

Geometrie der Mannigfaltigkeiten

Kurzschrift, SS 17

Rüstü

12. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Hyperbolische Modelle	5
1.1	Das Hyperboloidenmodell	5
1.2	Die Poincare Scheibe	6
1.3	Das obere Halbraum-Modell	8
1.4	Die Kleinsche Scheibe	8
1.5	Ränder	9
1.6	Isometrien	10
1.7	Möbiusgeschichten	12
2	Werkzeuge der Hyperbolischen Mannigfaltigkeiten	15
2.1	Hyperbolische Mannigfaltigkeiten	15
2.2	Vollständige Hyperbolische Mannigfaltigkeiten	16
2.3	Polyeder	19
3	Dick-Dünn-Zerlegung	23
3.1	Tuben und Spitzen	23
3.2	Exkurs zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren	25
3.3	Zassenhaus	26
3.4	Margulis Lemma	28
3.5	Dick-Dünn-Zerlegung	30

Kapitel 1

Hyperbolische Modelle

1.1 Das Hyperboloidenmodell

1.1.1 Definition

Definiere die **Lorentzform** auf \mathbb{R}^{n+1} durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n - x_{n+1} y_{n+1}$$

Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ heißt

$$\begin{cases} \text{zeitartig, falls } \langle x, x \rangle < 0 \\ \text{lichtartig, falls } \langle x, x \rangle = 0 \\ \text{raumartig, falls } \langle x, x \rangle > 0 \end{cases}$$

Definiere das **Hyperboloidenmodell** von \mathbb{H}^n durch

$$I^n = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, p \rangle = -1, p_{n+1} > 0\}$$

1.1.2 Proposition

I^n ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Beweis

Definiere $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $x \mapsto \langle x, x \rangle$. Dann ist $df_p(v) = 2\langle v, p \rangle$. Ergo ist df_p surjektiv für alle $p \in M := f^{-1}(-1)$. Ergo ist M eine glatte Hyperfläche von \mathbb{R}^{n+1} .

Ferner ist

$$T_p M = \text{Kern } df_p = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle p, v \rangle = 0\} = p^\perp$$

Da p zeitartig ist, ist $\langle _, _ \rangle$ auf $T_p M$ positiv definit. I^n ist nun gerade die obere Zusammenhangskomponente von M . \square

1.1.3 Lemma

Definiere

$$O(n, 1) = \{A \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)} \mid \langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle\}$$

und

$$O(n, 1)^+ = \{A \in O(n, 1) \mid A(I^n) \subset I^n\}$$

Dann ist $O(n, 1)^+$ eine Index-2-Gruppe von $O(n, 1)$ und

$$\text{Isom}(I^n) = O(n, 1)^+$$

Ferner gilt

$$\text{Isom}(S^n) = O(n) \text{ und } \text{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{x \mapsto Ax + b \mid A \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$$

1.1.4 Proposition

Die k -dimensionalen, vollständigen, total geodätischen, zusammenhängenden Riemannschen Untermannigfaltigkeiten von I^n sind genau die Schnitte

$$I^n \cap W^{k+1}$$

wobei W^{k+1} ein $k + 1$ -dimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^{n+1} ist, der keinen leeren Schnitt mit I^n hat.

Folgende Aussagen sind für einen $k + 1$ -dimensionalen Untervektorraum von \mathbb{R}^{n+1} äquivalent:

$$W^{k+1} \cap I^n \neq \emptyset$$

W^{k+1} besitzt einen zeit-ähnlichen Vektor

$\langle _, _ \rangle$ besitzt auf W^{k+1} die Signatur $(k, 1)$

1.1.5 Bemerkung

Ein k -Unterraum von I^n ist isometrisch zu I^k .

1.1.6 Proposition

Jede nach Bogenlänge parametrisierte Geodäte von I^n ist von der Gestalt

$$\gamma(t) = \cosh(t)\gamma(0) + \sinh(t)\dot{\gamma}(0)$$

1.1.7 Korollar

H^n ist vollständig.

1.2 Die Poincare Scheibe

1.2.1 Lemma: Poincare-Scheiben-Modell

Definiere die **Poincare-Scheibe** durch

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

und folgenden Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} p : I^n &\longrightarrow D^n \\ (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) &\longmapsto \frac{1}{x_{n+1} + 1} (x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Dann ist die Metrik auf D^n gerade gegeben durch

$$g_x^D = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g_x^E$$

wobei g^E die euklidische Metrik von \mathbb{R}^n bezeichnet.

Beweis

Die Umkehrabbildung von p ist gerade

$$p^{-1}(x) = \frac{(2x, 1 + \|x\|^2)}{1 - \|x\|^2}$$

Ihre Derivation ist

$$d_x p^{-1}(u) = \frac{2(u(1 - \|x\|^2) + 2x(x|u), 2(x|u))}{(1 - \|x\|^2)^2}$$

Es gilt

$$\langle d_x p^{-1}(u), d_x p^{-1}(u) \rangle = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 \|u\|^2$$

Da p^{-1} eine Isometrie sein soll und das Verhalten einer Metrik durch ihre Norm bestimmt ist, folgt nun

$$g_x^D = g_{p^{-1}(x)}^I \circ d_x p^{-1} = \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2} \right)^2 g_x^E$$

□

1.2.2 Definition

Ein Diffeomorphismus

$$f : (M, g) \longrightarrow (N, h)$$

heißt **konform**, falls eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ existiert, sodass

$$f^*(h_{f(p)}) = \lambda(p) \cdot g_p$$

1.2.3 Bemerkung

Die Poincaré-Scheibe ist ein konformes Modell von \mathbb{H}^n , d. h., (D^n, g^E) und (D^n, g^D) sind zueinander konform.

Daraus folgt nun insbesondere, dass Winkel von sich schneidenden Geodäten in (D^n, g^D) genauso wie in (D^n, g^E) gemessen werden dürfen.

1.2.4 Lemma

Die k -dimensionalen, vollständigen, zusammenhängenden, total geodätischen Untermannigfaltigkeiten der Poincaré-Scheibe sind ihre Schnitte mit k -Sphären und k -Ebenen von \mathbb{R}^n , die orthogonal zum Rand der Poincaré-Scheibe liegen.

1.2.5 Definition

Sei $S_p(r) \subset \mathbb{R}^n$ eine Sphäre mit Radius r um p . Definiere die **Inversion** an $S_p(r)$ durch

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \\ x &\longmapsto p + r^2 \frac{x - p}{\|x - p\|^2} \end{aligned}$$

1.2.6 Proposition

Jede Inversion ist **anti-konform**, d. h. konform und Orientierung umkehrend, und bildet Sphären und Ebenen auf Sphären und Ebenen ab.

1.3 Das obere Halbraum-Modell

1.3.1 Definition

Das **obere Halbraum-Modell**

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

ergibt sich durch eine Inversion der Poincare-Scheibe an der Sphäre

$$S = S_{(0, \dots, 0, -1)}(\sqrt{2})$$

Insofern ist die obere Halbebene ein konformes Modell von \mathbb{H}^n .

1.3.2 Proposition

Die k -Ebenen von H^n sind die k -Ebenen und k -Sphären von \mathbb{R}^n , die orthogonal zu ∂H^n sind.

1.3.3 Proposition

Die Metrik auf H^n ist gegeben durch

$$g_x^H = \frac{1}{x_n^2} g^E$$

1.3.4 Proposition

Folgende Abbildungen sind Isometrien von H^n :

1.) Horizontale Translationen:

$$x \mapsto x + (b_1, \dots, b_{n-1}, 0)$$

2.) Dilationen:

$$x \mapsto x \cdot \lambda$$

3.) Inversionen an Sphären orthogonal zu ∂H^n

1.3.5 Proposition

Die Isometrien der Poincare-Scheibe und der oberen Halbebene werden durch Inversionen an Sphären und Reflektion an Euklidischen Ebenen, die alle orthogonal zum Rand stehen, erzeugt.

1.3.6 Proposition

In den konformen Modellen sind Kugeln genau die euklidischen Kugeln mit exzentrischen Mittelpunkten.

