

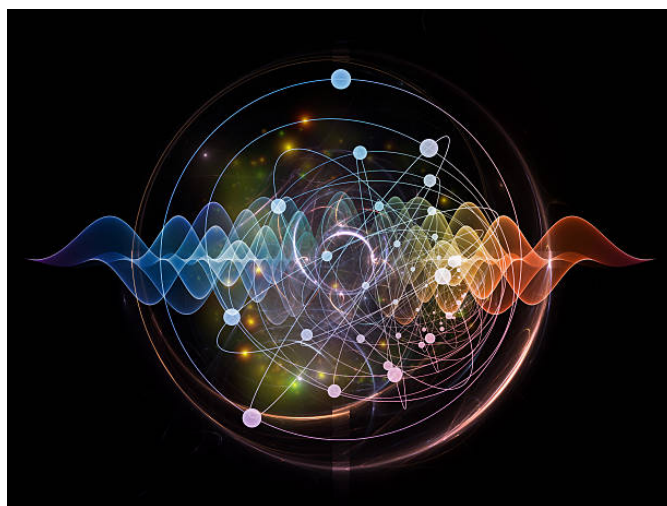
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

RAPPORT DE STAGE

---

## Interaction effective Nucléon-Nucléon

---



Nathanael Kontowicz  
M1 Physique Fondamentale et Applications  
Stage en Physique Nucléaire Théorique

Tuteur : Ludovic Bonneau  
Établissement : Centre d'Études  
Nucléaires de Bordeaux Gradignan

Dates de Stage :

Début : 26 avril 2021

Fin : 18 juin 2021

## *Remerciements*

Je tiens tout d'abord à remercier l'ensemble de l'équipe pédagogique de l'Université de Bordeaux, pour leur travail au cours de cette année spéciale et en particulier Mme Grondin, pour l'efficacité dont elle a fait preuve dans la gestion des événements et la transmission des informations importantes ainsi que Mme Bercy et Mr Delagnes, pour le suivi du stage.

Je me dois également de remercier les membres du CENBG pour leur accueil et en particulier, bien évidemment, Mr Bonneau, dont les compétences, la patience et la pédagogie méritent d'être saluées et sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour.

Il me faut également remercier ma famille et mes amis, dont le soutien m'a permis de faire face sereinement à cette année, ainsi que Céline, pour une quantité de choses qu'il serait impossible d'énumérer, et sa famille, pour leur accueil chaleureux parmi eux. Je me dois notamment de tous les remercier pour leurs encouragements pendant la rédaction de ce rapport.

Enfin, j'aimerais remercier toutes les personnes qui ont participé de près ou de loin à la rédaction de ce mémoire, les membres du Jury, ainsi que vous, cher lecteur.

# Table des matières

I	Introduction . . . . .	4
II	Concepts clés . . . . .	5
	II.1 : Opérateurs de diffusion et de transition . . . . .	5
	II.2 : Équation de Lippmann-Schwinger et approximation de Born . . . . .	6
	II.3 : Notion de champ . . . . .	6
III	Méthode de construction de l'interaction entre deux particules . . . . .	7
	III.1 : Lagrangien de l'électrodynamique quantique . . . . .	7
	III.2 : Potentiel de Coulomb . . . . .	8
	III.3 : Application au potentiel inter-nucléons par échange d'un pion . . . . .	10
IV	Application aux états liés d'un système à deux corps : le Deutéron . . . . .	12
	IV.1 : Résolution numérique de l'équation aux valeurs propres dans l'espace im- pulsion . . . . .	12
	IV.2 : Renormalisation . . . . .	13
	IV.3 : Impact de la renormalisation sur les observables du Deutéron . . . . .	14
V	Conclusion . . . . .	15
<b>A</b>	<b>Définitions et notations</b>	<b>17</b>
	A.I Notations et conventions employées . . . . .	17
	A.II Brèves définitions sur les symétries . . . . .	20
<b>B</b>	<b>La base d'ondes partielles</b>	<b>22</b>
	B.I Base d'ondes partielles dans l'espace impulsionnel . . . . .	22
	B.II Base d'ondes partielles dans l'espace des positions . . . . .	23
	B.III Ajout des degrés de liberté de spin et d'isospin . . . . .	24
	B.IV Expression des éléments de matrice du potentiel OPE dans la base d'ondes partielles	25
<b>C</b>	<b>Formulation Lagrangienne des équations de Maxwell</b>	<b>26</b>
<b>D</b>	<b>Discrétisation de l'équation aux valeurs propres par la méthode des maillages de Lagrange</b>	<b>28</b>
	D.I Méthode des maillages de Lagrange . . . . .	28
	D.II Courbe d'évolution $E_{\min/\max} = f(k_{\max})$ . . . . .	30

