

Geometrie der Mannigfaltigkeiten

Kurzschrift, SS 17

Rüştü

17. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Hyperbolische Modelle	5
1.1	Das Hyperboloidenmodell	5
1.2	Die Poincare Scheibe	6
1.3	Das obere Halbraum-Modell	8
1.4	Die Kleinsche Scheibe	8
1.5	Ränder	9
1.6	Isometrien	10
1.7	Möbiusgeschichten	12
2	Werkzeuge der Hyperbolischen Mannigfaltigkeiten	15
2.1	Hyperbolische Mannigfaltigkeiten	15
2.2	Vollständige Hyperbolische Mannigfaltigkeiten	16
2.3	Polyeder	19
3	Dick-Dünn-Zerlegung	23
3.1	Tuben und Spitzen	23
3.2	Exkurs zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren	25
3.3	Zassenhaus	26
3.4	Margulis Lemma	28
3.5	Dick-Dünn-Zerlegung	31
4	Mostows Rigiditäts-Theorem	35
4.1	Inside group! Outside group! Which side group? I don't know!	35
4.2	Limes Geschichten	37
4.3	Die Epstein-Penner-Konstruktion	43
4.4	Erweiterungen von Homotopie-Äquivalenzen	45
4.5	Topologisches Volumen	49
5	Aufgaben	53
5.1	Blatt 1	53
5.2	Blatt 2	59

Kapitel 1

Hyperbolische Modelle

1.1 Das Hyperboloidenmodell

1.1.1 Definition

Definiere die **Lorentzform** auf \mathbb{R}^{n+1} durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt

$$\begin{cases} \text{zeitartig, falls } \langle x, x \rangle < 0 \\ \text{lichtartig, falls } \langle x, x \rangle = 0 \\ \text{raumartig, falls } \langle x, x \rangle > 0 \end{cases}$$

Definiere das **Hyperboloidenmodell** von \mathbb{H}^n durch

$$I^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = -1, p_{n+1} > 0\}$$

1.1.2 Proposition

I^n ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Beweis

Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \langle x, x \rangle$. Dann ist $df_p(v) = 2\langle v, p \rangle$. Ergo ist df_p surjektiv für alle $p \in M := f^{-1}(-1)$. Ergo ist M eine glatte Hyperfläche von \mathbb{R}^{n+1} .

Ferner ist

$$T_p M = \text{Kern } df_p = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v \rangle = 0\} = p^\perp$$

Da p zeitartig ist, ist $\langle _, _ \rangle$ auf $T_p M$ positiv definit. I^n ist nun gerade die obere Zusammenhangskomponente von M . \square

1.1.3 Lemma

Definiere

$$O(n, 1) = \{A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid \langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle\}$$

und

$$O(n, 1)^+ = \{A \in O(n, 1) \mid A(I^n) \subset I^n\}$$

Dann ist $O(n, 1)^+$ eine Index-2-Gruppe von $O(n, 1)$ und

$$\text{Isom}(I^n) = O(n, 1)^+$$

Ferner gilt

$$\text{Isom}(S^n) = O(n) \text{ und } \text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$$

1.1.4 Proposition

Die k -dimensionalen, vollständigen, total geodätischen, zusammenhängenden Riemannschen Untermannigfaltigkeiten von I^n sind genau die Schnitte

$$I^n \cap W^{k+1}$$

wobei W^{k+1} ein $k + 1$ -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^{n+1} ist, der keinen leeren Schnitt mit I^n hat.

Folgende Aussagen sind für einen $k + 1$ -dimensionalen Untervektorraum von \mathbb{R}^{n+1} äquivalent:

$$W^{k+1} \cap I^n \neq \emptyset$$

W^{k+1} besitzt einen zeit-ähnlichen Vektor

$\langle _, _ \rangle$ besitzt auf W^{k+1} die Signatur $(k, 1)$

1.1.5 Bemerkung

Ein k -Unterraum von I^n ist isometrisch zu I^k .

1.1.6 Proposition

Jede nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte von I^n ist von der Gestalt

$$\gamma(t) = \cosh(t)\gamma(0) + \sinh(t)\dot{\gamma}(0)$$

1.1.7 Korollar

H^n ist vollständig.

1.2 Die Poincare Scheibe

1.2.1 Lemma: Poincare-Scheiben-Modell

Definiere die **Poincare-Scheibe** durch

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

und folgenden Diffeomorphismus

$$p : I^n \longrightarrow D^n$$

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \longmapsto \frac{1}{x_{n+1} + 1} (x_1, \dots, x_n)$$

Dann ist die Metrik auf D^n gerade gegeben durch

$$g_x^D = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g_x^E$$

wobei g^E die euklidische Metrik von \mathbb{R}^n bezeichnet.

Beweis

Die Umkehrabbildung von p ist gerade

$$p^{-1}(x) = \frac{(2x, 1 + \|x\|^2)}{1 - \|x\|^2}$$

Ihre Derivation ist

$$d_x p^{-1}(u) = \frac{2(u(1 - \|x\|^2) + 2x(x|u), 2(x|u))}{(1 - \|x\|^2)^2}$$

Es gilt

$$\langle d_x p^{-1}(u), d_x p^{-1}(u) \rangle = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \|u\|^2$$

Da p^{-1} eine Isometrie sein soll und das Verhalten einer Metrik durch ihre Norm bestimmt ist, folgt nun

$$g_x^D = g_{p^{-1}(x)}^I \circ d_x p^{-1} = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g_x^E$$

□

1.2.2 Definition

Ein Diffeomorphismus

$$f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$$

heißt **konform**, falls eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass

$$f^*(h_{f(p)}) = \lambda(p) \cdot g_p$$

1.2.3 Bemerkung

Die Poincaré-Scheibe ist ein konformes Modell von \mathbb{H}^n , d. h., (D^n, g^E) und (D^n, g^D) sind zueinander konform.

Daraus folgt nun insbesondere, dass Winkel von sich schneidenden Geodäten in (D^n, g^D) genauso wie in (D^n, g^E) gemessen werden dürfen.

1.2.4 Lemma

Die k -dimensionalen, vollständigen, zusammenhängenden, total geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Poincaré-Scheibe sind ihre Schnitte mit k -Sphären und k -Ebenen von \mathbb{R}^n , die orthogonal zum Rand der Poincaré-Scheibe liegen.

1.2.5 Definition

Sei $S_p(r) \subset \mathbb{R}^n$ eine Sphäre mit Radius r um p . Definiere die **Inversion** an $S_p(r)$ durch

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \\ x &\longmapsto p + r^2 \frac{x - p}{\|x - p\|^2} \end{aligned}$$

1.2.6 Proposition

Jede Inversion ist **anti-konform**, d. h. konform und Orientierung umkehrend, und bildet Sphären und Ebenen auf Sphären und Ebenen ab.

1.3 Das obere Halbraum-Modell

1.3.1 Definition

Das **obere Halbraum-Modell**

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

ergibt sich durch eine Inversion der Poincare-Scheibe an der Sphäre

$$S = S_{(0, \dots, 0, -1)}(\sqrt{2})$$

Insofern ist die obere Halbebene ein konformes Modell von \mathbb{H}^n .

1.3.2 Proposition

Die k -Ebenen von H^n sind die k -Ebenen und k -Sphären von \mathbb{R}^n , die orthogonal zu ∂H^n sind.

1.3.3 Proposition

Die Metrik auf H^n ist gegeben durch

$$g_x^H = \frac{1}{x_n^2} g^E$$

1.3.4 Proposition

Folgende Abbildungen sind Isometrien von H^n :

1.) Horizontale Translationen:

$$x \mapsto x + (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$$

2.) Dilationen:

$$x \mapsto x \cdot \lambda$$

3.) Inversionen an Sphären orthogonal zu ∂H^n

1.3.5 Proposition

Die Isometrien der Poincare-Scheibe und der oberen Halbebene werden durch Inversionen an Sphären und Reflektion an Euklidischen Ebenen, die alle orthogonal zum Rand stehen, erzeugt.

1.3.6 Proposition

In den konformen Modellen sind Kugeln genau die euklidischen Kugeln mit exzentrischen Mittelpunkten.

1.4 Die Kleinsche Scheibe

1.4.1 Definition

Die **Kleinsche Ebene** besitzt dieselbe Trägermenge $K^n = D^n$ wie die Poincare-Scheibe. Allerdings entsteht die Kleinsche-Ebene durch einen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} I^n &\longrightarrow K^n \\ x &\longmapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{x_n} \end{aligned}$$

Die Kleinsche Scheibe ist nicht konform, weswegen ihre Winkel nicht durch eine euklidische Einbettung gemessen werden können. Allerdings sind ihre Geodäten genau die Geraden des \mathbb{R}^n .

1.5 Ränder

1.5.1 Definition

Zwei nach Bogenlänge parametrisierte Geodäten $\alpha, \beta : [0, \infty) \rightarrow M$ heißen **asymptotisch äquivalent**, falls die Funktion

$$t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

beschränkt ist.

Asymptotisch äquivalent Sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geodätischer Halbgeraden. Teilt man diese Relation heraus, erhält man den **Rand** ∂M einer Mannigfaltigkeit M . Insbesondere schreibt man

$$\overline{M} = M \cup \partial M$$

1.5.2 Proposition

Es gibt eine Bijektion zwischen ∂D^n als Rand einer Mannigfaltigkeit und S^{n-1} .

Da ferner $\overline{D^n}$ eine naheliegende Topologie besitzt, können wir diese auf $\overline{\mathbb{H}^n}$ zurückführen.

Beweis

Sei $\gamma : [0, \infty) \rightarrow D^n$ ein geodätischer Strahl. Da γ sich orthogonal mit S^{n-1} im Unendlichen schneiden muss, folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) \in S^{n-1}$$

Hierdurch erhalten wir eine surjektive Abbildung

$$R(\gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$$

Wir müssen nun zeigen, dass zwei nach Bogenlänge parametrisierte Strahlen γ, β unter R genau dann dasselbe Bild haben, wenn sie asymptotisch äquivalent sind.

Wir transformieren das Problem zu einem Problem auf H^n und rechnen die geforderte Eigenschaft dort konstruktiv nach. \square

1.5.3 Bemerkung

Man kann auch alternativ wie folgt eine Basis der Topologie von $\overline{\mathbb{H}^n}$ definieren: Dazu nimmt man alle offenen Mengen von \mathbb{H}^n und schmeißt alle Mengen der Gestalt

$$\{\alpha(t) \in \mathbb{H}^n \mid \alpha(0) = \gamma(0), \dot{\alpha}(0) \in V, t > r\} \cup \{[\alpha] \in \partial \mathbb{H}^n \mid \alpha(0) = \gamma(0), \dot{\alpha}(0) \in V\}$$

für alle $[\gamma] \in \partial \mathbb{H}^n, V \subseteq_o T_{\gamma(0)} M, r > 0$. Die hierdurch entstehende Topologie stimmt der durch obige Proposition überein.

1.5.4 Proposition

Seien S, S' zwei geodätisch vollständige Teilräume von \mathbb{H}^n . Dann treten genau einer der folgenden Fälle ein:

- S und S' sind **inzident**, d. h., $S \cap S' \neq \emptyset$.

- S und S' sind **asymptotisch parallel**, d. h., $S \cap S' = \emptyset$ und $d(S, S') = 0$. Ferner ist dann $\overline{S} \cap \overline{S'}$ ein Punkt in \mathbb{H}^n und existiert keine Geodäte, die zu beiden Räumen orthogonal ist.
- S und S' sind **ultra-parallel**, d. h., $\overline{S} \cap \overline{S'} = \emptyset$ und $d(S, S') > 0$. In diesem Fall existiert genau eine Geodäte, die orthogonal zu beiden Teilräumen steht und den Abstand zwischen beiden realisiert.

Beweis

Enthält $\overline{S} \cap \overline{S'}$ mindestens zwei Punkte, so enthält der Schnitt auch eine Geodäte zwischen beiden Punkten. Wir können also annehmen, dass sich S und S' wenn überhaupt nur im Unendlichen schneiden und dort höchstens einen Schnittpunkt haben.

Besteht $\overline{S} \cap \overline{S'}$ aus genau einem Punkt, so können wir die Situation in den H^n transformieren und fordern, dass der gemeinsame Schnittpunkt gerade ∞ ist. In diesem Fall stehen S und S' parallel zur imaginären Achse, weswegen die Eigenschaften des zweiten Falles folgen.

Im zweiten Fall finden wir $x \in S, x' \in S'$ mit $d(x, x') = d(S, S')$, da \overline{S} und $\overline{S'}$ kompakt sind. Die Geodäte, die x und x' verbindet, muss orthogonal sein, da wir sie sonst verschieben könnten, um den Abstand zwischen S und S' zu minimieren. Es kann keine weitere Geodäte zwischen S und S' mit Abstand $d(S, S')$ geben, da wir sonst einen flachen Bereich gefunden hätten. \square

1.5.5 Lemma

Eine Isometrie $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ lässt sich zu einem Homöomorphismus $\overline{\phi} : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ fortsetzen. ϕ ist durch $\overline{\phi}|_{\partial\mathbb{H}^n}$ eindeutig festgelegt.

1.6 Isometrien

1.6.1 Proposition

Sei $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ eine nichttriviale Isometrie. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- ϕ ist **elliptisch**, d. h., ϕ hat einen oder mehrere Fixpunkte in \mathbb{H}^n .
- ϕ ist **parabolisch**, d. h., ϕ hat keinen Fixpunkt in \mathbb{H}^n , aber genau einen in $\partial\mathbb{H}^n$.
- ϕ ist **hyperbolisch**, d. h., ϕ hat keinen Fixpunkt in \mathbb{H}^n , aber genau zwei in $\partial\mathbb{H}^n$.

Beweis

Wir können $\overline{\phi}$ als einen Homöomorphismus von $\overline{D^n}$ auf sich selbst auffassen. Nach Brauers Fixpunktsatz muss ϕ dann mindestens einen Fixpunkt haben. Hat ϕ keinen Fixpunkt in D^n aber mindestens drei auf dem Rand, so fixiert ϕ jeden Punkt in \mathbb{H}^n , da jeder Punkt in D^n durch seine Winkel zu den drei verschiedenen Randpunkten eindeutig determiniert ist. \square

1.6.2 Definition

Eine hyperbolische Isometrie fixiert zwei Randpunkte und damit auch die Geodäte, die zwischen beiden verläuft. Diese eindeutig bestimmte Geodäte nenne wir die **Achse** von ϕ .

1.6.3 Definition

Eine **Horosphäre** $S \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ um den Punkt $p \in \partial\mathbb{H}^n \setminus \{\infty\}$ ist eine $n-1$ -dimensionale euklidische Sphäre, die $\partial\mathbb{H}^n$ tangential in p schneidet. Eine Horosphäre um ∞ ist eine $n-1$ -dimensionale euklidische Hyperebene, die orthogonal zur imaginären Achse steht.

Beide Horosphären sind flache Untermannigfaltigkeiten mit der Eigenschaft, dass jede Geodäte, die ihr Zentrum verlässt, die Horosphäre orthogonal schneidet.

1.6.4 Proposition

Wir stellen Punkte aus H^n in der Form (x, t) dar. Sei ϕ eine nichttriviale Isometrie von \mathbb{H}^n .

- Ist ϕ elliptisch mit Fixpunkt $0 \in D^n$, so gibt es ein $A \in O(n)$, sodass sich ϕ darstellen lässt durch

$$\begin{aligned}\phi : D^n &\longrightarrow D^n \\ x &\longmapsto Ax\end{aligned}$$

- Ist ϕ parabolisch mit Fixpunkt $\infty \in \partial H^n$, so gibt es $A \in O(n-1)$ und $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, sodass

$$\begin{aligned}\phi : H^n &\longrightarrow H^n \\ (x, t) &\longmapsto (Ax + b, t)\end{aligned}$$

- Ist ϕ hyperbolisch mit Fixpunkten $0, \infty \in \partial H^n$, so gibt es ein $\lambda > 0, \neq 1$ und ein $A \in O(n-1)$, sodass

$$\begin{aligned}\phi : H^n &\longrightarrow H^n \\ (x, t) &\longmapsto (\lambda Ax, \lambda t)\end{aligned}$$

Beweis

Der elliptische Fall ist klar.

Sei der zweite Fall gegeben. Ist O eine Horosphäre um ∞ , so muss $\phi(O)$ wieder eine Horosphäre um ∞ liefern. Dann gibt es ein $(x, t) \in O$, sodass $\phi(x, t) = (x, t')$. Ist $t' \neq t$, so erhält ϕ eine Geodäte durch (x, t) und ∞ und ist nicht mehr parabolisch. Ergo ist $\phi(O) = O$. D. h., ϕ ist auf jeder Horosphäre um ∞ durch eine euklidische Isometrie gegeben.

Sei nun der dritte Fall gegeben. ϕ erhält die imaginäre Achse, ergo gibt es ein λ mit $\phi(0, 1) = (0, \lambda)$. Setzt man $\psi(x, t) = \lambda^{-1}\phi(x, t)$, so gibt es ein $A \in O(n-1)$ mit

$$d_{(0,1)}\psi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

womit folgt

$$\psi(x, t) = (Ax, t)$$

□

1.6.5 Definition

Für eine Isometrie $\phi : M \rightarrow M$ sei die **Versetzung** definiert durch

$$d(\phi) := \inf_{p \in M} d(p, \phi(p))$$

1.6.6 Korollar

- Eine elliptische Isometrie hat eine Versetzung von 0, die an ihren Fixpunkten verwirklicht wird.
- Eine parabolische Isometrie hat eine Versetzung von 0, die nirgendwo realisiert wird, und fixiert jede Horosphäre um ihren Fixpunkt.
- Eine hyperbolische Isometrie hat eine Versetzung von $d > 0$, die genau auf ihrer Achse realisiert wird.

1.7 Möbiusgeschichten

1.7.1 Definition

Es bezeichne $S = \mathbb{C} \cup \infty$ die **Riemannsche Zahlenkugel**. Die Gruppe $PSL_2(\mathbb{C})$ agiert auf S durch die **Möbiustransformation**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z := \frac{az + b}{cz + d}$$

Die Möbiustransformation ist ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus auf S .

Die **Anti-Möbiustransformation** gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z := \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

ist ein orientierungsumkehrender Diffeomorphismus auf S .

Unter $Conf(S) \subset Diffeo(S)$ verstehen wir die Menge aller Möbius- und Anti-Möbiustransformationen, die durch Elemente aus $PSL_2(\mathbb{C})$ induziert werden.

1.7.2 Proposition

Inversionen entlang Sphären und Spiegelungen entlang Geraden sind beides Anti-Möbiustransformationen und erzeugen $Conf(S)$.

1.7.3 Lemma

Betrachte

$$H^2 = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

und setze

$$Conf(H^2) = \{\phi \in Conf(S) \mid \phi(H^2) \subseteq H^2\}$$

Dann ist jede Transformation aus $Conf(H^2)$ induziert durch eine Matrix mit reellen Einträgen, deren Determinante gleich 1 ist, falls die Transformation orientierungserhaltend ist, anderenfalls -1 ist.

Es gilt

$$Conf^+(H^2) = PSL_2(\mathbb{R})$$

1.7.4 Proposition

Inversionen entlang Kreisen und Reflexionen entlang Geraden, die beide orthogonal zu \mathbb{R} sind, generieren $Conf(H^2)$.

1.7.5 Korollar

$$Conf(H^2) = Isom(H^2)$$

1.7.6 Proposition

Eine nichttriviale Transformation $A \in PSL_2(\mathbb{R})$ ist

- elliptisch, falls $|tr(A)| < 2$
- parabolisch, falls $|tr(A)| = 2$
- hyperbolisch, falls $|tr(A)| > 2$

1.7.7 Proposition

Da $\partial H^3 = S$, gilt

$$\text{Isom}(H^2) = \text{Conf}(S)$$

1.7.8 Proposition

Eine nichttriviale Transformation $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ ist

- elliptisch, falls $\text{tr}(A) \in (-2, 2)$
- parabolisch, falls $\text{tr}(A) = \pm 2$
- hyperbolisch, falls $\text{tr}(A) \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$

1.7.9 Proposition

Die Distanzfunktion ist auf \mathbb{H}^n **strikt konvex**, d. h., für je zwei nach Bogenlänge parametrisierte, disjunkte Geodäten $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ gilt

$$d(\alpha(tx_1 + (1-t)y_1), \beta(tx_2 + (1-t)y_2)) < td(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + (1-t)d(\alpha(y_1), \beta(y_2))$$

für alle $x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2, t \in (0, 1)$.