1.4 Die Kleinsche Scheibe

1.4.1 Definition

Die **Kleinsche Ebene** besitzt dieselbe Trägermenge $K^n = D^n$ wie die Poincare-Scheibe. Allerdings entsteht die Kleinsche-Ebene durch einen Diffeomorphismus

$$\begin{aligned} I^n &\longrightarrow K^n \\ x &\longmapsto \frac{(x_1, \dots, x_n)}{x_n} \end{aligned}$$

Die Kleinsche Scheibe ist nicht konform, weswegen ihre Winkel nicht durch eine euklidische Einbettung gemessen werden können. Allerdings sind ihre Geodäten genau die Geraden des \mathbb{R}^n .

1.5 Ränder

1.5.1 Definition

Zwei nach Bogenlänge parametrisierte Geodäten $\alpha, \beta : [0, \infty) \rightarrow M$ heißen **asymptotisch äquivalent**, falls die Funktion

$$t \mapsto d(\alpha(t), \beta(t))$$

beschränkt ist.

Asymptotisch äquivalent Sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geodätischer Halbgeraden. Teilt man diese Relation heraus, erhält man den **Rand** ∂M einer Mannigfaltigkeit M . Insbesondere schreibt man

$$\overline{M} = M \cup \partial M$$

1.5.2 Proposition

Es gibt eine Bijektion zwischen ∂D^n als Rand einer Mannigfaltigkeit und S^{n-1} .

Da ferner $\overline{D^n}$ eine naheliegende Topologie besitzt, können wir diese auf $\overline{\mathbb{H}^n}$ zurückführen.

Beweis

Sei $\gamma : [0, \infty) \rightarrow D^n$ ein geodätischer Strahl. Da γ sich orthogonal mit S^{n-1} im Unendlichen schneiden muss, folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) \in S^{n-1}$$

Hierdurch erhalten wir eine surjektive Abbildung

$$R(\gamma) := \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$$

Wir müssen nun zeigen, dass zwei nach Bogenlänge parametrisierte Strahlen γ, β unter R genau dann dasselbe Bild haben, wenn sie asymptotisch äquivalent sind.

Wir transformieren das Problem zu einem Problem auf H^n und rechnen die geforderte Eigenschaft dort konstruktiv nach. \square

1.5.3 Bemerkung

Man kann auch alternativ wie folgt eine Basis der Topologie von $\overline{\mathbb{H}^n}$ definieren: Dazu nimmt man alle offenen Mengen von \mathbb{H}^n und schmeißt alle Mengen der Gestalt

$$\{\alpha(t) \in \mathbb{H}^n \mid \alpha(0) = \gamma(0), \dot{\alpha}(0) \in V, t > r\} \cup \{[\alpha] \in \partial \mathbb{H}^n \mid \alpha(0) = \gamma(0), \dot{\alpha}(0) \in V\}$$

für alle $[\gamma] \in \partial \mathbb{H}^n, V \subseteq_o T_{\gamma(0)} M, r > 0$. Die hierdurch entstehende Topologie stimmt der durch obige Proposition überein.

1.5.4 Proposition

Seien S, S' zwei geodätisch vollständige Teilräume von \mathbb{H}^n . Dann treten genau einer der folgenden Fälle ein:

- S und S' sind **inzident**, d. h., $S \cap S' \neq \emptyset$.

- S und S' sind **asymptotisch parallel**, d. h., $S \cap S' = \emptyset$ und $d(S, S') = 0$. Ferner ist dann $\overline{S} \cap \overline{S'}$ ein Punkt in \mathbb{H}^n und existiert keine Geodäte, die zu beiden Räumen orthogonal ist.
- S und S' sind **ultra-parallel**, d. h., $\overline{S} \cap \overline{S'} = \emptyset$ und $d(S, S') > 0$. In diesem Fall existiert genau eine Geodäte, die orthogonal zu beiden Teilräumen steht und den Abstand zwischen beiden realisiert.

Beweis

Enthält $\overline{S} \cap \overline{S'}$ mindestens zwei Punkte, so enthält der Schnitt auch eine Geodäte zwischen beiden Punkten. Wir können also annehmen, dass sich S und S' wenn überhaupt nur im Unendlichen schneiden und dort höchstens einen Schnittpunkt haben.

Besteht $\overline{S} \cap \overline{S'}$ aus genau einem Punkt, so können wir die Situation in den H^n transformieren und fordern, dass der gemeinsame Schnittpunkt gerade ∞ ist. In diesem Fall stehen S und S' parallel zur imaginären Achse, weswegen die Eigenschaften des zweiten Falles folgen.

Im zweiten Fall finden wir $x \in S, x' \in S'$ mit $d(x, x') = d(S, S')$, da \overline{S} und $\overline{S'}$ kompakt sind. Die Geodäte, die x und x' verbindet, muss orthogonal sein, da wir sie sonst verschieben könnten, um den Abstand zwischen S und S' zu minimieren. Es kann keine weitere Geodäte zwischen S und S' mit Abstand $d(S, S')$ geben, da wir sonst einen flachen Bereich gefunden hätten. \square

1.5.5 Lemma

Eine Isometrie $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ lässt sich zu einem Homöomorphismus $\overline{\phi} : \overline{\mathbb{H}^n} \rightarrow \overline{\mathbb{H}^n}$ fortsetzen. ϕ ist durch $\overline{\phi}|_{\partial\mathbb{H}^n}$ eindeutig festgelegt.

1.6 Isometrien

1.6.1 Proposition

Sei $\phi : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ eine nichttriviale Isometrie. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- ϕ ist **elliptisch**, d. h., ϕ hat einen oder mehrere Fixpunkte in \mathbb{H}^n .
- ϕ ist **parabolisch**, d. h., ϕ hat keinen Fixpunkt in \mathbb{H}^n , aber genau einen in $\partial\mathbb{H}^n$.
- ϕ ist **hyperbolisch**, d. h., ϕ hat keinen Fixpunkt in \mathbb{H}^n , aber genau zwei in $\partial\mathbb{H}^n$.

Beweis

Wir können $\overline{\phi}$ als einen Homöomorphismus von $\overline{D^n}$ auf sich selbst auffassen. Nach Brauers Fixpunktsatz muss ϕ dann mindestens einen Fixpunkt haben. Hat ϕ keinen Fixpunkt in D^n aber mindestens drei auf dem Rand, so fixiert ϕ jeden Punkt in \mathbb{H}^n , da jeder Punkt in D^n durch seine Winkel zu den drei verschiedenen Randpunkten eindeutig determiniert ist. \square

1.6.2 Definition

Eine hyperbolische Isometrie fixiert zwei Randpunkte und damit auch die Geodäte, die zwischen beiden verläuft. Diese eindeutig bestimmte Geodäte nenne wir die **Achse** von ϕ .

1.6.3 Definition

Eine **Horosphäre** $S \subset \overline{H^n}$ um den Punkt $p \in \partial H^n \setminus \{\infty\}$ ist eine $n-1$ -dimensionale euklidische Sphäre, die ∂H^n tangential in p schneidet. Eine Horosphäre um ∞ ist eine $n-1$ -dimensionale euklidische Hyperebene, die orthogonal zur imaginären Achse steht.

Beide Horosphären sind flache Untermannigfaltigkeiten mit der Eigenschaft, dass jede Geodäte, die ihr Zentrum verlässt, die Horosphäre orthogonal schneidet.

1.6.4 Proposition

Wir stellen Punkte aus H^n in der Form (x, t) dar. Sei ϕ eine nichttriviale Isometrie von \mathbb{H}^n .

- Ist ϕ elliptisch mit Fixpunkt $0 \in D^n$, so gibt es ein $A \in O(n)$, sodass sich ϕ darstellen lässt durch

$$\begin{aligned}\phi : D^n &\longrightarrow D^n \\ x &\longmapsto Ax\end{aligned}$$

- Ist ϕ parabolisch mit Fixpunkt $\infty \in \partial H^n$, so gibt es $A \in O(n-1)$ und $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, sodass

$$\begin{aligned}\phi : H^n &\longrightarrow H^n \\ (x, t) &\longmapsto (Ax + b, t)\end{aligned}$$

- Ist ϕ hyperbolisch mit Fixpunkten $0, \infty \in \partial H^n$, so gibt es ein $\lambda > 0, \neq 1$ und ein $A \in O(n-1)$, sodass

$$\begin{aligned}\phi : H^n &\longrightarrow H^n \\ (x, t) &\longmapsto (\lambda Ax, \lambda t)\end{aligned}$$

Beweis

Der elliptische Fall ist klar.

