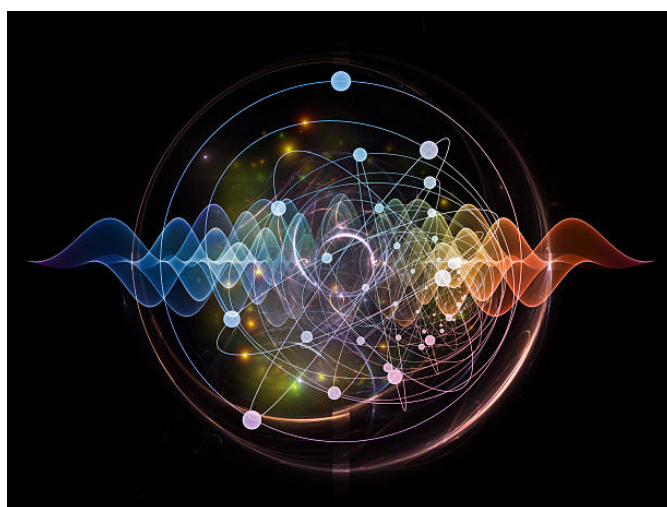


UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

NOTES DE STAGE

Interaction Nucléon-Nucléon



Nathanael Kontowicz
M1 Physique Fondamentale et Applications
Stage en Physique Nucléaire Théorique

Tuteur : Ludovic Bonneau
Établissement : Centre d'Études
Nucléaires de Bordeaux Gradignan

HISTORIQUE :

Fini le :

Dernière compilation le : 2 juillet 2021

Liste des abréviations

- QED : Électrodynamique Quantique (Quantum ElectroDynamics).
- EM : Électromagnétisme (ou électromagnétique, selon le contexte).
- QCD : Chromodynamique Quantique (Quantum ChromoDynamics).
- $SU(n)$: Groupe Spécial Unitaire de dimension n .
- $SO(n)$: Groupe Spécial Orthogonal de dimension n .
- NN : Nucléon-Nucléon.
- Quarks u, d, s : Quarks de saveur up, down, strange.

Table des matières

1	Théorie de la diffusion	4
I	Théorie de la diffusion	4
I.1	Opérateurs de diffusion et de transition	4
I.2	Équation de Lippmann-Schwinger et approximation de Born	6
I.3	Base d'ondes partielles	7
2	D'une théorie quantique à une théorie effective des champs	9
I	Introduction	9
II	Notations, définitions et conventions	9
II.1	Notions et notations utilisées	9
II.2	Notions de symétrie et de brisure de symétrie	12
III	Lagrangien d'un champ : exemple de la corde	13
IV	Le Lagrangien de l'électromagnétisme	14
IV.1	Lagrangien d'une particule libre	14
IV.2	Lagrangien d'interaction	15
IV.3	Lagrangien du champ électromagnétique	16
V	Lagrangien QED et potentiel de Coulomb	19
V.1	Construction du Lagrangien QED	19
V.2	Du lagrangien QED au potentiel de Coulomb	21
VI	Construction du Lagrangien effectif	23
VI.1	Domaine de masses pour la théorie effective et notion de degrés de liberté	24
VI.2	La symétrie chirale et brisure explicite de symétrie	24
VI.3	Courants et charges associés à la symétrie chirale	26
VI.4	Brisure spontanée de symétrie chirale	27
VI.5	Construction du Lagrangien effectif chiral	27
VI.6	Potentiel NN par échange d'un pion	29

Chapitre 1

Théorie de la diffusion

I Théorie de la diffusion

Dans cette section, nous étudierons la diffusion de deux nucléons, à des énergies suffisamment faibles pour que l'on puisse la considérer non-relativiste. Nous introduirons les opérateurs de diffusion et de transition, sans lesquels il nous serait impossible de définir le potentiel NN, puis nous définirons également la base d'ondes partielles, point central de notre étude. Nous finirons alors par définir et expliciter l'approximation de Born. Nous utiliserons les notations définies dans [8].

I.1 Opérateurs de diffusion et de transition

Pour étudier une diffusion élastique, il est judicieux de choisir une base orthogonale formée des états propres de l'opérateur énergie cinétique \hat{H}_0 , nous noterons $\{|E\alpha\rangle, E \in \mathbb{R}_+, \alpha \in I\}$ une telle base. Considérons alors une expérience de diffusion qui débute à un instant $t \rightarrow -\infty$ tel que les nucléons n'ont pas encore interagi et se termine à $t \rightarrow +\infty$ lorsqu'ils n'interagissent plus. Soient alors $|\Psi_{\text{in}}\rangle$, $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ et $|\Psi(0)\rangle$ les états de diffusion des nucléons respectivement à $t \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow +\infty$ et $t = 0$. Introduisons les opérateurs d'évolution temporelle associés aux opérateur Hamiltonien \hat{H} et énergie cinétique \hat{H}_0 ($\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$) par

$$\begin{cases} \hat{U}(t) &= \exp\left(-it\frac{\hat{H}}{\hbar}\right) \\ \hat{U}_0(t) &= \exp\left(-it\frac{\hat{H}_0}{\hbar}\right) \end{cases}, \quad (\text{I.1})$$

ce qui nous permet de définir les opérateurs de Møller par

$$\hat{\Omega}_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \hat{U}^{\dagger}(t)\hat{U}_0(t), \quad (\text{I.2})$$

qui relient les états $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ et $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ à $|\Psi(0)\rangle$

$$|\Psi(0)\rangle = \hat{\Omega}_+|\Psi_{\text{in}}\rangle = \hat{\Omega}_-|\Psi_{\text{out}}\rangle. \quad (\text{I.3})$$

Définissons alors l'opérateur de diffusion \hat{S} par

$$\boxed{\hat{S} = \hat{\Omega}_-^{\dagger}\hat{\Omega}_+}. \quad (\text{I.4})$$

Il est unitaire ($\hat{S}^{\dagger}\hat{S} = \mathbb{1}$), ce qui se comprend comme le fait que l'action de \hat{S} est de faire passer l'état du système avant diffusion à l'état du système après diffusion, alors que l'action de \hat{S}^{\dagger} est de faire passer l'état du système après diffusion à l'état avant diffusion (processus inverse) :

$$\begin{cases} |\Psi_{\text{out}}\rangle &= \hat{S}|\Psi_{\text{in}}\rangle \\ |\Psi_{\text{in}}\rangle &= \hat{S}^{\dagger}|\Psi_{\text{out}}\rangle \end{cases}. \quad (\text{I.5})$$

L'amplitude de probabilité du processus de diffusion $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$ est alors l'élément de matrice $\langle f|\hat{S}|i\rangle$. Introduisons également l'opérateur de Green de \hat{H} (également appelé résolveur de \hat{H}), noté $\hat{G}(z)$, qui satisfait $\hat{G}^\dagger(z) = \hat{G}(z^*)$ et qui, pour tout complexe z qui n'est pas valeur propre de \hat{H} , s'écrit

$$\hat{G}(z) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{z - \hat{H}}. \quad (\text{I.6})$$

Définissant de même le résolveur de \hat{H}_0 $\hat{G}_0(z)$, on démontre aisément les équations de Lippmann-Schwinger droite et gauche pour le résolveur de \hat{H}

$$\begin{cases} \hat{G}(z) &= \hat{G}_0(z) + \hat{G}_0(z)\hat{V}\hat{G}(z) \\ \hat{G}(z) &= \hat{G}_0(z) + \hat{G}(z)\hat{V}\hat{G}_0(z) \end{cases}. \quad (\text{I.7})$$

Définissons alors l'opérateur de transition $\hat{T}(z)$ par

$$\hat{T}(z) = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}(z)\hat{V}, \quad (\text{I.8})$$

dont l'action est de faire passer l'état initial d'un nucléon à l'état final et qui obéit aux équations droite et gauche de Lippmann-Schwinger

$$\begin{cases} \hat{T}(z) &= \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0(z)\hat{T}(z) \\ \hat{T}(z) &= \hat{V} + \hat{T}(z)\hat{G}_0(z)\hat{V} \end{cases}. \quad (\text{I.9})$$

En accord avec [?], les opérateurs de Møller peuvent être exprimés dans la base $\{|E\alpha\rangle\}$ par

$$\hat{\Omega}_\pm = \mathbb{1} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{\alpha \in I} \int_0^{+\infty} \frac{dE}{\mathcal{N}(E)} \hat{G}_0(E \pm i\varepsilon) \hat{T}(E \pm i\varepsilon) |E\alpha\rangle \langle E\alpha|, \quad (\text{I.10})$$

où $\mathcal{N}(E)$ est un préfacteur de normalisation qui provient de la relation de fermeture

$$\sum_{\alpha \in I} \int_0^{+\infty} \frac{dE}{\mathcal{N}(E)} |E\alpha\rangle \langle E\alpha| = \mathbb{1}. \quad (\text{I.11})$$

L'expression (I.10) nous permet d'exprimer, après manipulations, l'opérateur de diffusion \hat{S} (I.4) dans cette même base

$$\hat{S} = \mathbb{1} - 2\pi i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{dE}{\mathcal{N}^2(E)} \sum_{\alpha', \alpha \in I} |E\alpha'\rangle \langle E\alpha'| \hat{T}(E + i\varepsilon) |E\alpha\rangle \langle E\alpha|. \quad (\text{I.12})$$

L'opérateur de diffusion commute avec \hat{H}_0 , ce qui reflète bien que l'on a affaire avec une diffusion élastique, l'énergie cinétique est conservée au cours du processus de diffusion. Cela a pour conséquences que les éléments de matrice de \hat{S} , dans une base constituée d'états propres de \hat{H}_0 , contiennent une distribution de Dirac $\delta(E' - E)$. Soient alors les quantités $S_{\alpha'\alpha}(E)$ définies par

$$\langle E'\alpha' | \hat{S} | E\alpha \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{N}(E) \delta(E' - E) S_{\alpha'\alpha}(E), \quad (\text{I.13})$$

qui sont les éléments de la matrice de diffusion $S(E)$ pour une énergie de diffusion fixée E , exprimée dans la base des degrés de liberté restants $\alpha \in I$. En utilisant l'identité

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{G}_0(E + i\varepsilon) = \mathcal{P} \left(\frac{1}{E - \hat{H}_0} \right) - i\pi \delta(E - \hat{H}_0), \quad (\text{I.14})$$

où \mathcal{P} désigne la valeur principale de Cauchy, dont l'on peut trouver une définition rigoureuse dans [12], et introduisant l'opérateur Hermitien $\hat{K}(E)$ appelé opérateur de réaction, qui satisfait l'équation de Lippmann-Schwinger

$$\hat{K}(E) = \hat{V} + \hat{V} \mathcal{P} \left(\frac{1}{E - \hat{H}_0} \right) \hat{K}(E), \quad (\text{I.15})$$

on relie les éléments de la matrice de diffusion à ceux de la matrice de transition (dits on-shell, c'est à dire les éléments $\langle E'\alpha' | \hat{T}(E_0) | E\alpha \rangle$ tels que $E' = E = E_0$) par

$$S_{\alpha'\alpha}(E) = \delta_{\alpha'\alpha} - 2\pi i T_{\alpha'\alpha}(E), \quad (\text{I.16})$$

où $T_{\alpha'\alpha}(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle E \alpha' | \hat{T}(E + i\varepsilon) | E \alpha \rangle$.