Beweis

Da die Distanzfunktion stetig ist, genügt es die Aussage für $t = \frac{1}{2}$ zu zeigen, also

$$d(\alpha(\frac{x_1 + y_1}{2}), \beta(\frac{x_2 + y_2}{2})) < \frac{d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(\alpha(y_1), \beta(y_2))}{2}$$

Setze

$$m := \alpha(\frac{x_1 + y_1}{2}) \text{ und } n := \beta(\frac{x_2 + y_2}{2})$$

Für einen Punkt $p \in \mathbb{H}^n$ bezeichne s_p die Punktspiegelung bei p . Dies ist eine globale Isometrie. Für zwei verschiedene Punkte p, q ist $s_p \circ s_q$ eine orientierungserhaltende Isometrie. Insbesondere ist diese hyperbolisch, denn ist l die Geodäte, die p und q enthält, so wird jeder Punkt auf l um $2d(p, q)$ entlang l bewegt.

Setze nun

$$\tau = s_n \circ s_m$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha(x_1), \tau(\alpha(x_1))) &\leq d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(\beta(x_2), \tau(\alpha(x_1))) \\ &= d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(s_n(\beta(y_2)), s_n(\alpha(y_1))) \\ &= d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(\beta(y_2), \alpha(y_1)) \end{aligned}$$

Da $\alpha(x_1)$ nicht auf der hyperbolischen Achse von τ liegt, gilt ferner

$$\begin{aligned} 2d(m, n) &= d(m, \tau(m)) \\ &< d(\alpha(x_1), \tau(\alpha(x_1))) \\ &\leq d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(\beta(y_2), \alpha(y_1)) \end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Werkzeuge der Hyperbolischen Mannigfaltigkeiten

2.1 Hyperbolische Mannigfaltigkeiten

2.1.1 Definition

Eine Mannigfaltigkeit heißt **hyperbolisch**, wenn sie durch offene, lokal isometrische Karten $\phi : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ überdeckt wird und zusammenhängend ist.

2.1.2 Satz

Eine hyperbolische, einfach zusammenhängende, vollständige Mannigfaltigkeit ist isometrisch zu \mathbb{H}^n .

Beweis: Skizze

Wir konstruieren eine lokal isometrische Abbildung $D : M \rightarrow \mathbb{H}^n$. Zuerst wählen wir eine Karte $U \rightarrow \mathbb{H}^n$ und einen Punkt $p \in U$. Für ein beliebiges $q \in M$ wählen wir einen Weg $\gamma : p \mapsto q$ und überdecken diesen Weg mit endlich vielen hyperbolischen, kompatiblen Karten. Dadurch können wir q einem Punkt aus $D(q) \in \mathbb{H}^n$ zuordnen.

Um die Wohldefiniertheit von D zu zeigen, zeigt man zuerst, dass die Wahl der Karten, die γ überdecken unerheblich für die Wahl des Bildpunktes $D(q)$ sind.

Danach zeigt man, dass $D(q)$ unabhängig von der Wahl des Weges $\gamma : p \mapsto q$ ist. Denn ist $H : \gamma \sim \gamma'$ eine Homotopie mit fixierten Endpunkten, so ist $D(H)$ ebenfalls eine Homotopie mit fixierten Endpunkten.

Da D lokal isometrisch und M geodätisch vollständig ist, ist D surjektiv. Da \mathbb{H}^n ferner einfach zusammenhängend ist, ist D injektiv. \square

2.1.3 Korollar

Ist M eine hyperbolische, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, so gibt es eine lokal isometrische Abbildung $D : M \rightarrow \mathbb{H}^n$, die sogenannte **Entfaltung**, die eindeutig bis auf Nachschaltung einer Isometrie auf \mathbb{H}^n ist.

2.1.4 Proposition

Sei M eine hyperbolische Mannigfaltigkeit und $D : M \rightarrow \mathbb{H}^n$ eine lokale Isometrie. Für jedes $g \in \text{Isom}(M)$ existiert genau ein $\rho(g) \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{D} & \mathbb{H}^n \\ \downarrow g & & \downarrow \rho(g) \\ M & \xrightarrow{D} & \mathbb{H}^n \end{array}$$

Die Abbildung $\rho : \text{Isom}(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ ist eine Gruppenhomomorphismus und heißt die **Holonomie** zu D .

2.1.5 Bemerkung

Sei M eine hyperbolische, vollständige Mannigfaltigkeit. Ist $\widetilde{M} \rightarrow M$ die universelle Überlagerung von M , so ist \widetilde{M} hyperbolisch, vollständig und einfach zusammenhängend und deswegen isometrisch zu \mathbb{H}^n . Wir erhalten also eine lokal isometrische Überlagerung $\mathbb{H}^n \rightarrow M$ und wissen dadurch

$$\pi_1(M) = \text{Deck}(\mathbb{H}^n \rightarrow M) \subseteq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$$

2.2 Vollständige Hyperbolische Mannigfaltigkeiten

2.2.1 Definition

Sei G eine Gruppe, die auf einen topologischen Raum X wirkt. Diese Wirkung heißt **eigentlich diskontinuierlich**, falls es für jedes Paar von zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ Umgebungen U_x, U_y existieren, sodass

$$\#\{g \in G \mid g \cdot U_x \cap U_y \neq \emptyset\} < \infty$$

Die Wirkung heißt **frei**, falls jedes nichttriviale $g \in G$ fixpunktfrei auf X wirkt.

2.2.2 Lemma

Wirkt $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ frei und eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{H}^n , so besitzt \mathbb{H}^n/Γ genau eine Struktur als hyperbolische, vollständige Mannigfaltigkeit, durch die $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$ zu einer **Riemannschen Überlagerung**, d. h., lokal isometrischen Überlagerung wird.

2.2.3 Proposition

Jede vollständige, hyperbolische Mannigfaltigkeit ist isometrisch zu \mathbb{H}^n/Γ für eine passende Gruppe $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, die frei und eigentlich diskontinuierlich wirkt.

2.2.4 Bemerkung

$\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ wirkt genau dann eigentlich diskontinuierlich, wenn Γ diskret ist.

Beweis

Γ wirke eigentlich diskontinuierlich. Seien $x, y \in \mathbb{H}^n$, dann gibt es Umgebungen U_x, U_y , sodass nur endlich viele Elemente aus Γ U_x über U_y bewegen.

Definiert man die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{H}^n \\ g &\longmapsto g(x)\end{aligned}$$

so besitzt die offene Menge $\phi^{-1}(U_x)$ nur endlich viele Elemente. Ergo besitzt jeder Punkt aus Γ eine endliche Umgebung.

Sei Γ nun diskret. Seien $x, y \in \mathbb{H}^n$ zwei verschiedene Punkte. Definiere $A := \{g \in \Gamma \mid g.U_x \cap U_y \neq \emptyset\}$. Indem wir U_x und U_y sukzessive kleiner machen, finden wir eine Folge in Γ , die durch ein Kompaktum beschränkt wird. Da Γ endlich ist, muss dieses Kompaktum endlich sein. \square

2.2.5 Proposition

\mathbb{H}^n/Γ und \mathbb{H}^n/Σ sind genau dann isometrisch, wenn Σ und Γ konjugiert in \mathbb{H}^n sind.

Beweis

\mathbb{H}^n/Γ und \mathbb{H}^n/Σ sind genau dann isometrisch, wenn es eine Isometrie $\phi : \mathbb{H}^n/\Gamma \rightarrow \mathbb{H}^n/\Sigma$ gibt. Da \mathbb{H}^n beide Räume überlagert, gibt es diese Isometrie genau dann, wenn es eine Isometrie $\tilde{\phi}$ gibt, die folgendes Diagramm kommutieren lässt

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{H}^n & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathbb{H}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^n/\Sigma & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{H}^n/\Gamma\end{array}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein Element $\tilde{\phi}$ in $Isom(\mathbb{H}^n)$ gibt, sodass für es für jedes $\sigma \in \Sigma$ ein $\gamma \in \Gamma$ gibt mit

$$\tilde{\phi} \circ \sigma = \gamma \circ \tilde{\phi}$$

\square

2.2.6 Bemerkung

Wirkt $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ eigentlich diskontinuierlich, so ist für jedes $p \in \mathbb{H}^n$ der **Stabilisator**

$$Stab_{\Gamma}(p) := \{g \in \Gamma \mid g(p) = p\}$$

endlich und jeder **Orbit** von Γ in p

$$\Gamma.p := \{g(p) \mid g \in \Gamma\}$$

diskret.

2.2.7 Definition

Eine Menge von Teilmengen von \mathbb{H}^n heißt **lokal endlich**, falls sie für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{H}^n$ nur endlich viele Teilmengen besitzt, die einen nicht-leeren Schnitt mit K haben.

2.2.8 Proposition

$\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ wirke eigentlich diskontinuierlich. Dann liegt die Menge

$$\{p \in \mathbb{H}^n \mid Stab_\Gamma(p) \text{ ist trivial}\}$$

offen und dicht in \mathbb{H}^n .

Beweis

Setze

$$\mathcal{A} := \{Fix(g) \mid g \in \Gamma \setminus \{\text{id}_{\mathbb{H}^n}\}\}$$

\mathcal{A} ist lokal endlich, da Γ diskret ist. Setze nun

$$B := \mathbb{H}^n \setminus \left(\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \right)$$

Dann ist B offen und es gilt

$$B = \{p \in \mathbb{H}^n \mid Stab_\Gamma(p) \text{ ist trivial}\}$$

Jedes $X \in \mathcal{A}$ ist eine echte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{H}^n . Deswegen und weil \mathcal{A} lokal endlich ist, liegt B dicht in \mathbb{H}^n . \square

2.2.9 Proposition

Eine diskrete Gruppe $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ agiert genau dann frei, wenn sie **torsionsfrei** ist, d. h., kein Element endlicher Ordnung besitzt.

Beweis

Es sei Γ diskret und besitze ein Torsionselement ϕ . Für einen Punkt p ist dann die Menge $\{\phi^k(p) \mid k \geq 0\}$ endlich. Der Mittelpunkt von dieser Menge wird dann durch ϕ fixiert.

Ist Γ nicht frei, so gibt es ein p mit $Stab_\Gamma(p) \neq 1$. Da Γ diskret ist, ist $Stab_\Gamma(p)$ eine endliche, nicht-triviale Untergruppe von Γ und besitzt deswegen Torsionselemente. \square

2.2.10 Satz

Es gibt eine natürliche Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen der Menge der vollständigen hyperbolischen Mannigfaltigkeiten modulo Isometrie und der Menge der torsionsfreien, diskreten Untergruppen von $Isom(\mathbb{H}^n)$ modulo Konjugation.

2.2.11 Satz

Agiert $\Gamma < Isom(\mathbb{H}^n)$ frei und eigentlich diskontinuierlich, so tut dies auch jede Untergruppe von Γ . Wir erhalten eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen Überlagerungen $\mathbb{H}^n/\Gamma' \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$ und den Untergruppen $\Gamma' < \Gamma$, wobei der Grad der Überlagerung gerade mit dem Index der Untergruppe übereinstimmt.

2.2.12 Lemma: Selberg

Ist $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ endlich erzeugt, so existiert eine normale, torsionsfreie Untergruppe $H \subset G$ von endlichem Index.

2.2.13 Korollar

Jede endlich erzeugte, diskrete Untergruppe $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ enthält eine normale Untergruppe endlichen Index, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{H}^n agiert.

2.2.14 Definition

Die spezielle lineare Untergruppe $PSL_2(\mathbb{Z}) < PSL_2(\mathbb{R}) = Isom^+(\mathbb{H}^2)$ ist diskret, agiert aber nicht frei auf \mathbb{H}^2 .

Betrachte aber folgenden Gruppenhomomorphismus für $m \geq 2$

$$\text{mod } m : PSL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

Den Kern $\Gamma(m)$ dieser Abbildung nennt man die **Kongruenzenuntergruppe**. Er ist eine diskrete Untergruppe in $PSL_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index.

2.2.15 Proposition

Für $m \geq 4$ agiert $\Gamma(m)$ frei auf \mathbb{H}^2 .

2.3 Polyeder

2.3.1 Definition

Wir nennen eine Menge von Halbräumen in \mathbb{H}^n **lokal endlich**, wenn die Menge der korrespondierenden Hyperebenen lokal endlich ist.

Eine n -dimensionaler **Polyeder** in \mathbb{H}^n ist eine Teilmenge, die sich als Schnitt von einer lokal endlichen Menge von Halbräumen schreiben lässt und eine offene Menge enthält.

2.3.2 Bemerkung

Ist $P \subset \mathbb{H}^n$ ein Polyeder, so sind P und $\overline{P} \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ konvex.

2.3.3 Definition

Für eine beliebige $S \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ definieren wir ihre **konvexe Hülle** als die kleinste konvexe Menge, die S enthält.

2.3.4 Definition

Unter einem **endlichen Polyeder** P verstehen wir die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten in \mathbb{H}^n , die nicht alle im unendlichen Abschluss einer Hyperebene liegen.

Liegt eine Ecke von P in $\partial\mathbb{H}^n$, so nennen wir sie **ideal**, ansonsten **endlich**.

Sind alle Ecken von P ideal, so nennen wir P einen **idealen Polyeder**.

2.3.5 Lemma

Sei $O \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ eine Horosphäre um $p \in \partial\mathbb{H}^n$. $D \subset O$ sei eine Menge endlichen Volumens und C der **Kegel** über D , d. h., C besteht aus allen Geodätischen Strahlen, die von einem Punkt aus D nach p führen. Es gilt

$$\text{vol}(C) = \frac{\text{vol}_O(D)}{n-1}$$

wobei $\text{vol}_O(D)$ das $n-1$ -dimensionale Volumen im affinen Raum O bezeichnet.

Beweis

Wir betrachten die Situation im oberen Halbraum-Modell mit $p = \infty$. O ist dann eine Hyperebene, die orthogonal zur imaginären Achse steht und eine Höhe h hat. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C) &= \int_C \frac{1}{t^n} dx_1 \dots dx_{n-1} dt \\ &= \int_D dx_1 \dots dx_{n-1} \int_h^\infty \frac{1}{t^n} dt \\ &= \int_D dx_1 \dots dx_{n-1} \cdot \frac{1}{h^{n-1}} \frac{1}{n-1} dt \\ &= \frac{\text{Vol}_O(D)}{n-1} \end{aligned}$$

□

2.3.6 Proposition

Jeder endliche Polyeder hat endliches Volumen.

Beweis

Besitzt ein endlicher Polyeder P keine idealen Ecken, so ist die Aussage klar. Ansonsten kann man um jede ideale Ecke eine Horosphäre ziehen. Hierdurch wird P in zwei Mengen aufgeteilt: P geschnitten mit dem Inneren aller Horosphären und P ohne das Innere der Horosphären.

Durch obiges Lemma lässt sich das Volumen der ersten Menge abschätzen. □

2.3.7 Definition

Eine **Kachelung** ist eine lokal endliche Menge von Polyedern, die \mathbb{H}^n überdecken und sich jeweils nur in gemeinsamen Facetten schneiden.

2.3.8 Proposition

Ist $S \subset \mathbb{H}^n$ diskret, so definiere die **Voronoi-Kachelung** für $p \in S$ durch

$$D(p) := \{q \in \mathbb{H}^n \mid d(p, q) \leq d(p', q) \forall p' \in S\}$$

Beweis

Wir müssen zeigen, dass die Voronoi-Kachelung tatsächlich eine Kachelung ist. Sind $p, p' \in S$ zwei verschiedene Punkte, so ist

$$\{q \in \mathbb{H}^n \mid d(p, q) = d(p', q)\}$$

eine Hyperebene und

$$H(p, p') := \{q \in \mathbb{H}^n \mid d(p, q) \leq d(p', q)\}$$

ein Halbraum. Es gilt

$$D(p) = \bigcap_{p' \in S} H(p, p')$$

und da S diskret ist, sind all diese Halbräume lokal endlich.

Sind p, p' in S verschieden, so ist $D(p) \cap D(p')$ in der Hyperebene

$$\{q \in \mathbb{H}^n \mid d(p, q) = d(p', q)\}$$

enthalten. □

2.3.9 Definition

Ein **Fundamentalebereich** für eine diskrete Gruppe $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ ist ein Polyeder $D \subset \mathbb{H}^n$, sodass alle $g(D)$ verschieden sind und eine Kachelung von \mathbb{H}^n bilden.

2.3.10 Bemerkung

Ist $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ eine diskrete Gruppe und $p \in \mathbb{H}^n$ ein Punkt mit trivialen Stabilisator, so erhält man durch $S = \Gamma.p$ eine Voronoi-Kachelung, deren Kacheln gerade einen Fundamentalebereich für Γ bilden. Diese Kacheln nenne wir **Dirichlet-Bereiche**. Es gilt

$$D(g(p)) = g.D(p)$$

2.3.11 Proposition

Ist $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ und D ein Fundamentalebereich für Γ , so gilt

$$Vol_{\mathbb{H}^n}(D) = Vol_M(M)$$

Ist ferner D ein Dirichlet-Bereich, so ist D genau dann kompakt, wenn M kompakt ist.

2.3.12 Definition

Eine n -dimensionale **Verklebung** besteht aus einer endlichen Menge von n -Simplizes und aus affinen Verklebungsabbildungen, die jede Facette eines Simplex mit genau einer anderen Facette identifizieren. Hieraus entsteht ein n -dimensionaler Raum, indem man alle Simplizes disjunkt vereinigt und dann die Relation, die durch die Verklebungsabbildungen erzeugt wird, heraus teilt.

2.3.13 Definition

Sei $\sigma \in \Sigma$ ein Simplex eines Simplicialkomplexes. Ist $\tau \supset \sigma$ ein weiterer Simplex, so heißt $\bar{\sigma} \subset \tau$ **opposit** zu σ , falls

$$\sigma \cap \bar{\sigma} = \emptyset \text{ und } \text{conv}(\sigma \cup \bar{\sigma}) = \tau$$

Definiere den **Link** von σ als den Simplicialkomplex aller Simplizes, die opposit zu σ liegen, d. h.

$$lk(\sigma) := \{\bar{\sigma} \mid \sigma \subset \tau\}$$

2.3.14 Proposition

Der Raum einer drei-dimensionalen Verklebung ist genau dann eine Mannigfaltigkeit, wenn jeder Link einer Ecke homöomorph zu S^2 ist.

2.3.15 Proposition

Der Raum einer drei-dimensionalen Verklebung ist genau dann eine Mannigfaltigkeit, wenn seine Eulerzahl gleich Null ist.

Beweis

Es sei X der Raum der Verklebung. X habe k Ecken, e Kanten, f Facetten und t Tetraeder. Jeder Tetraeder bringt vier Facetten ins Spiel; allerdings werden immer zwei verschiedenen Facetten gepaart, ergo gilt

$$f = 2t$$

Es bezeichne v_1, \dots, v_k die Ecken des Simplizes. Jede Kante enthält zwei Ecken, die opposit zueinander sind. Jede Facette enthält drei Kanten, die opposit zu den Ecken der Facette stehen. Jeder Tetraeder enthält vier Facetten, die opposit zu seinen Ecken stehen. Es folgt

$$\sum_{i=1}^k \chi(lk(v_i)) = 2e - 3f + 4t = 2e - 2t$$

und

$$\chi(X) = k - e + f - t = k - e + t = k - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \chi(lk(v_i)) \right)$$

Jedes $lk(v_i)$ bildet eine geschlossene, zwei-dimensionale Fläche, somit gilt

$$lk(v_i) \leq 2$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $lk(v_i)$ homöomorph zu S^2 ist. □

2.3.16 Bemerkung: Poincares Homologiesphäre

Betrachte einen regelmäßigen Dodekaeder. Unter dem **Torsionswinkel** verstehen wir den Winkel zwischen zwei den Normalen zweier anliegender Facetten.

Wenn wir die Raumkrümmung erhöhen, steigen die Torsionswinkel unseres Dodekaeders an. Insbesondere können wir hierdurch erreichen, dass diese Winkel den Wert $\frac{2}{3}\pi$ erreichen. Wir können nun gegenüberliegende Seiten um $\frac{1}{3}\pi$ drehen und verkleben. Hierdurch erhalten wir eine kompakte, sphärische Mannigfaltigkeiten, die nicht homöomorph zu S^3 ist, aber dieselben Homologiegruppen hat.