Sei der zweite Fall gegeben. Ist O eine Horosphäre um ∞ , so muss $\phi(O)$ wieder eine Horosphäre um ∞ liefern. Dann gibt es ein $(x, t) \in O$, sodass $\phi(x, t) = (x, t')$. Ist $t' \neq t$, so erhält ϕ eine Geodäte durch (x, t) und ∞ und ist nicht mehr parabolisch. Ergo ist $\phi(O) = O$. D. h., ϕ ist auf jeder Horosphäre um ∞ durch eine euklidische Isometrie gegeben.

Sei nun der dritte Fall gegeben. ϕ erhält die imaginäre Achse, ergo gibt es ein λ mit $\phi(0, 1) = (0, \lambda)$. Setzt man $\psi(x, t) = \lambda^{-1}\phi(x, t)$, so gibt es ein $A \in O(n-1)$ mit

$$d_{(0,1)}\psi = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

womit folgt

$$\psi(x, t) = (Ax, t)$$

□

1.6.5 Definition

Für eine Isometrie $\phi : M \rightarrow M$ sei die **Versetzung** definiert durch

$$d(\phi) := \inf_{p \in M} d(p, \phi(p))$$

1.6.6 Korollar

- Eine elliptische Isometrie hat eine Versetzung von 0, die an ihren Fixpunkten verwirklicht wird.
- Eine parabolische Isometrie hat eine Versetzung von 0, die nirgendwo realisiert wird, und fixiert jede Horosphäre um ihren Fixpunkt.
- Eine hyperbolische Isometrie hat eine Versetzung von $d > 0$, die genau auf ihrer Achse realisiert wird.

1.7 Möbiusgeschichten

1.7.1 Definition

Es bezeichne $S = \mathbb{C} \cup \infty$ die **Riemannsche Zahlenkugel**. Die Gruppe $PSL_2(\mathbb{C})$ agiert auf S durch die **Möbiustransformation**

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z := \frac{az + b}{cz + d}$$

Die Möbiustransformation ist ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus auf S .

Die **Anti-Möbiustransformation** gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . z := \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

ist ein orientierungsumkehrender Diffeomorphismus auf S .

Unter $Conf(S) \subset Diffeo(S)$ verstehen wir die Menge aller Möbius- und Anti-Möbiustransformationen, die durch Elemente aus $PSL_2(\mathbb{C})$ induziert werden.

1.7.2 Proposition

Inversionen entlang Sphären und Spiegelungen entlang Geraden sind beides Anti-Möbiustransformationen und erzeugen $Conf(S)$.

1.7.3 Lemma

Betrachte

$$H^2 = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

und setze

$$Conf(H^2) = \{\phi \in Conf(S) \mid \phi(H^2) \subseteq H^2\}$$

Dann ist jede Transformation aus $Conf(H^2)$ induziert durch eine Matrix mit reellen Einträgen, deren Determinante gleich 1 ist, falls die Transformation orientierungserhaltend ist, anderenfalls -1 ist.

Es gilt

$$Conf^+(H^2) = PSL_2(\mathbb{R})$$

1.7.4 Proposition

Inversionen entlang Kreisen und Reflexionen entlang Geraden, die beide orthogonal zu \mathbb{R} sind, generieren $Conf(H^2)$.

1.7.5 Korollar

$$Conf(H^2) = Isom(H^2)$$

1.7.6 Proposition

Eine nichttriviale Transformation $A \in PSL_2(\mathbb{R})$ ist

- elliptisch, falls $|tr(A)| < 2$
- parabolisch, falls $|tr(A)| = 2$
- hyperbolisch, falls $|tr(A)| > 2$

1.7.7 Proposition

Da $\partial H^3 = S$, gilt

$$\text{Isom}(H^2) = \text{Conf}(S)$$

1.7.8 Proposition

Eine nichttriviale Transformation $A \in \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ ist

- elliptisch, falls $\text{tr}(A) \in (-2, 2)$
- parabolisch, falls $\text{tr}(A) = \pm 2$
- hyperbolisch, falls $\text{tr}(A) \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2]$

1.7.9 Proposition

Die Distanzfunktion ist auf \mathbb{H}^n **strikt konvex**, d. h., für je zwei nach Bogenlänge parametrisierte, disjunkte Geodäten $\alpha, \beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}^n$ gilt

$$d(\alpha(tx_1 + (1-t)y_1), \beta(tx_2 + (1-t)y_2)) < td(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + (1-t)d(\alpha(y_1), \beta(y_2))$$

für alle $x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2, t \in (0, 1)$.

Beweis

Da die Distanzfunktion stetig ist, genügt es die Aussage für $t = \frac{1}{2}$ zu zeigen, also

$$d(\alpha(\frac{x_1 + y_1}{2}), \beta(\frac{x_2 + y_2}{2})) < \frac{d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(\alpha(y_1), \beta(y_2))}{2}$$

Setze

$$m := \alpha(\frac{x_1 + y_1}{2}) \text{ und } n := \beta(\frac{x_2 + y_2}{2})$$

Für einen Punkt $p \in \mathbb{H}^n$ bezeichne s_p die Punktspiegelung bei p . Dies ist eine globale Isometrie. Für zwei verschiedene Punkte p, q ist $s_p \circ s_q$ eine orientierungserhaltende Isometrie. Insbesondere ist diese hyperbolisch, denn ist l die Geodäte, die p und q enthält, so wird jeder Punkt auf l um $2d(p, q)$ entlang l bewegt.

Setze nun

$$\tau = s_n \circ s_m$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\alpha(x_1), \tau(\alpha(x_1))) &\leq d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(\beta(x_2), \tau(\alpha(x_1))) \\ &= d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(s_n(\beta(y_2)), s_n(\alpha(y_1))) \\ &= d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(\beta(y_2), \alpha(y_1)) \end{aligned}$$

Da $\alpha(x_1)$ nicht auf der hyperbolischen Achse von τ liegt, gilt ferner

$$\begin{aligned} 2d(m, n) &= d(m, \tau(m)) \\ &< d(\alpha(x_1), \tau(\alpha(x_1))) \\ &\leq d(\alpha(x_1), \beta(x_2)) + d(\beta(y_2), \alpha(y_1)) \end{aligned}$$

□

Kapitel 2

Werkzeuge der Hyperbolischen Mannigfaltigkeiten

2.1 Hyperbolische Mannigfaltigkeiten

2.1.1 Definition

Eine Mannigfaltigkeit heißt **hyperbolisch**, wenn sie durch offene, lokal isometrische Karten $\phi : U \rightarrow \mathbb{H}^n$ überdeckt wird und zusammenhängend ist.

2.1.2 Satz

Eine hyperbolische, einfach zusammenhängende, vollständige Mannigfaltigkeit ist isometrisch zu \mathbb{H}^n .

Beweis: Skizze

Wir konstruieren eine lokal isometrische Abbildung $D : M \rightarrow \mathbb{H}^n$. Zuerst wählen wir eine Karte $U \rightarrow \mathbb{H}^n$ und einen Punkt $p \in U$. Für ein beliebiges $q \in M$ wählen wir einen Weg $\gamma : p \mapsto q$ und überdecken diesen Weg mit endlich vielen hyperbolischen, kompatiblen Karten. Dadurch können wir q einem Punkt aus $D(q) \in \mathbb{H}^n$ zuordnen.

Um die Wohldefiniertheit von D zu zeigen, zeigt man zuerst, dass die Wahl der Karten, die γ überdecken unerheblich für die Wahl des Bildpunktes $D(q)$ sind.

Danach zeigt man, dass $D(q)$ unabhängig von der Wahl des Weges $\gamma : p \mapsto q$ ist. Denn ist $H : \gamma \sim \gamma'$ eine Homotopie mit fixierten Endpunkten, so ist $D(H)$ ebenfalls eine Homotopie mit fixierten Endpunkten.