On peut exprimer la matrice de transition en fonction de la matrice de réaction, dont les éléments sont $K_{\alpha'\alpha}(E) = \langle E \alpha' | \hat{K}(E) | E \alpha \rangle$ par

$$T(E) = \left(\mathbb{1} + \frac{i\pi}{\mathcal{N}(E)} K(E) \right)^{-1} K(E), \quad (\text{I.17})$$

la matrice $\frac{\pi}{\mathcal{N}(E)} K(E)$ apparaît alors comme la transformation de Cayley de la matrice unitaire $S(E)$

$$S(E) = \left(\mathbb{1} + \frac{i\pi}{\mathcal{N}(E)} K(E) \right)^{-1} \left(\mathbb{1} - \frac{i\pi}{\mathcal{N}(E)} K(E) \right). \quad (\text{I.18})$$

I.2 Équation de Lippmann-Schwinger et approximation de Born

On considère que l'Hamiltonien du système s'écrit $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$, où l'opérateur d'énergie cinétique \hat{H}_0 est tel que $\hat{H}_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle$, $|\phi\rangle$ étant l'état asymptotique libre. L'équation de Schrödinger peut s'écrire

$$(\hat{H}_0 + \hat{V})|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle. \quad (\text{I.19})$$

Introduisons un paramètre ζ arbitraire, pouvant donc être complexe, l'équation (I.19) se réécrit

$$(\zeta - \hat{H}_0)|\Psi\rangle = (\hat{V} - E + \zeta)|\Psi\rangle \quad (\text{I.20})$$

Le théorème de Hellmann–Feynman énonce que l'énergie varie continûment lorsque l'Hamiltonien en fait autant. On s'attend ainsi à ce que $\hat{V} \rightarrow 0 \Rightarrow |\Psi\rangle \rightarrow |\phi\rangle$, ce qui peut être écrit (en accord avec l'équation (I.19))

$$|\Psi^\pm\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\varepsilon} \hat{V}|\Psi^\pm\rangle, \quad (\text{I.21})$$

où le $\pm i\varepsilon$ apparaît du fait que E est valeur propre de \hat{H}_0 , donc il faut éviter les divergences et où les états $|\Psi^\pm\rangle$ sont les états entrant et sortant du système à deux nucléons. On introduit alors le résolveur de \hat{H}_0 , noté $\hat{G}_0(E \pm i\varepsilon)$ par

$$\hat{G}_0(E \pm i\varepsilon) = \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\varepsilon}, \quad (\text{I.22})$$

qui va nous permettre de relier les opérateurs de transition \hat{T} et d'interaction \hat{V} . En effet, on définit l'opérateur de transition par

$$\hat{V}|\Psi^\pm\rangle = \hat{T}|\phi\rangle. \quad (\text{I.23})$$

Injectant alors la définition (I.23) dans l'équation (I.21), puis multipliant le tout par \hat{V} , on obtient

$$\hat{T}|\phi\rangle = \hat{V}|\phi\rangle + \hat{V}\hat{G}_0\hat{T}|\phi\rangle, \quad (\text{I.24})$$

ce qui, en termes d'opérateurs, se réécrit sous la forme de l'équation de Lippmann-Schwinger, équivalente à l'équation de Schrödinger, et qui va caractériser la dynamique du processus de diffusion

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0\hat{T}. \quad (\text{I.25})$$

L'approximation de Born PWBA d'ordre 1 consiste alors, lorsque le potentiel d'interaction V est faible, à égaliser \hat{T} et \hat{V}

$$\hat{T} \simeq \hat{V}. \quad (\text{I.26})$$

I.3 Base d'ondes partielles

Nous allons ici introduire la base d'ondes partielles dans laquelle nous exprimerons le potentiel OPE. Un état d'onde partielle (aussi appelé état d'onde sphérique) est un état d'énergie cinétique et de moment cinétique orbital parfaitement définis, la base d'ondes partielles, que nous exprimerons dans la représentation impulsion, et que nous noterons $\{|k \ell m_\ell\rangle\}$ est donc composée d'états propres communs aux opérateurs $\hat{H}_0, \hat{L}^2, \hat{L}_z$ respectivement associés aux valeurs propres $\frac{(\hbar k)^2}{2\mu}$ (où μ est la masse réduite du système de deux nucléons), $\ell(\ell+1)\hbar^2$ et $m_\ell\hbar$. On peut relier l'état d'onde partielle à l'état d'onde plane $|\vec{k}\rangle$ par

$$\begin{cases} |\vec{k}\rangle &= \sqrt{\frac{N_k}{N'_k}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} i^\ell \left(Y_\ell^{m_\ell}(\hat{k}) \right)^* |k \ell m_\ell\rangle \\ |k \ell m_\ell\rangle &= \sqrt{\frac{N'_k}{N_k}} i^{-\ell} \int d\hat{k} Y_\ell^{m_\ell}(\hat{k}) |\vec{k}\rangle \end{cases}, \quad (\text{I.27})$$

où les fonctions $Y_\ell^{m_\ell}(\hat{k})$ sont les harmoniques sphériques (\hat{k} désignant la partie angulaire de \vec{k}) et les facteurs de normalisation N'_k et N_k sont issus des relations de normalisation

$$\begin{cases} \langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle &\stackrel{\text{déf}}{=} N_k \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\ \langle k \ell m_\ell | k' \ell' m'_\ell \rangle &\stackrel{\text{déf}}{=} N'_k \frac{\delta(k - k')}{k k'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{m_\ell m'_\ell} \end{cases}. \quad (\text{I.28})$$

L'ajout des degrés de liberté de spin et d'isospin donne

$$|\vec{k} s m_s t m_t\rangle = |\vec{k}\rangle \otimes |s m_s\rangle \otimes |t m_t\rangle = \sqrt{\frac{N_k}{N'_k}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} i^\ell \left(Y_\ell^{m_\ell}(\hat{k}) \right)^* |k \ell m_\ell\rangle \otimes |s m_s\rangle \otimes |t m_t\rangle. \quad (\text{I.29})$$

On peut alors définir la base d'ondes partielles avec couplage spin-orbite $\{|k(\ell s) j m t m_t\rangle\}$, dont les vecteurs sont des éléments de l'espace produit tensoriel $\mathcal{E}_r \otimes \mathcal{E}_s \otimes \mathcal{E}_t$ des espaces radial, de spin et d'isospin et peuvent être exprimés par

$$|k(\ell s) j m t m_t\rangle = \sum_{m_\ell=-\ell}^{\ell} \sum_{m_s=-s}^s C_{\ell m_\ell s m_s}^{j m} |k \ell m_\ell\rangle \otimes |s m_s\rangle \otimes |t m_t\rangle, \quad (\text{I.30})$$

où les quantités $C_{\ell m_\ell s m_s}^{j m}$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan, ils sont normalisés selon

$$\langle k(\ell s) j m t m_t | k'(\ell' s') j' m' t' m'_t \rangle = N'_k \frac{\delta(k - k')}{k k'} \delta_{\ell\ell'} \delta_{ss'} \delta_{jj'} \delta_{mm'} \delta_{tt'} \delta_{m_t m'_t}. \quad (\text{I.31})$$

Introduisant de plus le tenseur harmoniques sphériques de rang s

$$\mathcal{Y}_{jm}^{\ell s}(\hat{k}) = \sum_{m_s} \left\{ \sum_{m_\ell} Y_\ell^{m_\ell}(\hat{k}) C_{\ell m_\ell s m_s}^{j m} \right\} |s m_s\rangle, \quad (\text{I.32})$$

on peut relier les états d'onde plane et d'ondes partielles avec couplage spin-orbite par

$$\begin{cases} |\vec{k} s m_s t m_t\rangle &= \sqrt{\frac{N_k}{N'_k}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} i^\ell \sum_{j=|\ell-s|}^{\ell+s} \sum_{m=-j}^j \left(\mathcal{Y}_{jm}^{\ell s}(\hat{k}) \right)_{m_s}^* |k(\ell s) j m t m_t\rangle \\ |k(\ell s) j m t m_t\rangle &= \sqrt{\frac{N'_k}{N_k}} i^{-\ell} \sum_{m_s} \int d\hat{k} \left(\mathcal{Y}_{jm}^{\ell s}(\hat{k}) \right)_{m_s} |\vec{k} s m_s t m_t\rangle \end{cases}. \quad (\text{I.33})$$

Ainsi, les éléments de matrice spin-isospin du potentiel NN en représentation impulsion $\tilde{V}(\vec{k}, \vec{k}')$ s'expriment dans la base d'ondes partielles par

$$\begin{aligned} \langle \vec{k} S S_z T T_z | \hat{V} | \vec{k}' S' S'_z T' T'_z \rangle &= \frac{N_k}{N'_k} \sum_{\substack{L, J, J_z \\ L', J', J'_z}} i^{L'-L} \left(\mathcal{Y}_{JJ_z}^{LS}(\hat{k}) \right)_{S_z} \left(\mathcal{Y}_{J'_z J'}^{L' S'}(\hat{k}') \right)_{S'_z}^* \\ &\quad \times \langle k(LS) J J_z T T_z | \hat{V} | k'(L'S') J' J'_z T' T'_z \rangle, \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

On va alors pouvoir écrire l'équation aux valeurs propres dans la base d'ondes partielles. Les protons et neutrons ne sont que deux états d'une même particule (le nucléon), distingués l'un de l'autre par l'action de l'opérateur \hat{T}_z :

$$\begin{cases} \hat{T}_z |p\rangle &= \hat{T}_z |\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = -\frac{1}{2} |p\rangle \\ \hat{T}_z |n\rangle &= \hat{T}_z |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2} |n\rangle \end{cases} . \quad (\text{I.35})$$

Ceci ajouté aux symétries que présente l'interaction NN (rotation, translation, parité, ...) fait que les nombres quantiques S, J, J_z, T et T_z sont conservés. De plus, les éléments de matrice de l'interaction ne dépendent pas de J_z , donc la fonction d'onde radiale $\Psi(k)$ non plus. De même, le nombre quantique d'isospin T_z est relatif au choix du noyau étudié et sera donc omis dans la fonction d'onde. L'équation aux valeurs propres, pour un système de deux nucléons (d'impulsion relative \vec{k}) et dans la base d'ondes partielles, s'écrit donc

$$\frac{(\hbar k)^2}{2\mu} \Psi_L^{(SJT)}(k) + \sum_{L'} \int_0^\infty dk' k'^2 v_{LL'}^{(SJTT_z)}(k, k') \Psi_{L'}^{(SJT)}(k') = E \Psi_L^{(SJT)}(k), \quad (\text{I.36})$$

où μ est la masse réduite du système à deux corps, $\Psi_L^{(SJT)}(k) = \langle k(LS)JJ_zTT_z | \Psi \rangle$ et $v_{LL'}^{(SJTT_z)}(k, k') = \langle k(LS)JJ_zTT_z | \hat{v} | k'(L'S)JJ_zTT_z \rangle$. Nous reviendrons à cette équation lorsque nous étudierons le cas du Deutéron, revenons dans le droit chemin de la diffusion pour finir en réécrivant l'équation (??) dans la base d'ondes partielles, pour les éléments des matrices de diffusion et de transition

$$S_{L'L}^{(SJTT_z)}(k) = \delta_{LL'} - 2\pi i T_{L'L}^{(SJTT_z)}(k). \quad (\text{I.37})$$

On appellera alors *canal de diffusion* l'élément de la matrice de diffusion associé à une valeur de $L = L'$ et l'on appellera canaux couplés les éléments tels que $L \neq L'$.

Chapitre 2

D'une théorie quantique à une théorie effective des champs

I Introduction

C'est juste l'idée générale, à reformuler et bien rédiger

On va construire le Lagrangien de l'électrodynamique relativiste et montrer comment, à partir de propriétés des objets que nous introduirons ou bien en écrivant les équations d'Euler-Lagrange, on arrive aux équations de Maxwell. Le but est d'ensuite construire le Lagrangien QED par analogie avec le Lagrangien de l'électrodynamique relativiste et ensuite de déduire l'expression du potentiel de Coulomb (en représentation impulsion) d'un diagramme de Feynman. Nous suivrons alors les même étapes avec le Lagrangien effectif chirale, que l'on construira à partir de l'étude de la symétrie chirale, propre au Lagrangien QCD, et de ses brisures explicite et spontanée de symétrie. En progressant en suivant la démarche qui nous a mené de QED à Coulomb, on calculera le potentiel NN par échange d'un pion.

II Notations, définitions et conventions

II.1 Notions et notations utilisées

Dans toute la suite de ce document, nous emploieront les raccourcis 4-vecteurs et 3-vecteurs pour désigner les quadrvecteurs et les trivecteurs. Nous appliquerons également la convention de sommation d'Einstein sur des indices répétés.

On définit les composantes contravariantes du 4-vecteur position (ou 4-position) par

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad (\text{II.1})$$

où \vec{r} est le 3-vecteur position. On définit également les composantes contravariantes de la 4-impulsion par

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (\text{II.2})$$

On rappelle alors que dans le cadre de la relativité restreinte, on a $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et $E = \gamma mc^2$, où γ est le facteur de Lorentz, que l'on définira plus bas.

- Les indices grecs $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ seront utilisés afin de désigner les composantes spatio-temporelles des 4-vecteurs.
- Les indices latins $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ désigneront quant à eux les composantes des 3-vecteurs.

