Лабораторная работа №5
по дисциплине «Типы и структуры данных»
Тема :Обработка разреженных матриц.

Условие задачи:
Разреженная (содержащая много нулей) матрица хранится в форме 3-х объектов:
- вектор A содержит значения ненулевых элементов;
- вектор JA содержит номера столбцов для элементов вектора A;
- связный список IA, в элементе Nk которого находится номер компонент в A и JA, с которых начинается описание строки Nk матрицы A.

Задание:
1. Смоделировать операцию умножения матрицы и вектора-столбца, хранящихся в этой форме, с получением результата в той же форме.
2. Произвести операцию умножения, применяя стандартный алгоритм работы с матрицами.
3. Сравнить время выполнения операций и объем памяти при использовании этих 2-х алгоритмов при различном проценте заполнения матриц.

Исходные данные:
- Матрица (количество строк m и столбцов n вводится пользователем), размерностью m*n, где m и n - целые числа в интервале [1;500], содержащая целые положительные числа от 0 до 9.
- Вектор из n элементов, где n не превышает 500, состоящий из целых положительных чисел от 0 до 9.

Пользователь вводит размерность матрицы и выбирает способ заполнения матрицы и вектора: вручную с клавиатуры либо рандомными числами (при выборе заполнения матрицы и вектора рандомными числами пользователь должен ввести процент заполнения матрицы нулями).

Выходные данные:
В результате работы программы на экран выводится:
- Вектор-столбец из m элементов, полученный в результате перемножения исходной матрицы и вектора столбца из n

элементов с применением стандартного алгоритма умножения матрицы на вектор.

- Вектор-столбец из m элементов в форме, состоящей из трех векторов (в соответствии с условием), полученный в результате перемножения матрицы, хранящейся в форме, состоящей из трех векторов, и вектора, хранящегося в той же форме.
- Количество времени, затраченное на умножение в матричной форме. Количество времени, затраченное на умножение в форме из трех векторов.
- Количество памяти, используемое при умножении двумя способами.

Представление матрицы в форме трех векторов:
Пример:
матрица **5*4**

9	**0**	**0**	**4**
0	**5**	**4**	**0**
0	**0**	**0**	**1**
1	**6**	**1**	**0**
0	**0**	**8**	**0**

A содержит значения ненулевых элементов матрицы:
A[9] = {9,4,5,4,1,1,6,1,8}
JA содержит номера столбцов для элементов вектора A:
JA[9] = {0,3,1,2,3,0,1,2,2}
(нулевой элемент вектора A - 9 находится в матрице в нулевом столбце, первый элемент вектора A - 4 находится в матрице в 3-ем столбце и т.д.)
IA, в элементе Nk которого находится номер компонент в A и JA, с которых начинается описание строки Nk матрицы A:
IA[5] = {0,2,4,5,8} - состоит из m элементов (по количеству строк)
(в первой строке матрицы хранятся элементы 9 и 4, которые в A и JA располагаются с индексами 0 и 1. В IA заносится индекс первого элемента на этой строке - 0. Во второй строке матрицы хранятся элементы 5 и 4, которые в A и JA располагаются по индексами 2 и 3. В IA заносится индекс первого элемента на этой строке - 2 и т.д. Если в строке нет ненулевых элементов, то в IA заносится -1.)

Возможные ошибки пользователя:

Неверный ввод размерности матрицы. Пользователь вводит числа, не пренадлежащие интервалу [1;500]. Реакция - сообщение “Размерность матрицы - 2 числа в интервале [1;500]: ” и повтор ввода.

Неверный выбор пункта меню при выборе способа заполнения матрицы или вектора. Пользователь вводит число, не равное 1 или 2 на просьбу “Выберите способ ввода матрицы: %s(1)Ручной ввод / (2)Random:”. Реакция - повтор ввода.

Тестовые данные:

Размерность	Матрица	Векторная форма представления матрицы	Вектор - столбец	Результат умножения (вектор - столбец)	Векторная форма представления вектора - столбца
5 5	**0 7 0 4 0** **0 0 0 0 0** **6 0 0 0 0** **0 0 0 0 0** **0 8 4 0 8**	**A: 7 4 6 8 4 8** **JA: 1 3 0 1 2 4** **IA: 0 -1 2 -1 3**	**5** **3** **1** **9** **6**	**57** **0** **30** **0** **76**	**A: 57 30 76** **JA: 0 0 0** **IA: 0 -1 1 -1 2**
5 1	**8** **0** **7** **2** **0**	**A: 8 7 2** **JA: 0 0 0** **IA: 0 -1 1 2 -1**	**8**	**64** **0** **56** **16** **0**	**A: 64 56 16** **JA: 0 0 0** **IA: 0 -1 1 2 -1**
1 5	**7 1 0 0 0**	**A: 7 1** **JA: 0 1** **IA: 0**	**0** **3** **0** **9** **0**	**3**	**A: 3** **JA: 0** **IA: 0**
-1 5	**Размерность матрицы - 2 числа в интервале [1;500]**				