Da D lokal isometrisch und M geodätisch vollständig ist, ist D surjektiv. Da \mathbb{H}^n ferner einfach zusammenhängend ist, ist D injektiv. \square

2.1.3 Korollar

Ist M eine hyperbolische, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit, so gibt es eine lokal isometrische Abbildung $D : M \rightarrow \mathbb{H}^n$, die sogenannte **Entfaltung**, die eindeutig bis auf Nachschaltung einer Isometrie auf \mathbb{H}^n ist.

2.1.4 Proposition

Sei M eine hyperbolische Mannigfaltigkeit und $D : M \rightarrow \mathbb{H}^n$ eine lokale Isometrie. Für jedes $g \in \text{Isom}(M)$ existiert genau ein $\rho(g) \in \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, sodass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{D} & \mathbb{H}^n \\ \downarrow g & & \downarrow \rho(g) \\ M & \xrightarrow{D} & \mathbb{H}^n \end{array}$$

Die Abbildung $\rho : \text{Isom}(M) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ ist eine Gruppenhomomorphismus und heißt die **Holonomie** zu D .

2.1.5 Bemerkung

Sei M eine hyperbolische, vollständige Mannigfaltigkeit. Ist $\widetilde{M} \rightarrow M$ die universelle Überlagerung von M , so ist \widetilde{M} hyperbolisch, vollständig und einfach zusammenhängend und deswegen isometrisch zu \mathbb{H}^n . Wir erhalten also eine lokal isometrische Überlagerung $\mathbb{H}^n \rightarrow M$ und wissen dadurch

$$\pi_1(M) = \text{Deck}(\mathbb{H}^n \rightarrow M) \subseteq \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$$

2.2 Vollständige Hyperbolische Mannigfaltigkeiten

2.2.1 Definition

Sei G eine Gruppe, die auf einen topologischen Raum X wirkt. Diese Wirkung heißt **eigentlich diskontinuierlich**, falls es für jedes Paar von zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ Umgebungen U_x, U_y existieren, sodass

$$\#\{g \in G \mid g.U_x \cap U_y \neq \emptyset\} < \infty$$

Die Wirkung heißt **frei**, falls jedes nichttriviale $g \in G$ fixpunktfrei auf X wirkt.

2.2.2 Lemma

Wirkt $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ frei und eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{H}^n , so besitzt \mathbb{H}^n/Γ genau eine Struktur als hyperbolische, vollständige Mannigfaltigkeit, durch die $\mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$ zu einer **Riemannschen Überlagerung**, d. h., lokal isometrischen Überlagerung wird.

2.2.3 Proposition

Jede vollständige, hyperbolische Mannigfaltigkeit ist isometrisch zu \mathbb{H}^n/Γ für eine passende Gruppe $\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$, die frei und eigentlich diskontinuierlich wirkt.

2.2.4 Bemerkung

$\Gamma \subset \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ wirkt genau dann eigentlich diskontinuierlich, wenn Γ diskret ist.

Beweis

Γ wirke eigentlich diskontinuierlich. Seien $x, y \in \mathbb{H}^n$, dann gibt es Umgebungen U_x, U_y , sodass nur endlich viele Elemente aus Γ U_x über U_y bewegen.

Definiert man die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \Gamma &\longrightarrow \mathbb{H}^n \\ g &\longmapsto g(x)\end{aligned}$$

so besitzt die offene Menge $\phi^{-1}(U_x)$ nur endlich viele Elemente. Ergo besitzt jeder Punkt aus Γ eine endliche Umgebung.

Sei Γ nun diskret. Seien $x, y \in \mathbb{H}^n$ zwei verschiedene Punkte. Definiere $A := \{g \in \Gamma \mid g.U_x \cap U_y \neq \emptyset\}$. Indem wir U_x und U_y sukzessive kleiner machen, finden wir eine Folge in Γ , die durch ein Kompaktum beschränkt wird. Da Γ endlich ist, muss dieses Kompaktum endlich sein. \square

2.2.5 Proposition

\mathbb{H}^n/Γ und \mathbb{H}^n/Σ sind genau dann isometrisch, wenn Σ und Γ konjugiert in \mathbb{H}^n sind.

Beweis

\mathbb{H}^n/Γ und \mathbb{H}^n/Σ sind genau dann isometrisch, wenn es eine Isometrie $\phi : \mathbb{H}^n/\Gamma \rightarrow \mathbb{H}^n/\Sigma$ gibt. Da \mathbb{H}^n beide Räume überlagert, gibt es diese Isometrie genau dann, wenn es eine Isometrie $\tilde{\phi}$ gibt, die folgendes Diagramm kommutieren lässt

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{H}^n & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathbb{H}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{H}^n/\Sigma & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{H}^n/\Gamma\end{array}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein Element $\tilde{\phi}$ in $Isom(\mathbb{H}^n)$ gibt, sodass für es für jedes $\sigma \in \Sigma$ ein $\gamma \in \Gamma$ gibt mit

$$\tilde{\phi} \circ \sigma = \gamma \circ \tilde{\phi}$$

\square

2.2.6 Bemerkung

Wirkt $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ eigentlich diskontinuierlich, so ist für jedes $p \in \mathbb{H}^n$ der **Stabilisator**

$$Stab_{\Gamma}(p) := \{g \in \Gamma \mid g(p) = p\}$$

endlich und jeder **Orbit** von Γ in p

$$\Gamma.p := \{g(p) \mid g \in \Gamma\}$$

diskret.

2.2.7 Definition

Eine Menge von Teilmengen von \mathbb{H}^n heißt **lokal endlich**, falls sie für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{H}^n$ nur endlich viele Teilmengen besitzt, die einen nicht-leeren Schnitt mit K haben.

2.2.8 Proposition

$\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ wirke eigentlich diskontinuierlich. Dann liegt die Menge

$$\{p \in \mathbb{H}^n \mid Stab_\Gamma(p) \text{ ist trivial}\}$$

offen und dicht in \mathbb{H}^n .

Beweis

Setze

$$\mathcal{A} := \{Fix(g) \mid g \in \Gamma \setminus \{\text{id}_{\mathbb{H}^n}\}\}$$

\mathcal{A} ist lokal endlich, da Γ diskret ist. Setze nun

$$B := \mathbb{H}^n \setminus \left(\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \right)$$

Dann ist B offen und es gilt

$$B = \{p \in \mathbb{H}^n \mid Stab_\Gamma(p) \text{ ist trivial}\}$$

Jedes $X \in \mathcal{A}$ ist eine echte Untermannigfaltigkeit von \mathbb{H}^n . Deswegen und weil \mathcal{A} lokal endlich ist, liegt B dicht in \mathbb{H}^n . \square

2.2.9 Proposition

Eine diskrete Gruppe $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ agiert genau dann frei, wenn sie **torsionsfrei** ist, d. h., kein Element endlicher Ordnung besitzt.

Beweis

Es sei Γ diskret und besitze ein Torsionselement ϕ . Für einen Punkt p ist dann die Menge $\{\phi^k(p) \mid k \geq 0\}$ endlich. Der Mittelpunkt von dieser Menge wird dann durch ϕ fixiert.

Ist Γ nicht frei, so gibt es ein p mit $Stab_\Gamma(p) \neq 1$. Da Γ diskret ist, ist $Stab_\Gamma(p)$ eine endliche, nicht-triviale Untergruppe von Γ und besitzt deswegen Torsionselemente. \square

2.2.10 Satz

Es gibt eine natürliche Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen der Menge der vollständigen hyperbolischen Mannigfaltigkeiten modulo Isometrie und der Menge der torsionsfreien, diskreten Untergruppen von $Isom(\mathbb{H}^n)$ modulo Konjugation.

2.2.11 Satz

Agirt $\Gamma < Isom(\mathbb{H}^n)$ frei und eigentlich diskontinuierlich, so tut dies auch jede Untergruppe von Γ . Wir erhalten eine Eins-zu-Eins-Korrespondenz zwischen Überlagerungen $\mathbb{H}^n/\Gamma' \rightarrow \mathbb{H}^n/\Gamma$ und den Untergruppen $\Gamma' < \Gamma$, wobei der Grad der Überlagerung gerade mit dem Index der Untergruppe übereinstimmt.