On adopte également la métrique de Minkowski, définie par la matrice des composantes contravariantes et covariantes du tenseur métrique

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.3})$$

On définit alors les composantes covariantes des 4-vecteurs précédents par

$$\begin{cases} x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{r}) \\ p_\mu &= g_{\mu\nu} p^\nu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Le carré de l'intervalle infinitésimal d'espace-temps s'écrit donc

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = dx_\nu dx^\nu = c^2(dt)^2 - (d\vec{r})^2 \quad (\text{II.5})$$

Définissons aussi l'opérateur 4-nabla dont les composantes covariantes et contravariantes sont

$$\begin{cases} \partial_\mu &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) \\ \partial^\mu &\stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Soient x^μ le 4-vecteur position (on s'affranchit à présent du fait de préciser de quelles composantes il s'agit) d'un évènement dans le référentiel \mathcal{R} galiléen et x'^ν le 4-vecteur position d'un évènement dans \mathcal{R}' galiléen également. On considère que \mathcal{R}' est en translation rectiligne et uniforme selon l'axe (Ox) à la vitesse v . Les 4-vecteurs définis plus haut (ainsi que n'importe quel 4-vecteur) obéissent à la règle de transformation suivante (dite de Lorentz spéciale selon (Ox)) :

$$\begin{cases} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

où les $\Lambda^\mu{}_\nu$ sont les éléments de la matrice de Lorentz :

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\text{II.8})$$

et les $\Lambda_\mu{}^\nu$ sont les éléments de la matrice de Lorentz inverse :

$$(\Lambda_\mu{}^\nu) = (\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.9})$$

On a donc la propriété suivante :

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\mu{}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{II.10})$$

En mécanique quantique, l'opérateur 4-impulsion est défini (en représentation position) par

$$\begin{cases} p^\mu &= i\hbar \partial^\mu = \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla}\right) \\ p_\mu &= i\hbar \partial_\mu = \left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, i\hbar \vec{\nabla}\right) \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Soit alors $\psi(\vec{x})$ le champ spinoriel relativiste d'un nucléon de masse M_N , son évolution est déterminée par l'équation de Dirac (pour un champ libre) :

$$[\not{p}c - M_N c^2]\psi(\vec{x}) = 0 \quad (\text{II.12})$$

où $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu$ (notation de Feynman), les quantités γ^μ étant les matrices 4×4 de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.13})$$

où $\mathbb{1}_2$ est la matrice identité bi-dimensionnelle et les matrices σ^i sont les matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.14})$$

qui sont hermitiques et obéissent aux règles de commutation

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i \varepsilon^{ijk} \sigma^k \quad (\text{II.15})$$

où ε^{ijk} est le symbole de Levi-Civita, défini par

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, j = k, i = k \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \\ +1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Les matrices σ^i obéissent également aux règles d'anticommutation

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta_{ij} \quad (\text{II.17})$$

ce qui nous permet d'obtenir la relation

$$\sigma^i \sigma^j = i\varepsilon^{ijk} \sigma^k + \delta_{ij} \quad (\text{II.18})$$

Enfin, si \vec{A} et \vec{B} sont des opérateurs vectoriels tels que

$$[A_i, \sigma_i] = [B_i, \sigma_i] = 0 \quad (\text{II.19})$$

on a

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = (\sigma_i A_i)(\sigma_i B_i) = (\vec{A} \cdot \vec{B})\mathbb{1}_2 + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{II.20})$$

où l'on a sommé sur l'indice i .

On peut considérer que les protons et neutrons sont deux facettes d'une même particule, le nucléon, dont la différence principale (on ignore la différence de masse) provient du fait que le proton est chargé, contrairement au neutron. Ceci est décrit par l'opérateur d'isospin \vec{T} , qui agit de la même manière que l'opérateur de spin (mais n'est pas un moment cinétique), mais dans l'espace d'isospin (il a pour composantes T_1, T_2, T_3). Ainsi, de même que l'on prend en compte les degrés de liberté de spin, on prendra en compte les degrés de liberté d'isospin. Si l'on considère que le nucléon est décrit par le vecteur $|t m_t\rangle$, l'analogie avec le spin donne

$$\begin{cases} \vec{T}^2 |t m_t\rangle &= t(t+1) |t m_t\rangle \\ T_3 |t m_t\rangle &= m_t |t m_t\rangle \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

où il y a $(2t+1)$ valeurs $m_t = -t, -t+1, \dots, t-1, t$. Ainsi, on peut, de manière similaire au spin, définir les matrices de Pauli d'isospin

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.22})$$

qui vérifient les relations

$$\tau^i \tau^j = i\varepsilon^{ijk} \tau^k + \delta_{ij} \quad (\text{II.23})$$

Les matrices de Dirac, quant à elles, vérifient l'algèbre de Clifford

$$\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4 = \begin{cases} \mathbb{1}_4 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -\mathbb{1}_4 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{II.24})$$

et satisfont les propriétés

$$\begin{cases} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 \\ \gamma^{i\dagger} &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i \\ \bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 \end{cases} \quad (\text{II.25})$$

Afin de compléter notre collection de matrices, on peut définir la matrice γ^5 par

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.26})$$

et qui satisfait les propriétés

- $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$
- $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}_4$
- $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$

Le commutateur des matrices de Dirac est

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{II.27})$$

et on a

$$\begin{cases} \gamma^\mu \gamma^\nu &= g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu} \\ \sigma^{ij} &= \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \\ \sigma^{0i} &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma^{i0} \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

II.2 Notions de symétrie et de brisure de symétrie

On va ici proposer des définitions des types de symétrie rencontrées au cours de notre étude ainsi que des brisures de symétrie qui existent.

- **Symétrie continue** : La symétrie continue renvoie à la structure mathématique du groupe utilisé pour décrire formellement la symétrie. On dit qu'une symétrie est continue lorsque les paramètres qui la déterminent varient continûment. On peut citer par exemple la symétrie de rotation, associé au groupe $SO(3)$, paramétré par les angles d'Euler. De manière plus générale, une symétrie continue est associée à un groupe de Lie.
- **Symétrie globale** : La symétrie globale renvoie à la structure physique de la théorie en question. On dit qu'une symétrie est globale si on effectue la même transformation en tous les points du système afin d'aboutir à une configuration du système équivalente à la configuration de départ. À titre d'exemple, la loi de la gravitation universelle de Newton est invariante sous les transformations globales de rotation et de translation, c'est à dire que l'interaction gravitationnelle qui s'exerce entre deux corps est inchangée lorsque l'on effectue une rotation et/ou une translation identiques sur les deux corps.

- **Symétrie locale** : Lorsque l'on effectue une transformation différente en chaque point de l'espace (comme la transformation de jauge des potentiels en électromagnétisme), et que la théorie admet une symétrie qui autorise ces transformations, on parle de symétrie locale. Dans le cas de l'électromagnétisme, la symétrie locale est une symétrie interne, qui agit sur les champs de la théorie. Ainsi, les champs étant invariant lors de la transformation de jauge des potentiels, on parle d'invariance de jauge. On dit alors que l'électromagnétisme est une théorie de jauge.
- **Brisure de symétrie** : Lorsque la symétrie attendue n'est pas observée, on parle de brisure de symétrie. Si la symétrie n'est pas fondamentalement invariante, on dit que la brisure est explicite, c'est notamment le cas de la symétrie chirale, que nous aborderons plus tard. Si en revanche la symétrie attendue est fondamentalement invariante mais que les conditions expérimentales sont telles que la symétrie n'apparaît pas, la brisure de symétrie est alors dite spontanée, c'est le cas du ferromagnétisme. En effet, un corps ferromagnétique admet une aimantation spontanée en dessous de sa température de Curie, ce qui fixe une direction de l'espace pour le comportement des électrons dans le matériau et brise ainsi l'isotropie des lois de la mécanique quantique (symétrie de rotation). Enfin, le fait de passer d'une phase où la symétrie est brisée à une phase où elle est présente s'appelle une transition de phase.

III Lagrangien d'un champ : exemple de la corde

Considérons un système de N particules matérielles soumis à k contraintes holonomes (de la forme $f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$), le système peut alors être décrit par $n = 3N - k$ coordonnées généralisées. On désignera par un indice α , une particule parmi les N et par $\vec{q} = \{q_1, \dots, q_n\}$ l'ensemble des coordonnées généralisées. Pour ce système de particules matérielles, l'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques individuelles

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2. \quad (\text{III.1})$$

En considérons que le système est soumis à des forces extérieures (qui s'exercent sur chaque particule), on introduit la k -ième composante Q_k de la force généralisée par

$$Q_k = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\text{ext},\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k}. \quad (\text{III.2})$$

Le potentiel dont dérive la force généralisée est alors défini par

$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}. \quad (\text{III.3})$$

Le principe de D'Alembert s'écrit alors sous la forme des équations d'Euler-Lagrange, équivalentes aux équations du mouvement de Newton

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (\text{III.4})$$

où $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$ et $\mathcal{L} = T - V$ est le Lagrangien du système de particules. Passons alors à la description du mouvement d'une corde vibrante 1D, fixée à deux extrémités ($x = 0$ et $x = L$). À chaque instant t , la hauteur de la corde à la position x est donnée par $\phi(x, t)$. La corde peut être considérée comme un assemblage de petits bouts de corde, donc comme précédemment, l'énergie cinétique de la corde est la somme des énergies cinétiques associées à chaque bout

$$T = \int_0^L \rho \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (\text{III.5})$$

où ρ est la densité linéique de masse de la corde. De même, son énergie potentielle est l'énergie élastique des déformations

$$V = \int_0^L k \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (\text{III.6})$$

où k est la raideur de la corde. Posons $c^2 = \frac{k}{\rho}$, la densité linéique de Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \rho \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (\text{III.7})$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent à présent par rapport à la déformation $\phi(x, t)$ et, comme il s'agit d'une fonction de plusieurs variables, on doit sommer les contributions de chaque variable, c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (\text{III.8})$$

où $\phi' = \partial_x \phi$ et $\dot{\phi} = \partial_t \phi$. En développant l'expression (III.8), on obtient l'équation de D'Alembert

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{III.9})$$

Ainsi, si la fonction $\phi(x_1, \dots, x_n)$ décrit un champ continu, les équations d'Euler-Lagrange correspondant au Lagrangien $\mathcal{L}(\phi, \partial_1 \phi, \dots, \partial_n \phi)$ s'écrivent (en convention d'Einstein sur l'indice i)

$$\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (\text{III.10})$$

IV Le Lagrangien de l'électromagnétisme

Dans cette section, on va construire le Lagrangien de l'électrodynamique relativiste et montrer comment, à partir de propriétés des objets que nous introduirons ou bien en écrivant les équations d'Euler-Lagrange, on arrive aux équations de Maxwell.

Le système ici considéré est un ensemble de particules chargées en interaction par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique. Le Lagrangien total du système s'écrit de manière formelle

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{part. libres}} + \mathcal{L}_{\text{champ libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (\text{IV.1})$$

où :

- $\mathcal{L}_{\text{part. libres}}$ est le Lagrangien associé aux particules en l'absence de champ.
- $\mathcal{L}_{\text{champ libre}}$ est le Lagrangien associé au champ électromagnétique seul.
- \mathcal{L}_{int} est le Lagrangien associé à l'interaction champ-particules.

IV.1 Lagrangien d'une particule libre

On va ici s'intéresser au cas d'une particule chargée relativiste et libre. En mécanique analytique, on définit l'action du système par une intégrale temporelle du Lagrangien (ou spatio-temporelle de la densité de Lagrangien)

$$S = \int \mathcal{L} dt = \int \mathcal{L} d^4 \vec{x} \quad (\text{IV.2})$$

où \mathcal{L} désigne le Lagrangien alors que \mathcal{L} désigne une densité de Lagrangien, nous ne ferons cependant pas la distinction entre Lagrangien et densité de Lagrangien dans la suite, elle sera implicite.