2.3.17 Bemerkung: Der Dodekaeder von Seifert und Weber

Wir können in obiger Situation die Raumkrümmung erniedrigen anstatt zu erhöhen und dadurch Torsionswinkel von $\frac{2}{5}\pi$ für unseren Dodekaeder erreichen. Indem wir gegenüberliegende Facetten um $\frac{3}{5}\pi$ verdrehen und verkleben, erhalten wir wieder eine kompakte, hyperbolische Mannigfaltigkeit.

Kapitel 3

Dick-Dünn-Zerlegung

3.1 Tuben und Spitzen

3.1.1 Proposition

Sei $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ eine Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$inj_x(M) = \frac{1}{2} \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma(x))$$

3.1.2 Korollar

$$inj(M) = \frac{1}{2} \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\gamma)$$

3.1.3 Korollar

Ist $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ eine kompakte Mannigfaltigkeit, so besteht Γ nur aus hyperbolischen Elementen.

Beweis

Γ kann von vornerein keine elliptischen Elemente besitzen.

Da M kompakt ist, ist $inj_x(M)$ nach unten beschränkt für $x \in M$. Allerdings ist $d(\gamma) = 0$ für eine parabolische Isometrie γ . \square

3.1.4 Definition: Tuben

Sei $\phi \in Isom(\mathbb{H}^n)$ hyperbolisch mit Achse l und minimaler Versetzung d . Teilt man $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ aus \mathbb{H}^n heraus, erhält man eine **unendliche Tube**. l wird dabei auf eine geschlossene Geodäte der Länge d abgebildet, der **Nabe** der Tube.

3.1.5 Proposition

Jede unendlich Tube ist diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ oder $S^1 \tilde{\times} \mathbb{R}^{n-1}$, wenn ϕ orientierungsumkehrend ist.

$S^1 \tilde{\times} \mathbb{R}^{n-1}$ entsteht aus $[0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$, indem man die Relation

$$(0, x) \sim (1, -x)$$

heraus teilt.

3.1.6 Definition

Eine **Tube der Länge** R entsteht, indem man $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ aus der R -Nachbarschaft von l heraus teilt. Der entstehende Raum ist diffeomorph zu $S^1 \times D^{n-1}$ bzw. $S^1 \widetilde{\times} D^{n-1}$.

3.1.7 Definition: Spitze

Sei $\Gamma < Isom(\mathbb{R}^{n-1})$ eine nichttriviale diskrete Untergruppe, die frei auf \mathbb{R}^n agiert. Jedes Element in Γ induziert durch

$$\phi(x, t) := (Ax + b, t)$$

eine parabolische Wirkung auf H^n , durch die ∞ fixiert wird. Teilt man diese Wirkung heraus, erhält man eine hyperbolische Mannigfaltigkeit, die diffeomorph ist zu

$$\mathbb{R}_{>0} \times (\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma)$$

Wir nennen diese hyperbolische Mannigfaltigkeit eine **Spitze**.

Eine **beschränkte Spitze** erhält man, indem man das diffeomorphe Äquivalent zu $[a, +\infty) \times (\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma)$ für $a > 0$ nimmt.

3.1.8 Proposition

Für eine beschränkte Spitze C gilt

$$vol(C) = \frac{vol(\partial C)}{n-1}$$

3.1.9 Lemma

Seien ϕ_1, ϕ_2 zwei hyperbolische oder parabolische Isometrien auf \mathbb{H}^n . Kommutieren diese, so gilt

$$Fix(\phi_1) = Fix(\phi_2)$$

Beweis

Allgemein gilt für jedes Paar von Bijektionen a, b

$$Fix(aba^{-1}) = a(Fix(b))$$

In unserem Fall folgt hierdurch

$$Fix(\phi_1) = \phi_2(Fix(\phi_1))$$

Ist also ϕ_1 parabolisch, so besitzt ϕ_2 unter Anderem denselben Fixpunkt wie ϕ_1 . Aus symmetrischen Gründen ist ϕ_2 aber dann auch parabolisch.

Sei ϕ_1 also hyperbolisch. Dann sind ϕ_1 und ϕ_2 beide hyperbolisch und beide erhalten dieselbe Achse. Ergo müssen sie beide dieselben Punkte im Unendlichen fixieren. \square

3.1.10 Lemma

Seien $\phi_1, \phi_2 \in \Gamma$ zwei Isometrien einer diskreten und torsionsfreien Gruppe. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- $Fix(\phi_1) \cap Fix(\phi_2) = \emptyset$.
- ϕ_1 und ϕ_2 sind beide parabolisch und haben denselben Fixpunkt.
- ϕ_1 und ϕ_2 sind beide hyperbolisch und lassen sich beide als eine Potenz derselben hyperbolischen Isometrie schreiben.

Beweis

Wir nehmen an, dass $\text{Fix}(\phi_1) \cap \text{Fix}(\phi_2) \neq \emptyset$.

- Angenommen ϕ_1 ist hyperbolisch und ϕ_2 ist parabolisch. Wir wählen dann das obere Halbraummodell mit $\text{Fix}(\phi_1) = \{0, \infty\}$ und $\text{Fix}(\phi_2) = \infty$.
 ϕ_1 und ϕ_2 agieren dann durch

$$\phi_1(x, t) = \lambda(Ax, t) \text{ und } \phi_2(x, t) = (Bx + b, t)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\lambda < 1$. Betrachte

$$\phi_1^n \circ \phi_2 \circ \phi_1^{-n}(0, t) = (\lambda^n A^n b, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, t)$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass Γ diskret wäre.

- ϕ_1 und ϕ_2 seien beide hyperbolisch und besitzen einen gemeinsamen Fixpunkt. Der Kommutator $[\phi_1, \phi_2] = \phi_1 \phi_2 \phi_1^{-1} \phi_2^{-1}$ erhält jede Horosphäre um ∞ . Da er aber nicht parabolisch sein kann, muss er trivial sein. Ergo kommutieren ϕ_1 und ϕ_2 .
- Besitzen ϕ_1 und ϕ_2 dieselbe hyperbolische Achse, so sind beide durch $w_i = d(\phi_i)$ bestimmt. w_1 und w_2 spannen als Elemente von \mathbb{R} eine abelsche, additive Gruppe auf. Diese muss von einem Element erzeugt werden, da sonst Γ nicht diskret wäre.

□

3.1.11 Korollar

Ist Γ diskret und torsionsfrei, so gelten folgende Eigenschaften:

- Die Achsen zweier hyperbolischer Elemente aus Γ sind entweder inzident oder ultraparallel.
- Jede Untergruppe von Γ , die isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist, muss von zwei parabolischen Elementen aufgespannt werden.

3.1.12 Korollar

Die Fundamentalgruppe einer geschlossenen hyperbolischen Mannigfaltigkeit kann keine Untergruppe enthalten, die isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist.

3.2 Exkurs zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren**3.2.1 Definition**

Eine **Lie-Gruppe** ist eine glatte Mannigfaltigkeit, die eine Gruppenstruktur trägt, durch die Inversion und Multiplikation zu glatten Abbildungen werden.

3.2.2 Definition

Eine **Lie-Algebra** V ist ein reeller Vektorraum mit einer Bilinearform

$$[\cdot, \cdot] : V \otimes_{\mathbb{R}} V \longrightarrow V$$

die folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1.) **Anti-Symmetrie:** $[X, Y] = -[Y, X]$
- 2.) **Jacobi-Identität:** $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

3.2.3 Bemerkung

Sei G eine Lie-Gruppe, setze

$$\mathfrak{g} = T_e G$$

Dann ist \mathfrak{g} , der Tangentialraum des Neutralelements von G , isomorph zum Raum der **links-invarianten Vektorfelder** auf G , d. h., der Vektorfelder X , für die gilt

$$X(gp) = dg_p X(p)$$

Ergo können wir die Lie-Klammer der Vektorfelder auf \mathfrak{g} einschränken, wodurch \mathfrak{g} zu einer Lie-Algebra wird. Für $x \in \mathfrak{g}$ definieren wir die **Adjunktion** durch

$$\begin{aligned} ad(x) : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ v &\longmapsto [x, v] \end{aligned}$$

Beachte, für jedes $x \in \mathfrak{g}$ existiert genau ein glatter Gruppenmorphismus

$$\Theta : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

sodass $\Theta'(0) = x, \Theta(0) = 1$.

Wir definieren hierdurch folgende **Exponentialabbildung**

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto \Theta(1) \end{aligned}$$

Dann existiert ein Zusammenhang auf G , sodass \exp der Riemannschen Exponential-Abbildung entspricht und jedes Θ eine Geodäte ist.

Ist $h \in G$, so definiere

$$\begin{aligned} Int(h) : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto hgh^{-1} \end{aligned}$$

und die **adjungierte Aktion** durch

$$Ad(h) := (dInt(h))_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(Ad(h)x) &= h \exp(x) h^{-1} \\ Ad(\exp(x)) &= e^{ad(x)} \end{aligned}$$

3.2.4 Bemerkung

Ist $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ und $[x, y] = xy - yx$.

3.3 Zassenhaus

3.3.1 Definition

Ist $U \subset G$ Teilmenge einer Gruppe, so definiere rekursiv

$$\begin{aligned} U_{(0)} &:= U \\ U_{(k)} &:= [U_{(k-1)}, U] \end{aligned}$$

Ist U eine Umgebung der 1 in einer Lie-Gruppe G , so nennen wir U eine **Zassenhaus-Umgebung**, falls

$$\begin{aligned} U_{(1)} &\subset U \\ U_{(k)} &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \{1\} \end{aligned}$$

3.3.2 Proposition

Jede reelle Lie-Gruppe besitzt eine Zassenhaus-Umgebung.

Beweis

- Wir zeigen die Aussage zuerst für $GL_n(\mathbb{R})$.
Für $v \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\|v\|$ die euklidische 2-Norm und für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichne $\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ die dazugehörige Operatornorm. Insbesondere gilt für diese Norm

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Definiere ferner

$$m(A) := \|I_n - A\|$$

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $m(A) < 1$ und $m(B) < 1$. Schreibe $\alpha = A - I_n$ und $\beta = B - I_n$.
Da $\|\alpha\| < 1$, konvergiert folgende Reihe

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n$$

Ferner gilt

$$\|A^{-1}v\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|v\| \|\alpha\|^n = \frac{\|v\|}{1 - \|\alpha\|}$$

Ergo

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - m(A)}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} m([A, B]) &= \|[A, B] - I\| \\ &= \|ABA^{-1}B^{-1} - I\| \\ &= \|((A - I)(B - I) - (B - I)(A - I))A^{-1}B^{-1}\| \\ &\leq 2\|A - I\| \|B - I\| \|A^{-1}\| \|B^{-1}\| \\ &\leq 2 \frac{m(A)m(B)}{(1 - m(A))(1 - m(B))} \end{aligned}$$

Definiere nun folgende Umgebung der Eins in $GL_n(\mathbb{R})$

$$U := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid m(A) < \frac{1}{8} \right\}$$

Induktiv rechnet man dann für $n \geq 0$ für alle $C \in U_{(n)}$ nach

$$m(C) < \frac{1}{8} \left(\frac{3}{8} \right)^n$$

Ergo ist U eine Zassenhaus-Umgebung.

- Ist G eine Lie-Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, so ist $U \cap G$ eine Zassenhaus-Umgebung für G .

- Ist G irgendeine reelle Lie-Gruppe, so folgt aus Ados Theorem, dass eine Injektion von Lie-Algebren

$$\mathfrak{g} = \mathcal{T}_e G \xrightarrow{f} \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = T_e GL_n(\mathbb{R})$$

existiert. Es bezeichne \mathcal{G} die Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, deren Lie-Algebra gerade das Bild von f ist.

Dann existiert eine lokale Isometrie

$$\phi : V \longrightarrow W$$

wobei $V \subset G, W \subset \mathcal{G}$ jeweils Umgebungen der Eins sind. Wir können nun eine Zassenhaus-Umgebung von \mathcal{G} wählen, sie mit W schneiden, und dann über ϕ zurückziehen.

□

3.3.3 Definition

Eine Gruppe heißt **nilpotent**, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$G_{(n)} = 1$$

3.3.4 Proposition

Sei G eine Gruppe, die durch eine Menge S erzeugt wird. Gilt für alle $a_1, \dots, a_{n+1} \in S$

$$[a_1, [a_2, \dots [a_n, a_{n+1}] \dots]] = 1$$

so folgt

$$g_{(n)} = 1$$

3.3.5 Lemma

Sei G eine Lie-Gruppe. Dann existiert eine Umgebung U der 1, sodass jede diskrete Untergruppe, die durch Elemente aus U generiert wird, nilpotent ist.

3.4 Margulis Lemma

3.4.1 Definition

Sei S eine Menge von Symbolen. S^* bezeichne das durch S frei erzeugte Monoid. Ferner sei ein surjektiver Homomorphismus $\pi : S^* \rightarrow G$ in eine Gruppe G gegeben.

Jedes Element aus G besitzt dann eine Darstellung als ein **Wort** in S^* . Definiere folgende **Norm** auf G

$$\|g\|_S := \{|w| \mid w \in S^*, \pi(w) = g\}$$

3.4.2 Lemma

Es agiere G transitiv auf einer Menge A , die mindestens $m + 1$ Elemente habe. Für jedes $a \in A$ gibt es mindestens $m + 1$ Elemente aus G mit $\text{Norm} \leq m$, die a auf $m + 1$ verschiedene Elemente abbilden.

3.4.3 Definition

Ist $H \subset G$ eine Untergruppe endlichen Index, so heißt G **virtuell** H .

Ist H abelsch, nilpotent, etc., so heißt G virtuell abelsch, nilpotent, etc..

3.4.4 Lemma: Margulis Lemma

Sei $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ diskret und $x \in \mathbb{H}^n$ beliebig. Für $\varepsilon > 0$ setze

$$\Gamma_\varepsilon(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma(x)) \leq \varepsilon\}$$

Dann existiert für jedes $n \geq 2$ eine sogenannte **Margulis-Konstante** $\varepsilon_n > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{H}^n$ die Gruppe $\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$ virtuell nilpotent ist.

Beweis

- $G = Isom(\mathbb{H}^n)$ ist eine Lie-Gruppe. Sei U eine Zassenhaus-Umgebung der Eins in G . V sei eine kompakte Umgebung von $Stab_G(x) \cong O(n-1)$ in G . Dann existiert eine Zahl m , sodass V durch m Translate von U überdeckt wird.
Sei ferner W eine Umgebung von $Stab_G(x)$ in G mit $W = W^{-1}$ und $W^m \subset V$.¹
- Wir nehmen zuerst an, dass Γ durch eine Menge $S \subset W$ erzeugt wird, und zeigen in diesem Fall, dass $\Gamma' := \Gamma \cap U$ einen Index von höchstens m in Γ hat.
Betrachte hierzu die Wirkung von Γ auf Γ/Γ' . Besitzt diese Menge mehr als m Elemente, so gibt es $m+1$ Nebenklassen aus Γ/Γ' , die einen Repräsentanten mit Norm $\leq m$ haben.
Da $S^{\leq m} \subset W^m \subset V$, liegen alle diese Repräsentanten in V . Da V durch m Translate von U überdeckt wird, liegen mindestens zwei der $m+1$ Repräsentanten im denselben Translat. Deswegen repräsentieren diese beiden Elemente dieselbe Nebenklasse in Γ/Γ' , was einen Widerspruch zur Annahme, dass der Index von Γ' in Γ echt größer als m ist, darstellt.
- Wir wollen nun $\varepsilon_n > 0$ so wählen, dass gilt

$$\{g \in G \mid d(x, g(x)) \leq \varepsilon_n\} \subset W$$

Das geht, denn betrachte das Faserbündel

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow \mathbb{H}^n \\ g &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

Die Faser von x ist gerade $Stab_G(x) \cong O(n-1)$. Da $O(n-1)$ notorischerweise kompakt ist, ist π eine eigentliche Abbildung². Ergo ist auch die Menge

$$K_l := \pi^{-1} \left\{ y \in \mathbb{H}^n \mid d(x, y) \leq \frac{1}{l} \right\} = \left\{ g \in G \mid d(x, g(x)) \leq \frac{1}{l} \right\}$$

kompakt. Ferner gilt

$$\bigcap_l K_l = Stab_G(x) \subset W$$

Da die K_l alle kompakt sind und W eine Umgebung von $Stab_G(x)$ ist, existiert ein l mit

$$K_l \subset W$$

Ergo kann $\varepsilon_n \leq \frac{1}{l}$ gewählt werden.

□

¹ So ein W kann mithilfe des verallgemeinerten Tuben-Lemmas gefunden werden: Seien Räume $A \subset X$ und $B \subset Y$ gegeben und eine offene Umgebung $N \subset X \times Y$ von $A \times B$. Sind A und B kompakt, so gibt es offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $A \times B \subset U \times V \subset N$.

² Ein Faserbündel ist genau dann eigentlich, wenn ihre Faser kompakt ist. Eine Abbildung heißt eigentlich, wenn das Urbild kompakter Mengen wieder kompakt ist.

3.4.5 Definition

Eine nichttriviale, diskrete Untergruppe $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ heißt **elementar**, wenn es eine endliche Γ -invariante Menge $\emptyset \neq S \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ gibt, d. h.,

$$\{\phi(s) \mid \phi \in \Gamma, s \in S\} = S$$

Dies ist äquivalent dazu zu fordern, dass es einen Punkt $x \in \overline{\mathbb{H}^n}$ gibt, dessen Γ -Orbit endlich ist.

3.4.6 Proposition

Eine elementare Gruppe Γ , die frei auf \mathbb{H}^n operiert, wird entweder durch eine hyperbolische Isometrie oder durch beliebig viele parabolische Isometrien mit demselben Fixpunkt erzeugt.

Beweis

Γ agiert frei und enthält deswegen kein elliptischen Elemente. Angenommen S besäße Punkte in \mathbb{H}^n . Dann würden Elemente aus Γ diese Punkte vertauschen, sprich, aufeinander spiegeln. Insbesondere könnte man gemeinsame Schwerpunkte finden, die von nichttrivialen Elementen aus Γ fixiert werden würden, was einen Widerspruch darstellen würde. Ergo kann S nur aus Punkten im Unendlichen bestehen.

Hyperbolische und parabolische Elemente können Punkte im Unendlichen nicht zyklisch vertauschen, sondern nur fixieren bzw. unendlich oft bewegen. S muss ergo in $\partial\mathbb{H}^n$ liegen und aus einem, oder zwei Elementen bestehen. Der Rest folgt nun aus Lemma 3.1.10. \square

3.4.7 Proposition

Sei $\Gamma \subset \mathbb{H}^n$ diskret, torsionsfrei und nichttrivial. Γ ist genau dann elementar, wenn Γ virtuell elementar ist.

Beweis

Sei $\Gamma' \subset \Gamma$ elementar und von endlichem Index. Γ' besteht entweder aus hyperbolischen Elementen, die dieselbe Achse erhalten, oder aus parabolischen mit demselben Fixpunkt. Ist $\phi \in \Gamma$, so muss eine Potenz von ϕ^k in Γ' liegen und ergo ebenfalls dieselbe Achse erhalten oder denselben Fixpunkt fixieren. \square

3.4.8 Korollar

Sei $\Gamma \subset \mathbb{H}^n$ diskret und torsionsfrei. Ist Γ virtuell nilpotent, so ist Γ entweder trivial oder elementar.

Beweis

Sei $H \subset G$ von endlichem Index und nilpotent. Ist H trivial, so ist G endlich. Da G aber auch torsionsfrei ist, muss G somit auch trivial sein.

Sei H nicht trivial. Da H nilpotent ist, existieren nichttriviale Elemente in H , die mit allen anderen kommutieren. Ergo müssen alle Elemente in H dieselben Fixpunkte haben. Ergo ist H elementar. \square

3.4.9 Korollar

Sei Γ diskret und torsionsfrei. Für jedes $x \in \mathbb{H}^n$ ist dann $\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$ entweder trivial oder elementar.