2.2.12 Lemma: Selberg

Ist $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ endlich erzeugt, so existiert eine normale, torsionsfreie Untergruppe $H \subset G$ von endlichem Index.

2.2.13 Korollar

Jede endlich erzeugte, diskrete Untergruppe $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ enthält eine normale Untergruppe endlichen Index, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf \mathbb{H}^n agiert.

2.2.14 Definition

Die spezielle lineare Untergruppe $PSL_2(\mathbb{Z}) < PSL_2(\mathbb{R}) = Isom^+(\mathbb{H}^2)$ ist diskret, agiert aber nicht frei auf \mathbb{H}^2 .

Betrachte aber folgenden Gruppenhomomorphismus für $m \geq 2$

$$\text{mod } m : PSL_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow PSL_2(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$$

Den Kern $\Gamma(m)$ dieser Abbildung nennt man die **Kongruenzenuntergruppe**. Er ist eine diskrete Untergruppe in $PSL_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index.

2.2.15 Proposition

Für $m \geq 4$ agiert $\Gamma(m)$ frei auf \mathbb{H}^2 .

2.3 Polyeder

2.3.1 Definition

Wir nennen eine Menge von Halbräumen in \mathbb{H}^n **lokal endlich**, wenn die Menge der korrespondierenden Hyperebenen lokal endlich ist.

Eine n -dimensionaler **Polyeder** in \mathbb{H}^n ist eine Teilmenge, die sich als Schnitt von einer lokal endlichen Menge von Halbräumen schreiben lässt und eine offene Menge enthält.

2.3.2 Bemerkung

Ist $P \subset \mathbb{H}^n$ ein Polyeder, so sind P und $\overline{P} \subset \overline{H}^n$ konvex.

2.3.3 Definition

Für eine beliebige $S \subset \overline{H}^n$ definieren wir ihre **konvexe Hülle** als die kleinste konvexe Menge, die S enthält.

2.3.4 Definition

Unter einem **endlichen Polyeder** P verstehen wir die konvexe Hülle von endlich vielen Punkten in \mathbb{H}^n , die nicht alle im unendlichen Abschluss einer Hyperebene liegen.

Liegt eine Ecke von P in $\partial\mathbb{H}^n$, so nennen wir sie **ideal**, ansonsten **endlich**.

Sind alle Ecken von P ideal, so nennen wir P einen **idealen Polyeder**.

2.3.5 Lemma

Sei $O \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ eine Horosphäre um $p \in \partial\mathbb{H}^n$. $D \subset O$ sei eine Menge endlichen Volumens und C der **Kegel** über D , d. h., C besteht aus allen Geodätischen Strahlen, die von einem Punkt aus D nach p führen. Es gilt

$$\text{vol}(C) = \frac{\text{vol}_O(D)}{n-1}$$

wobei $\text{vol}_O(D)$ das $n-1$ -dimensionale Volumen im affinen Raum O bezeichnet.

Beweis

Wir betrachten die Situation im oberen Halbraum-Modell mit $p = \infty$. O ist dann eine Hyperebene, die orthogonal zur imaginären Achse steht und eine Höhe h hat. Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Vol}(C) &= \int_C \frac{1}{t^n} dx_1 \dots dx_{n-1} dt \\ &= \int_D dx_1 \dots dx_{n-1} \int_h^\infty \frac{1}{t^n} dt \\ &= \int_D dx_1 \dots dx_{n-1} \cdot \frac{1}{h^{n-1}} \frac{1}{n-1} dt \\ &= \frac{\text{Vol}_O(D)}{n-1} \end{aligned}$$

□

2.3.6 Proposition

Jeder endliche Polyeder hat endliches Volumen.

Beweis

Besitzt ein endlicher Polyeder P keine idealen Ecken, so ist die Aussage klar. Ansonsten kann man um jede ideale Ecke eine Horosphäre ziehen. Hierdurch wird P in zwei Mengen aufgeteilt: P geschnitten mit dem Inneren aller Horosphären und P ohne das Innere der Horosphären.

Durch obiges Lemma lässt sich das Volumen der ersten Menge abschätzen. □

2.3.7 Definition

Eine **Kachelung** ist eine lokal endliche Menge von Polyedern, die \mathbb{H}^n überdecken und sich jeweils nur in gemeinsamen Facetten schneiden.

2.3.8 Proposition

Ist $S \subset \mathbb{H}^n$ diskret, so definiere die **Voronoi-Kachelung** für $p \in S$ durch

$$D(p) := \{q \in \mathbb{H}^n \mid d(p, q) \leq d(p', q) \forall p' \in S\}$$

Beweis

Wir müssen zeigen, dass die Voronoi-Kachelung tatsächlich eine Kachelung ist. Sind $p, p' \in S$ zwei verschiedene Punkte, so ist

$$\{q \in \mathbb{H}^n \mid d(p, q) = d(p', q)\}$$

eine Hyperebene und

$$H(p, p') := \{q \in \mathbb{H}^n \mid d(p, q) \leq d(p', q)\}$$

ein Halbraum. Es gilt

$$D(p) = \bigcap_{p' \in S} H(p, p')$$

und da S diskret ist, sind all diese Halbräume lokal endlich.

Sind p, p' in S verschieden, so ist $D(p) \cap D(p')$ in der Hyperebene

$$\{q \in \mathbb{H}^n \mid d(p, q) = d(p', q)\}$$

enthalten. □

2.3.9 Definition

Ein **Fundamentalebereich** für eine diskrete Gruppe $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ ist ein Polyeder $D \subset \mathbb{H}^n$, sodass alle $g(D)$ verschieden sind und eine Kachelung von \mathbb{H}^n bilden.

2.3.10 Bemerkung

Ist $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ eine diskrete Gruppe und $p \in \mathbb{H}^n$ ein Punkt mit trivialen Stabilisator, so erhält man durch $S = \Gamma.p$ eine Voronoi-Kachelung, deren Kacheln gerade einen Fundamentalebereich für Γ bilden. Diese Kacheln nenne wir **Dirichlet-Bereiche**. Es gilt

$$D(g(p)) = g.D(p)$$

2.3.11 Proposition

Ist $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ und D ein Fundamentalebereich für Γ , so gilt

$$Vol_{\mathbb{H}^n}(D) = Vol_M(M)$$

Ist ferner D ein Dirichlet-Bereich, so ist D genau dann kompakt, wenn M kompakt ist.

2.3.12 Definition

Eine n -dimensionale **Verklebung** besteht aus einer endlichen Menge von n -Simplizes und aus affinen Verklebungsabbildungen, die jede Facette eines Simplex mit genau einer anderen Facette identifizieren. Hieraus entsteht ein n -dimensionaler Raum, indem man alle Simplizes disjunkt vereinigt und dann die Relation, die durch die Verklebungsabbildungen erzeugt wird, heraus teilt.

2.3.13 Definition

Sei $\sigma \in \Sigma$ ein Simplex eines Simplicialkomplexes. Ist $\tau \supset \sigma$ ein weiterer Simplex, so heißt $\bar{\sigma} \subset \tau$ **opposit** zu σ , falls

$$\sigma \cap \bar{\sigma} = \emptyset \text{ und } \text{conv}(\sigma \cup \bar{\sigma}) = \tau$$

Definiere den **Link** von σ als den Simplicialkomplex aller Simplizes, die opposit zu σ liegen, d. h.

$$lk(\sigma) := \{\bar{\sigma} \mid \sigma \subset \tau\}$$

2.3.14 Proposition

Der Raum einer drei-dimensionalen Verklebung ist genau dann eine Mannigfaltigkeit, wenn jeder Link einer Ecke homöomorph zu S^2 ist.

2.3.15 Proposition

Der Raum einer drei-dimensionalen Verklebung ist genau dann eine Mannigfaltigkeit, wenn seine Eulerzahl gleich Null ist.

