Лабораторная работа №8
по дисциплине «Типы и структуры данных»
Тема: Графы.

Условие задачи:

Обработать графовую структуру в соответствии с указанным вариантом задания. Обосновать выбор необходимого алгоритма и выбор структуры для представления графов. Ввод данных – на усмотрение программиста. Результат выдать в графической форме.

Задана система двусторонних дорог. Для каждой пары городов найти длину кратчайшего пути между ними.

Исходные данные:

Граф задается матрицей стоимостей.

Матрица стоимости графа G=(V,E) – квадратная матрица размерности |V|:

$$w_{ij} = \begin{cases} \text{вес ребра, если вершины } i \text{ и } j \text{ смежные} \\ \infty, \text{если вершины } i \text{ и } j \text{ не смежные} \end{cases}, \quad i = \overline{1,|V|}, j = \overline{1,|V|}.$$

Данная матрица получается программой из файла: первое число в файле - размерность матрицы, далее - сама матрица, такая, что элемент [i][j] = весу ребра, если из i в j есть дорога, [i][j] = 0, если дороги нет.

Либо граф можно задать вручную: пользователя просят ввести вершину i, вершину j и вес ребра i-j через пробел.

Введите через пробел номера двух вершин и расстояние между ними: 1 2 5
=> Дорога между 1 и 2 городами равна 5. (Вес ребра 1-2 равен 5)

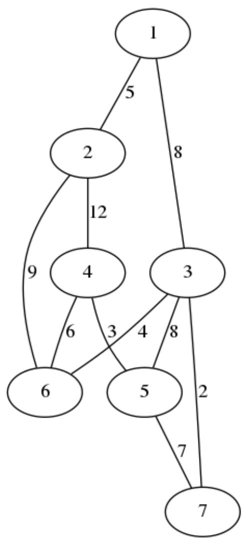
Выходные данные:

Выходными данными программы являются:

1. Изображение графа в формате .png, заданного матрицей стоимостей, с указанием весов ребер (рис).
2. Таблица кратчайших расстояний между каждым из двух городов. Таблица представлена в формате:

Город 1	Город 2	Кратчайшее расстояние
1	2	5
1	3	8
1	4	17

3. Матрица кратчайших расстояний, полученная вследствие работы алгоритма Флойда - Уоршела.



0	5	8	0	0	0	0
5	0	0	12	0	9	0
8	0	0	0	8	4	2
0	12	0	0	3	6	0
0	0	8	3	0	0	7
0	9	4	6	0	0	0
0	0	2	0	7	0	0

∞	5	8	17	16	12	10
5	∞	13	12	15	9	15
8	13	∞	10	8	4	2
17	12	10	∞	3	6	10
16	15	8	3	∞	9	7
12	9	4	6	9	∞	6
10	15	2	10	7	6	∞

Взаимодействие с программой:
Работа с программой осуществляется с помощью меню программы:

Меню работы с графами:
(1) Загрузка графа из файла
(2) Задание графа вручную
(3) Печать графа
(4) Длина кратчайшего пути между каждой парой городов
(5) Длины кратчайшего пути из одного города до других
(6) Вывод на экран матрицы кратчайших расстояний
(7) Проверка связности графа
(0) Завершение работы

(1) - загружает матрицу стоимостей из файла
(2) - запрашивает ввод количества вершин, а затем связей этих вершин в формате первая_вершина вторая_вершина вес_ребра(расстояние). создает матрицу стоимостей по данной информации, полученной от пользователя.
(3) - генерирует файл на языке DOT, запускает bash-скрипт, который преобразует файл с расширением .gv в изображение .png с графом.
(4) - выводит таблицу с длинами кратчайших путей между каждыми из двух вершин графа (между любыми двумя городами).
(5) - запрашивает ввод вершины v0, от которой требуется найти кратчайшие расстояния до всех других вершин. Выводит кратчайшее расстояние от v0 до других вершин либо сообщение о том, что из v0 нельзя попасть в какую-то из вершин.
(6) - выводит на экран матрицу кратчайших расстояний, где элемент [i] [j] - расстояние между i-тым и j-тым городом.
(7) - проверяет связный ли граф. Выводит сообщение с результатом.

Представление графа в программе:
Граф представлен матрицей стоимостей (n*n) matrix[i][j], где n - количество вершин.
В этой матрице элемент matrix[i][j] = вес ребра i - j, если ребро, связывающее вершины Vi и Vj существует и matrix[i][j] = 0, если ребра нет.
У неориентированных графов матрица смежности всегда симметрична.

Используемые алгоритмы:

Для поиска кратчайших расстояний между любыми двумя городами используется **алгоритм Флойда - Уоршела** - алгоритм для нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного ориентированного графа.