On souhaite obtenir des équations d'Euler-Lagrange covariantes, qui ne dépendent pas du référentiel considéré, afin que les principes fondamentaux de la théorie de la relativité restreinte soit respectés. Pour cela, l'action et le Lagrangien du système doivent être des 4-scalaires, invariants de Lorentz. Puisque le produit de deux 4-scalaires

est un 4-scalaire, le temps sur lequel on intègre le Lagrangien doit aussi être un 4-scalaire. Ce dernier s'avère être le temps propre τ de la particule. L'expression (IV.2) devient alors

$$S = \int \mathcal{L} d\tau = \frac{1}{c} \int \mathcal{L} ds \quad (\text{IV.3})$$

où $ds = c d\tau$ est l'intervalle infinitésimal d'espace-temps sur la ligne d'univers de la particule. L'action la plus simple qui respecte les conditions énoncées précédemment s'écrit

$$S = \alpha \int ds \quad (\text{IV.4})$$

où α est une constante quelconque. Sachant que $d\tau = \frac{dt}{\gamma}$, où γ est le facteur de Lorentz, l'action devient

$$\begin{aligned} S &= \alpha c \int d\tau \\ &= \alpha c \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Dans la limite des faibles vitesses (non-relativiste), on doit retrouver

$$S = \int \frac{1}{2} m v^2 dt \quad (\text{IV.5})$$

On a donc

$$\begin{aligned} S &= \alpha c \int dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ &\simeq \alpha c \int dt \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Le Lagrangien pour une particule libre s'écrit donc

$$\mathcal{L}_{\text{part. libre}} = \alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c} \quad (\text{IV.6})$$

Le terme αc ne va jouer aucun rôle dans l'action dans la limite des faibles vitesses, le Lagrangien pour une particule libre s'écrit alors en réalité

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{part. libre}} = -mc^2} \quad (\text{IV.7})$$

IV.2 Lagrangien d'interaction

On postule ici que le champ électromagnétique peut être représenté par un champ de 4-vecteurs $\mathcal{A}^\mu(\vec{x}) = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)$ qui se révélera être le champ de 4-potentiels.

L'interaction entre une particule et le champ électromagnétique peut s'écrire

$$S_{\text{int}} = -q \int \mathcal{A}_\mu dx^\mu \quad (\text{IV.8})$$

où le signe $-$ est conventionnel, q est un 4-scalaire, que l'on identifie à la charge électrique de la particule et qui décrit l'intensité du couplage particule-champ. Enfin, l'intégration sur x^μ est justifiée par le fait que l'on intègre sur la ligne d'univers de la particule, paramétrée par son temps propre τ , on a

$$dx^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} d\tau = v^\mu d\tau \quad (\text{IV.9})$$

où v^μ est la 4-vitesse.

La généralisation de l'action (IV.8) au cas d'un ensemble de charges en interaction avec le champ électromagnétique se fait assez aisément. Introduisons tout d'abord une densité de charges ponctuelles

$$q_\alpha = \langle \rho, \delta_\alpha \rangle \quad (\text{IV.10})$$

où l'on a adopté les notations de la théorie des distributions, comme présenté dans [12].

Dans un volume spatial (4-scalaire) dV , la somme des charges ponctuelles est

$$\sum_\alpha q_\alpha = \rho dV \quad (\text{IV.11})$$

Ainsi, l'action se réécrit

$$\begin{aligned} S &= - \sum_\alpha q_\alpha \int \mathcal{A}_\mu dx^\mu \\ &= - \int d\tau dV \rho \mathcal{A}_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} \\ &= - \int d^4\vec{x} \mathcal{A}_\mu J^\mu \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

où $d^4\vec{x} = dV d\tau$ est l'élément d'espace-temps et $J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{d\tau}$ est le 4-vecteur densité de courant. Le Lagrangien d'interaction s'écrit alors

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{int}} = -\mathcal{A}_\mu J^\mu} \quad (\text{IV.13})$$

IV.3 Lagrangien du champ électromagnétique

Dans le but de trouver l'expression du Lagrangien du champ électromagnétique libre, nous commencerons tout d'abord par introduire le tenseur antisymétrique suivant, dit tenseur champ ou tenseur de Faraday, dont les composantes covariantes sont définies par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \quad (\text{IV.14})$$

On a admis que c'était un tenseur, au sens où il obéit aux lois de transformation de Lorentz

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma F_{\rho\sigma} \quad (\text{IV.15})$$

et on observe qu'il possède la structure d'un 4-rotationnel (généralisation du rotationnel tridimensionnel). Il intervient lorsque l'on écrit le principe de moindre action associé à l'action totale construite jusqu'à présent

$$S = -mc^2 \int d\tau - \int d^4\vec{x} \mathcal{A}_\mu J^\mu \quad (\text{IV.16})$$

On trouve alors les équations du mouvement

$$m \frac{dv_\mu}{d\tau} = q F_{\mu\nu} v^\nu \quad (\text{IV.17})$$

Les quantités $G_\mu = q F_{\mu\nu} v^\nu$ se révèlent alors être les composantes covariantes de la 4-force, obtenant ainsi la version quadridimensionnelle relativiste des équations de Newton pour des particules chargées.

Puisque le tenseur champ est antisymétrique, on a

$$\begin{cases} F_{\mu\mu} &= F^{\mu\mu} = 0 \\ \text{Tr}(F_{\mu\nu}) &= F_\mu{}^\mu = F^\mu{}_\mu = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.18})$$

De la définition du tenseur champ, on trouve

$$F_{0i} = \partial_0 \mathcal{A}_i - \partial_i \mathcal{A}_0 = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \right) \quad (\text{IV.19})$$

Introduisant alors le 3-vecteur (que l'on appellera champ électrique)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (\text{IV.20})$$

on trouve

$$F_{0i} = \frac{E_i}{c} \quad (\text{IV.21})$$

De même, on remarque que les quantités $F_{ij} = \partial_i \mathcal{A}_j - \partial_j \mathcal{A}_i$ sont au signe près les composantes du rotationnel d'un 3-vecteur. Introduisant alors le 3-vecteur champ magnétique

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{IV.22})$$

On trouve

$$\begin{cases} F_{12} &= -B_3 \\ F_{13} &= B_2 \\ F_{23} &= -B_1 \end{cases} \quad (\text{IV.23})$$

La matrice du tenseur champ s'écrit alors

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ -\frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

Puisque le tenseur champ est un 4-rotationnel, la "généralisation spatio-temporelle" du lemme de Poincaré (le citer n'est pas réellement approprié puisqu'on ne s'intéresse pas aux formes différentielles, mais c'est généralement sous le nom d'identité de Poincaré que cette propriété est connue) impose à la 4-divergence du tenseur champ d'être nulle, c'est à dire

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \quad (\text{IV.25})$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} & \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} \\ &= \partial_\rho (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu) + \partial_\mu (\partial_\nu \mathcal{A}_\rho - \partial_\rho \mathcal{A}_\nu) + \partial_\nu (\partial_\rho \mathcal{A}_\mu - \partial_\mu \mathcal{A}_\rho) \\ &= \partial_{\rho\mu} \mathcal{A}_\nu - \partial_{\mu\rho} \mathcal{A}_\nu + \partial_{\mu\nu} \mathcal{A}_\rho - \partial_{\nu\mu} \mathcal{A}_\rho + \partial_{\nu\rho} \mathcal{A}_\mu - \partial_{\rho\nu} \mathcal{A}_\mu \end{aligned}$$

ce qui est nul, en vertu du théorème de Schwarz. On peut alors remarquer que certaines combinaisons de (ρ, μ, ν) conduisent à des équations triviales :

- Si $\rho = \mu = \nu$, alors le fait que $F_{\mu\mu} = 0$ rend les équations (IV.25) triviales.
- Si $\mu = \nu \neq \rho$, alors l'antisymétrie de $F_{\mu\nu}$ rend les équations (IV.25) triviales.

Les équations non triviales sont donc obtenues pour $\mu \neq \nu \neq \rho$, ce qui nous mène aux combinaisons

$$\begin{cases} (\rho, \mu, \nu) &= (1, 2, 3) \\ (\rho, \mu, \nu) &= (0, 1, 2) \\ (\rho, \mu, \nu) &= (0, 1, 3) \\ (\rho, \mu, \nu) &= (0, 2, 3) \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

les autres combinaisons étant équivalentes à celles-ci.

Pour $(\rho, \mu, \nu) = (1, 2, 3)$, on a

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \quad (\text{IV.27})$$

$$\Leftrightarrow \partial_1(-B_1) + \partial_2(-B_2) + \partial_3(-B_3) = 0 \quad (\text{IV.28})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{IV.29})$$

retrouvant ainsi l'équation de Maxwell-Thomson. De même, les autres combinaisons nous permettraient de retrouver l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{IV.30})$$

Ainsi, à partir de la définition du tenseur champ et de quelques unes de ses propriétés, nous avons retrouvé deux des quatre équations de Maxwell dans le vide, celles qui ne contiennent pas de terme de source. Une fois que nous aurons la forme complète du Lagrangien que l'on souhaite bâtir, nous verrons que nous pourrions déduire les deux équations restantes des équations d'Euler-Lagrange pour le champ \mathcal{A}^μ . Pour le moment, nous devons construire le Lagrangien du champ électromagnétique libre. Pour cela, on remarque que le Lagrangien doit être un 4-scalaire et, par chance, la quantité $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ se révèle en être un. Nous allons donc naturellement l'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}_{\text{champ}} = k F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{IV.31})$$

où k est une constante que l'on exprimera plus tard.

Nous avons alors accompli notre mission, nous avons construit le Lagrangien de l'électrodynamique relativiste en s'intéressant à ses différentes composantes. On remarque cependant que le terme associé aux particules libres n'aura aucun rôle à jouer lorsque nous écrirons les équations d'Euler-Lagrange, nous ne lui prêterons alors plus d'attention et considérerons que le Lagrangien de l'électrodynamique relativiste s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{ED}} = -\mathcal{A}_\mu J^\mu + k F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (\text{IV.32})$$

Les équations d'Euler-Lagrange associées au champ électromagnétique s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\alpha} - \partial_\beta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \mathcal{A}_\alpha} \left(-\mathcal{A}_\mu J^\mu + k F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) &= \partial_\beta \left\{ \frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)} \left(-\mathcal{A}_\mu J^\mu + k F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \right\} \\ \Leftrightarrow -J^\mu \delta_\mu^\alpha &= \partial_\beta \frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)} \left[k F_{\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma} \right] \\ \Leftrightarrow -J^\alpha &= k \partial_\beta \left\{ F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)} \left(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu \right) + F^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)} \left(\partial_\rho \mathcal{A}_\sigma - \partial_\sigma \mathcal{A}_\rho \right) \right\} \\ \Leftrightarrow -J^\alpha &= k \partial_\beta \left\{ F^{\mu\nu} \left[\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha \right] + F^{\rho\sigma} \left[\delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\alpha - \delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha \right] \right\} \\ \Leftrightarrow -J^\alpha &= 4k \partial_\beta F^{\beta\alpha} \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

- Pour $\alpha = 0$, on a

$$\begin{aligned} \frac{4k}{c} \frac{\partial F^{00}}{\partial t} + 4k \partial_i F^{i0} &= -J^0 = -\rho c \\ \Leftrightarrow 4k \frac{\partial_i E^i}{c} &= -\rho c \\ \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\rho \frac{c^2}{4k} \end{aligned}$$

Ainsi, pour $k = -\frac{1}{4\mu_0}$, on retrouve l'équation de Maxwell-Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{IV.34})$$

- De même, pour $\alpha = 1, 2, 3$, on retrouve l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{IV.35})$$

On a ainsi réussi à retrouver les équations de Maxwell avec et sans termes de source à partir des équations d'Euler-Lagrange relativistes (un principe de moindre action relativiste nous aurait bien sûr également permis de retrouver ces résultats).

Sachant que le tenseur champ est antisymétrique, on a

$$\partial_\alpha J^\alpha = \frac{1}{\mu_0} \partial_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha} = -\frac{1}{\mu_0} \partial_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

Or, en vertu théorème de Schwarz, on a

$$\partial_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha} = \partial_{\beta\alpha} F^{\beta\alpha} = -\partial_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

ce qui signifie que $\partial_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0$, et nous permet ainsi de retrouver l'équation de conservation de la charge électrique

$$\partial_\alpha J^\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (\text{IV.36})$$

V Lagrangien QED et potentiel de Coulomb

Dans cette section, nous allons construire le Lagrangien QED en se calant sur la construction du Lagrangien de l'électrodynamique relativiste. Une fois le Lagrangien obtenu, nous écrirons les équations d'Euler-Lagrange associées et nous en serviront pour trouver l'expression du potentiel de Coulomb (à partir d'un diagramme de Feynman).

V.1 Construction du Lagrangien QED

Le Lagrangien QED peut s'écrire formellement

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{champ de Dirac libre}} + \mathcal{L}_{\text{Interaction}} + \mathcal{L}_{\text{champ EM libre}} \quad (\text{V.1})$$

- $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$ représente le Lagrangien associé au champ de Dirac libre, on considère en QED que les particules chargées décrites par cette théorie sont des champs de spin 1/2 (e^- , e^+ , ...) qui interagissent entre eux en échangeant des photons virtuels (bosons vecteurs de l'interaction EM).
- $\mathcal{L}_{\text{champ}}$ est le Lagrangien associé au champ EM hors interaction avec un champ de Dirac.
- $\mathcal{L}_{\text{Interaction}}$ est le Lagrangien qui couple un champ de Dirac avec le champ EM.