Beweis

Es sei X der Raum der Verklebung. X habe k Ecken, e Kanten, f Facetten und t Tetraeder. Jeder Tetraeder bringt vier Facetten ins Spiel; allerdings werden immer zwei verschiedenen Facetten gepaart, ergo gilt

$$f = 2t$$

Es bezeichne v_1, \dots, v_k die Ecken des Simplizes. Jede Kante enthält zwei Ecken, die opposit zueinander sind. Jede Facette enthält drei Kanten, die opposit zu den Ecken der Facette stehen. Jeder Tetraeder enthält vier Facetten, die opposit zu seinen Ecken stehen. Es folgt

$$\sum_{i=1}^k \chi(lk(v_i)) = 2e - 3f + 4t = 2e - 2t$$

und

$$\chi(X) = k - e + f - t = k - e + t = k - \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^k \chi(lk(v_i)) \right)$$

Jedes $lk(v_i)$ bildet eine geschlossene, zwei-dimensionale Fläche, somit gilt

$$lk(v_i) \leq 2$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $lk(v_i)$ homöomorph zu S^2 ist. □

2.3.16 Bemerkung: Poincares Homologiesphäre

Betrachte einen regelmäßigen Dodekaeder. Unter dem **Torsionswinkel** verstehen wir den Winkel zwischen zwei den Normalen zweier anliegender Facetten.

Wenn wir die Raumkrümmung erhöhen, steigen die Torsionswinkel unseres Dodekaeders an. Insbesondere können wir hierdurch erreichen, dass diese Winkel den Wert $\frac{2}{3}\pi$ erreichen. Wir können nun gegenüberliegende Seiten um $\frac{1}{3}\pi$ drehen und verkleben. Hierdurch erhalten wir eine kompakte, sphärische Mannigfaltigkeiten, die nicht homöomorph zu S^3 ist, aber dieselben Homologiegruppen hat.

2.3.17 Bemerkung: Der Dodekaeder von Seifert und Weber

Wir können in obiger Situation die Raumkrümmung erniedrigen anstatt zu erhöhen und dadurch Torsionswinkel von $\frac{2}{5}\pi$ für unseren Dodekaeder erreichen. Indem wir gegenüberliegende Facetten um $\frac{3}{5}\pi$ verdrehen und verkleben, erhalten wir wieder eine kompakte, hyperbolische Mannigfaltigkeit.

Kapitel 3

Dick-Dünn-Zerlegung

3.1 Tuben und Spitzen

3.1.1 Proposition

Sei $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ eine Mannigfaltigkeit. Dann gilt

$$inj_x(M) = \frac{1}{2} \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma(x))$$

3.1.2 Korollar

$$inj(M) = \frac{1}{2} \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\gamma)$$

3.1.3 Korollar

Ist $M = \mathbb{H}^n / \Gamma$ eine kompakte Mannigfaltigkeit, so besteht Γ nur aus hyperbolischen Elementen.

Beweis

Γ kann von vornerein keine elliptischen Elemente besitzen.

Da M kompakt ist, ist $inj_x(M)$ nach unten beschränkt für $x \in M$. Allerdings ist $d(\gamma) = 0$ für eine parabolische Isometrie γ . \square

3.1.4 Definition: Tuben

Sei $\phi \in Isom(\mathbb{H}^n)$ hyperbolisch mit Achse l und minimaler Versetzung d . Teilt man $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ aus \mathbb{H}^n heraus, erhält man eine **unendliche Tube**. l wird dabei auf eine geschlossene Geodäte der Länge d abgebildet, der **Nabe** der Tube.

3.1.5 Proposition

Jede unendlich Tube ist diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$ oder $S^1 \tilde{\times} \mathbb{R}^{n-1}$, wenn ϕ orientierungsumkehrend ist.

$S^1 \tilde{\times} \mathbb{R}^{n-1}$ entsteht aus $[0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$, indem man die Relation

$$(0, x) \sim (1, -x)$$

heraus teilt.

3.1.6 Definition

Eine **Tube der Länge** R entsteht, indem man $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ aus der R -Nachbarschaft von l heraus teilt. Der entstehende Raum ist diffeomorph zu $S^1 \times D^{n-1}$ bzw. $S^1 \widetilde{\times} D^{n-1}$.

3.1.7 Definition: Spitze

Sei $\Gamma < Isom(\mathbb{R}^{n-1})$ eine nichttriviale diskrete Untergruppe, die frei auf \mathbb{R}^n agiert. Jedes Element in Γ induziert durch

$$\phi(x, t) := (Ax + b, t)$$

eine parabolische Wirkung auf H^n , durch die ∞ fixiert wird. Teilt man diese Wirkung heraus, erhält man eine hyperbolische Mannigfaltigkeit, die diffeomorph ist zu

$$\mathbb{R}_{>0} \times (\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma)$$

Wir nennen diese hyperbolische Mannigfaltigkeit eine **Spitze**.

Eine **beschränkte Spitze** erhält man, indem man das diffeomorphe Äquivalent zu $[a, +\infty) \times (\mathbb{R}^{n-1}/\Gamma)$ für $a > 0$ nimmt.

3.1.8 Proposition

Für eine beschränkte Spitze C gilt

$$vol(C) = \frac{vol(\partial C)}{n-1}$$

3.1.9 Lemma

Seien ϕ_1, ϕ_2 zwei hyperbolische oder parabolische Isometrien auf \mathbb{H}^n . Kommutieren diese, so gilt

$$Fix(\phi_1) = Fix(\phi_2)$$

Beweis

Allgemein gilt für jedes Paar von Bijektionen a, b

$$Fix(aba^{-1}) = a(Fix(b))$$

In unserem Fall folgt hierdurch

$$Fix(\phi_1) = \phi_2(Fix(\phi_1))$$

Ist also ϕ_1 parabolisch, so besitzt ϕ_2 unter Anderem denselben Fixpunkt wie ϕ_1 . Aus symmetrischen Gründen ist ϕ_2 aber dann auch parabolisch.

Sei ϕ_1 also hyperbolisch. Dann sind ϕ_1 und ϕ_2 beide hyperbolisch und beide erhalten dieselbe Achse. Ergo müssen sie beide dieselben Punkte im Unendlichen fixieren. \square

3.1.10 Lemma

Seien $\phi_1, \phi_2 \in \Gamma$ zwei Isometrien einer diskreten und torsionsfreien Gruppe. Dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- $Fix(\phi_1) \cap Fix(\phi_2) = \emptyset$.
- ϕ_1 und ϕ_2 sind beide parabolisch und haben denselben Fixpunkt.
- ϕ_1 und ϕ_2 sind beide hyperbolisch und lassen sich beide als eine Potenz derselben hyperbolischen Isometrie schreiben.

Beweis

Wir nehmen an, dass $\text{Fix}(\phi_1) \cap \text{Fix}(\phi_2) \neq \emptyset$.

- Angenommen ϕ_1 ist hyperbolisch und ϕ_2 ist parabolisch. Wir wählen dann das obere Halbraummodell mit $\text{Fix}(\phi_1) = \{0, \infty\}$ und $\text{Fix}(\phi_2) = \infty$.
 ϕ_1 und ϕ_2 agieren dann durch

$$\phi_1(x, t) = \lambda(Ax, t) \text{ und } \phi_2(x, t) = (Bx + b, t)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit ist $\lambda < 1$. Betrachte

$$\phi_1^n \circ \phi_2 \circ \phi_1^{-n}(0, t) = (\lambda^n A^n b, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, t)$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass Γ diskret wäre.

- ϕ_1 und ϕ_2 seien beide hyperbolisch und besitzen einen gemeinsamen Fixpunkt. Der Kommutator $[\phi_1, \phi_2] = \phi_1 \phi_2 \phi_1^{-1} \phi_2^{-1}$ erhält jede Horosphäre um ∞ . Da er aber nicht parabolisch sein kann, muss er trivial sein. Ergo kommutieren ϕ_1 und ϕ_2 .
- Besitzen ϕ_1 und ϕ_2 dieselbe hyperbolische Achse, so sind beide durch $w_i = d(\phi_i)$ bestimmt. w_1 und w_2 spannen als Elemente von \mathbb{R} eine abelsche, additive Gruppe auf. Diese muss von einem Element erzeugt werden, da sonst Γ nicht diskret wäre.