3.5 Dick-Dünn-Zerlegung

3.5.1 Definition

- Eine **sternförmige Menge um einen Randpunkt** $p \in \partial\mathbb{H}^n$ ist eine Menge $U \subset \mathbb{H}^n$, die mit jedem Strahl, der zu p läuft, einen nicht-leeren zusammenhängenden Schnitt besitzt.
- Eine **sternförmige Umgebung um eine Gerade** $l \subset \mathbb{H}^n$ ist eine Menge $U \subset \mathbb{H}^n$, die einen nicht-leeren zusammenhängenden Schnitt mit jeder Geodäte besitzt, die l orthogonal schneidet.
- Sei Γ eine Gruppe, die frei und diskontinuierlich agiert und aus parabolischen Isometrien besteht, die einen Randpunkt $p \in \partial\mathbb{H}^n$ fixieren. Ist U eine sternförmige Umgebung um p , die invariant unter Γ ist, so heißt U/Γ eine **sternförmige Spitzenumgebung**.
- Sei Γ eine Gruppe, die durch eine hyperbolische Isometrie ϕ mit Achse l erzeugt wird. Ist V eine Γ -invariante sternförmige Umgebung um l , so heißt V/Γ eine **sternförmige Umgebung einer einfachen geschlossenen Geodäten** der Länge $d(\phi)$.

3.5.2 Bemerkung

Die beschränkten Tuben und Spitzen stellen Beispiele für sternförmige einfache geschlossene geodätische Umgebungen bzw. sternförmige Spitzenumgebungen dar.

3.5.3 Definition

Sei $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ eine Mannigfaltigkeit. ε_n sei eine Margulis-Konstante. Definiere den **dicken Teil** von M durch

$$M_{[\varepsilon_n, \infty)} := \left\{ x \in M \mid \text{inj}_x(M) \geq \frac{\varepsilon_n}{2} \right\}$$

und den **dünnen Teil** durch

$$M_{(0, \varepsilon_n]} := \overline{M/M_{[\varepsilon_n, \infty)}}$$

3.5.4 Satz: Dick-Dünn-Zerlegung

Sei M eine vollständige, hyperbolische Mannigfaltigkeit der Dimension n .

Der dünne Part $M_{(0, \varepsilon_n]}$ besteht aus einer disjunkten Vereinigung von sternförmigen Spitzenumgebungen und sternförmigen Umgebungen von geschlossenen Geodäten der Länge $< \varepsilon_n$.

Beweis

- Sei $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$. Definiere für $\phi \in \Gamma, \varepsilon > 0$

$$S_\phi(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, \phi(x)) \leq \varepsilon\}$$

Dann ist der dünne Teil gerade der Quotient von

$$S := \bigcup_{\phi \in \Gamma} S_\phi(\varepsilon_n)$$

- Ist ϕ eine Parabolische, die p fixiert, so ist $S_\phi(\varepsilon)$ eine sternförmige Umgebung um $p \in \partial\mathbb{H}^n$.
- Ist ϕ eine Hyperbolische mit Achse l , so ist $S_\phi(\varepsilon)$ eine sternförmige Umgebung um l , falls $\varepsilon > d(\phi)$.

- Es bleibt zu zeigen, dass $S_\phi(\varepsilon_n)$ und $S_\psi(\varepsilon_n)$ disjunkt sind für verschiedene ϕ, ψ .
Sei $x \in S_\phi(\varepsilon_n) \cap S_\psi(\varepsilon_n)$. Dann gilt

$$\phi, \psi \in \Gamma_{\varepsilon_n}(x)$$

Margulis Lemma sagt aus, dass $\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$ elementar ist. Ergo sind ϕ und ψ entweder beide hyperbolisch und Potenz desselben Elements oder parabolisch und fixieren denselben Punkt im Unendlichen.

- Ist nun $S_0 \subset S$ eine Zusammenhangskomponente, so existiert eine maximale elementare Untergruppe $\Gamma_0 \subset \Gamma$, sodass

$$S_0 = \bigcup_{\phi \in \Gamma_0 \setminus \{\text{id}_{\mathbb{H}^n}\}} S_\phi(\varepsilon_n)$$

S_0 ist nun die Vereinigung von sternförmigen Nachbarschaften um l bzw. p , und deswegen vom selben Typ.

□

3.5.5 Proposition

Sei M eine vollständige, orientierbare hyperbolische Mannigfaltigkeit der Dimension ≤ 3 . Der dünne Teil von M besteht aus beschränkten Spitzen und Tuben endlicher Länge.

Beweis

- Sei $\phi \in \text{Isom}^+(\mathbb{H}^n)$. Es genügt zu zeigen, dass $S_\phi(\varepsilon)$ entweder leer, oder eine R -Nachbarschaft um l oder eine Horokugel um p für alle $\varepsilon > 0$ ist.
- Sei also ϕ hyperbolisch mit Achse l . Dann hängt $d(x, \phi(x))$ stetig und monoton von $d(x, l)$ ab. Ergo gilt

$$S_\phi(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, \phi(x)) \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, l) \leq s(\varepsilon)\}$$

- Ist ϕ parabolisch, so agiert ϕ auf jeder Horosphäre um p wie eine euklidische fixpunktfreie Orientierungserhaltende Isometrie. Für $n \leq 3$ kann dies nur eine Translation sein. Es folgt

$$S_\phi(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, \phi(x)) \leq \varepsilon\} \cong \{(x_1, t) \in H^n \mid t > s(\varepsilon)\}$$

□

3.5.6 Proposition

Sei M eine vollständige hyperbolische Mannigfaltigkeit. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) M hat endliches Volumen.
- (2) $M_{[\varepsilon, \infty)} := \{x \in M \mid \text{inj}_x(M) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$ ist kompakt für alle $\varepsilon > 0$.
- (3) $M_{[\varepsilon_n, \infty)}$ ist kompakt.

Beweis

- Von (1) nach (2):
Sei S eine maximale Teilmenge von $M_{[\varepsilon, \infty)}$ mit der Eigenschaft, dass je zwei Punkte aus S einen Mindestabstand von ε haben. Es gilt dann

$$M_{[\varepsilon, \infty)} \subset \bigcup_{s \in S} \overline{B_\varepsilon(s)} =: D$$

Andererseits müssen die offenen Bälle mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ und Zentrum $s \in S$ alle disjunkt sein. Da M nur endliches Volumen hat, kann S somit nur endlich viele Elemente enthalten. Dadurch ist D kompakt und $M_{[\varepsilon, \infty)}$ als abgeschlossene Teilmenge eines Kompakti wieder kompakt.

- Von (3) nach (1):
Sei $M_{[\varepsilon_n, \infty)}$ kompakt. Dann ist auch der Rand von $M_{[\varepsilon_n, \infty)}$ kompakt. Ergo hat $M_{(0, \varepsilon_n]}$ nur endliche viele Zusammenhangskomponenten. Es genügt ergo zu zeigen, dass eine sternförmige Umgebung um eine Spitze bzw. eine geschlossene Geodäte aus $M_{(0, \varepsilon_n]}$ endliches Volumen hat. Dies ist erfüllt, wenn eine solche Komponente kompakt ist.
- Eine abgeschlossene Umgebung um eine geschlossene Geodäte ist immer kompakt, da sie homöomorph zu $I \times S^1$ ist.
- Sei ergo M_0 eine nicht kompakte Zusammenhangskomponente von $M_{(0, \varepsilon_n]}$. Sei S_0 das dazugehörige Urbild in \mathbb{H}^n . Sei $\Gamma_0 < \Gamma$ eine maximale elementare Untergruppe, die nur aus Parabolischen besteht, die ∞ fixieren, sodass

$$S_0 = \bigcup_{\phi \in \Gamma_0 \setminus \{\text{id}_{\mathbb{H}^n}\}} \{x \in \mathbb{H}^n \mid d(x, \phi(x)) \leq \varepsilon_n\}$$

Sei eine **Blätterung** auf S_0 gegeben, d. h., eine Überdeckung von S_0 durch geodätische Halbstrahlen, die jeweils **Blätter** der Blätterung genannt werden. Γ_0 erhält diese Foliation, weswegen wir eine Foliation in M_0 erhalten.

- Jedes Blatt beginnt in einem Punkt in $\partial M_{[\varepsilon_n, \infty)}$, welches kompakt ist. Wir wählen eine zusammenhängende Menge $P \subset \mathbb{H}^n$, sodass der Anfangspunkt jedes Blattes in M_0 einmal in P vertreten ist. Das Volumen von M_0 errechnet sich nun durch die Fläche, die von P und ∞ aufgespannt ist und endlich ist.

□

3.5.7 Korollar

Jede vollständige, hyperbolische Mannigfaltigkeit endlichen Volumens ist diffeomorph zum Inneren einer kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand. Der Rand besteht hierbei aus flachen Mannigfaltigkeiten.

Beweis

Sei U eine sternförmige Spitzenumgebung in M . U hat eine kompakte Basis X und enthält eine beschränkte Spitze diffeomorph zu $X \times [t, \infty)$. Schmeißt man alle solche beschränkten Spitzen aus M raus, bleibt was kompaktes mit Rand übrig: Der dicke Teil plus kompakten Umgebungen von geschlossenen Geodäten und kompakten Teilen von Spitzenumgebungen.

Die beschränkte Spitzenumgebung lässt sich zu $X \times [t, \infty]$ kompaktieren. X entspricht einer Horosphäre in \mathbb{H}^n und ist somit flach. □

3.5.8 Bemerkung

- Ist in obiger Situation $n = 2$, so ist M das Innere einer kompakten Fläche mit Rändern diffeomorph zu S^1 .
- Ist $n = 3$ und M orientierbar, so sind die Ränder von N flache Tori.
- Wie die Ränder für allgemeine Fälle aussehen, beantworten folgende Theoreme.

3.5.9 Satz

Jede diskrete Teilgruppe von $Isom(\mathbb{R}^n)$ ist virtuell abelsch.

3.5.10 Satz: Bieberbach

Jede geschlossene vollständige flache Mannigfaltigkeit wird durch endlich viele Tori überdeckt.

Kapitel 4

Mostows Rigiditäts-Theorem

4.1 Inside group! Outside group! Which side group? I don't know!

4.1.1 Definition

Seien $H \subset G$ Gruppen. Definiere den **Normalisierer** von H durch

$$N(H) := \{g \in G \mid gH = Hg\}$$

Der Normalisierer ist die größte Untergruppe von G , in der H normal ist. Insbesondere ist $N(H)/H$ wohldefiniert.

4.1.2 Proposition

Sei $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ eine hyperbolische Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$Isom(M) \cong N(\Gamma)/\Gamma$$

Beweis

Sei $\phi_M : M \rightarrow M$ eine Isometrie. Wir erhalten folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^n & \xrightarrow{\phi_{\mathbb{H}^n}} & \mathbb{H}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\phi_M} & M \end{array}$$

Aus der Kommutativität folgt zwangsläufig $\phi_{\mathbb{H}^n} \in N(\Gamma)$. Ferner ist $\phi_{\mathbb{H}^n}$ bis auf ein Element aus Γ eindeutig. Umgekehrt steigt jedes Element aus $N(\Gamma)/\Gamma$ auf M ab. \square

4.1.3 Definition

Das **Zentrum** von $H \subset G$ besteht aus allen Elementen aus G , die mit allen Elementen aus H kommutieren, d. h.

$$Z(H) := \{g \in G \mid gh = hg \forall h \in H\}$$

4.1.4 Definition

Sei G eine Gruppe.

- $Aut(G)$ bezeichne die Gruppe aller Gruppenisomorphismen vom Typ $G \rightarrow G$.
- Definiere die Gruppe der **inneren Automorphismen** durch

$$Int(G) := \{h \mapsto ghg^{-1} \mid g \in G\}$$

Diese Gruppe ist ein Normalteiler von $Aut(G)$.

- Definiere die Gruppe der **äußeren Automorphismen** durch

$$Out(G) := Aut(G)/Int(G)$$

4.1.5 Lemma

Es sei X ein zusammenhängender Raum. $Hom\ddot{o}(X)$ bezeichne die Menge der Homöomorphismen auf X . Dann erhalten wir folgenden Homomorphismus von Gruppen

$$\begin{aligned} \nu : Hom\ddot{o}(X) &\longrightarrow Out(\pi_1(X, x_0)) \\ f &\longmapsto [x_0 \mapsto f(x_0)]_* \circ f_* \end{aligned}$$

wobei $x_0 \mapsto f(x_0)$ einen Weg von x_0 nach $f(x_0)$ bezeichnet.
 $\nu(f)$ ist hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.

Beweis

- Ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow X$ induziert uns einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, f(x_0)) \\ \gamma &\longmapsto f \circ \gamma \end{aligned}$$

- Ist α ein Weg, der x_0 mit $f(x_0)$ verbindet, so erhalten wir einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} \alpha_* : \pi_1(X, f(x_0)) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ \gamma &\longmapsto \alpha^{-1} \gamma \alpha \end{aligned}$$

- Ergo ist $\alpha_* \circ f_*$ ein Automorphismus von $\pi(X, x_0)$.
- Dieser Automorphismus ist eindeutig bis auf Elemente aus $Int(\pi(X, x_0))$.

□

4.1.6 Proposition

Ist M eine hyperbolische, vollständige Mannigfaltigkeit endlichen Volumens, so ist

$$\nu : Isom(M) \longrightarrow Out(\pi_1(M))$$

injektiv.

Bemerkung Für $n \geq 3$ ist ν sogar ein Isomorphismus.

Beweis

Sei $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$. Identifiziere $\pi_1(M)$ mit Γ und $Isom(M) = N(\Gamma)/\Gamma$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \nu : N(\Gamma)/\Gamma &\longrightarrow Out(\Gamma) \\ g &\longmapsto [\gamma \mapsto g^{-1}\gamma g] \end{aligned}$$

Sei $g \in N(\Gamma)$, sodass ein $\delta \in \Gamma$ existiert, sodass für alle $\gamma \in \Gamma$ gilt

$$g^{-1}\gamma g = \delta^{-1}\gamma\delta$$

d. h., für alle γ gilt

$$(\delta g^{-1})\gamma = \gamma(\delta g^{-1})$$

D. h., δg^{-1} liegt im Zentrum von Γ in $Isom(\mathbb{H}^n)$. Dieses ist trivial, ergo gilt $g = \delta \in \Gamma$, ergo ist ν injektiv. \square

4.1.7 Korollar

Sei M eine hyperbolische, vollständige Mannigfaltigkeit endlichen Volumens. Dann sind verschiedene Isometrien auf M nicht homotop zueinander.

4.2 Limes Geschichten**4.2.1 Definition**

Sei $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ nichttrivial und diskret. Sei $x \in \mathbb{H}^n$. Die **Limes-Menge** von Γ ist definiert als alle Häufungspunkte von $\Gamma.x$ im Unendlichen, d. h.

$$\Lambda(\Gamma) := \overline{\Gamma.x} \cap \partial\mathbb{H}^n$$

4.2.2 Bemerkung

- Die Limes-Menge ist unabhängig von der Wahl von x .
- Ist Γ virtuell Γ' , so gilt $\Lambda(\Gamma) = \Lambda(\Gamma')$.
- Ist Γ elementar und torsionsfrei, so besteht $\Lambda(\Gamma) = Fix(\Gamma)$ aus einem oder zwei Punkten.

4.2.3 Proposition

Sei $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ nichttrivial und diskret. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) Γ ist elementar.
- (2) Γ erhält entweder einen Punkt in \mathbb{H}^n , oder eine Gerade in \mathbb{H}^n , oder einen Punkt in $p \in \partial\mathbb{H}^n$ und jede Horosphäre um p .
- (3) Γ ist virtuell abelsch.
- (4) $\Lambda(\Gamma)$ besteht aus null, einem oder zwei Punkten.

Beweis

- (1) \Rightarrow (2) Γ erhalte also eine endliche Menge S an Punkten in $\overline{\mathbb{H}^n}$. Liegen einige davon in \mathbb{H}^n , so fixiert \mathbb{H}^n deren Schwerpunkt.
 Wir können also annehmen, dass $S \subset \partial\mathbb{H}^n$. Enthält S drei Punkte oder mehr, so lässt sich zu diesen wieder ein Schwerpunkt in \mathbb{H}^n konstruieren, der von Γ wieder fixiert werden muss.
 Ist S zweielementig, so erhält Γ die korrespondierende geodätische Achse.
 Sei $S = \{x\}$ ergo einelementig. Wenn Γ ein hyperbolisches Element enthalten würde, so müssten andere hyperbolische und elliptische in Γ dieselbe Achse erhalten, da Γ diskret ist. Ergo wäre dann S zweielementig.
 Ergo kann Γ nur aus Parabolischen und Elliptischen bestehen, die x fixieren. Diese erhalten jede Horosphäre um x .
- (2) \Rightarrow (3) Γ erhält eine Menge von Punkten im Unendlichen. Sei x aus dieser Menge und $\Gamma' = \{g \in \Gamma \mid g(x) = x\}$. Enthält Γ keine Hyperbolischen, so ist es virtuell Γ' , ansonsten ist es virtuell ein semi-direktes Produkt aus Γ' und \mathbb{Z} .
 Γ' erhält Horosphären und lässt sich deswegen als eine diskrete Untergruppe von $Isom(\mathbb{R}^{n-1})$ auffassen. Nach Satz 3.5.9 ist Γ' deswegen virtuell abelsch.
- (3) \Rightarrow (4) Wir können annehmen, dass Γ abelsch ist. Lemma 3.1.9 lässt sich für elliptische Isometrien erweitern, weswegen Punkt (2) und somit auch (4) folgt.
- (4) \Rightarrow (1) $\Lambda(\Gamma)$ besteht aus Γ -Orbiten. Falls $\Lambda(\Gamma)$ leer ist, so fixiert Γ einen Punkt in \mathbb{H}^n wegen Brouwers Fixpunktsatz. Da Γ diskret ist, muss Γ endlich sein.

□

4.2.4 Definition

Eine Gruppe G agiere auf einem topologischen Raum X . Eine geschlossene, nicht-leere, G -invariante Menge $A \subset X$ heißt **minimal**, falls keine abgeschlossene, nicht-leere, G -invariante Teilmenge $B \subsetneq A$ existiert.

4.2.5 Proposition

Sei $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ nichttrivial, nicht elementar und diskret. Dann ist $\Lambda(\Gamma)$ minimal.

Beweis

Sei $S \subset \Lambda(\Gamma)$ nicht-leer und Γ -invariant. S muss unendlich viele Punkte enthalten, da Γ nicht elementar ist. $C(S)$ bezeichne die konvexe Hülle von S , die ihrerseits wieder Γ -invariant ist. Sei $x \in C(S) \cap \mathbb{H}^n$, dann gilt

$$\Lambda(\Gamma) = \overline{\Gamma \cdot x} \cap \partial\mathbb{H}^n \subset C(S) \cap \partial\mathbb{H}^n = S$$

□

4.2.6 Korollar

Sei $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ nichttrivial, nicht elementar und diskret. $\Gamma' \subset \Gamma$ sei eine unendliche normale Untergruppe. Dann gilt $\Lambda(\Gamma') \subset \Lambda(\Gamma)$

Beweis

Da Γ' normal ist, schickt $g \in \Gamma$ den Orbit $\Gamma' \cdot x$ auf $\Gamma' \cdot g(x)$, weswegen $\Lambda(\Gamma')$ stabil unter Γ bleibt. Da Γ' unendlich und $\overline{\mathbb{H}^n}$ kompakt ist, ist $\Lambda(\Gamma')$ nicht leer. Da $\Lambda(\Gamma)$ minimal ist, gilt $\Lambda(\Gamma) = \Lambda(\Gamma')$. □

4.2.7 Lemma

Sei $C \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ abgeschlossen, konvex und nicht leer. Für $x \in \mathbb{H}^n$ bezeichne $r(x)$ den nächsten Punkt in C . Für $x \in \partial\mathbb{H}^n$ bezeichne $r(x)$ den Punkt in C , der als erstes von einer Horosphäre um x tangiert wird. $r : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow C$ ist wohldefiniert.

Beweis

Sei $x \in \mathbb{H}^n$. Da C nicht leer ist, gibt es mögliche Kandidaten für $r(x)$. Wir nehmen uns zwei mögliche Kandidaten $y, z \in C$ für $r(x)$ heraus und konstruieren das geodätische Dreieck Δ_{xyz} . Da C konvex ist, liegt die Seite \overline{yz} in C . Auf dieser Seite muss sich ein Punkt x_1 befinden, der von allen Punkten auf dieser Seite x am nächsten ist.

