Tema	**Controladores óptimos de tiempo discreto**
Actividad	Taller a desarrollar en la sala de informática
Asignatura	Sistemas de Control en Tiempo Discreto
Docente	Carlos Felipe Rengifo Rodas
Email	caferen@unicauca.edu.co
Programa	Ingeniería en Automática Industrial
Facultad	Ingeniería Electrónica y Telecomunicaciones
Institución	Universidad del Cauca
Fecha	24 de enero de 2022

El objetivo del presente taller es que el estudiante diseñe y simule un controlador óptimo de tiempo discreto para el sistema presentado en la Figura 1. El controlador calculará el par que se debe aplicar al pivote del riel con el fin de ubicar la masa en una posición definida por el usuario.

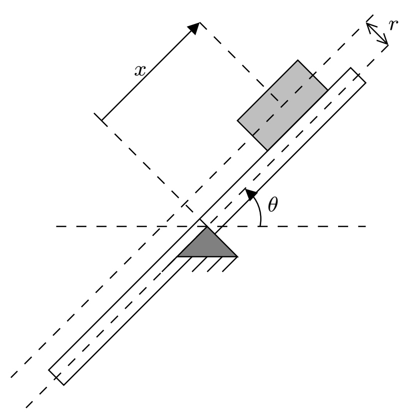

Figura 1: Sistema de masa y riel.

El modelo matemático del sistema de masa y riel se presenta en la ecuación (1) y los valores numéricos de sus constantes en el cuadro 1

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m\,x^2 + m\,r^2 + J & -m\,r \\ -m\,r & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}(x)} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\,m\,x\,\dot{x}\,\dot{\theta} + m\,g\,x\,\cos(\theta) - m\,g\,r\,\sin(\theta) \\ -m\,x\,\dot{\theta}^2 + m\,g\,\sin(\theta) \end{bmatrix}}_{H(\theta,x,\dot{\theta},\dot{x})} = \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}}_{E} \tag{1}$$

Para linealizar el modelo (1) se realizará la siguiente selección de estados: $x_1 = \theta$, $x_2 = x$, $x_3 = \dot{\theta}$, y $x_4 = \dot{x}$. De donde:

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Masa del carro	m	0.100	kg
Gravedad terrestre	g	9.807	$\mathrm{m/s^2}$
Inercia del riel	J	0.025	$\mathrm{kg\,m^2}$
Altura del carro	r	0.010	m

Cuadro 1: Valores numéricos de las constantes del modelo de masa y riel.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ \frac{m\,r\,x_2\,{x_3}^2 - 2\,m\,x_2\,x_4\,x_3 + u - g\,m\,x_2\,\cos(x_1)}{m\,{x_2}^2 + J} \\ \frac{m\,r^2\,x_2\,{x_3}^2 - 2\,m\,x_4\,r\,x_2\,x_3 - g\,m\,\cos(x_1)\,r\,x_2 + u\,r + m\,{x_2}^3\,{x_3}^2 - g\,m\,\sin(x_1)\,{x_2}^2 + J\,x_2\,{x_3}^2 - J\,g\,\sin(x_1)}{m\,{x_2}^2 + J} \end{bmatrix} \tag{2}$$

Adicionalmente, se supondrá que la masa permanece a una distancia de 0.5 metros del pivote. Al fijar x_1 en 0.5 e igualar las derivadas de (2) a cero, se obtiene un sistema no lineal con cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, cuya solución se presenta a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0.5 \\ \bar{x}_2 &= 0.0 \\ \bar{x}_3 &= 0.0 \\ \bar{x}_4 &= 0.0 \\ \bar{u} &= 0.0 \end{aligned} \tag{3}$$

Al linealizar (2) alrededor del punto del punto de equilibrio (3) se obtiene:

$$\dot{\delta x} = A\,\delta x + B\,\delta u \tag{4}$$

Siendo $\delta x = x - \bar{x}$ la desviación de los estados x con respecto a sus valores en equilibrio y $\delta u = u - \bar{u}$. Las matrices A y B están definidas por:

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}, \qquad B = \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}$$

La función F es el lado derecho de la ecuación (2). Durante el presente taller, el estudiante debe realizar las siguientes actividades:

1. Obtenga el modelo linealizado de tiempo continuo del sistema de carro y péndulo utilizando la función `get_linear_model.m` suministrada por el docente. Posteriormente, discretice el modelo resultante considerando un tiempo de muestreo $h = 0.05$ segundos.

2. Encuentre los escalares A_z y B_z del modelo (5) que genera los estados adicionales $z(kh)$. Para tal fin, considere una señal de referencia de tipo escalón.

$$z(kh + h) = A_z\, z(kh) + B_z\, e(kh) \tag{5}$$

   Siendo $e(kh)$ la diferencia entre la señal de referencia $r(kh)$ y la variable controlada $y(kh)$. Almacene A_z y B_z de (5) en las variables `Az` y `Bz` respectivamente.

