aller $\{\kappa_p(\sigma)\}_{\sigma\subset T_pM}$ bestimmt R im Punkt p eindeutig. Dies folgt aus einem Resultat der linearen Algebra, nämlich:

1.8.7 Proposition

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum und seien $R, R' : V \times V \times V \to V$ trilineare Abbildungen, die beide die Symmetrien aus 1) bis 4) aus 1.8.5 erfüllen. Wenn ferner folgende Gleichheit vorliegt

$$\langle R(x,y)x, y\rangle = \langle R'(x,y)x, y\rangle$$

für alle $x, y \in V$, dann gilt

$$R = R'.$$

Ricci-Krümmung Sei $p \in M$ und $x \in T_pM$ mit $||x|| = 1$. Wir ergänzen x zu einer Orthonormalbasis $\{x, z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ von T_pM. Definiere die **Ricci-Krümmung** durch

$$\mathrm{Ric}_p(x) := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle \,.$$

$\mathrm{Ric}_p(x)$ ist unabhängig von der Wahl von $\{z_i\}_{i=1}^{n-1}$:

$$Q(x, y) := \mathrm{Spur}(z \mapsto R(x, z)y).$$

Q ist eine Bilinearform und es gilt

$$Q(x, x) = (n-1)\mathrm{Ric}_p(x).$$

1.9 Jacobi-Felder

Wir stellen uns die Frage:

Wie Schnell Entfernen sich Geodäten Voneinander?

Sei dazu (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit zusammen mit dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇. Sei $p \in M$. Ferner sei die Abbildung $\exp_p : B_0(\varepsilon) \to M$ gegeben. Sei $v \in T_pM$, dann ist

$$\gamma(t) = \exp_p(tv)$$

die eindeutig bestimmte Geodätische in p mit $\dot\gamma(0) = v$. Wir betrachten Vektorfelder entlang von Geodätischen. Sei $w \in T_v(T_pM)$. Wie im Gauss-Lemma sei $v(s)$ eine Kurve in T_pM mit $v(0) = v$ und $\dot v(0) = w$. Setze nun

$$f(t, s) := \exp_p(tv(s)).$$

Sei

$$J(t) = (\mathrm{d}\exp_p)_{tv}(tw) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, s = 0).$$

J ist ein Vektorfeld entlang γ.
γ ist eine Geodäte, ergo gilt

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\dot\gamma = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0.$$

Ist V ein Vektorfeld entlang einer parametrisierten Fläche, so gilt

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}V - \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}V = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V.$$

Das kann man durch Nachrechnen in lokalen Koordinaten überprüfen.

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) + R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)\frac{\partial f}{\partial t}$$
$$= \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) + R\left(\dot\gamma, \frac{\partial f}{\partial s}\right)\dot\gamma.$$

Daraus folgt, dass $J = \frac{\partial f}{\partial s}$ folgende Gleichung erfüllt

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}J + R(\dot\gamma, J)\dot\gamma = 0.$$

Diese Gleichung nennt man **Jacobi-Gleichung**.

In Lokalen Koordinaten: Seien $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t)\}$ parallele Vektorfelder entlang γ, die an jedem Punkt $\gamma(t)$ eine Orthonormalbasis von $T_{\gamma(t)}M$ bilden. Betrachte

$$J(t) = \sum_i f_i(t) e_i(t).$$

Es gilt

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} J(t) = \sum_i f_i''(t) e_i(t).$$

Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} R(\dot\gamma, J)\dot\gamma &= \sum_i \langle R(\dot\gamma, J)\dot\gamma, e_i\rangle\, e_i \\ &\overset{\text{Fourier-Entwicklung}}{=} \sum_{i,j} f_j \langle R(\dot\gamma, e_j)\dot\gamma, e_i\rangle\, e_i. \end{aligned}$$

Setzt man $a_{i,j} := \langle R(\dot\gamma, e_j)\dot\gamma, e_i\rangle$, so gilt

$$f_i''(t) + \sum_j a_{i,j} f_j(t) = 0$$

Dies ist eine *lineare* Differentialgleichung zweiter Ordnung.

1.9.1 Definition

Ein Vektorfeld $J(t)$ entlang einer Geodätischen $\gamma(t)$ heißt **Jacobi-Feld**, wenn $J(t)$ die Jacobi-Gleichung erfüllt.

Die Tatsache, dass eine Differentialgleichung zweiter Ordnung vorliegt, impliziert nun, dass man nach Wahl von $J(0)$ und $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}J(0)$ ein eindeutiges Jacobi-Feld durch Lösen von

$$f_i''(t) + \sum_j a_{i,j} f_j(t) = 0$$

erhält.

1.9.2 Beispiel

$\dot\gamma(t)$ und $t\dot{\gamma(t)}$ sind Jacobi-Felder für eine Geodäte γ.

1.9.3 Beispiel: Jacobi-Felder auf Mannigaltigkeiten Konstanter Schnittkrümmung

Sei M eine Mannigfaltigkeit der konstanten Schnittkrümmung κ. Definiere R' durch

$$\langle R'(X,Y)Z,W\rangle := \langle X,Z\rangle \langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle .$$

R' ist trilinear und erfüllt die Symmetrien 1) - 4) des echten Krümmungstensors aus 1.8.5. Betrachte

$$\langle R'(X,Y)X,Y\rangle = ||X||^2\, ||Y||^2 - \langle X,Y\rangle = A(X,Y)^2.$$

Ferner gilt

$$\frac{\kappa R'(X,Y)X,Y}{A(X,Y)^2} = \kappa = \frac{\langle R(X,Y)X,Y\rangle}{A(X,Y)^2}.$$

Aus 1.8.7 folgt nun

$$R = KR'.$$

Setzt man dies in die Jacobi-Gleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\langle R(\dot\gamma,J)\dot\gamma,T\rangle &= \langle \kappa R'(\dot\gamma,J)\dot\gamma,T\rangle \\ &= \kappa(\langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle \langle J,T\rangle - \langle\dot\gamma,T\rangle \langle\dot\gamma,J\rangle).\end{aligned}$$

Sei γ parametrisiert durch die Bogenlänge und J orthogonal zu γ. Es gilt

$$\langle R(\dot\gamma,J)\dot\gamma,T\rangle = \kappa \langle J,T\rangle .$$

Daraus vereinfacht sich die Jacobi-Gleichung zu

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}J + \kappa J = 0.$$

Sei $W(t)$ ein Vektorfeld entlang γ, $||W(t)|| = 1$, $\langle W,\dot\gamma\rangle = 0$, W parallel. Die vereinfachte Jacobi-Gleichung impliziert

$$J(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}}W(t) & \text{, falls } \kappa > 0, \\ tW(t) & \text{, falls } \kappa = 0, \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{-\kappa}(t))}{\sqrt{-\kappa}}W(t) & \text{, falls } \kappa < 0. \end{cases}$$

Index