Dieser Punkt ist eventuell nicht $r(x)$, aber indem wir die Konstruktion sukzessive durchführen, erhalten wir eine konvergente Folge $(x_n)_n$, deren Grenzwert $r(x)$ ist. \square

4.2.8 Lemma

r ist stetig auf $\mathbb{H}^n \cup (\partial\overline{\mathbb{H}^n} \cap C)$.

Beweis

Seien $x, y \in D^n \cup (\partial\overline{D^n} \cap C) \setminus C$ verschieden. Wir wollen Folgendes zeigen

$$\|r(x) - r(y)\| \leq \|x - y\|$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichnet. Die geodätischen Segmente $[x, r(x)]$ und $[y, r(y)]$ stehen orthogonal zu $[r(x), r(y)]$. Deswegen gilt die Gleichung in D^n . \square

4.2.9 Definition

Sei $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ nicht trivial und diskret. $\text{conv}(\Lambda(\Gamma)) \cap \mathbb{H}^n$ ist dann eine konvexe, Γ -invariante, abgeschlossene Teilmenge.

Definiere den **konvexen Kern** von $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ durch

$$(\text{conv}(\Lambda(\Gamma)) \cap \mathbb{H}^n) / \Gamma$$

4.2.10 Bemerkung

Im allgemeinem Fall liefert r einen Deformationsretrakt von \mathbb{H}^n auf C .

In obigem Fall liefert r einen Γ -invarianten Deformationsretrakt, weswegen wir einen Deformationsretrakt von M auf seinen konvexen Kern erhalten. Deswegen ist M homotopie-äquivalent zu seinem konvexen Kern.

4.2.11 Definition

Sei $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ nicht trivial und diskret. Wir definieren den **Bereich der Diskontinuität** durch

$$\Omega(\Gamma) := \partial\mathbb{H}^n \setminus \Lambda(\Gamma)$$

4.2.12 Lemma

Die Wirkung von Γ auf $\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma)$ ist eigentlich diskontinuierlich.

Beweis

Da Γ diskret ist, ist die Wirkung auf \mathbb{H}^n sowieso eigentlich diskontinuierlich. r retrahiert $\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Lambda)$ stetig zu $\text{conv}(\Lambda(\Gamma)) \setminus \Lambda(\Gamma)$ und kommutiert mit Elementen aus Γ .

Sei $K \subset \mathbb{H}^n \cup \Omega(\Lambda)$ kompakt. Wir wollen zeigen, dass es nur endlich viele $g \in \Gamma$ gibt mit

$$g.K \cap K \neq \emptyset$$

Da K kompakt ist, ist es auch $r(K) \subset \text{conv}(\Lambda(\Gamma)) \setminus \Lambda(\Gamma)$. Gilt $g.K \cap K \neq \emptyset$, so folgt $g.r(K) \cap r(K) \neq \emptyset$. Da Γ eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{H}^n agiert, kann es für die zweite Schnittbedingung aber nur endlich viele g geben. \square

4.2.13 Lemma

Für jedes $x \in \Omega(\Gamma)$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset \overline{\mathbb{H}^n}$, sodass für alle $g \in \Gamma$ entweder

$$g.U = U \text{ falls } g(x) = x$$

oder

$$g.U \cap U = \emptyset$$

gilt.

Beweis

Da Γ eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma)$ wirkt, gibt es einen geschlossenen Halbraum $H \subset \mathbb{H}^n \cup \Omega(\Gamma)$ mit $H \cap g.H = \emptyset$, falls $g(x) \neq x$. Da $\text{Stab}_\Gamma(x)$ endlich ist, können wir einfach

$$U := \bigcap_{g \in \text{Stab}_\Gamma(x)} g.H^\circ$$

setzen. \square

4.2.14 Proposition

Gilt $\text{Vol}(\mathbb{H}^n/\Gamma) < \infty$, so folgt $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{H}^n$.

Beweis

Sei $x \in \Omega(\Lambda)$. U sei wie aus obigen Lemma. Zum Einen gilt

$$(U \cap \mathbb{H}^n)/\text{Stab}_\Gamma(x) \subset \mathbb{H}^n/\Gamma$$

Es gilt aber

$$\text{Vol}((U \cap \mathbb{H}^n)/\text{Stab}_\Gamma(x)) \geq \frac{\text{Vol}(U)}{\#\text{Stab}_\Gamma(x)} = \infty$$

Da $\text{Stab}_\Gamma(x)$ endlich ist. \square

4.2.15 Korollar

Ist $\text{Vol}(\mathbb{H}^n/\Gamma)$ endlich, so enthält Γ keine nichttriviale, virtuell abelsche, normale Untergruppe.

Beweis

Sei $H \subset \Gamma$ normal und virtuell abelsch. Ist H unendlich, dann gilt

$$\Lambda(H) = \Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{H}^n$$

Andererseits muss $\Lambda(H)$ null, eins oder zwei Elemente enthalten, da H virtuell abelsch ist. Ergo erhalten wir für diesen Fall einen Widerspruch.

Wir können also annehmen, dass H endlich ist. In diesem Fall ist $Fix(H)$ ein nicht-leerer echter Unterraum von \mathbb{H}^n . Da H normal ist, agiert Γ auf $Fix(H)$. Es folgt

$$\Lambda(\Gamma) \subset \partial Fix(H)$$

Ein Widerspruch! □

4.2.16 Korollar

Die Fundamentalgruppe einer hyperbolischen, vollständigen Mannigfaltigkeit endlichen Volumens ist nicht auflösbar.

4.2.17 Definition

Ein Punkt aus $\partial\mathbb{H}^n$ heißt **parabolisch** bzw. **hyperbolisch** für Γ , falls er von einer Parabolischen bzw. einer Hyperbolischen aus Γ fixiert wird.

4.2.18 Proposition

Sei $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ nicht elementar und diskret. Dann ist die Menge der hyperbolischen bzw. der parabolischen Punkte entweder dicht in $\Lambda(\Gamma)$ oder leer.

Beweis

$\Lambda(\Gamma)$ ist minimal und die Menge der parabolischen bzw. hyperbolischen Punkte ist Γ invariant. □

4.2.19 Korollar

Besitzt \mathbb{H}^n/Γ endliches Volumen, so ist die Menge aller hyperbolischen bzw. parabolischen Punkte entweder leer oder dicht in $\partial\mathbb{H}^n$.

4.2.20 Lemma

Sei $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ diskret, nicht elementar und endlich erzeugt. Γ soll keinen m -Raum von \mathbb{H}^n invariant lassen für $m < n - 1$.

Dann ist $N(\Gamma) \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ diskret.

Beweis

- Es seien g_1, \dots, g_k Erzeuger von Γ . $x \in D^n$ sei ein Punkt, der von keinem Element aus Γ außer der Identität fixiert wird. Setze

$$s = d(x, \Gamma.x \setminus \{x\})$$

und

$$U = \left\{ \phi \in Isom(D^n) \mid d(g_i x, \phi(g_i x)) < \frac{s}{2} \forall i \right\}$$

U ist eine offene Umgebung der Eins in $Isom(\mathbb{H}^n)$. Wir wollen zeigen, dass $N(\Gamma) \cap U$ (fast) trivial ist.

- Sei $h \in N(\Gamma) \cap U$. Dann

$$d(g_i^{-1}h^{-1}g_ihx, x) = d(g_ihx, hg_ix) \leq d(g_ihx, g_ix) + d(g_ix, hg_ix) < d(hx, x) + \frac{s}{2} < s$$

Ergo gilt $g_i^{-1}h^{-1}g_ihx = x$ für alle i , d. h.

$$g_ih = hg_i$$

D. h., h kommutiert mit jedem Element aus Γ .

- Sei $y \in \Lambda(\Gamma)$ und $f_i \in \Gamma$ mit

$$f_i(x) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} y$$

Da

$$d(f_ix, hf_ix) = d(f_ix, f_ihx) = d(x, hx)$$

gilt

$$hy = y$$

D. h., h ist die Identität auf $\Lambda(\Gamma)$.

- Sei m minimal, sodass $\Lambda(\Gamma)$ in einer $m-1$ -Sphäre in ∂D^n enthalten ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gilt

$$\Lambda(\Gamma) \subset S^{m-1}$$

Da Γ die konvexe Hülle von $\Lambda(\Gamma)$ erhält, erhält Γ auch die affine Hülle, die gerade $\overline{D^m}$ ist. Mit der Voraussetzung folgt nun $m \in \{n-1, n\}$.

- Sei $m = n$. Dann fixiert h ganz ∂S^{n-1} , ergo $h = 1$.
- Sei $m = n-1$. h muss D^{n-1} fixieren, ergo ist h entweder die Identität oder die Spiegelung ρ entlang D^{n-1} . D. h.,

$$U \cap N(\Gamma) = \{1, \rho\}$$

Ergo ist $N(\Gamma)$ diskret.

□

4.2.21 Korollar

Es sei $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ eine vollständige hyperbolische Mannigfaltigkeit endlichen Volumens. Dann ist $Isom(M)$ endlich.

Beweis

- Γ ist endlich erzeugt, da M diffeomorph zum Inneren einer kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand ist und $\pi_1(M) \cong \Gamma$.
- Da $\Lambda(\Gamma) = \partial \mathbb{H}^n$ minimal ist, erhält Γ keinen echten Unterraum von \mathbb{H}^n .
- Es ist ergo $N(\Gamma)$ diskret und deswegen verschwindet $Vol(\mathbb{H}^n/N(\Gamma))$ nicht. Es gilt nun

$$\#Isom(M) = [N(\Gamma) : \Gamma] = Vol(\mathbb{H}^n/\Gamma)/Vol(\mathbb{H}^n/N(\Gamma)) < \infty$$

□

4.3 Die Epstein-Penner-Konstruktion

4.3.1 Definition

Definiere den **positiven Lichtkegel** durch

$$L := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 0, x_{n+1} > 0\}$$

4.3.2 Bemerkung

- Ein Strahl von Null durch einen Punkt $v \in L$ entspricht einem Punkt $[v]$ von ∂I^n .
- Ein Punkt $v \in L$ entspricht einer Horosphäre

$$\{w \in I^n \mid \langle v, w \rangle = -1\}$$

bzw. einer Horokugel

$$\{w \in I^n \mid -1 \leq \langle v, w \rangle < 0\}$$

um jenen Punkt im Unendlichen.

4.3.3 Lemma

$O^+(n, 1)$ agiert transitiv auf L und der Stabilisator eines Punktes ist nicht-kompakt für $n \geq 1$.

Beweis

Sei N der Stabilisator von $v \in L$. Dann entspricht N der Menge der ONBs v, v_1, \dots, v_n . Dann ergibt sich folgende Isomorphie

$$N \cong \{v\} \times (L \setminus \{\lambda \cdot v\}) \times O(n-1)$$

da (v, v_1) einen $(1, 1)$ -Unterraum aufspannt. Die Menge rechts ist nicht-kompakt. \square

4.3.4 Bemerkung

Parabolische Isometrien haben einen Strahl vom Ursprung aus in L , der punktweise fixiert wird.

4.3.5 Lemma

Sei $\Gamma \subset O^+(n, 1)$ diskret und torsionsfrei. I^n/Γ habe endliches Volumen und p Spitzen.

Wir fixieren p beschränkte Spitzen $H_1, \dots, H_p \subset I^n/\Gamma$ und $E_1, \dots, E_p \subset I^n$ als Urbilder. Jedes E_i stellt eine disjunkte, Γ -invariante Vereinigung von Horokugeln dar. Jede Horokugel korrespondiert zu einem Punkt in L . $B_i \subset L$ bezeichne die Menge aller Punkte, deren Horokugeln in E_i vorkommen. Dann ist jedes B_i diskret.

Beweis

I^n/Γ besteht aus endlich vielen Spitzen und einem kompakten Teil. Deswegen ist jede Komponente in $E \subset E_i$ eine **uniforme Horokugel**, d. h., für alle $g \in \Gamma$ gilt

$$g.E \cap E \neq \emptyset \implies g.E = E$$

Ergo ist jedes B_i diskret. \square

4.3.6 Lemma

C bezeichne die konvexe Hülle der B_i in \mathbb{R}^{n+1} . Dann hat C Dimension $n+1$.

Beweis

Wenn C Dimension $\leq n$ hat, bezeichne W den Vektorraum, der parallel zur affinen Hülle von C ist. C ist invariant unter Γ , aus Gründen der Linearität ist es auch W . W oder W^\perp induziert einen k -Raum in I^n mit $k < n$, der Γ -invariant bleibt. Deswegen ist $\Lambda(\Gamma)$ enthalten in einer k -Sphäre. Da I^n/Γ endliches Volumen hat, gilt aber $\Lambda(\Gamma) = \partial I^n$. \square

4.3.7 Lemma

Sei $x \in L$. $\Gamma.x$ hat genau dann einen Häufungspunkt in 0, wenn x nicht parabolisch ist.

Beweis

Sei x parabolisch. Sei $O \subset D^n$ eine uniforme Horokugel zu x . Besitzt $\Gamma.x$ einen Häufungspunkt in 0, so lassen sich beliebig große Horokugeln in $\{g.O \mid g \in \Gamma\}$ finden. Dies widerspricht in D^n anschaulich der Uniformität von D^n .

Sei 0 kein Häufungspunkt von $\Gamma.x$. Wähle eine kompakte Menge $K \subset I^n$, die den dicken Teil von I^n/Γ überdeckt. Reskaliere x so, dass jede Horokugel von $\Gamma.x$ leeren Schnitt mit K hat. Jedes $g(x)$ korrespondiert ergo zu einer beschränkten Spitze in I^n/Γ . Dies impliziert, dass x parabolisch ist. \square

4.3.8 Lemma

Es gilt

$$L \cap C = \{\lambda z \mid z \in B_i, \lambda \geq 1\}$$

Beweis

Wir zeigen nur

$$L \cap C \supseteq \{\lambda z \mid z \in B_i, \lambda \geq 1\}$$

Sei $z \in B_i$. Da $\Lambda(\Gamma) = \partial I^n$, liegen die Strahlen, mit Ursprüngen in $\Gamma.(B_1 \cup \dots \cup B_p)$, dicht in der Menge aller Strahlen in L . Ist eine Folge von solchen Strahlen gegeben, die gegen $[x]$ konvergiert, so liegt ihr Grenzwert bereits in C , da C konvex und abgeschlossen ist. \square

4.3.9 Lemma

Jeder Strahl in L vom Nullpunkt aus trifft ∂C genau einmal.

4.3.10 Proposition

Der Rand von C in \mathbb{R}^{n+1} ist $C \cup L$ geschnitten mit einer abzählbaren Zahl von Facetten F_i der Kodimension Eins. Jedes F_i ist die konvexe Hülle einer endlichen Zahl von Punkten in $B_1 \cup \dots \cup B_p$. Bezeichnet A_i die affine Hülle von F_i , so ist jedes A_i euklidisch und $L \cap A_i$ sphärisch bzgl. der euklidischen Struktur auf A_i . Die Menge der F_i ist lokal endlich im Inneren des Lichtkegels.

4.3.11 Bemerkung

- Da die Konstruktion von C Γ -äquivariant ist, ist die Zerlegung in Facetten Γ -äquivariant.
- Die Zellstruktur in $\partial C \setminus L$ ist lokal endlich und jede Zelle ist euklidisch. Projizieren wir dies auf die Poincare-Scheibe, erhalten wir ergo eine Kachelung von \mathbb{H}^n .
- Diese Kachelung lässt sich parametrisieren, indem B_1, \dots, B_p durch $\alpha_1 B_1, \dots, \alpha_p B_p$ ersetzt wird. Gilt aber $\alpha_1 = \dots = \alpha_p$, so bleibt die Kachelung gleich. Wir erhalten also eine $\mathbb{R}_{>0}^{p-1}$ -parametrisierbare Familie von Kachelungen.

- Jede Zelle hat vollständig geodätische Facetten und es gibt keine null-dimensionale Zellen außerhalb von L .
- Das Innere jeder Facette lässt sich injektiv in I^n/Γ abbilden. Ergo steigt die Familie der Kachelungen von \mathbb{H}^n ab zu einer $\mathbb{R}_{>0}^{p-1}$ -parametrisierbaren Familie von Zerlegungen von \mathbb{H}^n/Γ .
- Jeder der Facetten in \mathbb{H}^n/Γ hat eine Euklidische Struktur, aber für $n > 2$ lassen sich diese Strukturen nicht zu einer Euklidischen Struktur von \mathbb{H}^n/Γ verkleben.
- Allerdings erhalten wir für $n = 2$ tatsächlich eine Euklidische Struktur auf \mathbb{H}^n/Γ .

4.3.12 Satz

Sei $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ eine vollständige, hyperbolische Mannigfaltigkeit endlichen Volumens mit $p \geq 1$ Spitzen. Durch die Epstein-Penner-Konstruktion erhalten wir eine $\mathbb{R}_{>0}^{p-1}$ -parametrisierbare Familie von Γ -invarianten Kachelungen von \mathbb{H}^n , die zu einer kanonischen $\mathbb{R}_{>0}^{p-1}$ -Familie von Zerlegungen von M absteigt.

Ist $n = 2$, so hat M eine $\mathbb{R}_{>0}^{p-1}$ -Familie von unvollständigen euklidischen Strukturen und für jeden Parameter gibt es eine Zerlegung von M in endlich viele Zellen durch disjunkt eingebettete Geodäten.

4.4 Erweiterungen von Homotopie-Äquivalenzen

4.4.1 Definition

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ metrischer Räume heißt **quasi-isometrisch**, wenn Konstanten $C, D > 1$ gewählt werden können, sodass für alle $x, y \in X$

$$\frac{1}{C}d(x, y) - D \leq d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y) + D$$

gilt. In einem solchen Fall heißen X, Y **quasi-isometrisch** zueinander.

4.4.2 Definition

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ metrischer Räume heißt **pseudo-isometrisch**, wenn Konstanten $C, D > 1$ gewählt werden können, sodass für alle $x, y \in X$

$$\frac{1}{C}d(x, y) - D \leq d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$$

gilt. In einem solchen Fall heißen X, Y **pseudo-isometrisch** zueinander. Insbesondere sind Pseudo-Isometrien Lipschitz-stetig.

4.4.3 Definition

Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung Riemannscher Mannigfaltigkeit. Definiere die **maximale Dilation** von f bei $x \in M$ durch

$$\sup_{v \in \mathcal{T}_x M} \frac{\|d_x f(v)\|}{\|v\|}$$

4.4.4 Proposition

Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Homotopie-Äquivalenz geschlossener hyperbolischer Mannigfaltigkeiten. Dann ist jeder Lift $\tilde{f} : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ von f eine Pseudo-Isometrie.

Beweis

Sei g die Homotopie-Inverse zu f und \tilde{g} ein Lift von g . Da M kompakt ist, ist die maximale Dilatation von f auf M durch eine Konstante C beschränkt. Da \tilde{f} lokal wie f aussieht, ist die maximale Dilatation von \tilde{f} ebenfalls durch C beschränkt. Ergo ist \tilde{f} C -Lipschitz-stetig. Dieselbe Argumentation lässt sich auch für g durchführen und C lässt sich so groß wählen, dass auch \tilde{g} C -Lipschitz-stetig ist. Sei $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ und $F : [0, 1] \times M \rightarrow M$ eine Homotopie von $g \circ f$ zu id_M . Man kann nun nachrechnen, dass es eine Liftung \tilde{F} von F gibt, die eine Homotopie von $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ zu $\text{id}_{\mathbb{H}^n}$ und Γ -äquivariant ist. Sei D ein Dirichlet-Polyeder für Γ . D ist kompakt, da \mathbb{H}^n/Γ kompakt ist. Sei K der maximale Durchmesser von $\tilde{F}([0, 1] \times D)$. Liegt $x \in D$, so liegen x und $\tilde{g} \circ \tilde{f}(x)$ in $\tilde{F}([0, 1] \times D)$. Ergo

$$d(x, \tilde{g} \circ \tilde{f}(x)) \leq K$$

Da aber $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ äquivariant ist, gilt diese Ungleichung für alle $x \in \mathbb{H}^n$. Wir erhalten nun

$$d(x, y) \leq d(\tilde{g} \circ \tilde{f}(x), \tilde{g} \circ \tilde{f}(y)) + 2K \leq Cd(\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)) + 2K$$

□

4.4.5 Satz

Jede Pseudo-Isometrie $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ fortsetzen, die $\partial\mathbb{H}^n$ injektiv in sich selbst abbildet.