3. Escriba el modelo en espacio de tiempo discreto extendido a partir de la ecuación (6).

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \delta x(kh+h) \\ z(kh+h) \end{bmatrix}}_{x_e(kh+h)} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & {\color{red}0} \\ -B_z\, C & A_z \end{bmatrix}}_{A_e} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta x(kh) \\ z(kh) \end{bmatrix}}_{x_e(kh)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ {\color{green}0} \end{bmatrix}}_{B_e} u(kh) \tag{6}$$

   Si n_x, n_z y n_u representan respectivamente la dimensiones de los vectores x, z y u, entonces la matriz de ceros de color rojo tendrá n_x filas y n_z columnas y la matriz de ceros de color verde tendrá n_z filas y n_u columnas.

4. Utilice la función `dlqr` de *Matlab* para encontrar la ganancia L que define la ley de control $\delta u(kh) = -L\, x_e(kh)$ para el modelo extendido (6) y permite a la masa posicionarse a una distancia deseada del pivote. Inicialmente suponga a Q como una matriz identidad y a R como 1.

5. Simule el comportamiento de lazo cerrado del sistema utilizando como representación matemática de la planta el modelo descrito por (2) y considerando como condiciones iniciales $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0.5$, $x_3(0) = 0$ y $x_4(0) = 0$. Para simular el modelo no lineal de la planta utilice los diagramas de bloques de las Figuras 2, y 4. La configuración

del bloque *Generador de estados adicionales* se presenta en la Figura 3. Dentro del bloque `Derivadas de los estados` de la Figura 4, incluya la función `derivatives_of_states` suministrada por el docente.

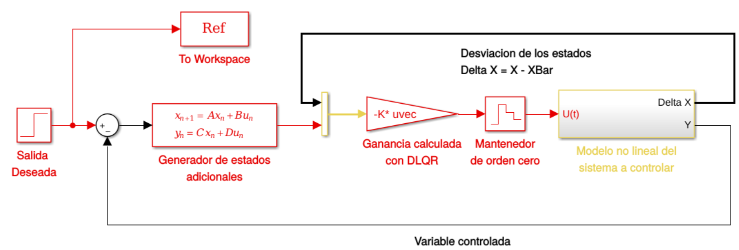

Figura 2: Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado. El subsistema *Modelo no lineal del sistema a controlar* se describe en la Figura 4.

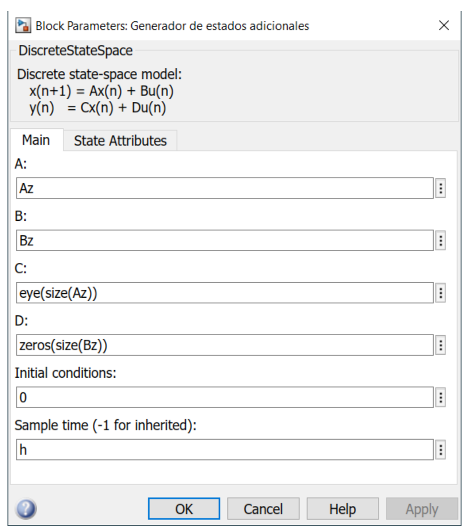

Figura 3: Configuración del bloque *Generador de estados adicionales*. Las asignaciones C=eye(size(Az)) y D=zeros(size(Bz)) garantizan que la salida del bloque sea igual al vector de estados ($Y = Z$).

6. Describa el efecto de la constante q_5 de la matriz presentada en (7) en el comportamiento de lazo del sistema. Realice diferentes simulaciones considerando: (i) $q_5 = 1$, (ii) $q_5 = 10$ y (iii) $q_5 = 100$.

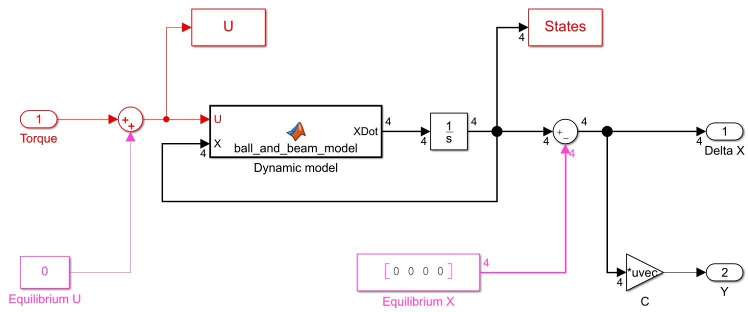

Figura 4: Diagrama de bloques del subsistema con el modelo no lineal de la planta. La función *Derivadas de los estados* debe calcular las derivadas de los estados con base en el modelo no lineal descrito por (2). Las variables XBar y UBar del presente diagrama están definidas por (3).

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q5 \end{bmatrix}, \qquad R = 1 \tag{7}$$