Commençons par traiter le cas du champ de Dirac. Considérons un bi-spineur (à quatre composantes donc) de Dirac $\psi(\vec{x})$, le Lagrangien associé au champ de Dirac libre s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi(\vec{x}), \bar{\psi}(\vec{x})) = \bar{\psi} \left(i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2 \right) \psi \quad (\text{V.2})$$

où l'on remarque le terme $-mc^2$ que l'on avait associé à une particule libre.

Des équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0 \quad (\text{V.3})$$

où $\phi = \bar{\psi}, \psi$,

- on obtient l'équation de Dirac pour $\phi = \bar{\psi}$

$$\boxed{(i\hbar c \vec{\partial} - mc^2) \psi = 0} \quad (\text{V.4})$$

- on obtient son conjugué hermitique pour $\phi = \psi$

$$\boxed{\bar{\psi} \left(i\hbar c \overleftarrow{\not{\partial}} + mc^2 \right) = 0} \quad (\text{V.5})$$

où le sens de la flèche indique l'action sur l'objet.

Exprimons à présent le Lagrangien associé au champ EM libre. On va le prendre de la même forme que celui adopté dans le cas de l'électrodynamique classique

$$\mathcal{L}_{\text{champ}} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{V.6})$$

nous écrirons plus tard les équations d'Euler-Lagrange associées.

Finissons enfin par écrire le Lagrangien d'interaction, qui prend en compte le couplage entre le champ de Dirac et le champ de 4-vecteurs $\mathcal{A}_\mu(\vec{x})$ et qui se doit d'être invariant sous une transformation de jauge, ce que l'on explicitera plus tard. On remplace en fait ∂_μ dans le Lagrangien de Dirac, par $D_\mu = \partial_\mu + i\frac{Q}{\hbar}\mathcal{A}_\mu$ (Q étant la constante de couplage champ de Dirac - champ de photons, identifié à la charge électrique du fermion considéré), on a ainsi

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi} \left(i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - Qc \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu - mc^2 \right) \psi - \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} \quad (\text{V.7})$$

Le champ électromagnétique est invariant sous les transformations locales de jauge qui affectent le potentiel vecteur

$$\mathcal{A}_\mu(\vec{x}) \mapsto \mathcal{A}'_\mu(\vec{x}) = \mathcal{A}_\mu(\vec{x}) + \partial_\mu \varphi(\vec{x}) \quad (\text{V.8})$$

où $\varphi(\vec{x})$ est une fonction scalaire de la 4-position. En effet, on a

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu = F_{\mu\nu} \quad (\text{V.9})$$

Cependant, le Lagrangien n'est pas invariant sous la transformation de jauge (V.8)

$$\mathcal{L}' - \mathcal{L} = -Qc \partial_\mu \varphi(\vec{x}) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{V.10})$$

Ainsi, le champ de Dirac doit également se transformer de sorte à ce que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, mais ψ' doit conserver l'information de ψ (c'est à dire $\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}\psi$), l'astuce est donc d'ajouter un terme de phase

$$\psi(\vec{x}) \mapsto \psi'(\vec{x}) = \psi(\vec{x}) e^{-i\frac{Q}{\hbar}\varphi(\vec{x})} \quad (\text{V.11})$$

Comme en électrodynamique classique, il y a une infinité de choix de jauge, mais nous nous serviront d'un en particulier, dénommé jauge de Lorentz et qui consiste à choisir $\varphi(\vec{x})$ de sorte à ce que

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0 \quad (\text{V.12})$$

Écrivons à présent les équations d'Euler-Lagrange pour QED, relatives au champ EM, on a

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\alpha} - \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & -Qc \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \delta_\mu^\alpha - \partial_\beta \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)} \left[-\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4\mu_0} \partial_\beta \left(F^{\mu\nu} [\delta_\mu^\beta \delta_\nu^\alpha - \delta_\nu^\beta \delta_\mu^\alpha] + \frac{\partial}{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)} [\partial_\rho \mathcal{A}_\sigma - \partial_\sigma \mathcal{A}_\rho] g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} \right) = Qc \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{4\mu_0} \partial_\beta \left(F^{\beta\alpha} - F^{\alpha\beta} + F^{\rho\sigma} [\delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\alpha - \delta_\sigma^\beta \delta_\rho^\alpha] \right) = Qc \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi \\ \Leftrightarrow & \partial_\beta F^{\beta\alpha} = Qc \mu_0 \bar{\psi} \gamma^\alpha \psi \stackrel{\text{déf}}{=} J^\alpha \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

où l'on a défini le courant conservé J^α par analogie avec l'équation (IV.33), le Lagrangien d'interaction se réécrit ainsi

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -Q c \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \mathcal{A}_\mu = -\frac{1}{\mu_0} \mathcal{A}_\mu J^\mu \quad (\text{V.14})$$

retrouvant ainsi la structure du Lagrangien d'interaction (IV.13).

De même, les équations d'Euler-Lagrange relatives au champ de Dirac sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi + Q c \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu + mc^2 \psi &= 0 \\ \Leftrightarrow (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) \psi &= Q c \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \psi \end{aligned} \quad (\text{V.15})$$

retrouvant ainsi l'équation de Dirac dont le second membre s'identifie à un terme de source.

V.2 Du lagrangien QED au potentiel de Coulomb

Reprenons à présent les équations d'Euler-Lagrange (V.13). En jauge de Lorentz, on a

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\ \Leftrightarrow \partial_\mu (\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu) &= J^\nu \\ \Leftrightarrow \partial_\mu \partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \partial_\mu \mathcal{A}^\mu &= J^\nu \\ \Leftrightarrow \square \mathcal{A}^\nu &= J^\nu \end{aligned} \quad (\text{V.16})$$

où $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ est l'opérateur d'Alembertien. L'équation (V.16) se révèle être l'équation de Klein-Gordon pour un champ de masse nulle, avec un terme de source. Exprimons alors les solutions de cette équation comme des ondes planes.

$$\begin{cases} \mathcal{A}^\nu &= \mathcal{A}_0^\nu e^{iq^\mu x_\mu} \\ \psi &= u e^{iq^\mu x_\mu} \\ J^\nu &= Q c \mu_0 \bar{u} \gamma^\nu u e^{iq^\mu x_\mu} \end{cases} \quad (\text{V.17})$$

où u est le bi-spineur (énergie positive) de Dirac donné par

$$u = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ (\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) \hbar c \\ E + mc^2 \end{pmatrix} \chi_s \quad (\text{V.18})$$

χ_s étant un spineur de Pauli et E étant l'énergie totale du fermion.

L'équation (V.16) devient alors

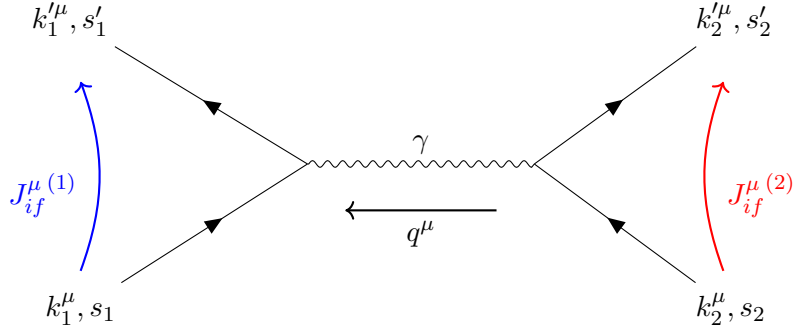
$$\mathcal{A}^\mu = -\frac{1}{q^2} J^\mu \quad (\text{V.19})$$

avec $q^2 = q^\mu q_\mu$, nous permettant ainsi de réécrire le Lagrangien d'interaction (V.14) (pour la solution d'ondes planes considérée) comme

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{1}{q^2 \mu_0} J^{\mu(1)} J_{\mu}^{(2)} \quad (\text{V.20})$$

On cherche à exprimer le potentiel d'interaction entre deux charges électriques qui interagissent entre elles. Pour cela, on considère que l'une des charges (disons la charge 2) crée un champ de photons, ce qui se traduit d'une transition de son état initial de 4-impulsion et spin (k_2^μ, s_2) à son état final $(k_2^{\mu'}, s_2')$. La charge 1 va ensuite interagir avec le champ de photons créé par la charge 2, ce qui se traduit par la transition de son état initial (k_1^μ, s_1) à son état final $(k_1^{\mu'}, s_1')$. La transition de l'état initial à l'état final se fait par l'intermédiaire d'un 4-courant de transition J_{if}^μ .

On peut schématiser la diffusion considérée par le diagramme de Feynman suivant



Comme vu précédemment, l'opérateur \hat{S} de diffusion est relié à l'opérateur \hat{T} de transition par

$$\hat{S} = \mathbb{1} - 2\pi i \hat{T}$$

De plus, l'équation de Lippmann-Schwinger [ref](#), dans l'approximation de Born (PWBA) et au premier ordre s'écrit

$$\hat{T} \simeq \hat{V} \quad (\text{V.21})$$

L'opérateur potentiel \hat{V} apparaît alors lié à l'opérateur de transition par

$$\hat{V} = i(\hat{S} - \mathbb{1}) \quad (\text{V.22})$$

On peut alors, de manière plus concrète, déterminer le potentiel d'interaction de Coulomb par échange d'un photon par

$$\begin{cases} V &= \int d^4\vec{x} \mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{x}) \\ \mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{x}) &= -\mathcal{L}_{\text{int}}(\vec{x}) \end{cases} \quad (\text{V.23})$$

En effet, la décomposition de l'opérateur de diffusion \hat{S} en série de Dyson

$$\hat{S} = \mathbb{1} + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 (-i\hat{H}_{\text{int}}(t_1)) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 (-i\hat{H}_{\text{int}}(t_1)) (-i\hat{H}_{\text{int}}(t_2)) + \dots \quad (\text{V.24})$$

avec

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \int \mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{x}) d^3\vec{r}$$

s'écrit, au premier ordre :

$$i(\hat{S} - \mathbb{1}) = \int d^4\vec{x} \mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{x}) \quad (\text{V.25})$$

De plus, la seconde équation de [\(V.23\)](#) peut se justifier à partir de l'équation [\(V.15\)](#). En effet, on a

$$\begin{aligned} (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2)\psi &= Q c \mu_0 \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \psi \\ \Leftrightarrow [i\hbar c \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 + i\hbar c \gamma^0 \gamma^i \partial_i - mc^2 \gamma^0]\psi &= Q c \gamma^0 \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \psi \\ \Leftrightarrow i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= (i\hbar c \gamma^0 \gamma^i \partial_i + mc^2 \gamma^0)\psi + Q c \gamma^0 \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \psi \\ \Leftrightarrow i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \underbrace{\bar{\psi} (i\hbar c \gamma^i \partial_i + mc^2) \psi}_{\mathcal{H}_{\text{libre}}} + \underbrace{\bar{\psi} Q c \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \psi}_{\mathcal{H}_{\text{int}}} \end{aligned} \quad (\text{V.26})$$

Dans l'approximation PWBA, les états finaux $|f\rangle = |k^{\mu'} s'\rangle$ et initiaux $|i\rangle = |k^\mu s\rangle$ sont des ondes planes, on a ainsi

$$\langle f|\hat{T}|i\rangle \simeq \langle f|\hat{V}|i\rangle = -\frac{Q^2 c^2 \mu_0}{q^2} \int d^4\vec{x} e^{i[k_1^{\mu'} + k_2^{\mu'} - k_1^\mu - k_2^\mu]x_\mu} \bar{u}_{s_1'}(k_1^{\mu'}) \gamma^\mu u_{s_1}(k_1^\mu) \bar{u}_{s_2'}(k_2^{\mu'}) \gamma_\mu u_{s_2}(k_2^\mu) \quad (\text{V.27})$$

On a ainsi

$$V_{1\gamma} = (2\pi)^4 \delta^4(k_1^{\mu'} + k_2^{\mu'} - k_1^\mu - k_2^\mu) V_{1\gamma}^0 \quad (\text{V.28})$$

où $V_{1\gamma}^0$ est le potentiel d'interaction entre les charges, affranchi des termes de normalisation.

$$V_{1\gamma}^0 = -\frac{Q^2 c^2 \mu_0}{q^2} \bar{u}_{s'_1}(k_1^{\mu'}) \gamma^\mu u_{s_1}(k_1^\mu) \bar{u}_{s'_2}(k_2^{\mu'}) \gamma_\mu u_{s_2}(k_2^\mu) \quad (\text{V.29})$$