4.4.6 Lemma

Im oberen Halbraum-Modell bezeichne π die geodätische Retraktion auf die imaginäre Achse. Für $x \in \mathbb{H}^n$ bezeichne θ den Winkel zwischen einer euklidischen Geraden $[0, x]$ und $[0, \pi(x)]$. Dann gilt

$$\cosh d(x, \pi(x)) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass sich Alles in H^2 abspielt, dass $\pi(x) = i$ und dass x auf dem Einheitskreis liegt.

Wir erhalten eine nach Bogenlänge parametrisierte Form des Einheitskreises durch

$$\gamma(t) = \frac{ie^{it} + 1}{-ie^{it} + 1}$$

Dann gilt

$$\gamma(d(x, \pi(x))) = x$$

Setzt man $d := d(x, \gamma(x))$, so gilt

$$\cos(\theta) = \text{Im}(x) = \frac{2e^d}{e^{2d} + 1} = \frac{1}{\cosh(d)}$$

□

4.4.7 Lemma

Sei $l \subset \mathbb{H}^n$ eine Geodäte und π die geodätische Retraktion auf l . Für $x \in \mathbb{H}^n$ und $d = d(x, \pi(x))$ ist die maximale Dilatation von π bei x durch $\frac{1}{\cosh d}$ beschränkt.

Beweis

Wir stellen uns das Ganze wie in obigem Lemma vor. Sei $v \in \mathcal{T}_x \mathbb{H}^n$ so, dass v Länge 1 hat. Dann gilt

$$||d\pi|| = \cos \theta = \frac{1}{\cosh d}$$

□

4.4.8 Lemma

$\overline{pq} \subset \mathbb{H}^n$ bezeichne das geodätische Segment zwischen p und q . $N_R(\overline{pq})$ bezeichne die offene R -Nachbarschaft um \overline{pq} .

Sei $F : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ eine Pseudo-Isometrie, dann existiert $R > 0$, sodass für alle $p, q \in \mathbb{H}^n$ gilt

$$F(\overline{pq}) \subset N_R(\overline{F(p)F(q)})$$

Beweis

Es gelte

$$C^{-1}d(x, y) - D \leq d(F(x), F(y)) \leq Cd(x, y)$$

Wähle $R > \cosh^{-1}(2C^2)$ und sei l die Geodäte, die $F(p)$ und $F(q)$ enthält, π bezeichne die geodätische Retraktion auf l . Sei $\overline{st} \subset \overline{pq}$ maximal mit $F(\overline{st}) \cap N_R(l) = \emptyset$. Es gilt

$$\begin{aligned} C^{-1}d(s, t) - D &\leq d(F(s), F(t)) \\ &\leq d(F(s), \pi(F(s))) + d(\pi(F(s)), \pi(F(t))) + d(\pi(F(t)), F(t)) \\ &\leq R + L(\overline{\pi(F(s))\pi(F(t))}) + R \\ &\leq 2R + \frac{1}{\cosh R} L(\overline{F(s)F(t)}) \\ &\leq 2R + \frac{Cd(s, t)}{\cosh R} \end{aligned}$$

Ergo

$$d(s, t) \leq \frac{(2R + CD) \cosh R}{\cosh R - C^2} =: M$$

Ergo gilt

$$F(\overline{pq}) \subset N_{R+CM}(l)$$

Analog zeigt man nun

$$F(\overline{pq}) \subset N_{R+CM}(\overline{F(p)F(q)})$$

□

4.4.9 Lemma

Sei $F : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ eine Pseudo-Isometrie. Dann existiert eine Konstante $R > 0$, sodass für jeden geodätischen Strahl $l \subset \mathbb{H}^n$ genau ein Strahl l' existiert mit

$$F(l) \subset N_R(l')$$

Beweis

Sei l parametrisiert durch $l : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{H}^n$. Sei R wie im vorhergehenden Lemma gewählt. Existenz: Definiere folgende Folge in $\partial\mathbb{H}^n$

$$l_n := \overrightarrow{[F(l(0))F(l(n))]}$$

Da $\partial\mathbb{H}^n$ kompakt ist, besitzt diese Folge einen Grenzwert l' . Aufgrund des vorhergehenden Lemmas erfüllt l' die gewünschte Eigenschaft.

Eindeutigkeit: Seien l' und l'' zwei mögliche Kandidaten. Dann ist der Abstand zwischen ihnen durch $2R$ begrenzt, ergo sind sie zwangsläufig identisch, da sie denselben Anfangspunkt und denselben Endpunkt im Unendlichen besitzen. \square

4.4.10 Lemma

Sei $F : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ eine Pseudo-Isometrie. Dann gibt es eine Konstante $R > 0$, sodass für jede unbegrenzte Geodäte $l \subset \mathbb{H}^n$ genau eine Geodäte l' existiert mit

$$F(l) \subset N_R(l')$$

4.4.11 Lemma

Sei $F : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ eine Pseudo-Isometrie. Dann gibt es eine Konstante $R > 0$, sodass für jede Gerade l und jeder Hyperebene H orthogonal zu l , $\pi(F(H))$ ein geodätisches Segment der Länge $\leq R$ ist, wobei $\pi : \mathbb{H}^n \rightarrow l'$ die geodätische Retraktion auf die Gerade l' wie im obigen Lemma ist.

Beweis

Seien l eine Gerade, g eine Gerade orthogonal zu l und $R > 0$ so, dass

$$F(l) \subset N_R(l'), F(g) \subset N_R(g')$$

Sei $x \in F(g)$ und $y \in g'$ der Punkt, der x am nächsten ist. Es gilt

$$d(\pi(x), \pi(y)) \leq d(x, y) \leq R$$

Es genügt also zu zeigen, dass g' auf ein geodätisches Segment von l' geschickt wird. Allerdings muss dies der Fall sein, da F die visuelle Metrik auf $\partial\mathbb{H}^n$ erhält und deswegen l' und g' weiterhin orthogonal sind.

Die Menge aller Geodäten in H ist kompakt. Ergo lässt sich die Vereinigung all ihrer geodätischen Segmente auf l' endlich zusammenführen. \square

4.4.12 Lemma

Die Fortsetzung $F : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ ist stetig.

Beweis

Sei l eine Gerade und l' die Gerade zu $F(l)$. S bezeichne einen Halbraum orthogonal zu l' . $H(t)$ bezeichne eine Hyperebene orthogonal zu l bei $l(t)$. Nach vorhergehendem Lemma gilt $F(H(t)) \subset S$ für alle t , die hinreichend groß sind. \square

4.4.13 Satz

Sei $f : M \rightarrow N$ eine glatte Homotopie-Äquivalenz geschlossener hyperbolischer Mannigfaltigkeiten. Dann lässt sich sein Lift zu einer Pseudo-Isometrie $\tilde{f} : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ fortsetzen, dessen Einschränkung auf den Rand homöomorph ist.

Beweis

Es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{f}|_{\partial\mathbb{H}^n}$ homöomorph ist. Allerdings ist diese Abbildung eine injektive Abbildung Riemannscher Mannigfaltigkeiten und somit offen. Ergo ist das Bild von $\tilde{f}|_{\partial\mathbb{H}^n}$ offen und abgeschlossen, also ganz $\partial\mathbb{H}^n$. \square

4.5 Topologisches Volumen

4.5.1 Satz

Jede glatte kompakte Mannigfaltigkeit kann topologisch als endlicher Zellkomplex dargestellt werden.

4.5.2 Definition

Ein endlicher Zellkomplex X ist lokal null-homotop und hat deswegen eine universelle Überlagerung \tilde{X} . Ist \tilde{X} null-homotop, so heißt X **asphärisch**.

4.5.3 Satz: Whitehead

Ein endlicher Zellkomplex X ist genau dann asphärisch, wenn all seine höheren Homotopiegruppen $\pi_i(X), i \geq 2$, verschwinden.

4.5.4 Satz

Seien X, Y zwei zusammenhängende, asphärische, endliche Komplexe. Dann wird jeder Isomorphismus $\pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ durch eine bis auf Homotopie eindeutige Homotopieäquivalenz $X \rightarrow Y$ induziert.

4.5.5 Satz: Mostows Rigiditäts-Theorem

Seien M, N zwei geschlossene, orientierbare, hyperbolische, zusammenhängende drei-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Dann wird jeder Isomorphismus $\pi_1(M) \rightarrow \pi_1(N)$ durch eine eindeutige Isometrie $M \rightarrow N$ induziert.

Beweis

M, N sind beide asphärisch, weil ihre universelle Überlagerung \mathbb{H}^n null-homotop ist. Ergo wird jeder Isomorphismus von Fundamentalgruppen durch eine Homotopieklasse der Äquivalenzen $M \rightarrow N$ induziert. Es bleibt zu zeigen, dass eine solche Homotopieklasse genau eine Isometrie enthält. \square

4.5.6 Korollar

Zwei geschlossene, zusammenhängende, orientierbare, hyperbolische drei-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind genau dann isometrisch, wenn ihre Fundamentalgruppen isomorph sind.

4.5.7 Korollar

Ist M eine geschlossene, orientierbare, hyperbolische, zusammenhängende drei-dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist

$$\nu : \text{Isom}(M) \longrightarrow \text{Out}(\pi_1(M))$$

ein Isomorphismus.

4.5.8 Definition

Definiere die **Lobachevsky-Funktion** durch

$$\Lambda(\theta) := - \int_0^\theta \log |2 \sin(t)| \, dt$$

4.5.9 Lemma

Die Lobachevsky-Funktion ist wohldefiniert und stetig. Es gilt

- $\Lambda'(\theta) = -\log |2 \sin(\theta)|$
- $\Lambda''(\theta) = -\cot(\theta)$

4.5.10 Lemma

- Die Lobachevsky-Funktion ist π -periodisch.
- $\Lambda(0) = \Lambda(\pi/2) = \Lambda(\pi)$
- Die Lobachevsky-Funktion ist positiv auf $(0, \frac{\pi}{2})$ und negativ auf $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.
- Die Lobachevsky-Funktion hat ein Maximum bei $\frac{\pi}{6}$ und ein Minimum bei $\frac{5\pi}{6}$.
- Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Lambda(m\theta) = m \sum_{k=0}^{m-1} \Lambda\left(\theta + \frac{k\pi}{m}\right)$$

4.5.11 Lemma

Sei D ein idealer, hyperbolischer Tetraeder und e, e' zwei gegenüberliegende Kanten. Dann gibt es eine Achse, die orthogonal zu e und e' steht und D bleibt invariant unter einer π -Drehung um diese Achse.

Beweis

e und e' sind ultra-parallel, wähle also eine Geodäte r , die den Abstand zwischen beiden minimiert. r schneidet e und e' mittig, eine π -Drehung um r vertauscht also die Endpunkte von e und e' , erhält ergo D . \square

4.5.12 Korollar

Zwei gegenüberliegende Kanten eines idealen Tetraeders haben dieselben Torsionswinkel.

4.5.13 Satz

Sei D ein idealer Tetraeder mit Torsionswinkeln α, β, γ . Dann gilt

$$\text{Vol}(D) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$$

4.5.14 Korollar

Der gleichmäßige, ideale Tetraeder hat maximales Volumen unter den hyperbolischen Tetraedern.

4.5.15 Definition: Homologie-Gruppen, again...

Sei X ein topologischer Raum und R ein kommutativer Ring.

Ein **singulärer k -Simplex** in X ist eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta_k \rightarrow X$. Definiere die Menge der **k -Ketten** $C_k(X; R)$ als den R -Modul, der aus formalen endlichen Linearkombinationen von singulären k -Simplizes besteht.

Definiere die **Randabbildung** durch

$$\begin{aligned} \partial_k : C_k(X; R) &\longrightarrow C_k(X; R) \\ \sigma &\longmapsto \sum_{i=0}^k (-1)^i d_i(\sigma) \end{aligned}$$

wobei $d_i(\sigma)$ die i -te Facette von σ ist. Es gilt dann

$$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$$

Definiere die Moduln der **k -Zykeln** und **k -Ränder** durch

$$Z_k(X; R) := \ker \partial_k \text{ und } B_k(X; R) := \text{Bild } \partial_{k+1}$$

Definiere die **k -te Homologiegruppe** von X mit Koeffizienten in R durch

$$H_k(X; R) := Z_k(X; R) / B_k(X; R)$$

4.5.16 Definition

Sei $\alpha \in C_k(X; \mathbb{R})$. Definiere die **Norm** von α durch

$$||\alpha|| = ||\lambda_1 \sigma_1 + \dots + \lambda_k \sigma_k|| := |\lambda_1| + \dots + |\lambda_k|$$

Definiere die Norm für $[\alpha] \in H_k(X; \mathbb{R})$ durch

$$||[\alpha]|| = \inf \{ ||\beta|| \mid \beta \in [\alpha] \}$$

4.5.17 Proposition

Die Norm auf den Homologiegruppen ist eine **Halbnorm**, d. h., sie erfüllt folgende Eigenschaften:

- (1) Sie ist **homogen**, d. h., für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $a \in H_k(X; \mathbb{R})$ gilt

$$||\lambda a|| = |\lambda| ||a||$$

- (2) Sie erfüllt die **Dreiecks-Ungleichung**, d. h., für alle $a, b \in H_k(X; \mathbb{R})$ gilt

$$||a + b|| \leq ||a|| + ||b||$$

4.5.18 Bemerkung

Sei M eine orientierbare, zusammenhängende, geschlossene Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$H_n(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

Eine Orientierung von M ist eindeutig durch einen Erzeuger von $H_n(M; \mathbb{Z})$ bestimmt. Ist M bereits orientiert, nennen wir den korrespondierenden Erzeuger $[M]$ die **Fundamentalklasse** von M .

4.5.19 Definition

Definiere das **simpliciale Volumen** von M durch

$$||M|| := |[M]|$$

Da sich die Fundamentalklassen von M durch Vorzeichenwechsel unterscheiden, ist das simpliciale Volumen wohldefiniert.

4.5.20 Definition

Sei $f : M \rightarrow N$ eine stetige Abbildung orientierter, geschlossener, zusammenhängender Mannigfaltigkeiten. Dann ist der **Grad** von f als ein Element aus \mathbb{Z} definiert, für das gilt

$$\deg f \cdot [N] = f_*[M]$$

4.5.21 Proposition

Es gilt in obiger Situation

$$||N|| \cdot |\deg f| \leq ||M||$$

Beweis

Sei $\alpha = \lambda_1 \sigma_1 + \dots + \lambda_k \sigma_k \in [M]$ mit minimaler Norm. Dann gilt $f_*(\alpha) = \lambda_1 f \sigma_1 + \dots + \lambda_k f \sigma_k \in f_*[M]$. Ergo

$$\deg f \cdot |[N]| \leq |f_*(\alpha)| = |\alpha| = |[M]|$$

□

4.5.22 Korollar

Sind M, N zwei geschlossene, orientierbare, homotopie-äquivalente Mannigfaltigkeiten derselben Dimension besitzen dasselbe simpliciale Volumen.

Beweis

Da M, N homotopie-äquivalent sind, finden wir Abbildungen $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow M$, die Isomorphismen auf den Homologiegruppen induzieren. Ergo haben f, g Grad 1 bzw. -1 . □

4.5.23 Korollar

Ist M eine geschlossene, orientierbare, sphärische oder euklidische Mannigfaltigkeit der Dimension $n \geq 1$, so gilt

$$||M|| = 0$$

Beweis

Ist $M = S^n$ oder T^n , so besitzt M eine Selbstabbildung von Grad 2. Ist M sphärisch oder euklidisch, so wird M endlich durch S^n oder T^n überlagert. Diese Überlagerung besitzt einen endlichen Grad auf den Homologiegruppen, ergo verschwindet das topologische Volumen von M . □

4.5.24 Satz

Sei M eine geschlossene, zusammenhängende, orientierbare, hyperbolische Mannigfaltigkeit der Dimension 3. Bezeichnet ν_3 das Volumen des idealen Tetraeders in \mathbb{H}^3 , so gilt

$$Vol(M) = \nu_3 \cdot ||M||$$

Kapitel 5

Aufgaben

5.1 Blatt 1

5.1.1 Aufgabe 1

Claim Let I be the n -dimensional hyperboloid model.

- (i) Let S be a k -space in I , $p \in S$. Then there exists a unique $(n - k)$ -Subspace T , s.t. S and T intersects orthogonally in p .
- (ii) Reflections along hypersurfaces generate $\text{Isom}(S^n) \cong O(n + 1)$.
- (iii) Reflections along hyperbolic hyperspaces generate $\text{Isom}(I)$.

Beweis

- (i) Denote by the \langle, \rangle the Lorentzform on \mathbb{R}^{n+1} , i. e.

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

Without loss of generality, we can assume

$$I = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = -1, x_{n+1} > 0\}$$

Let S be a k -space in I , $p \in S$. Then there is a $(k + 1)$ -dimensional vector space $V_S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, s. t.

$$S = I \cap V_S$$

Since \langle, \rangle is not degenerate there is an $(n - k)$ -dimensional vector space V'_T which is orthogonal to V_S . V'_T and V_S intersects only in the origin of \mathbb{R}^{n+1} . Therefore, $I \cap V'_T$ is a $(n - k - 1)$ -dimensional subspace which doesn't intersect with S .

Now, it's tempting to simply throw the vector p into V'_T . So let V_T be the vector space generated by V'_T and p .

Then $T := V_T \cap I$ is a $(n - k)$ -dimensional subspace which intersects with S in p and only in p since the intersection of V_S and V_T is exactly the line going from 0 to p and intersecting I only in p .

The intersection of T and S is orthogonally since their tangent spaces are subspaces of V_T , V_S resp., which doesn't contain p and, therefore, are orthogonal to each other.

- (ii) Let $\Phi \in \text{Isom}(S^n)$ be an isometry. For an arbitrary point $p \in S^n$ and an ONB $b_1, \dots, b_n \in T_p S^n$, each isometry on S^n is determined by $n+1$ dates: $\Phi(p), d\Phi(b_1), \dots, d\Phi(b_n)$. First, we show there is a reflection l , s. t.

$$l(p) = \Phi(p)$$

Let $\gamma : [0, t] \rightarrow S^n$ be a geodesic with unit speed from p to $\Phi(p)$. Let $E \subset S^n$ be a hypersubspace which intersects orthogonally with γ in $\gamma(t/2)$. Now, the reflection l along E mirrors the points $\gamma(x)$ to $\gamma(t-x)$. Therefore

$$l(p) = l(\gamma(0)) = \gamma(t) = \Phi(p)$$

So, we can assume now that p is a fixed point of Φ . We aim to pull through a very beautiful inductive argument. Note, that each isometry with fixed point p is uniquely determined by its action on $T_p S^n \cong \mathbb{R}^n$. Therefore, we get

$$\text{Fix}_p \cong O(n)$$

$O(n)$ denotes the linear isometries of \mathbb{R}^n . But these are uniquely determined by their action on S^{n-1} . By induction thesis, we know that the isometries on S^{n-1} are the concatenation of reflections along $n-2$ -subspaces in S^{n-1} . But these reflections correspond to reflections along $n-1$ -vector spaces of \mathbb{R}^n . Well, and these reflections, then again, correspond to reflections along hypersurfaces of S^n which contain the point p . Therefore, by induction hypothesis, the claim follows.