## I Introduction

L'objectif du stage est de décrire l'interaction entre les nucléons dans un noyau. La recherche d'une telle interaction trouve ses origines en 1935, lorsque Hideki Yukawa proposa une théorie ayant pour but de décrire l'interaction forte. Selon sa théorie, l'interaction entre deux nucléons se fait par l'échange d'une particule intermédiaire, qui se trouve être un méson (particule composée d'un nombre pair de quarks). Bien que la chromodynamique quantique ait remplacé cette théorie, la théorie de l'interaction NN comme processus de diffusion au cours duquel est échangé un méson virtuel demeure quantitativement un excellent moyen de décrire l'interaction inter-nucléons dans un noyau, bien que certaines questions restent ouvertes à ce jour.

Nous assimilerons l'interaction entre deux particules (nucléons ou autres) à un processus de diffusion, dont la description se fait en passant par le formalisme de la théorie effective des champs. L'utilité première d'une théorie effective est de remplacer une théorie quantique des champs lorsque l'échelle de distance ou d'énergie appropriée pour décrire les degrés de liberté souhaités (c'est à dire les particules qui vont intervenir dans le processus de diffusion étudié) ne requiert pas la nécessité d'utiliser la dite théorie.

Nous commencerons notre étude de la diffusion nucléon-nucléon par la présentation de quelques concepts clés, on trouvera en premier lieu des éléments de la théorie quantique de la diffusion, nous définirons alors les objets nécessaires à la description de notre problème, qui se trouvent être les matrices de diffusion, de transition, ainsi que l'équation dynamique qui remplace usuellement l'équation de Schrödinger dans un problème de diffusion (appelée équation de Lippmann-Schwinger). Cette équation nous permettra d'introduire l'approximation de Born PWBA (plane/partial wave Born approximation, selon l'utilisation), qui se révélera cruciale pour relier l'opérateur de transition et l'opérateur de l'interaction inter-nucléons, que l'on appelle potentiel d'interaction (comprendre énergie potentielle d'interaction). Dans un second temps, nous expliciterons la notion de champ et effectuerons la transition entre la notion de Lagrangien, que l'on rencontre usuellement en mécanique analytique, d'un ensemble discret de coordonnées généralisées, et la notion de Lagrangien d'un ensemble continu de coordonnées généralisées, qui sera celle que l'on rencontrera dans ce rapport.

Une fois ces concepts introduits, nous serons en mesure de décrire une première diffusion, celle d'une particule chargée sur une autre. L'intérêt de cette étape est de présenter la méthode de construction du potentiel d'interaction. Il est en effet plus simple de caractériser l'interaction électromagnétique que l'interaction forte et nous pourrons, une fois le potentiel de diffusion (qui se révélera être le potentiel de Coulomb, exprimé dans l'espace des impulsions) connu, procéder par analogie pour l'interaction forte. Ainsi, nous commencerons par exprimer le Lagrangien (nous confondrons souvent Lagrangien et densité de Lagrangien, plus utilisée en théorie des champs) de l'électrodynamique quantique (ou QED), qui nous servira de point de départ pour exprimer le potentiel d'interaction des deux particules chargées.