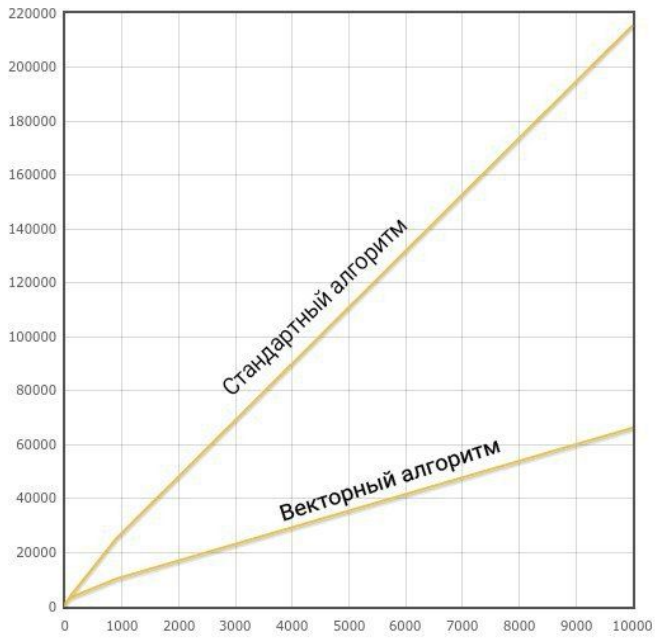
Сравнение эффективности по времени двух методов умножения матриц

Размерность матрицы	Заполнение матрицы ненулевыми элементами	Стандартный алгоритм (время выполнения)	Векторный алгоритм (время выполнения)
3*3	80%	1564	1638
3*3	50%	1390	1602
3*3	**20%**	**1203**	**1518**
10*10	80%	5014	8625
10*10	50%	5919	6001
10*10	**20%**	**4192**	**3464**
30*30	80%	20 268	26 433
30*30	50%	24 771	23 149
30*30	**20%**	**25 265**	**10 307**
100*100	80%	185 564	232 202
100*100	50%	191 144	156 883
100*100	**20%**	**215 532**	**66 301**

Сравнение эффективности по памяти двух методов умножения матриц

Размерность матрицы	Заполнение матрицы ненулевыми элементами	Стандартный алгоритм (память)	Векторный алгоритм (память)
3*3	80%	60	132
3*3	**20%**		**100**
10*10	80%	480	936
10*10	**20%**		**328**
30*30	80%	3840	6696
30*30	**20%**		**1560**
100*100	80%	40800	67968
100*100	**20%**		**10264**

Примечание*: жирным шрифтом в таблицах помечаются строки, где процент заполнения матрицы ненулевыми элементами меньше ¼ т.е. матрица разреженная.*



Вывод: выбор более эффективного алгоритма умножения матрицы на вектор-столбец напрямую зависит от размерности этой матрицы (т.е. количества элементов). При малом количестве элементов эффективнее использовать стандартный алгоритм работы с матрицами, так как в алгоритме, построенном на работе с тремя векторами, производится много проверок и циклов. Памяти также используется меньше в первом алгоритме, так как память требуется только на хранение матрицы и векторов (исходного и результата).
При возрастании количества элементов эффективность второго алгоритма становится более наглядной. Так как при большом количестве элементов (нулевых в том числе) первый алгоритм работает со всеми элементами матрицы и вектора, а второй только с ненулевыми. При большом количестве элементов второй алгоритм также эффективнее по памяти и эта эффективность возрастает с ростом количества элементов. Так как на хранение матрицы и вектора в матричной форме требуется всегда постоянное количество памяти, а в векторах хранится информация только о ненулевых элементах, что позволяет использовать в разы меньше памяти.
На графике: по оси X - количество элементов матрицы
по оси Y - время, потраченное на умножение

Контрольные вопросы:

1. Что такое разреженная матрица, какие схемы хранения таких матриц Вы знаете?

Разреженная матрица содержит достаточно большое количество элементов, из которых лишь малая часть является ненулевыми(n^{1+g} для матрицы размерности n, g<1).

Простейшая схема хранения такой матрицы - массив ненулевых элементов (AN) и два массива их координат (I и J)

Связная схема хранения матриц, предложенная Кнутом, предлагает хранить в массиве (например, в AN) в произвольном порядке сами элементы, индексы строк и столбцов соответствующих элементов (например, в массивах I и J), номер (из массива AN) следующего ненулевого элемента, расположенного в матрице по строке (NR) и по столбцу (NC), а также номера элементов, с которых начинается строка (указатели для входа в строку – JR) и номера элементов, с которых начинается столбец (указатели для входа в столбец – JC).

2. Каким образом и сколько памяти выделяется под хранение разреженной и обычной матрицы?

Под хранение обычной матрицы требуется m*n*sizeof(type_of_element) байт.

Память под разреженную матрицу выделяется в зависимости от метода ее хранения.

3. Каков принцип обработки разреженной матрицы?

Принцип обработки разреженной матрицы предполагает работу только с ненулевыми массивами.

4. В каком случае для матриц эффективнее применять стандартные алгоритмы обработки матриц? От чего это зависит?

Эффективность использования стандартного алгоритма обработки матриц зависит от количества ненулевых элементов в матрице. Чем их больше, тем менее эффективно использовать стандартные алгоритмы.