- (iii) Let $\Phi : I \rightarrow I$ be an isometry. Let $\gamma : [0, t] \rightarrow I$ be a geodesic from p to $\gamma(p)$ with unit speed. By (i), we know there is an $(n-1)$ -dimensional subspace which intersects orthogonally with γ in $\gamma(t/2)$. Therefore, the reflection on this subspace maps p to $\Phi(p)$. Now, we can assume that Φ has the fixed point p . Again, Φ is determined by its action on the sphere bundle $S_p I \cong S^{n-1}$ at p . But this action can be simulated by reflections along hypersurfaces of S^{n-1} , as we do know by (ii). These reflections correspond to reflections along $(n-1)$ -dimensional subspaces of I . Therefore, the claim follows. □

5.1.2 Exercise 2

Claim Let $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be the inversion along the circle centered in $-i$ with radius $\sqrt{2}$. We claim

$$\Phi(z) = \frac{\bar{z} + i}{i\bar{z} + 1}$$

Beweis

Let $S = S_{-i}(\sqrt{r})$. The inversion along S is defined by

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{-i\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-i\} \\ z &\longmapsto -i + 2 \frac{z + i}{|z + i|^2} \end{aligned}$$

Computing this gives

$$-i + 2 \frac{z + i}{|z + i|^2} = -i + 2 \frac{1}{\bar{z} - i} = \frac{2 - i(\bar{z} - i)}{\bar{z} - i} = \frac{1 - i\bar{z}}{\bar{z} - i} = \frac{i(1 - i\bar{z})}{i(\bar{z} - i)} = \frac{i + \bar{z}}{i\bar{z} + 1}$$

□

5.1.3 Exercise 3

A triple $(a, b, c) \in (\mathbb{R} \cup \infty)^3$ is called positive if $a < b < c$, $b < c < a$ or $c < a < b$.

Claim $PSL_2\mathbb{R}$ acts freely and transitively on the set of positive triples of $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beweis

Let (x, y, z) be a positive triple. Without loss of generality, we can assume $x < y < z$.
Let $M \in SL_2\mathbb{R}$, s. t.

$$(x, y, z).M = (x, y, z)$$

First we assume, that $z < \infty$ For

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

we get

$$\begin{aligned} \frac{ax_i + b}{cx_i + d} &= x_i \\ \iff ax_i + b &= cx_i^2 + dx_i \\ \iff ax_i + b - cx_i^2 - dx_i &= 0 \end{aligned}$$

for $x_i \in \{x, y, z\}$. So, the above polynomial has three different vanishing points. Since it's of degree two, it has to be zero. Therefore M now fixes every $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. But there are only two matrices in $SL_2\mathbb{R}$ who are capable of doing this: $\pm I$. Therefore, it follows that $PSL_2\mathbb{R}$ acts freely on the positive triples of \mathbb{R} .

Now, let $z = \infty$. We then get

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{at + b}{ct + d} = \infty$$

Therefore c has to be zero. We then get the equations

$$ax_i + b - dx_i = 0 \quad x_i \in \{x, y\}$$

but this means the above polynomial of degree one has two different vanishing points, therefore has to be zero. It follows, again, $M = \pm I$.

Let $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ be positive. We claim there is a $M \in SL_2(\mathbb{R})$ which maps the first triple to the second. The coefficients of M which will be again denoted by a, b, c, d have to solve the following linear equation system

$$ax_i + b + cx_i y_i + d = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

But the vector space V of all sufficient (a, b, c, d) has at least dimension one. So, it remains to show there exists one quadruple in V which additionally fulfils

$$ad - bc = 1$$

So, let $(a', b', c', d') \in V$, s.t. $r := ad - bc \neq 0$. Then $(a, b, c, d) := \frac{1}{\sqrt{r}}(a', b', c', d')$ is an element of V which gives rise to a matrix in $SL_2\mathbb{R}$ which transforms the triple (x_1, x_2, x_3) to (y_1, y_2, y_3) . Hence $PSL_2\mathbb{R}$ acts transitively on the positive triples of \mathbb{R} .

Now, let $x, y \in \mathbb{R}, x < y$. We want to show there is $M \in SL_2\mathbb{R}$ which maps (x, y, ∞) to $(-1, 0, 1)$. Indeed, one can compute that for each $\lambda \neq 0$ the matrix

$$M = \lambda \begin{pmatrix} 1 & -y \\ 1 & y - 2x \end{pmatrix}$$

does the job. So, especially $\frac{1}{\det M}M \in SL_2\mathbb{R}$.

Now, since $PSL_2\mathbb{R}$ is a group, this also means that $(-1, 0, 1)$ can be mapped to every positive (x, y, ∞) . Since $PSL_2\mathbb{R}$ acts transitively on the positive triples of \mathbb{R} , it follows that it also acts transitively on all positive triples, which may have ∞ as their third coefficient. We also get the triples where ∞ is in the middle or the first component by using matrices $M \in PSL_2\mathbb{R}$ which permute the components of some triples with real coefficients. Therefore, $PSL_2\mathbb{R}$ acts indeed transitively on all positive triples of $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. \square

5.1.4 Exercise 4

Let $p, q \in I$.

Claim

$$\cosh(d(p, q)) = -\langle p, q \rangle$$

Beweis

Let $\gamma : [0, l] \rightarrow I$ be a geodesic with unit speed starting at p and ending in q . We know γ is given by

$$\gamma(t) = \cosh(t)p + \sinh(t)v$$

where $v \in S_p I$. We aim to compute $l = d(p, q)$. For this end, consider

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle &= \langle p, \cosh(l)p + \sinh(l)v \rangle \\ &= \cosh(l) \langle p, p \rangle + \sinh(l) \langle p, v \rangle \\ &= -\cosh(l) \end{aligned}$$

Since $l = d(p, q)$, the claim follows. \square

5.1.5 Exercise 5

Define the **cross-ratio** of $w, x, y, z \in \overline{H^2}$ by

$$CR(w, x, y, z) := \frac{(w - y)(x - z)}{(x - y)(w - z)}$$

Claim

(i) The cross-ratio is invariant under isometries.

(ii) For $\lambda > 0$, it holds

$$d(i, \lambda i) = |\ln \lambda|$$

(iii) For $p, q \in H^2$, let $p^*, q^* \in \partial H^2$ be the corresponding endpoints of a geodesic connecting p and q . It holds

$$d(p, q) = |\ln CR(q^*, p^*, p, q)|$$

Beweis

- (i) Note, that each isometry of H^2 is a product of reflections along vertical lines and inversions along spheres. Therefore, it suffices to show that reflections and inversions don't change the cross-ratio. First, let $\Phi(p) = t - p$ be a reflection on a vertical line. Then we get

$$\begin{aligned} CR(\Phi(w), \Phi(x), \Phi(y), \Phi(z)) &= \frac{(t - w - (t - y))(t - x - (t - z))}{(t - x - (t - y))(t - w - (t - z))} \\ &= \frac{(y - w)(z - x)}{(y - x)(z - w)} \\ &= \frac{(w - y)(x - z)}{(x - y)(w - z)} \\ &= CR(w, x, y, z) \end{aligned}$$

Second, let $\Phi(x) = p + r^2 \frac{x - p}{|x - p|^2}$ be an inversion along a sphere for $p \in H^2, r > 0$. Then, we get

$$\begin{aligned} (\Phi(x) - \Phi(y)) &= p + r^2 \frac{x - p}{|x - p|^2} - (p + r^2 \frac{y - p}{|y - p|^2}) \\ &= r^2 \left(\frac{x - p}{|x - p|^2} - \frac{y - p}{|y - p|^2} \right) \\ &= r^2 \frac{(x - p)|y - p|^2 - (y - p)|x - p|^2}{|x - p|^2 |y - p|^2} \\ &= r^2 \frac{(x - p)|y - p|^2 - (y - p)|x - p|^2}{|(x - p)(y - p)|^2} \end{aligned}$$

Therefore

$$\begin{aligned} &CR(\Phi(w), \Phi(x), \Phi(y), \Phi(z)) \\ &= \frac{\frac{(w - p)|y - p|^2 - (y - p)|w - p|^2}{|(w - p)(y - p)|^2} \cdot \frac{(x - p)|z - p|^2 - (z - p)|x - p|^2}{|(x - p)(z - p)|^2}}{\frac{(x - p)|y - p|^2 - (y - p)|x - p|^2}{|(x - p)(y - p)|^2} \cdot \frac{(w - p)|z - p|^2 - (z - p)|w - p|^2}{|(w - p)(z - p)|^2}} \\ &= \frac{\left((w - p)|y - p|^2 - (y - p)|w - p|^2 \right) \cdot \left((x - p)|z - p|^2 - (z - p)|x - p|^2 \right)}{\left((x - p)|y - p|^2 - (y - p)|x - p|^2 \right) \cdot \left((w - p)|z - p|^2 - (z - p)|w - p|^2 \right)} \\ &= \frac{(w - p)(x - p)|y - p|^2|z - p|^2 - (w - p)(z - p)|x - p|^2|y - p|^2 - (y - p)(x - p)|z - p|^2|w - p|^2 + (y - p)(z - p)|x - p|^2|w - p|^2}{(x - p)(w - p)|z - p|^2|y - p|^2 - (y - p)(w - p)|z - p|^2|x - p|^2 - (z - p)(x - p)|y - p|^2|w - p|^2 + (y - p)(z - p)|x - p|^2|w - p|^2} \\ &= \frac{(\bar{y} - p)(\bar{z} - p) - (\bar{x} - p)(\bar{y} - p) - (\bar{z} - p)(\bar{w} - p) + (\bar{x} - p)(\bar{w} - p)}{(\bar{z} - p)(\bar{y} - p) - (\bar{z} - p)(\bar{x} - p) - (\bar{y} - p)(\bar{w} - p) + (\bar{w} - p)(\bar{x} - p)} \\ &= \frac{(\bar{x} - p)(\bar{w} - \bar{y}) - (\bar{z} - p)(\bar{w} - \bar{y})}{(\bar{w} - p)(\bar{x} - \bar{y}) - (\bar{z} - p)(\bar{x} - \bar{y})} \\ &= \frac{(\bar{x} - \bar{z})(\bar{w} - \bar{y})}{(\bar{w} - \bar{z})(\bar{x} - \bar{y})} \end{aligned}$$

Since the cross-ratio is always a real value, the claim follows.

- (ii) Let $\gamma > 0$. Note that the metric tensor on H^2 is given by

$$g_{x+iy}(v, w) = \frac{1}{y^2}(v, w)$$

for $x, y \in \mathbb{R}, y > 0, v, w \in T_{x+iy}H^2$.

First, we assume $\lambda > 1$. Consider in this case the geodesic

$$\begin{aligned}\gamma : [1, \lambda] &\longrightarrow H^2 \\ t &\longmapsto it\end{aligned}$$

We compute

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in T_{\gamma(t)}H^2$$

and

$$\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))} = \sqrt{\frac{1}{t^2}} = \frac{1}{|t|} = \frac{1}{t}$$

Therefore, we get

$$d(i, \lambda i) = \int_1^\lambda \|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)} dt = \int_1^\lambda \frac{1}{t} dt = \log \lambda - \log 1 = \log \lambda$$

Now, assume $\lambda < 1$. We then consider the inversion Φ along the unit sphere. Since i lies on the unit sphere it will not be changed by Φ , while for λi , we get

$$\Phi(\lambda i) = 0 + 1^2 \frac{i\lambda - 0}{|i\lambda - 0|^2} = \frac{1}{-i\lambda} = i\frac{1}{\lambda}$$

Since Φ is an isometry we get

$$d(i, \lambda i) = d(\Phi(i), \Phi(\lambda i)) = d(i, \frac{1}{\lambda}i) = \log(\lambda^{-1}) = -\log \lambda = |\log \lambda|$$

(iii) First, we assume that $p = i$ and $q = \lambda i$ for $\lambda > 1$. Then, we get

$$d(p, q) = |\ln \lambda|$$

by (ii) and

$$CR(q^*, p^*, p, q) = CR(\infty, 0, i, \lambda i) = \frac{(\infty - i)(0 - \lambda i)}{(0 - i)(\infty - \lambda i)} = \frac{-\lambda i}{-i} = \lambda$$

Therefore, the claim follows for the case $p = i, q = \lambda i, \lambda > 1$.

Now, let p, q be two arbitrary distinct points of H^2 . By a reflection along a vertical line, we can move p to a point of the imaginary line. By an inversion along a suitable sphere, we can move p to i if p isn't already i . Now, suppose q doesn't lie after these isometries on the imaginary line. By an inversion along a suitable sphere, which contains p , we can move q to the imaginary line without changing p . Then q is $i\lambda$ for $\lambda > 0, \neq 1$. If $\lambda < 1$, we can again use the inversion along the unit sphere to fix p and move q to $\frac{1}{\lambda}i$.

Now, we do know these reflections and inversions doesn't change the distance of p, q , for they are isometries. Furthermore, they also don't change the cross-ratio of q^*, q, p, p^* since the cross-ratio is invariant under isometries.

Therefore, we can always transform the general case to the special case which is handled above.

□

5.1.6 Exercise 6

Denote by D^2 the Poincare disk.

Claim

- (i) For every triple $\alpha, \beta, \gamma > 0$ with $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ there is a triangle with those inner angles.
- (ii) The mentioned triangle is unique up to isometries.

Beweis

- (i) Let $\alpha, \beta, \gamma > 0$ with $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.
First, we consider the triangle with vertices

$$(0, 0), (0, 1) \text{ and } (\cos \alpha, \sin \alpha)$$

This is a triangle in \overline{D}_2 with angles $\alpha, 0, 0$.

Then we pick the geodesic line from $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ to $(0, 1)$ of the geodesic triangle and replace it by a geodesic γ_t line from $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ to $(\cos(-t), \sin(-t))$ for $t > 0$. I. e., we move the endpoint of the geodesic slowly counter clockwise. By doing this, we enlarge the angle between γ_t and the line from $(0, 0)$ to $(0, 1)$ without changing α . We can do this till this angle reaches any value of $(0, \pi)$. Therefore, we can enable the angle β here.

Now, we have a geodesic triangle with angles $\alpha, \beta, 0 = \gamma'$. By moving the points at α and β closer together, we can make γ' bigger till it reaches γ . Therefore, we can construct a geodesic triangle with angles α, β, γ .

- (ii) It suffices to show that each triangle with angles α, β, γ has the same side lengths. But, indeed, the side lengths of a hyperbolic triangle with angles α, β, γ and sides a, b, c are totally determined by their inner angles since the following formula holds

$$\frac{\sin \alpha}{\sinh a} = \frac{\sin \beta}{\sinh b} = \frac{\sin \gamma}{\sinh c}$$

- (iii) Alternativ kann man die Eindeutigkeit wie folgt zeigen: Sei Δ_{ABC} ein hyperbolisches Dreieck mit Winkeln α, β, γ . Wir drehen Δ_{ABC} so, dass B nach unten zeigt. Die Geodäte \bar{a} , die die Seite a enthält, hat zwei reelle Endpunkte. Zwischen diesen liegt ein Endpunkt der Seite c . Für ein weiteres Dreieck $\Delta_{A'B'C'}$ führen wir dieselbe Konstruktion durch und erhalten ein weiteres positives Tripel reeller Werte. Mithilfe einer Möbiustransformation können wir die Tripel identifizieren. Die beiden Dreiecke haben nun dieselben Winkel. Da B, B' beide auf \bar{a} liegen, und dieselben Winkel haben, folgt $B = B'$. Die Seiten b und b' sind durch die Winkel γ und α eindeutig festgelegt, ergo stimmen sie überein. Dadurch stimmen beide Dreiecke bis auf eine Möbiustransformation überein.

□

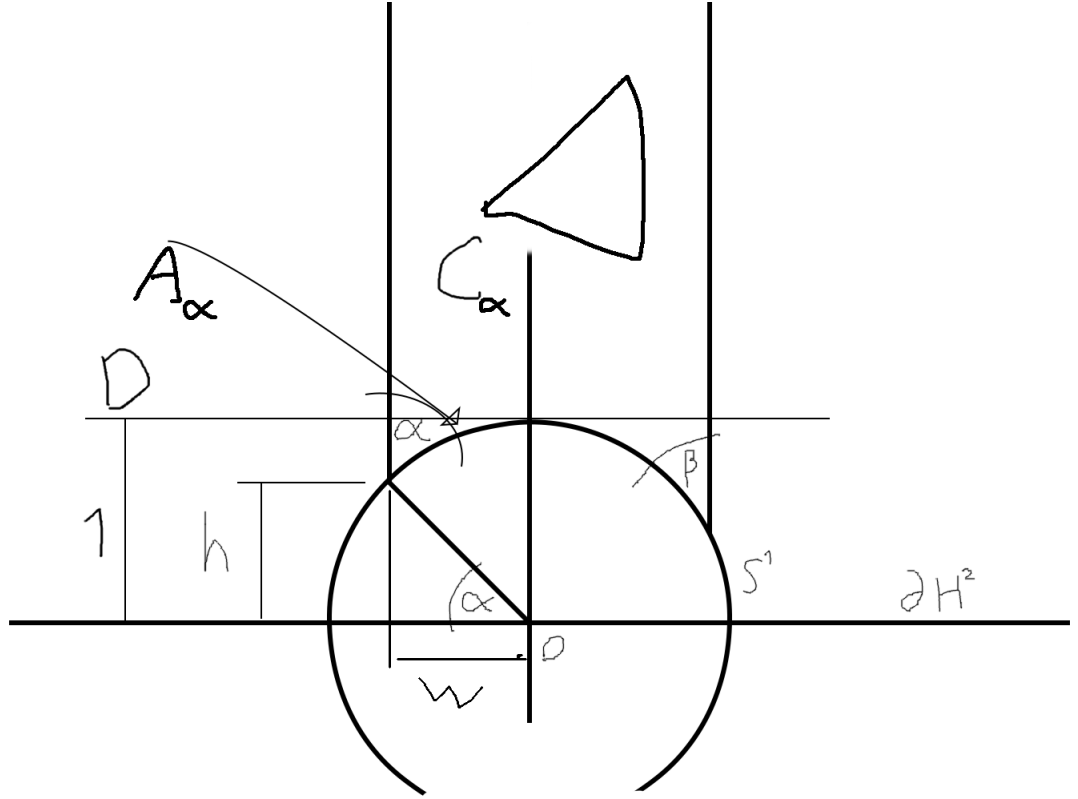
5.2 Blatt 2**5.2.1 Aufgabe 1****Teilaufgabe 1**

Behauptung Sei $\Delta \subset \overline{H^2}$ ein hyperbolisches Dreieck mit Winkeln α, β, γ . Dann gilt

$$\text{area}(\Delta) = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

Beweis

- (i) Wir nehmen zuerst an, dass der Punkt C von Δ Unendlich ist. Dann liegt ohne Beschränkung der Allgemeinheit Δ wie in folgender super hübschen Skizze vor



Wir können die Fläche von Δ also unterteilen in die Flächen von $A_\alpha, C_\alpha, A_\beta, C_\beta$. Die horizontale Linie D der Höhe 1 bildet eine Horosphäre auf der die Metrik durch das euklidische Skalarprodukt gegeben ist. Insofern berechnet sich die Fläche von C_α durch

$$\text{area}(C_\alpha) = w = \cos(\alpha)$$

Die Fläche von A_α berechnet sich durch das Integral

$$\text{area}(A_\alpha) = \int_{(x,y) \in A_\alpha} \frac{1}{y^2} dx dy = \int_{y=h}^{y=1} \int_{x=-\cos(\sin^{-1}(y))}^{x=-w} \frac{1}{y^2} dx dy$$

wobei wir zuerst annehmen, dass $\alpha \neq 0$. Mit $h = \sin(\alpha), w = \cos(\alpha)$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \text{area}(A_\alpha) &= \int_{y=\sin \alpha}^{y=1} \int_{x=-\cos(\sin^{-1}(y))}^{x=-\cos \alpha} \frac{1}{y^2} dx dy \\ &= \int_{y=\sin \alpha}^{y=1} \frac{1}{y^2} \int_{x=-\cos(\sin^{-1}(y))}^{x=-\cos \alpha} dx dy \\ &= - \int_{y=\sin \alpha}^{y=1} \frac{\cos(\alpha) - \cos(\sin^{-1}(y))}{y^2} dy \end{aligned}$$

Wir substituieren $\sin u = y$

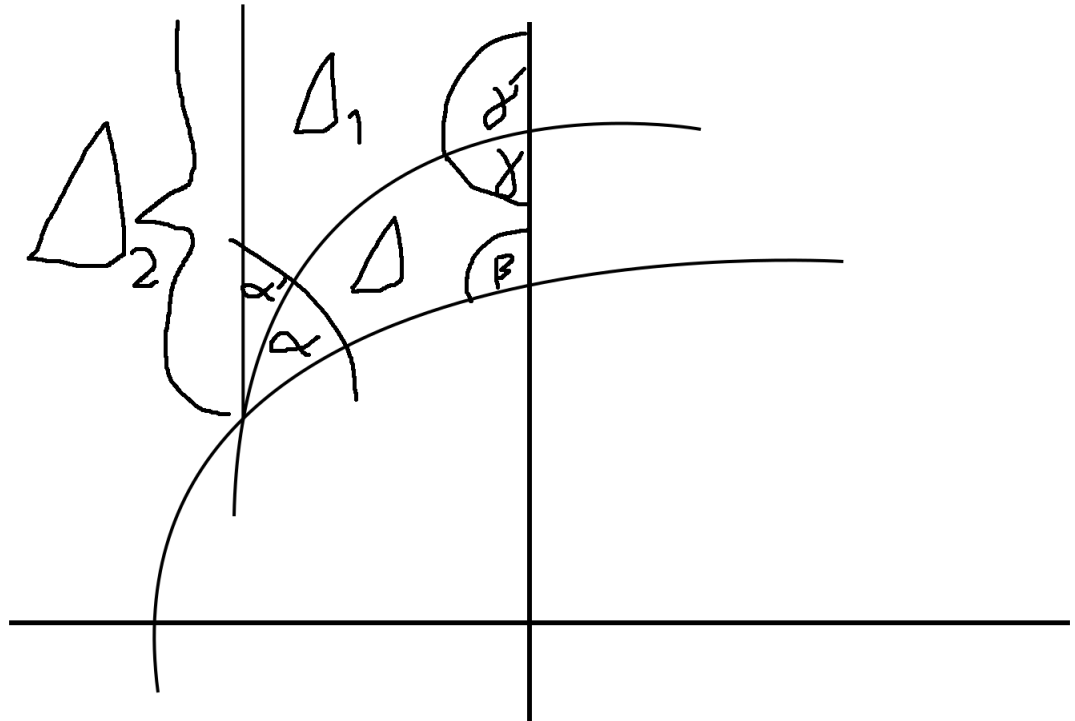
$$\begin{aligned}
 \text{area}(A_\alpha) &= - \int_{u=\alpha}^{u=\pi/2} \frac{\cos(\alpha) - \cos(u)}{\sin(u)^2} \cos(u) du \\
 &= - \int_{u=\alpha}^{u=\pi/2} \frac{\cos(\alpha)}{\sin(u)^2} \cos(u) du - \int_{u=\alpha}^{u=\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sin(u)^2} \cos(u) du \\
 &\stackrel{(*)}{=} -\cos(\alpha) \left[-\frac{1}{\sin(u)} \right]_{u=\alpha}^{u=\pi/2} + [-u - \cot(u)]_{u=\alpha}^{u=\pi/2} \\
 &= -\cos(\alpha) \left(-\frac{1}{\sin(\alpha)} + 1 \right) + \left(-\alpha - \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= -\cos(\alpha) - \alpha + \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Gleichung (*) folgt aus Wolfram Alpha. Dieses Ergebnis für A_α ist aus Stetigkeitsgründen nun auch für den Fall $\alpha = 0$ anwendbar.