Dans la limite non-relativiste ($E \sim mc^2$ et $\frac{\hbar|\vec{k}|c}{mc^2} \ll 1$), on a

$$\bar{u}_{s'}(k^{\mu'}) \gamma^\mu u_s(k^\mu) = \frac{E + mc^2}{2mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left(\mathbb{1}_2 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + mc^2} \right) \gamma^\mu \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + mc^2} \end{pmatrix} \chi_s$$

• $\underline{\mu = 0}$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{s'}(k^{\mu'}) \gamma^0 u_s(k^\mu) &= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left(\mathbb{1}_2 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + mc^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + mc^2} \end{pmatrix} \chi_s \\ &= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left(\mathbb{1}_2 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + mc^2} \right) \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ -\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + mc^2} \end{pmatrix} \chi_s \\ &= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left[\mathbb{1}_2 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') (\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar^2 c^2}{(E + mc^2)^2} \right] \chi_s \\ \Leftrightarrow \bar{u}_{s'}(k^{\mu'}) \gamma^0 u_s(k^\mu) &\simeq \chi_{s'}^\dagger \chi_s \end{aligned} \quad (\text{V.30})$$

• $\underline{\mu = i}$:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{s'}(k^{\mu'}) \gamma^i u_s(k^\mu) &= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left(\mathbb{1}_2 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + mc^2} \right) \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + mc^2} \end{pmatrix} \chi_s \\ &= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left(\mathbb{1}_2 - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + mc^2} \right) \begin{pmatrix} \sigma^i \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + mc^2} \\ -\sigma^i \end{pmatrix} \chi_s \\ &= \frac{E + mc^2}{2mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left[\sigma^i \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + mc^2} + \sigma^i \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + mc^2} \right] \chi_s \\ \Leftrightarrow \bar{u}_{s'}(k^{\mu'}) \gamma^i u_s(k^\mu) &\simeq 0 \end{aligned} \quad (\text{V.31})$$

On obtient alors

$$V_{1\gamma}^0 \simeq -\frac{Q^2 c^2 \mu_0}{q^2} \chi_{s'_1}^\dagger \chi_{s_1} \chi_{s'_2}^\dagger \chi_{s_2} \quad (\text{V.32})$$

Puisque l'interaction coulombienne ne dépend pas du spin des charges électriques mises en jeu, et que dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , on a $q^0 = 0$ (conservation de l'énergie), on trouve finalement

$$V_{1\gamma}^0 = \frac{Q^2}{|\vec{q}|^2 \varepsilon_0} \delta_{s_1 s'_1} \delta_{s_2 s'_2} \quad (\text{V.33})$$

VI Construction du Lagrangien effectif

Dans cette section, nous allons détailler les étapes qui conduisent au Lagrangien de la théorie effective qui remplace QCD à basse énergie, bien que chaque étape n'apparaîtra pas forcément entièrement dans le rapport. Pour cela, nous suivront les étapes suivantes, caractéristiques de la construction d'une théorie effective :

- Identifier les échelle de masse et degrés de libertés (qui seront explicités plus loin) appropriés pour la physique nucléaire à basse énergie.
- Identifier les symétries appropriées pour la QCD à basse énergie et voir si et comment elles sont brisées.
- Construire le Lagrangien le plus général correspondant à ces symétries et brisures de symétrie.
- Trier les contributions importantes ou non des termes (et discriminer au besoin).
- Calculer les diagrammes de Feynman pour le problème considéré en tenant compte de la précision désirée.

VI.1 Domaine de masses pour la théorie effective et notion de degrés de liberté

Dans l'ensemble des mésons, les pions sont très certainement les hadrons les plus légers ($m_\pi \simeq 139.6 \text{ MeV}/c^2$), la masse des hadrons étant typiquement de l'ordre de $500 \text{ MeV}/c^2$ à $10 \text{ GeV}/c^2$ (les plus lourds étant les autres mésons). Nous définirons donc les valeurs extrémales des masses pour lesquelles l'utilisation de la théorie effective que nous bâtirons sera pertinente par $Q \sim m_\pi$ en valeur basse et $\Lambda_x \sim m_\rho \simeq 770 \text{ MeV}/c^2$ en valeur haute (m_ρ désignant la masse des mésons ρ). En ce qui concerne les degrés de liberté appropriés pour décrire l'interaction NN (nous verrons par la suite que cela se fait par l'intermédiaire d'un ou plusieurs pion(s) échangé(s)) à basse énergie, nous devons d'abord définir ce que c'est. On entend par degré de liberté, non pas comme en mécanique classique, l'ensemble des particules qui entrent en jeu au cours de l'interaction considérée. Ainsi, puisque la masse des gluons est nulle, et que les quarks sont bien plus légers que les pions (on parle ici des quarks et antiquarks qui constituent les pions et nucléons : u , d , \bar{u} et \bar{d}) :

$$\begin{cases} m_u = m_{\bar{u}} \simeq 0.14 \text{ MeV}/c^2 \\ m_d = m_{\bar{d}} \simeq 0.16 \text{ MeV}/c^2 \end{cases}$$

ils ne rentrent pas dans l'échelle des masses établie précédemment. En revanche, la masse des nucléons n'est pas très éloignée de celle des mésons ρ , les pions et nucléons sont donc les seuls degrés de liberté pertinent pour l'interaction NN.

VI.2 La symétrie chirale et brisure explicite de symétrie

Nous allons à présent donner quelques éléments de QCD à basse énergie, concernant ses symétries et brisures de symétrie. La densité de Lagrangien, pour la QCD, s'écrit (en ne considérant que les quarks légers u , d , s)

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f (i\hbar c \not{D} - m_f c^2) q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \quad a = 1, \dots, 8. \quad (\text{VI.1})$$

où $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$, D_μ étant la dérivée covariante de jauge, définie par

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{A}_{\mu,a} \quad (\text{VI.2})$$

Les quantités $\mathcal{G}_{\mu\nu,a}$ et $\mathcal{G}_a^{\mu\nu}$ sont, quant à elles, les composantes covariantes et contravariantes du tenseur champ de gluon

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\nu,a} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu,a} + gf_{abc} \mathcal{A}_{\mu,b} \mathcal{A}_{\nu,c} \\ \mathcal{G}_a^{\mu\nu} = \partial^\mu \mathcal{A}_a^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}_a^\mu + gf_{abc} \mathcal{A}_b^\mu \mathcal{A}_c^\nu \end{cases} \quad a, b, c = 1, \dots, 8 \quad (\text{VI.3})$$

On remarque ici l'analogie entre le terme de champ électromagnétique libre $-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ du Lagrangien QED et le terme de champ de gluon libre $-\frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu}$ du Lagrangien QCD. Les différents tenseurs de champ apparaissant dans ces termes sont assez similaires structurellement, le tenseur champ de gluon contenant un terme non abélien en plus. Il faut noter que la convention de sommation s'applique également sur les indices de couleur (a, b, c) qui se répètent.

De plus, dans l'expression (VI.1) du Lagrangien QCD :

- q_f est le spineur qui désigne le champ de quark pour une saveur (flavour) donnée, appartenant à la représentation fondamentale du groupe de Lie $SU(3)_c$, l'indice c faisant référence à la couleur des quarks (rouge, verte ou bleue) :

$$q_f = \begin{pmatrix} q_f^r \\ q_f^g \\ q_f^b \end{pmatrix}$$

- Les masses des quarks de saveur différentes m_f sont les éléments diagonaux de \mathcal{M} :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}$$

- g est la constante de couplage fort.
- Les quantités $\mathcal{A}_{\mu,a}$ représentent les champs de gluons (on a une analogie avec le 4-vecteur potentiel).
- Les matrices λ_a sont les huit matrices 3×3 de Gell-Mann, qui ont pour propriété d'être hermitiennes et de trace nulle. Ce sont les matrices génératrices du groupe $SU(3)_c$ dans sa représentation fondamentale. On notera cependant que ces matrices agissent dans l'espace des saveurs. On a en particulier

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc} \lambda_c \quad (\text{VI.4})$$

où les quantités f_{abc} sont appelées constantes de structure de l'algèbre de Lie de $SU(3)_c$.

Il est important de noter que les indices a, b, c sont indépendants de la notion de covariance ou de contravariance, on peut donc les surélever ou non.

Les masses des quarks considérés sont faibles devant les masses des hadrons, on peut ainsi s'intéresser au cas où la masse des quarks est supposée nulle. Dans un tel cas, l'expression du Lagrangien QCD devient

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f (i\hbar c \not{D}) q_f - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \quad (\text{VI.5})$$

On introduit alors les champs de quark "gauche" q_L et "droit" q_R (on parle aussi de chiralités gauche et droite) :

$$\begin{cases} q_R &= P_R q \\ q_L &= P_L q \end{cases} \quad q = q_L + q_R \quad (\text{VI.6})$$

où P_R et P_L sont respectivement les opérateurs projection gauche et projection droite, définis par

$$\begin{cases} P_R &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_4 + \gamma_5) \\ P_L &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_4 - \gamma_5) \end{cases} \quad (\text{VI.7})$$

Le Lagrangien (VI.5) peut alors être exprimé en fonction des chiralités gauches et droites

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_{R,f} i\hbar c \not{D} q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} i\hbar c \not{D} q_{L,f} - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \quad (\text{VI.8})$$

S'intéressant uniquement aux quarks u et d et introduisant le doublet

$$\psi \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \bar{\psi}_L i\hbar c \not{D} \psi_L + \bar{\psi}_R i\hbar c \not{D} \psi_R - \frac{1}{4} \mathcal{G}_{\mu\nu,a} \mathcal{G}_a^{\mu\nu} \quad (\text{VI.9})$$

Le Lagrangien $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$ est donc invariant pour chaque chiralité sous la transformation

$$\psi_k = \begin{pmatrix} u_k \\ d_k \end{pmatrix} \mapsto g_k \psi_k = e^{-i\vec{\theta}_k \cdot \vec{\tau}} \begin{pmatrix} u_k \\ d_k \end{pmatrix} \quad k = R, L \quad (\text{VI.10})$$

où $\vec{\tau}$ est le 3-vecteur de matrices d'isospin de Pauli, génératrices de $SU(2)_c$, les quantités $\vec{\theta}_k$ sont des 3-vecteurs réels quelconques et g_R et g_L sont respectivement des éléments de $SU(2)_R$ et $SU(2)_L$.

Dans le cadre de l'approximation de quarks sans masse, les composantes gauches et droites des quarks ne se mélangent pas, c'est la symétrie chirale $SU(2)_R \times SU(2)_L$. Cette symétrie n'est qu'approximative car la masse des quarks est négligeable mais pas totalement nulle, le terme de masse du Lagrangien (VI.1) s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{masse}} = - \sum_{f=u,d} m_f \delta_{ij} \bar{q}_f^i q_f^j \quad (\text{VI.11})$$

ce qui, pour les chiralités gauche et droite, devient

$$\mathcal{L}_{\text{masse}} = - \sum_{f=u,d} m_f \delta_{ij} (\bar{q}_{L,f}^i q_{R,f}^j + \bar{q}_{R,f}^i q_{L,f}^j) \quad (\text{VI.12})$$

Les chiralités gauche et droite ne sont alors plus indépendantes mais couplées, on dit que la symétrie chirale est explicitement brisée. Cela dit, comme les masses des quarks up et down sont faibles (comparées à l'échelle de masse définie), on peut considérer qu'il s'agit tout de même d'une bonne approximation.