□

3.1.11 Korollar

Ist Γ diskret und torsionsfrei, so gelten folgende Eigenschaften:

- Die Achsen zweier hyperbolischer Elemente aus Γ sind entweder inzident oder ultraparallel.
- Jede Untergruppe von Γ , die isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist, muss von zwei parabolischen Elementen aufgespannt werden.

3.1.12 Korollar

Die Fundamentalgruppe einer geschlossenen hyperbolischen Mannigfaltigkeit kann keine Untergruppe enthalten, die isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist.

3.2 Exkurs zu Lie-Gruppen und Lie-Algebren**3.2.1 Definition**

Eine **Lie-Gruppe** ist eine glatte Mannigfaltigkeit, die eine Gruppenstruktur trägt, durch die Inversion und Multiplikation zu glatten Abbildungen werden.

3.2.2 Definition

Eine **Lie-Algebra** V ist ein reeller Vektorraum mit einer Bilinearform

$$[\cdot, \cdot] : V \otimes_{\mathbb{R}} V \longrightarrow V$$

die folgende Eigenschaften erfüllt:

- 1.) **Anti-Symmetrie:** $[X, Y] = -[Y, X]$
- 2.) **Jacobi-Identität:** $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$

3.2.3 Bemerkung

Sei G eine Lie-Gruppe, setze

$$\mathfrak{g} = T_e G$$

Dann ist \mathfrak{g} , der Tangentialraum des Neutralelements von G , isomorph zum Raum der **links-invarianten Vektorfelder** auf G , d. h., der Vektorfelder X , für die gilt

$$X(gp) = dg_p X(p)$$

Ergo können wir die Lie-Klammer der Vektorfelder auf \mathfrak{g} einschränken, wodurch \mathfrak{g} zu einer Lie-Algebra wird. Für $x \in \mathfrak{g}$ definieren wir die **Adjunktion** durch

$$\begin{aligned} ad(x) : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ v &\longmapsto [x, v] \end{aligned}$$

Beachte, für jedes $x \in \mathfrak{g}$ existiert genau ein glatter Gruppenmorphismus

$$\Theta : \mathbb{R} \longrightarrow G$$

sodass $\Theta'(0) = x, \Theta(0) = 1$.

Wir definieren hierdurch folgende **Exponentialabbildung**

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto \Theta(1) \end{aligned}$$

Dann existiert ein Zusammenhang auf G , sodass \exp der Riemannschen Exponential-Abbildung entspricht und jedes Θ eine Geodäte ist.

Ist $h \in G$, so definiere

$$\begin{aligned} Int(h) : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto hgh^{-1} \end{aligned}$$

und die **adjungierte Aktion** durch

$$Ad(h) := (dInt(h))_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(Ad(h)x) &= h \exp(x) h^{-1} \\ Ad(\exp(x)) &= e^{ad(x)} \end{aligned}$$

3.2.4 Bemerkung

Ist $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, so ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$ und $[x, y] = xy - yx$.

3.3 Zassenhaus

3.3.1 Definition

Ist $U \subset G$ Teilmenge einer Gruppe, so definiere rekursiv

$$\begin{aligned} U_{(0)} &:= U \\ U_{(k)} &:= [U_{(k-1)}, U] \end{aligned}$$

Ist U eine Umgebung der 1 in einer Lie-Gruppe G , so nennen wir U eine **Zassenhaus-Umgebung**, falls

$$\begin{aligned} U_{(1)} &\subset U \\ U_{(k)} &\xrightarrow{k \rightarrow \infty} \{1\} \end{aligned}$$

3.3.2 Proposition

Jede reelle Lie-Gruppe besitzt eine Zassenhaus-Umgebung.

Beweis

- Wir zeigen die Aussage zuerst für $GL_n(\mathbb{R})$.
Für $v \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\|v\|$ die euklidische 2-Norm und für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezeichne $\|A\| := \sup_{v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|}$ die dazugehörige Operatornorm. Insbesondere gilt für diese Norm

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

Definiere ferner

$$m(A) := \|I_n - A\|$$

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $m(A) < 1$ und $m(B) < 1$. Schreibe $\alpha = A - I_n$ und $\beta = B - I_n$.
Da $\|\alpha\| < 1$, konvergiert folgende Reihe

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\alpha)^n$$

Ferner gilt

$$\|A^{-1}v\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|v\| \|\alpha\|^n = \frac{\|v\|}{1 - \|\alpha\|}$$

Ergo

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - m(A)}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} m([A, B]) &= \|[A, B] - I\| \\ &= \|ABA^{-1}B^{-1} - I\| \\ &= \|((A - I)(B - I) - (B - I)(A - I))A^{-1}B^{-1}\| \\ &\leq 2\|A - I\| \|B - I\| \|A^{-1}\| \|B^{-1}\| \\ &\leq 2 \frac{m(A)m(B)}{(1 - m(A))(1 - m(B))} \end{aligned}$$

Definiere nun folgende Umgebung der Eins in $GL_n(\mathbb{R})$

$$U := \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid m(A) < \frac{1}{8} \right\}$$

Induktiv rechnet man dann für $n \geq 0$ für alle $C \in U_{(n)}$ nach

$$m(C) < \frac{1}{8} \left(\frac{3}{8} \right)^n$$

Ergo ist U eine Zassenhaus-Umgebung.

- Ist G eine Lie-Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, so ist $U \cap G$ eine Zassenhaus-Umgebung für G .

- Ist G irgendeine reelle Lie-Gruppe, so folgt aus Ados Theorem, dass eine Injektion von Lie-Algebren

$$\mathfrak{g} = \mathcal{T}_e G \xrightarrow{f} \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = T_e GL_n(\mathbb{R})$$

existiert. Es bezeichne \mathcal{G} die Untergruppe von $GL_n(\mathbb{R})$, deren Lie-Algebra gerade das Bild von f ist.

Dann existiert eine lokale Isometrie

$$\phi : V \longrightarrow W$$

wobei $V \subset G, W \subset \mathcal{G}$ jeweils Umgebungen der Eins sind. Wir können nun eine Zassenhaus-Umgebung von \mathcal{G} wählen, sie mit W schneiden, und dann über ϕ zurückziehen.

□

3.3.3 Definition

Eine Gruppe heißt **nilpotent**, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$G_{(n)} = 1$$

3.3.4 Proposition

Sei G eine Gruppe, die durch eine Menge S erzeugt wird. Gilt für alle $a_1, \dots, a_{n+1} \in S$

$$[a_1, [a_2, \dots [a_n, a_{n+1}] \dots]] = 1$$

so folgt

$$g_{(n)} = 1$$

3.3.5 Lemma

Sei G eine Lie-Gruppe. Dann existiert eine Umgebung U der 1, sodass jede diskrete Untergruppe, die durch Elemente aus U generiert wird, nilpotent ist.

3.4 Margulis Lemma

3.4.1 Definition

Sei S eine Menge von Symbolen. S^* bezeichne das durch S frei erzeugte Monoid. Ferner sei ein surjektiver Homomorphismus $\pi : S^* \rightarrow G$ in eine Gruppe G gegeben.

Jedes Element aus G besitzt dann eine Darstellung als ein **Wort** in S^* . Definiere folgende **Norm** auf G

$$\|g\|_S := \{|w| \mid w \in S^*, \pi(w) = g\}$$

3.4.2 Lemma

Es agiere G transitiv auf einer Menge A , die mindestens $m+1$ Elemente habe. Für jedes $a \in A$ gibt es mindestens $m+1$ Elemente aus G mit $\text{Norm} \leq m$, die a auf $m+1$ verschiedene Elemente abbilden.

3.4.3 Definition

Ist $H \subset G$ eine Untergruppe endlichen Index, so heißt G **virtuell** H .

Ist H abelsch, nilpotent, etc., so heißt G virtuell abelsch, nilpotent, etc..

3.4.4 Lemma: Margulis Lemma

Sei $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ diskret und $x \in \mathbb{H}^n$ beliebig. Für $\varepsilon > 0$ setze

$$\Gamma_\varepsilon(x) := \{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma(x)) \leq \varepsilon\}$$

Dann existiert für jedes $n \geq 2$ eine sogenannte **Margulis-Konstante** $\varepsilon_n > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{H}^n$ die Gruppe $\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$ virtuell nilpotent ist.