Ayant connaissance du Lagrangien effectif chirale (qui remplace la chromodynamique quantique (ou QCD) à l'échelle d'énergie que nous établirons), nous utiliserons cette même méthode pour trouver l'expression du potentiel inter-nucléons par échange d'un pion (OPE). Ce potentiel OPE sera ensuite utilisé pour étudier les propriétés du Deutéron. Nous nous servirons alors de la méthode des maillages de Lagrange pour résoudre numériquement l'équation aux valeurs propres (approche non-perturbative) et ainsi trouver les états liés de l'Hamiltonien. À l'issue de cette étude, nous conclurons sur la nécessité de renormaliser le potentiel ce qui consiste, brièvement, à corriger l'expression du Lagrangien (et donc du potentiel) pour absorber les divergences du potentiel OPE (qui, comme nous le verrons, est singulier dans l'espace des positions). Ceci fait, nous vérifierons l'accord théorie/expérience en appliquant la théorie effective pour retrouver les valeurs des observables du Deutéron, ce sera alors la conclusion des notions abordées durant le stage.

## II Concepts clés

Dans cette section, nous étudierons premièrement la diffusion de deux particules que l'on considérera non-relativistes, par simplicité. Nous introduirons les opérateurs de diffusion et de transition et nous rattacherons ce dernier au potentiel d'interaction nucléon-nucléon par l'équation de Lippmann-Schwinger au premier ordre de l'approximation de Born. Dans un second temps, nous introduirons la notion de champ et de Lagrangien d'un système continu, en particulier pour établir les équations du mouvement régissant la dynamique du système.

### II.1: Opérateurs de diffusion et de transition

Considérons une expérience de diffusion qui débute à un instant  $t \rightarrow -\infty$  tel que les particules n'ont pas encore interagi et se termine à l'instant  $t \rightarrow +\infty$  lorsqu'elles n'interagissent plus. Soient alors  $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ ,  $|\Psi_{\text{out}}\rangle$  (états propres de  $\hat{H}_0$ ) et  $|\Psi(0)\rangle$  les états de diffusion des deux particules respectivement à  $t \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow +\infty$  et  $t = 0$ , instant arbitrairement choisi où les particules interagissent ( $|\Psi_{\text{in}}\rangle$  désigne l'état de toutes les particules avant leur interaction, de même pour  $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ , qui désigne l'état en sortie de ces particules). Introduisons les opérateurs d'évolution temporelle associés aux opérateur Hamiltonien  $\hat{H}$  ( $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ ) et énergie cinétique  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{P}^2}{2\mu}$ ,  $\mu$  étant la masse réduite du système à deux corps, par

$$\begin{cases} \hat{U}(t) &= \exp\left(-it\frac{\hat{H}}{\hbar}\right) \\ \hat{U}_0(t) &= \exp\left(-it\frac{\hat{H}_0}{\hbar}\right) \end{cases}, \quad (\text{II.1})$$

qui trouvent leur origine d'une résolution formelle de l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi(\vec{r}, t) \Rightarrow \psi(\vec{r}, t) = \exp\left(-it\frac{\hat{H}}{\hbar}\right) \Phi(\vec{r}, 0). \quad (\text{II.2})$$

Ces opérateurs nous permettent de définir les opérateurs de Møller  $\hat{\Omega}_{\pm} = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \hat{U}^\dagger(t)\hat{U}_0(t)$ , qui relient les états  $|\Psi_{\text{in}}\rangle$  et  $|\Psi_{\text{out}}\rangle$  à  $|\Psi(0)\rangle$

$$|\Psi(0)\rangle = \hat{\Omega}_+|\Psi_{\text{in}}\rangle = \hat{\Omega}_-|\Psi_{\text{out}}\rangle. \quad (\text{II.3})$$

Définissons alors l'opérateur de diffusion  $\hat{S} = \hat{\Omega}_-^\dagger \hat{\Omega}_+$ , unitaire ( $\hat{S}^\dagger \hat{S} = \mathbb{1}$ ), ce qui se comprend comme le fait que puisque l'action de  $\hat{S}$  est de faire passer l'état du système avant diffusion à l'état du système après diffusion, alors l'action de son adjoint  $\hat{S}^\dagger$  est de faire passer l'état du système après diffusion à l'état avant diffusion (processus inverse, la diffusion est réversible) :

$$\begin{cases} |\Psi_{\text{out}}\rangle &= \hat{S}|\Psi_{\text{in}}\rangle \\ |\Psi_{\text{in}}\rangle &= \hat{S}^\dagger|\Psi_{\text{out}}\rangle \end{cases}. \quad (\text{II.4})$$