VI.3 Courants et charges associés à la symétrie chirale

D'après le théorème de Noether, si le Lagrangien est invariant sous l'action d'un groupe de symétrie continu et global, généré par les opérateurs I_1, I_2, \dots , alors il existe une ensemble de courants conservés $j_1^\mu(\vec{x}), j_2^\mu(\vec{x}), \dots$ tels que les générateurs de la symétrie sont donnés par

$$I_i = \int d^3\vec{r} j_i^0(\vec{r}) \quad i = 1, 2, \dots \quad (\text{VI.13})$$

et que les relations

$$[I_i, I_j] = iC_{ijk} I_k \quad (\text{VI.14})$$

sont satisfaites, les quantités C_{ijk} sont appelées constantes de structure du groupe de symétrie. Ainsi, pour chaque générateur τ_i de $SU(2)_R$ et $SU(2)_L$, on aura un courant conservé, soit trois courants droits ($i = 1, 2, 3$)

$$R_i^\mu = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} \psi_R \quad \text{avec} \quad \partial_\mu R_i^\mu = 0 \quad (\text{VI.15})$$

et trois courants gauches

$$L_i^\mu = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} \psi_L \quad \text{avec} \quad \partial_\mu L_i^\mu = 0 \quad (\text{VI.16})$$

On peut alors introduire les trois courants vecteurs

$$V_i^\mu = R_i^\mu + L_i^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} \psi \quad \text{avec} \quad \partial_\mu V_i^\mu = 0 \quad (\text{VI.17})$$

ainsi que les trois courants vecteurs axiaux

$$A_i^\mu = R_i^\mu - L_i^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\tau_i}{2} \psi \quad \text{avec} \quad \partial_\mu A_i^\mu = 0 \quad (\text{VI.18})$$

qui sont nommés ainsi du fait qu'ils se transforment comme des densités de courant vecteurs et vecteurs axiaux sous une opération de parité. Les transformations des courants vecteurs sont des rotations d'isospin

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \mapsto \exp\left(-i\vec{\theta}^V \cdot \frac{\vec{\tau}}{2}\right) \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (\text{VI.19})$$

ce qui nous permet de noter que l'invariance sous ces transformations peut être identifiée comme étant la symétrie d'isospin, associée au groupe $SU(2)_V$.

Pour chaque densité de courant, on peut définir une charge ce qui, pour les courants définis précédemment, donne

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_i^R = \int d^3\vec{r} R_i^0(\vec{r}) = \int d^3\vec{r} \psi_R^\dagger(\vec{r}, t) \frac{\tau_i}{2} \psi_R(\vec{r}, t) \\ Q_i^L = \int d^3\vec{r} L_i^0(\vec{r}) = \int d^3\vec{r} \psi_L^\dagger(\vec{r}, t) \frac{\tau_i}{2} \psi_L(\vec{r}, t) \\ Q_i^V = \int d^3\vec{r} V_i^0(\vec{r}) = \int d^3\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \frac{\tau_i}{2} \psi(\vec{r}, t) \\ Q_i^A = \int d^3\vec{r} A_i^0(\vec{r}) = \int d^3\vec{r} \psi^\dagger(\vec{r}, t) \gamma_5 \frac{\tau_i}{2} \psi(\vec{r}, t) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_i^R}{dt} = 0 \\ \frac{dQ_i^L}{dt} = 0 \\ \frac{dQ_i^V}{dt} = 0 \\ \frac{dQ_i^A}{dt} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{VI.20})$$

le fait que les charges soient des intégrales premières venant du fait que les densités de courant sont conservées (il suffit d'observer une équation de continuité quelconque pour s'en convaincre).

Les charges associées aux courants R_i^μ et L_i^μ satisfont les relations de commutation de l'algèbre de Lie associé au groupe chirale $SU(2)_R \times SU(2)_L$:

$$\left\{ \begin{array}{l} [Q_i^R, Q_j^R] = i\varepsilon^{ijk} Q_k^R \\ [Q_i^L, Q_j^L] = i\varepsilon^{ijk} Q_k^L \\ [Q_i^R, Q_j^L] = 0 \end{array} \right. \quad (\text{VI.21})$$

tandis que pour les charges Q_i^V et Q_i^A , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} [Q_i^V, Q_j^V] = i\varepsilon^{ijk} Q_k^V \\ [Q_i^A, Q_j^A] = i\varepsilon^{ijk} Q_k^V \\ [Q_i^V, Q_j^A] = i\varepsilon^{ijk} Q_k^A \end{array} \right. \quad (\text{VI.22})$$

VI.4 Brisure spontanée de symétrie chirale

Une symétrie spontanée est ici dite spontanément brisée si le Lagrangien n'est pas invariant sous cette symétrie lorsque le système est dans son état fondamental. L'explication la plus probable de cette brisure de symétrie provient du spectre de hadrons, pour lequel la symétrie d'isospin $SU(2)_V$ est bien observée, alors que la symétrie chirale $SU(2)_R \times SU(2)_L$ est spontanément brisée vers la symétrie d'isospin $SU(2)_V$. Ainsi, le vide (état fondamental en QCD) est invariant sous les transformations vectorielles (VI.19), c'est à dire

$$Q_i^V |0\rangle = 0 |0\rangle \quad (\text{VI.23})$$

ce qui n'est pas le cas pour des transformations axiales

$$Q_i^A |0\rangle \neq 0 |0\rangle \quad (\text{VI.24})$$

Le groupe de Lie $SU(n)$ étant de dimension $n^2 - 1$, la brisure spontanée de la symétrie chirale correspond à la présence de trois générateurs de brisure. Le théorème de Goldstone énonce qu'à chaque générateur d'une symétrie, correspond une particule scalaire de masse nulle. Les générateurs de brisure sont ici les Q_i^A (qui sont pseudo-scalaires) et les bosons (pseudo-scalaires) de Goldstone se révèlent être le triplet de pions (π^\pm, π^0), dont la masse n'est pas totalement nulle car la masse des quarks n'est pas nulle (brisure explicite), mais l'on remarque qu'elle est en revanche moindre face aux masses des autres mésons.

VI.5 Construction du Lagrangien effectif chirale

On va à présent chercher à construire le Lagrangien le plus général possible, qui tient compte des symétries et brisures de symétrie vues précédemment. Le Lagrangien effectif que l'on souhaite construire s'écrit de manière formelle

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\pi\pi} + \mathcal{L}_{\pi N} + \mathcal{L}_{NN} \quad (\text{VI.25})$$

où $\mathcal{L}_{\pi\pi}$ est le Lagrangien du champ de pions libre, $\mathcal{L}_{\pi N}$ décrit l'interaction entre les pions et nucléons et \mathcal{L}_{NN} est un Lagrangien de contact dont on ne tiendra pas compte pour le moment mais, lorsque l'on aura compris comment arriver jusqu'au potentiel d'interaction, on y rajoutera le terme de contact qui s'obtient de manière plus ou moins triviale en comparaison du reste.

Pour bâtir des Lagrangiens chiraux, on introduit la matrice U de $SU(2)_f$ qui s'exprime en fonction des champs de pions $\vec{\pi}$ et qui, à l'ordre quadratique, est donnée par

$$U = \mathbb{1}_2 + \frac{i}{f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} - \frac{1}{2f_\pi^2} \vec{\pi}^2 \quad (\text{VI.26})$$

où f_π symbolise la constante de décroissance du pion. À l'ordre dominant, le Lagrangien $\mathcal{L}_{\pi\pi}$ est alors donné par

$$\mathcal{L}_{\pi\pi} = \frac{f_\pi^2}{4\hbar c} \text{Tr} \left[\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} (U + U^\dagger) \right] = \frac{1}{2\hbar c} \left(\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \vec{\pi}^2 \right) \quad (\text{VI.27})$$

Introduisons à présent la matrice $\xi = \sqrt{U}$:

$$\xi = \sqrt{U} \simeq \mathbb{1}_2 + \frac{i}{2f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \quad (\text{VI.28})$$

On a $UU^\dagger = 1$, donc $\xi\xi^\dagger = 1$ et ainsi :

$$\partial_\mu (\xi\xi^\dagger) = (\partial_\mu \xi) \xi^\dagger + \xi (\partial_\mu \xi^\dagger) = 0 \quad (\text{VI.29})$$

À l'ordre dominant, le Lagrangien $\mathcal{L}_{\pi N}$ s'écrit

$$\mathcal{L}_{\pi N} = \bar{\psi} \left(i\hbar c \gamma^\mu D_\mu - M_N c^2 + \frac{g_A}{2} \hbar c \gamma^\mu \gamma_5 u_\mu \right) \psi \quad (\text{VI.30})$$

où g_A est la constante de couplage du vecteur axial, $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ est la dérivée covariante chirale, qui introduit la connexion chirale Γ_μ (analogue à un terme de jauge). Les quantités u_μ sont quant à elles les composantes covariantes du 4-vecteur axial. La connexion chirale Γ_μ et les composantes u_μ peuvent être définies à partir de ξ comme

$$\begin{cases} \Gamma_\mu &= \frac{1}{2} [\xi^\dagger, \partial_\mu \xi] \\ u_\mu &= i \{ \xi^\dagger, \partial_\mu \xi \} \end{cases} \quad (\text{VI.31})$$

On a donc, en utilisant la relation (VI.29)

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \frac{1}{2} [\xi^\dagger, \partial_\mu \xi] \\ &= \frac{1}{2} [\xi^\dagger \partial_\mu \xi - (\partial_\mu \xi) \xi^\dagger] \\ \Leftrightarrow \Gamma_\mu &= \frac{1}{2} (\xi^\dagger \partial_\mu \xi + \xi \partial_\mu \xi^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{VI.32})$$

ainsi que

$$\begin{aligned} u_\mu &= i \{ \xi^\dagger, \partial_\mu \xi \} \\ &= i [\xi^\dagger \partial_\mu \xi + (\partial_\mu \xi) \xi^\dagger] \\ \Leftrightarrow u_\mu &= i (\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger) \end{aligned} \quad (\text{VI.33})$$

Sachant que $\vec{\pi}^\dagger = \vec{\pi}$, $[\pi_i, \tau_i] = [\partial_\mu \pi_i, \tau_i] = 0$ et que $\pi_i \partial_\mu \pi_i \simeq 0$ (c'est un terme d'ordre 2 du champ de pion, alors que l'interaction πN ne tient compte qu'un terme d'ordre 1, on n'a qu'un pion participant à cette interaction), on

a

$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{i}{2f_\pi} (\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})^\dagger \right) \partial_\mu \left(\frac{i}{2f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \right) + \left(1 + \frac{i}{2f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \right) \partial_\mu \left(-\frac{i}{2f_\pi} (\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})^\dagger \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4f_\pi^2} \vec{\pi}^\dagger \cdot \vec{\tau} \partial_\mu (\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) + \frac{1}{4f_\pi^2} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \partial_\mu (\vec{\pi}^\dagger \cdot \vec{\tau}) \right] \\
&= \frac{1}{8f_\pi^2} \left[\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} (\vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) + \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} (\vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) \right] \\
&= \frac{1}{4f_\pi^2} \left[(\vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) \mathbb{1}_2 + i \vec{\tau} \cdot (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi}) \right] \quad \text{On a utilisé (II.20)} \\
\Leftrightarrow \Gamma_\mu &= \frac{i}{4f_\pi^2} \vec{\tau} \cdot (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi})
\end{aligned} \tag{VI.34}$$

De même pour le 4-vecteur axial, on a

$$\begin{aligned}
u_\mu &= i(\xi^\dagger \partial_\mu \xi - \xi \partial_\mu \xi^\dagger) \\
&= i \left[\left(1 - \frac{i}{2f_\pi} (\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})^\dagger \right) \partial_\mu \left(\frac{i}{2f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \right) + \left(1 + \frac{i}{2f_\pi} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \right) \partial_\mu \left(-\frac{i}{2f_\pi} (\vec{\tau} \cdot \vec{\pi})^\dagger \right) \right] \\
&= i \left[\frac{i}{2f_\pi} (\vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi} + (\partial_\mu \vec{\pi})^\dagger \cdot \vec{\tau}) + \frac{1}{4f_\pi^2} (\vec{\pi}^\dagger \cdot \vec{\tau}) \partial_\mu (\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}) - \frac{1}{4f_\pi^2} \vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \partial_\mu (\vec{\pi}^\dagger \cdot \vec{\tau}) \right] \\
\Leftrightarrow u_\mu &= -\frac{1}{f_\pi} \vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}
\end{aligned} \tag{VI.35}$$

Le Lagrangien (VI.25) peut donc se réécrire

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2\hbar c} \left(\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \vec{\pi}^2 \right) + \bar{\psi} \left(i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - M_N c^2 - \frac{\hbar c}{4f_\pi^2} \gamma^\mu \vec{\tau} \cdot (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi}) - \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar c \gamma^\mu \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi} \right) \psi \tag{VI.36}$$

VI.6 Potentiel NN par échange d'un pion

On part du Lagrangien (VI.36) où l'on enlève Γ_μ (VI.34), qui est un terme d'ordre 2 du champ de pion alors qu'à l'ordre dominant on cherche des termes d'ordre 1 pour l'interaction πN . Afin de décrire au mieux la diffusion NN, on travaillera dans le référentiel du centre de masse du système de deux nucléons. Les équations d'Euler-Lagrange relatives au champ de pions s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \pi^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi^a} = 0 \\
\Leftrightarrow \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \frac{\pi^a}{\hbar c} + \partial_\mu \left\{ \partial^\mu \pi^a - \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar c \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau^a \psi \right\} &= 0 \\
\Leftrightarrow \left(\square + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \right) \frac{\pi^a}{\hbar c} &= \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar c \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau^a \psi)
\end{aligned} \tag{VI.37}$$