Beweis

- $G = Isom(\mathbb{H}^n)$ ist eine Lie-Gruppe. Sei U eine Zassenhaus-Umgebung der Eins in G . V sei eine kompakte Umgebung von $Stab_G(x) \cong O(n-1)$ in G . Dann existiert eine Zahl m , sodass V durch m Translate von U überdeckt wird.
Sei ferner W eine Umgebung von $Stab_G(x)$ in G mit $W = W^{-1}$ und $W^m \subset V$.¹
- Wir nehmen zuerst an, dass Γ durch eine Menge $S \subset W$ erzeugt wird, und zeigen in diesem Fall, dass $\Gamma' := \Gamma \cap U$ einen Index von höchstens m in Γ hat.
Betrachte hierzu die Wirkung von Γ auf Γ/Γ' . Besitzt diese Menge mehr als m Elemente, so gibt es $m+1$ Nebenklassen aus Γ/Γ' , die einen Repräsentanten mit Norm $\leq m$ haben.
Da $S^{\leq m} \subset W^m \subset V$, liegen alle diese Repräsentanten in V . Da V durch m Translate von U überdeckt wird, liegen mindestens zwei der $m+1$ Repräsentanten im denselben Translat. Deswegen repräsentieren diese beiden Elemente dieselbe Nebenklasse in Γ/Γ' , was einen Widerspruch zur Annahme, dass der Index von Γ' in Γ echt größer als m ist, darstellt.
- Wir wollen nun $\varepsilon_n > 0$ so wählen, dass gilt

$$\{g \in G \mid d(x, g(x)) \leq \varepsilon_n\} \subset W$$

Das geht, denn betrachte das Faserbündel

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow \mathbb{H}^n \\ g &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

Die Faser von x ist gerade $Stab_G(x) \cong O(n-1)$. Da $O(n-1)$ notorischerweise kompakt ist, ist π eine eigentliche Abbildung². Ergo ist auch die Menge

$$K_l := \pi^{-1} \left\{ y \in \mathbb{H}^n \mid d(x, y) \leq \frac{1}{l} \right\} = \left\{ g \in G \mid d(x, g(x)) \leq \frac{1}{l} \right\}$$

kompakt. Ferner gilt

$$\bigcap_l K_l = Stab_G(x) \subset W$$

Da die K_l alle kompakt sind und W eine Umgebung von $Stab_G(x)$ ist, existiert ein l mit

$$K_l \subset W$$

Ergo kann $\varepsilon_n \leq \frac{1}{l}$ gewählt werden.

□

¹ So ein W kann mithilfe des verallgemeinerten Tuben-Lemmas gefunden werden: Seien Räume $A \subset X$ und $B \subset Y$ gegeben und eine offene Umgebung $N \subset X \times Y$ von $A \times B$. Sind A und B kompakt, so gibt es offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit $A \times B \subset U \times V \subset N$.

² Ein Faserbündel ist genau dann eigentlich, wenn ihre Faser kompakt ist. Eine Abbildung heißt eigentlich, wenn das Urbild kompakter Mengen wieder kompakt ist.

3.4.5 Definition

Eine nichttriviale, diskrete Untergruppe $\Gamma \subset Isom(\mathbb{H}^n)$ heißt **elementar**, wenn es eine endliche Menge $\emptyset \neq S \subset \overline{\mathbb{H}^n}$ gibt, die von Γ fixiert wird, d. h.,

$$Fix(\phi) = S \forall \phi \in \Gamma$$

Dies ist äquivalent dazu zu fordern, dass es einen Punkt $x \in \overline{\mathbb{H}^n}$ gibt, dessen Γ -Orbit endlich ist.

3.4.6 Proposition

Eine elementare Gruppe Γ , die frei auf \mathbb{H}^n operiert, wird entweder durch eine hyperbolische Isometrie oder durch beliebig viele parabolische Isometrien mit demselben Fixpunkt erzeugt.

Beweis

Γ agiert frei und enthält deswegen kein elliptischen Elemente. S muss ergo in $\partial\mathbb{H}^n$ liegen und aus einem, oder zwei Elementen bestehen. Der Rest folgt nun aus Lemma 3.1.10. \square

3.4.7 Proposition

Sei $\Gamma \subset \mathbb{H}^n$ diskret, torsionsfrei und nichttrivial. Γ ist genau dann elementar, wenn Γ virtuell elementar ist.

Beweis

Sei $\Gamma' \subset \Gamma$ elementar und von endlichem Index. Γ' besteht entweder aus hyperbolischen Elementen, die dieselbe Achse erhalten, oder aus parabolischen mit demselben Fixpunkt. Ist $\phi \in \Gamma$, so muss eine Potenz von ϕ in Γ' liegen und ergo ebenfalls dieselbe Achse erhalten oder denselben Fixpunkt fixieren. \square

3.4.8 Korollar

Sei $\Gamma \subset \mathbb{H}^n$ diskret und torsionsfrei. Ist Γ virtuell nilpotent, so ist Γ entweder trivial oder elementar.

Beweis

Sei $H \subset G$ von endlichem Index und nilpotent. Ist H trivial, so ist G endlich. Da G aber auch torsionsfrei ist, muss G somit auch trivial sein.

Sei H nicht trivial. Da H nilpotent ist, existieren nichttriviale Elemente in H , die mit allen anderen kommutieren. Ergo müssen alle Elemente in H dieselben Fixpunkte haben. Ergo ist H elementar. \square

3.4.9 Korollar

Sei Γ diskret und torsionsfrei. Für jedes $x \in \mathbb{H}^n$ ist dann $\Gamma_{\varepsilon_n}(x)$ entweder trivial oder elementar.

3.5 Dick-Dünn-Zerlegung

3.5.1 Definition

- Eine **sternförmige Menge um einen Randpunkt** $p \in \partial\mathbb{H}^n$ ist eine Menge $U \subset \mathbb{H}^n$, die mit jedem Strahl, der zu p läuft, einen nicht-leeren zusammenhängenden Schnitt besitzt.
- Eine **sternförmige Umgebung um eine Gerade** $l \subset \mathbb{H}^n$ ist eine Menge $U \subset \mathbb{H}^n$, die einen nicht-leeren zusammenhängenden Schnitt mit jeder Geodäte besitzt, die l orthogonal schneidet.

- Sei Γ eine Gruppe, die frei und diskontinuierlich agiert und aus parabolischen Isometrien besteht, die einen Randpunkt $p \in \partial\mathbb{H}^n$ fixieren. Ist U eine sternförmige Umgebung um p , die invariant unter Γ ist, so heißt U/Γ eine **sternförmige Spitzenumgebung**.
- Sei Γ eine Gruppe, die durch eine hyperbolische Isometrie ϕ mit Achse l erzeugt wird. Ist V eine Γ -invariante sternförmige Umgebung um l , so heißt V/Γ eine **sternförmige Umgebung einer einfachen geschlossenen Geodäten** der Länge $d(\phi)$.

3.5.2 Bemerkung

Die beschränkten Tuben und Spitzen stellen Beispiele für sternförmige einfache geschlossene geodätische Umgebungen bzw. sternförmige Spitzenumgebungen dar.

3.5.3 Definition

Sei $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ eine Mannigfaltigkeit. ε_n sei eine Margulis-Konstante. Definiere den **dicken Teil** von M durch

$$M_{[\varepsilon_n, \infty)} := \left\{ x \in M \mid \text{inj}_x(M) \geq \frac{\varepsilon_n}{2} \right\}$$

und den **dünnen Teil** durch

$$M_{(0, \varepsilon_n]} := \overline{M/M_{[\varepsilon_n, \infty)}}$$

3.5.4 Satz: Dick-Dünn-Zerlegung

Sei M eine vollständige, hyperbolische Mannigfaltigkeit der Dimension n .

Der dünne Part $M_{(0, \varepsilon_n]}$ besteht aus einer disjunkten Vereinigung von sternförmigen Spitzenumgebungen und sternförmigen Umgebungen von geschlossenen Geodäten der Länge $< \varepsilon_n$.

Beweis

□