Wir erhalten nun

$$\begin{aligned}
 \text{area}(\Delta) &= \text{area}(A_\alpha) + \text{area}(A_\beta) + \text{area}(C_\alpha) + \text{area}(C_\beta) \\
 &= -\cos(\alpha) - \alpha + \frac{\pi}{2} - \cos(\beta) - \beta + \frac{\pi}{2} + \cos(\alpha) + \cos(\beta) \\
 &= \pi - \alpha - \beta
 \end{aligned}$$

- (ii) Es liege nun keiner der Punkte bei Unendlich. Durch Isometrien lässt sich Δ so verschieben, dass die Seite a in der imaginären Achse enthalten ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also annehmen, dass folgende Situation vorliegt



Die Flächeninhalte von Δ_1 und Δ_2 können wir dank des ersten Falls bestimmen. Es folgt nun

$$area(\Delta) = area(\Delta_2) - area(\Delta_1) = \pi - (\alpha + \alpha') - \beta - (\pi - \alpha' - \gamma') = \pi - \alpha - \beta - \gamma$$

□

Teilaufgabe 2

Behauptung Ein hyperbolisches Polygon mit Inneren Winkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ hat eine Flächenmaß von

$$area(P) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

Beweis

Sei x ein innerer Punkt von P . Wir triangulieren P anhand x und erhalten n Dreiecke $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Δ_i hat dabei die Winkel $\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \beta_i + \gamma_{(i \bmod n)+1} &= \alpha_i \text{ für } i = 1, \dots, n \\ \delta_1 + \dots + \delta_n &= 2\pi \end{aligned}$$

Wir erhalten nun

$$area(P) = \sum_{i=1}^n area(\Delta_i) = \sum_{i=1}^n (\pi - \beta_i - \gamma_i - \delta_i) = (n-2)\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

□

5.2.2 Aufgabe 2

Teilaufgabe 1

Es bezeichne Γ die Menge aller ganzzahligen 2×2 -Matrizen mit Determinante 1, deren Inverses existiert und ebenfalls ganzzahlig ist.

Behauptung Γ wird erzeugt durch

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis

1. Es gilt für $n \in \mathbb{Z}$

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Ferner

$$S \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot S = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

Mithilfe der Matrix S können ergo Einträge bis auf einen Vorzeichenwechsel permutiert werden.

3. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$. Wir zeigen durch Vollständige Induktion nach $n = |a| + |d|$, dass A durch S und T erzeugt wird.

I.A. $n = 0$.

In diesem Fall sind $a = d = 0$ und $b, c \in \{\pm 1\}$, sodass $bc = -1$. Ergo ist A entweder S oder S^3 .

I.S. $n > 0$ ist beliebig, aber fest.

Da wir durch S Einträge von A vertauschen können, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $d \neq 0$ und $c \neq 0$. Ließe sich dies nicht durch Anwendungen von S einrichten, so wäre A entweder die Identität oder eine Potenz von S . Betrachte nun für $z \in \{\pm 1\}$

$$A \cdot T^z = \begin{pmatrix} a & az + b \\ c & cz + d \end{pmatrix}$$

Da $d, c \neq 0$, existiert ein $z \in \{\pm 1\}$ mit

$$|cz + d| \leq |d|$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun ergo, dass $A \cdot T^z$ durch S und T erzeugt wird.

□

Teilaufgabe 2

Behauptung Γ wirkt eigentlich diskontinuierlich, aber nicht frei auf H^2 .

Beweis

Die Wirkung ist nicht frei, da

$$i.S = \frac{-1}{i} = i$$

Nichtsdestotrotz ist sie eigentlich diskontinuierlich. Denn sei $K \subset H^2$ kompakt. Dann ist die Menge

$$A = \{g \in PSL_2(\mathbb{R}) \mid K.g \cap K \neq \emptyset\}$$

kompakt in $PSL_2(\mathbb{R})$. Da Γ diskret in $PSL_2(\mathbb{R})$ liegt, muss

$$\{g \in PSL_2(\mathbb{Z}) \mid K.g \cap K \neq \emptyset\} = \Gamma \cap A$$

endlich sein.

□

Teilaufgabe 4

Behauptung

$$area(D) = \pi$$

Beweis

D wird gerade durch ein Dreieck mit Eckpunkten $\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, \infty$ beschränkt. Die inneren Winkel dieses Dreiecks betragen jeweils Null. Aus Aufgabe 1 folgt nun, dass D eine Fläche von π hat.

□

5.2.3 Aufgabe 4

Teilaufgabe 1

Behauptung Jede geschlossene, flache, orientierbare Fläche ist ein Torus.

Beweis

Sei C eine geschlossene, flache, orientierbare Fläche. Da eine Fläche sein vermutlich geodätisch vollständig impliziert, können wir annehmen, dass C durch den \mathbb{R}^2 überlagert wird und durch das Herausteilen einer isometrischen, eigentlich diskontinuierlichen Wirkung $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ induziert wird. Da C geschlossen ist, gibt es eine nichttriviale sphärische Geodäte $\gamma : S^1 \rightarrow C$. Diese lässt sich liften zu einer Geodäten $\gamma' : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ferner gibt es ein nichttriviales Element $\alpha \in \Gamma$, dass γ' invariant lässt, d. h., $\alpha(\gamma(\mathbb{R})) = \gamma(\mathbb{R})$. α besitzt die Gestalt

$$\alpha(x) = Ax + b$$

für $A \in O(2), b \in \mathbb{R}^2$. Am Punkt $\gamma(0)$ sei eine Basis des Tangentialraums durch $\gamma'(0)$ und einen orthogonalen Vektor v gegeben. Da γ stabil unter α ist, gilt

$$A\gamma'(0) = \gamma'(0)$$

Da $A \in O(2)$, folgt damit

$$Av = zv$$

für $z = \pm 1$. Da C orientierbar ist, muss A orientierungserhaltend sein, es folgt $z = 1$, d. h., $A = E_2$. Es folgt

$$\alpha(x) = x + b$$

für $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Es bezeichne Γ_α die Untergruppe, die durch α erzeugt wird. Teilt man diese raus, erhält man folgende Sequenz von Überlagerungen

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma_\alpha \longrightarrow C$$

$\mathbb{R}^2/\Gamma_\alpha$ ist dabei seinerseits ein flacher Zylinder, also nicht abgeschlossen.

Sei β' eine Geodäte in \mathbb{R}^2 , die orthogonal zu γ verläuft. Wir erhalten hierdurch eine unendliche Geodäte β in $\mathbb{R}^2/\Gamma_\alpha$, die orthogonal zur Nabe des Zylinders steht. Bezeichne Γ' die Decktransformationsgruppe von $\mathbb{R}^2/\Gamma_\alpha \rightarrow C$. Die Decktransformationen von $\mathbb{R}^2/\Gamma_\alpha \rightarrow C$ können die Ausrichtung der Nabe des Zylinders nicht ändern, da sie abstands- und orientierungserhaltend sind. Ergo wird β unter Γ' auf andere unendliche Geodäten abgebildet, die orthogonal zur Nabe sind. Es bezeichne $\beta.\Gamma'$ den Orbit von β . Dieser ist enthalten in einer kompakten Menge, die diffeomorph zu S^1 ist. Da Γ' eigentlich diskontinuierlich wirkt, ist der Orbit von β endlich.

Da C geschlossen ist, muss es ein Element in $\delta \in \Gamma'$ geben, welches die Nabe des Zylinders verschiebt. Insbesondere dreht δ die Geodäte β um die Achse des Zylinders. Da der Orbit von β endlich ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass δ^n die Geodäte β fixiert, aber nichttrivial ist. Teilt man die Wirkung der Gruppe, die durch δ^n erzeugt heraus, so erhält man einen Torus T , welcher weiterhin C überlagert. Es ergeben sich folgende Überlagerungen

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\Gamma_\alpha \longrightarrow T \longrightarrow C$$

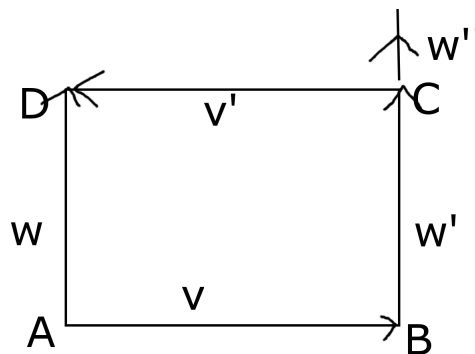
Die orientierungserhaltenden Isometrien des Torus sind ausschließlich Drehungen und Verschiebungen der Nabe. Teilt man ergo die Decktransformationsgruppe von $T \rightarrow C$ aus T raus, so ergibt sich wieder ein Torus. Ergo folgt die Behauptung. \square

Teilaufgabe 2

Behauptung Die Kleinsche Flasche ist eine geschlossene flache Fläche, die nicht orientierbar ist.

Beweis

Die Kleinsche Flasche wird durch den \mathbb{R}^2 überlagert und besitzt ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgenden Fundamentalbereich.



Insofern folgt bereits, dass die Kleinsche Flasche geschlossen und flach ist. Da die Punkte A, B, C, D und die Seiten v, v' und w, w' unter Decktransformationsgruppe Γ jeweils identifiziert werden, gibt es eine Decktransformation $\gamma \in \Gamma$ mit

$$\gamma(A) = C, d\gamma(v) = v', d\gamma(w) = w''$$

Aber daraus folgt sofort, dass γ nicht orientierungserhaltend ist, d.h., $\det d\gamma = -1$. Ergo ist die Kleinsche Flasche nicht orientierbar. \square

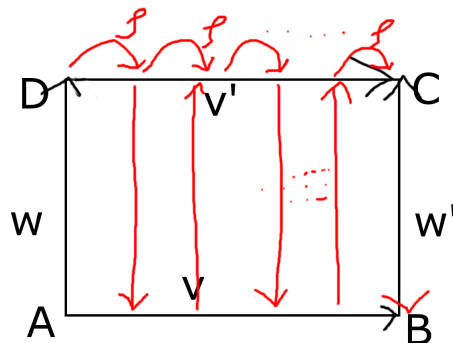
Teilaufgabe 3

Behauptung Jede Überlagerung der Kleinschen Flasche durch den Torus hat einen ungeraden Grad.

Beweis: Skizze?

Bezeichnet T den Torus und K die kleinsche Flasche, so erhält man für ungerades n eine Überlagerung $T \rightarrow K$ durch eine Isometrie ϕ_n , die T um $\frac{2\pi}{n}$ um seine Achse dreht und die Orientierung der Nabe von T umdreht.

Ist eine Überlagerung $\phi : T \rightarrow K$ gegeben, so können wir die Wirkung von ϕ auf dem Fundamentalbereich betrachten, die (vielleicht?) in etwa wie folgt aussieht



Damit ϕ die Orientierung tatsächlich umkehrt, muss ϕ eine ungerade Ordnung haben, daraus resultiert ein ungerader Grad der Überlagerung. \square

5.2.4 Aufgabe 5

Sei $M = S^n/\Gamma$ eine elliptische Mannigfaltigkeit, wobei Γ frei und eigentlich diskontinuierlich wirkt, und n gerade.

Behauptung Es ist $M = S^n$ oder $M = P\mathbb{R}^n$.

Beweis

Es gilt

$$\text{Isom}(S^n) = O(n+1)$$

Sei $A \in O(n+1)$ von Determinante $+1$. Dann besitzt A mindestens einen Fixpunkt, denn die Eigenwerte von A liegen alle in $\{\pm 1\}$ und ihr Produkt ergibt gerade $\det A = +1$. Da $n+1$ ungerade ist, muss mindestens einer dieser Eigenwerte positiv sein, ergo besitzt A einen Fixpunkt.

Ist nun $A \in O(n+1)$ nicht selbstinvers, so besitzt A^2 Determinante 1 und somit einen Fixpunkt, und kann ergo nicht in Γ liegen. Die Elemente in Γ sind ergo selbstinvers. Für selbstinverse Elemente $A \in O(n+1)$ gilt

$$A = A^{-1} = A^T$$

Ergo ist A symmetrisch und orthogonal. Die symmetrischen und orthogonalen Matrizen sind aber genau die, die Diagonalmatrizen mit Diagonaleinträgen ± 1 sind. Besitzt A sowohl $+1$ als auch -1 als Diagonaleintrag, so ist A weder trivial noch fixpunktfrei. Ergo kann Γ nur E_n und $-E_n$ besitzen.

Ist $\Gamma = \{E_n\}$, so folgt $M = S^n$. Ansonsten ist $\Gamma = \{\pm E_n\}$ und $M = P\mathbb{R}^n$. \square

5.2.5 Aufgabe 6

Seien $p, q > 1$ teilerfremd und $\theta := e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Definiere auf $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ die Abbildung

$$f(z_1, z_2) := (\theta z_1, \theta^q z_2)$$

Es bezeichne Γ die Gruppe, die durch f erzeugt wird.

Teilaufgabe 1

Behauptung f ist eine Isometrie.

Beweis

Seien $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in S^3$. Wir rechnen nach

$$\begin{aligned} d(f(z_1, z_2), f(w_1, w_2))^2 &= d((\theta z_1, \theta^p z_2), (\theta w_1, \theta^p w_2))^2 \\ &= |\theta z_1 - \theta w_1|^2 + |\theta^p z_2 - \theta^p w_2|^2 \\ &= |z_1 - w_1|^2 + |z_2 - w_2|^2 = d((z_1, z_2), (w_1, w_2))^2 \end{aligned}$$

da $|\theta| = 1$. Ergo ist f eine abstandserhaltende Selbstabbildung und dadurch, da S^3 zusammenhängend ist, eine Isometrie. \square

Teilaufgabe 2

Behauptung Der **Linsenraum** $L(p, q) := S^3/\Gamma$ ist eine elliptische Mannigfaltigkeit.

Beweis

Es genügt zu zeigen, dass Γ frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^3 wirkt. Beachte hierbei, dass die Ordnung von f genau p ist.

Sei also $(z, w) \in S^3$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass $f^n(z, w) = (z, w)$. Es gilt

$$f^n(z, w) = (\theta^n z, \theta^{nq} w) = (e^{2\pi i \frac{n}{p}} z, e^{2\pi i \frac{nq}{p}} w) = (z, w)$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{n}{p}, \frac{nq}{p} \in \mathbb{Z}$$

was wiederum genau dann der Fall ist, wenn $p|n$ und $p|nq$, also wenn n ein Vielfaches der Ordnung von f ist. Ergo besitzt nur das triviale Element in Γ einen Fixpunkt.

Da die Ordnung von f endlich ist, ist Γ endlich und liegt somit diskret in $Isom(S^3)$. Ergo agiert Γ deswegen eigentlich diskontinuierlich. \square

5.2.6 Lemma

Sei $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ eine Mannigfaltigkeit endlichen Volumens. Dann ist das Zentrum von Γ in $Isom(\mathbb{H}^n)$ trivial.

Beweis

Sei $h \in Z(\Gamma)$ nichttrivial. Dann gilt für alle nichttriviale $\phi \in \Gamma$

$$Fix(\phi) = Fix(h)$$

D. h., Γ wird von einer Hyperbolischen erzeugt oder von mehreren Parabolischen, die denselben Punkt im Unendlichen fixieren. Im ersten Fall ist M eine unendliche Tube, im zweiten Fall eine unbegrenzte Spitze. Beide Mannigfaltigkeiten haben kein endliches Volumen. \square

Index

äußeren Automorphismen, 36

Achse, 10

adjungierte Aktion, 26

Adjunktion, 26

anti-konform, 7

Anti-Möbiustransformation, 12

Anti-Symmetrie, 25

asymptotisch äquivalent, 9

asymptotisch parallel, 10

beschränkte Spitze, 24

Blätter, 33

Blätterung, 33

dünnen Teil, 31

dicken Teil, 31

Dirichlet-Bereiche, 21

eigentlich diskontinuierlich, 16

elementar, 30

elliptisch, 10

endlich, 19

endlichen Polyeder, 19

Entfaltung, 15

Exponentialabbildung, 26

frei, 16

Fundamentalebene, 21

Holonomie, 16

Horosphäre, 10

hyperbolisch, 10, 15

Hyperboloidenmodell, 5

ideal, 19

idealen Polyeder, 19

inneren Automorphismen, 36

Inversion, 7

inzident, 9

Jacobi-Identität, 25

Kachelung, 20

Kegel, 19

Kleinsche Ebene, 8

konform, 7

Kongruenzenuntergruppe, 19

konvexe Hülle, 19

lichtartig, 5

Lie-Algebra, 25

Lie-Gruppe, 25

Link, 21

links-invarianten Vektorfelder, 26

lokal endlich, 17, 19

Lorentzform, 5

Möbiustransformation, 12

Margulis-Konstante, 29

Nabe, 23

nilpotent, 28

Norm, 28

Normalisierer, 35

obere Halbraum-Modell, 8

opposit, 21

Orbit, 17

parabolisch, 10

Poincaré-Scheibe, 6

Polyeder, 19

Rand, 9

raumartig, 5

Riemannsche Zahlenkugel, 12

Riemannschen Überlagerung, 16

Spitze, 24

Stabilisator, 17

sternförmige Menge um einen Randpunkt, 31

sternförmige Spitzenumgebung, 31

sternförmige Umgebung einer einfachen geschlossenen Geodäten, 31

sternförmige Umgebung um eine Gerade, 31

strikt konvex, 13

torsionsfrei, 18

Torsionswinkel, 22

Tube der Länge R , 24

ultra-parallel, 10

unendliche Tube, 23

Verklebung, 21

Versetzung, 11

virtuell, 28

Voronoi-Kachelung, 20

Wort, 28

Zassenhaus-Umgebung, 26

zeitartig, 5

Zentrum, 35