Алгоритм:
W - матрица стоимостей.
После работы алгоритма W - матрица кратчайших расстояний.

```
for k = 1 to n
  for i = 1 to n
    for j = 1 to n
      W[ i ] [ j ] = min(W[ i ] [ j ], W[ i ][ k ] + W[ k ] [ j ])
```

Алгоритм Флойда — Уоршелла является эффективным для расчёта всех кратчайших путей в плотных графах, когда имеет место большое количество пар рёбер между парами вершин. Алгоритм имеет кубическую сложность O(n^3)

Для поиска кратчайших расстояний из одного города до всех остальных используется **алгоритм Дейкстры**. Так как расстояние между городами не может быть представлено отрицательными числами, значит эффективнее использовать алгоритм Дейкстры, нет нужды в алгоритме Беллмана - Форда, который уступает по времени.

Алгоритм:

```
already_used - массив посещенных вершин
min_rasst - массив минимальных расстояний
do  {
            min_ind = INF;
            min = INF;
            for (int i = 0; i < count; i++)  {
                  if (already_used[i] == 1 && min_rasst[i] < min)  {
                        min = min_rasst[i];
                        min_ind = i;
                  }
            }
            if (min_ind != INF)  {
                  for (int i = 0; i < count; i++)  {
                        if (matrix[min_ind][i] > 0)  {
                              tmp = min+matrix[min_ind][i];
                              if (tmp < min_rasst[i])
                                    min_rasst[i] = tmp;
                        }

                  }
                  already_used[min_ind] = 0;
            }
      }
      while (min_ind < INF);
```

Для построения минимального остова используется **алгоритм Прима** - алгоритм построения минимального остовного дерева взвешенного связного неориентированного графа.

Алгоритм:

На вход алгоритма подаётся связный неориентированный граф. Для каждого ребра задаётся его стоимость.

Сначала берется произвольная вершина и находится ребро, инцидентное данной вершине и обладающее наименьшей стоимостью. Найденное ребро и соединяемые им две вершины образуют дерево. Затем, рассматриваются рёбра графа, один конец которых — уже принадлежащая дереву вершина, а другой — нет; из этих ребер выбирается ребро наименьшей стоимости. Выбираемое на каждом шаге ребро присоединяется к дереву. Таким образом, при выполнении каждого шага алгоритма, высота формируемого дерева увеличивается на 1. Рост дерева происходит до тех пор, пока не будут исчерпаны все вершины исходного графа.

Вопросы к лабораторной работе:

1. Что такое граф?

Граф – конечное множество вершин и соединяющих их рёбер; G = <V, E>. Если пары E (ребра) имеют направление, то граф называется направленным; если ребро имеет вес, то граф называется взвешенным.

2. Как представляются графы в памяти?

Существуют различные методы представления графов в программе.
Матрица смежности B(n*n) – элемент b[i,j]=1, если существует ребро, связывающее вершины iи j, и =0, если ребра не существует.
Список смежностей – содержит для каждой вершины из множества вершин V список тех вершин, которые непосредственно связаны с ней. Входы в списки смежностей могут храниться в отдельной таблице, либо же каждая вершина может хранить свой список смежностей.

3. Какие операции возможны над графами?

Основные операции над графами: обход вершин и поиск различных путей: кратчайшего пути от вершины к вершине; кратчайшего пути от вершины ко всем остальным; кратчайших путей от каждой вершины к каждой; поиск эйлерова пути и гамильтонова пути, если таковые есть в графе.

4. Какие способы обхода графов существуют?

Один из основных методов проектирования графовых алгоритмов – поиск в глубину. Начиная с некоторой вершины v0, ищется ближайшая смежная ей вершина v, для которой в свою очередь осуществляется поиск в глубину до тех пор, пока не встретится ранее просмотренная вершина, или не закончится список смежности вершины v (то есть вершина полностью обработана). Если нет новых вершин, смежных с v, то вершина v считается использованной, идет возврат в вершину, из которой попали в вершину v, и процесс продолжается до тех пор, пока не получим v = v0. При просмотре используется стек.
Поиск в ширину – обработка вершины V осуществляется путем просмотра сразу всех «новых» соседей этой вершины, которые последовательно заносятся в очередь просмотра. Для поиска кратчайших путей используются алгоритмы Дейкстры, Беллмана-Форда, Флойда- Уоршалла.

5. Где используются графовые структуры?

Графовые структуры могут использоваться в задачах, в которых между элементами могут быть установлены произвольные связи, необязательно иерархические. Наиболее распространенным является использование графов при решении различных задач о путях, будь то построение коммуникационных линий между городами или прокладка маршрута на игровом поле.

6. Какие пути в графе Вы знаете?

Путь в графе, проходящий через каждое *ребро* ровно один раз, называется *эйлеровым* путём; путь может проходить по некоторым вершинам несколько раз – в этом случае он является непростым.
Путь, проходящий через каждую вершину ровно один раз, называется гамильтоновым путем.
Как эйлеров, так и гамильтонов путь могут не существовать в некоторых графах.

7. Что такое каркасы графа?

Каркас графа – дерево, в которое входят все вершины графа, и некоторые (не обязательно все) его рёбра.
Для построения каркасов графа используются алгоритмы Крускала и Прима.