On reconnaît dans l'équation (VI.37) l'équation de Klein-Gordon, avec un terme que nous expliciterons plus loin. Les équations d'Euler-Lagrange relatives à $\bar{\psi}$ s'écrivent

$$\begin{aligned}
&\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0 \\
\Leftrightarrow -i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu \psi + M_N c^2 \psi + \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar c \gamma^\mu \gamma_5 (\vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) \psi &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar c \gamma^\mu \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi} &= (i\hbar c \not{\partial} - M_N c^2) \psi
\end{aligned} \tag{VI.38}$$

on obtient donc une équation similaire à l'équation de Dirac.
L'équation de Klein-Gordon usuelle est

$$\left(\square + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \right) \pi^a = 0 \quad (\text{VI.39})$$

En égalisant cette équation et l'équation (VI.37), on obtient

$$\partial_\mu \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau^a \psi \right) = 0 \quad (\text{VI.40})$$

On en conclut que le courant conservé (au sens du courant de Noether) s'écrit

$$J_a^\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_a \psi \quad \text{avec } \partial_\mu J_a^\mu = 0 \quad (\text{VI.41})$$

Le Lagrangien d'interaction \mathcal{L}_{int} couplant le courant (VI.41) et le champ de pion s'écrit donc

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g_A}{2f_\pi} \hbar c J_a^\mu \partial_\mu \pi^a} \quad (\text{VI.42})$$

Les solutions de l'équation de Klein-Gordon (VI.39) sont des ondes planes, on peut alors raisonnablement considérer que

$$\begin{cases} \pi^a &= N^a e^{iq^\mu x_\mu} \\ \psi &= u e^{iq^\mu x_\mu} \\ J_a^\mu &= \bar{u} \gamma^\mu \gamma_5 \tau^a u e^{iq^\mu x_\mu} \end{cases} \quad (\text{VI.43})$$

où u est le bi-spineur de Dirac donné par l'équation (V.18).

Injectant ces solutions dans l'équation (VI.37), on obtient

$$\begin{aligned} \left(-q^2 + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \right) N^a e^{iq^\mu x_\mu} &= \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar^2 c^2 i q_\mu J_a^\mu \quad \text{où } q^2 = q^\mu q_\mu \\ \Leftrightarrow \pi^a &= \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar^2 c^2 \frac{i q_\mu}{-q^2 + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2}} J_a^\mu \\ \Leftrightarrow \partial_\mu \pi^a &= i q_\mu \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar^2 c^2 \frac{i q_\nu}{-q^2 + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2}} J_a^\nu \end{aligned}$$

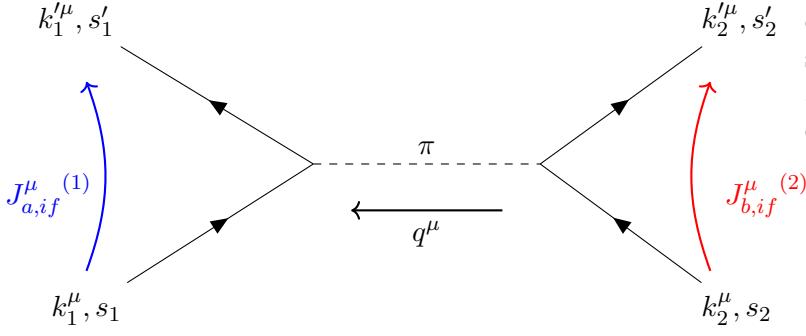
Le Lagrangien d'interaction (il s'agit en toute rigueur d'une évaluation du Lagrangien d'interaction pour la solution en ondes planes) s'écrit alors

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \left(\frac{g_A \hbar c}{2f_\pi} \right)^2 J_a^{\mu(1)} \frac{q_\mu q_\nu \hbar c \delta^{ab}}{-q^2 + \Lambda_\pi^2} J_b^{\nu(2)} \quad (\text{VI.44})$$

où $\Lambda_\pi^2 = \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2}$.

On cherche ici à décrire la transition entre l'état asymptotique initial d'un nucléon 1, de 4-impulsion (on confondra abusivement les notions de 4-impulsion et 4-vecteur d'onde) k_1^μ et de spin s_1 , et l'état asymptotique final de ce même nucléon, de 4-impulsion $k_1'^\mu$ et de spin s_1' , au travers de la diffusion de ce nucléon sur un autre nucléon, numéroté 2. Au cours de cette diffusion, le nucléon 2 va créer un champ de pion (de spin nul et de 4-impulsion q^μ), passant ainsi d'un état initial de 4-impulsion k_2^μ et de spin s_2 à un état final avec $(k_2'^\mu, s_2')$. Le nucléon 1 va ensuite interagir avec ce champ de pion, passant ainsi de l'état initial à l'état final. L'interaction avec le champ de pions se fait par l'apparition du terme $J_a^\mu \partial_\mu \pi^a$. La situation est ici similaire à celle vue précédemment, où une charge électrique Q interagissait avec le champ Coulombien créé par une autre charge Q' , l'interaction se faisant par l'intermédiaire d'un photon, boson vecteur de l'interaction électromagnétique.

De manière analogue, on peut schématiser notre diffusion par le diagramme de Feynman suivant



où $J_{a,if}^\mu$ et $J_{b,if}^\mu$ représentent des courants de transition de l'état asymptotique initial vers l'état asymptotique final. De même que précédemment, on a $\langle f | \hat{V}_{1\pi} | i \rangle = \int d^4\vec{x} \mathcal{H}_{\text{int}}$.
On a plus précisément

$$\langle f | \hat{V}_{1\pi} | i \rangle = - \int d^4\vec{x} \left(\frac{g_A \hbar c}{2f_\pi} \right)^2 J_{a,fi}^\mu (1) \frac{q_\mu q_\nu \hbar c \delta^{ab}}{-q^2 + \Lambda_\pi^2} J_{b,fi}^\nu (2) \quad (\text{VI.45})$$

où

$$\begin{cases} J_{a,fi}^\mu (1) &= \bar{u}_{s'_1}(k_1'^\mu) e^{ik_1'^\mu x_\mu} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_a^{(1)} u_{s_1}(k_1^\mu) e^{-ik_1^\mu x_\mu} \\ J_{a,fi}^\nu (2) &= \bar{u}_{s'_2}(k_2'^\mu) e^{ik_2'^\mu x_\mu} \gamma^\nu \gamma_5 \tau_b^{(2)} u_{s_2}(k_2^\mu) e^{-ik_2^\mu x_\mu} \end{cases} \quad (\text{VI.46})$$

Puisque

$$\int d^4\vec{x} \exp \left[i(k_1'^\mu + k_2'^\mu - k_1^\mu - k_2^\mu) x_\mu \right] x_\mu = (2\pi)^4 \delta^4(k_1'^\mu + k_2'^\mu - k_1^\mu - k_2^\mu) \quad (\text{VI.47})$$

on ne va s'intéresser que la partie de $V_{1\pi} = \langle f | \hat{V}_{1\pi} | i \rangle$ sans le produit des fonctions delta de Dirac, notée $V_{1\pi}^0$, c'est à dire

$$\begin{aligned} V_{1\pi}^0 &= - \left(\frac{g_A \hbar c}{2f_\pi} \right)^2 \bar{u}_{s'_1}(k_1'^\mu) \gamma^\mu \gamma_5 u_{s_1}(k_1^\mu) \tau_a^{(1)} \frac{q_\mu q_\nu \hbar c \delta^{ab}}{-q^2 + \Lambda_\pi^2} \bar{u}_{s'_2}(k_2'^\mu) \gamma^\nu \gamma_5 \tau_b^{(2)} u_{s_2}(k_2^\mu) \\ \Leftrightarrow V_{1\pi}^0 &= - \left(\frac{g_A \hbar c}{2f_\pi} \right)^2 \hbar c (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \frac{\bar{u}_{s'_1}(k_1'^\mu) \gamma^\mu \gamma_5 u_{s_1}(k_1^\mu) q_\mu \bar{u}_{s'_2}(k_2'^\mu) \gamma^\nu \gamma_5 u_{s_2}(k_2^\mu) q_\nu}{-q^2 + \Lambda_\pi^2} \end{aligned}$$

Prendre la limite non-relativiste consiste à négliger les termes en $\frac{\hbar|\vec{k}|c}{m}$, on considèrera aussi que $E \sim mc^2$. À partir de l'expression du spineur de Dirac u (V.18), on a

$$\begin{aligned} \bar{u}_{s'}(k'^\mu) \gamma^\mu \gamma_5 u_s(k^\mu) q_\mu &= \frac{E + Mc^2}{2Mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left(\mathbb{1}_2 \quad \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + Mc^2} \right) \gamma^0 \gamma^\mu \gamma_5 \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + Mc^2} \end{pmatrix} \chi_s q_\mu \\ &= \frac{E + Mc^2}{2Mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left(\mathbb{1}_2 \quad -\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + Mc^2} \right) \gamma^\mu q_\mu \begin{pmatrix} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + Mc^2} \\ \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \chi_s \\ &= \frac{E + Mc^2}{2Mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left(\mathbb{1}_2 \quad -\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + Mc^2} \right) \begin{pmatrix} q_0 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + Mc^2} - \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + Mc^2} - q_0 \mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \chi_s \\ &= \frac{E + Mc^2}{2Mc^2} \chi_{s'}^\dagger \left[q_0 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \hbar c}{E + Mc^2} - \vec{\sigma} \cdot \vec{q} - \vec{\sigma} \cdot \vec{q} \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{(E + Mc^2)^2} + q_0 \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}') \hbar c}{E + Mc^2} \right] \chi_s \\ \Leftrightarrow \bar{u}_{s'}(k'^\mu) \gamma^\mu \gamma_5 u_s(k^\mu) q_\mu &\simeq -\chi_{s'}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) \chi_s \end{aligned} \quad (\text{VI.48})$$

Dans le référentiel du centre de masse \mathcal{R}^* , on a $q^0 = 0$ (conservation de l'énergie), donc $q^2 = q^\mu q_\mu = -|\vec{q}|^2$. Ainsi, on peut réécrire $V_{1\pi}^0$ sous la forme finale suivante

$$V_{1\pi}^0 = - \left(\frac{g_A}{2f_\pi} \right)^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}) \hbar^3 c^3}{|\vec{q}|^2 + \Lambda_\pi^2} \quad (\text{VI.49})$$

Bibliographie

- [1] R. MACHLEIDT & D. R. ENTEM, *Chiral effective field theory and nuclear forces*, Physics Reports 503 (2011) 1-75, 2011.
- [2] J. PEREZ, *Théorie des champs*, Les presses de l'ENSTA, 2ème édition, 2017.
- [3] S. WEINBERG, *The Quantum Theory of Fields*, volume I, Cambridge University Press, 1995.
- [4] S. WEINBERG, *The Quantum Theory of Fields*, volume II, Cambridge University Press, 1996.
- [5] V. CUPLOV, *Brisures d'isospin et Corrections radiatives au processus $K_{\ell 4}$* , Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, Faculté des Sciences de Luminy, Centre de Physique Théorique, 2004.
Disponible à : https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/39/107/39107533.pdf
- [6] M. SANCHEZ SANCHEZ, *Effective field theories of strong-interacting systems in nucleon scattering and heavy-quark bound states*, Nuclear Theory [nucl-th], Université Paris-Saclay, 2017, English, NNT : 2017SACLS419 .
Disponible à : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01695540>.
- [7] C. COHEN-TANNOUDJI & Y. SACQUIN, *Symétrie et brisure de symétrie*, EDP Sciences, 1999.
- [8] L. BONNEAU, *Notes on the NN interaction*, Unpublished, 2015.
- [9] S. SCHERER, *Introduction to Chiral Perturbation Theory*, Adv.Nucl.Phys. 27 (2003) 277, 2002.
Disponible à : [arXiv :hep-ph/0210398v1](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0210398v1)
- [10] J.M. RAIMOND, *Théorie Classique des Champs*, Cours de l'Université Pierre et Marie Curie, 2016.
- [11] C.J. BATTY, E. FRIEDMAN, H.J. GILS, R. MACHLEIDT, H. REBEL, *Advances in Nuclear Physics*, volume 19, p. 210-215, Plenum Press, édité par J.W. NEGELE & E. VOGT, 1989.
- [12] W. APPEL, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H. et K. Editions, 2002.