L'amplitude de probabilité du processus de diffusion  $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$  est alors l'élément de matrice  $\langle f|\hat{S}|i\rangle$ . Cet opérateur prend en compte toutes les possibilités qui mènent de l'état  $|\Psi_{\text{in}}\rangle$  à l'état  $|\Psi_{\text{out}}\rangle$ , y compris le cas où "il ne se passe rien" (c'est à dire l'identité  $\mathbb{1}$ ). Hormis ce cas, le système va passer d'un état initial à un état final distinct, on va avoir une transition d'un état à un autre. On peut alors exprimer l'opérateur de diffusion  $\hat{S}$  en fonction de l'opérateur dit de transition  $\hat{T}$  par

$$\hat{S} = \mathbb{1} - 2\pi i \hat{T}. \quad (\text{II.5})$$

Ainsi, en écartant le cas où "il ne se passe rien" (c'est à dire que l'on s'intéresse à  $\hat{S} - \mathbb{1}$ ), on travaille avec un opérateur directement proportionnel à l'opérateur de transition, que l'on cherche à relier à l'opérateur potentiel  $\hat{V}$ . Pour cela, il nous faut trouver une équation décrivant la dynamique de la diffusion, et devant donc être équivalente à l'équation de Schrödinger.

### II.2 : Équation de Lippmann-Schwinger et approximation de Born

On considère que l'Hamiltonien du système s'écrit  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ , où  $\hat{H}_0$  est l'opérateur d'énergie cinétique, l'équation de Schrödinger s'écrit  $(\hat{H}_0 + \hat{V})|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ . Introduisons un paramètre  $\zeta$  arbitraire, pouvant être complexe, l'équation de Schrödinger se réécrit

$$(\zeta - \hat{H}_0)|\Psi\rangle = (\hat{V} - E + \zeta)|\Psi\rangle. \quad (\text{II.6})$$

Lorsque  $\zeta$  n'est pas une valeur propre de  $\hat{H}_0$  ( $\zeta \neq E$ ), on peut définir ce que l'on appelle la résolvante de  $\hat{H}_0$  par  $\hat{G}_0(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} (\zeta - \hat{H}_0)^{-1}$ . Lorsque l'on souhaite faire tendre le paramètre  $\zeta$  vers une valeur propre  $E$  de  $\hat{H}_0$ , on écrit  $\zeta$  sous la forme  $\zeta = E \pm i\varepsilon$ , où  $\varepsilon \rightarrow 0$ . On montre que l'équation équivalente à l'équation de Schrödinger, appelée équation de Lippmann-Schwinger, à laquelle obéit l'opérateur de transition  $\hat{T}$ , s'écrit

$$\hat{T}(\zeta) = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}_0(\zeta)\hat{T}(\zeta). \quad (\text{II.7})$$

La première approximation de Born, qui va grandement nous intéresser par la suite, consiste à s'arrêter au premier terme de droite, c'est à dire

$$\hat{T} \simeq \hat{V}. \quad (\text{II.8})$$

L'équation de Lippmann-Schwinger est dite auto-cohérente, c'est à dire que l'on peut la résoudre soit par itération, dont la première est l'approximation de Born où  $\hat{T} = \hat{V}$ , obtenant ainsi la série de Born

$$\hat{T}(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \hat{V}(\hat{G}_0(\zeta)\hat{V})^k, \quad (\text{II.9})$$

soit par discrétisation sous forme d'un système linéaire. L'amplitude de probabilité de diffusion peut ensuite se calculer à partir de l'équation (II.5) et, dans le cas d'une diffusion élastique par exemple, cela revient à prendre les éléments de matrice de  $\hat{T}$  entre des états d'énergie cinétique bien définie et conservée, comme une onde plane  $|\vec{k}\rangle$  ou une onde partielle  $|k L L_z\rangle$  (voir annexe B) par exemple, la condition de non-singularité pour la résolvante de  $\hat{H}_0$  devient alors  $\zeta = |\vec{k}| \pm i\varepsilon$ . Ayant introduit les éléments de la théorie de la diffusion nécessaire à l'étude de notre problème, passons à la notion de champ et de Lagrangien d'un champ.

### II.3 : Notion de champ

En mécanique analytique, lorsque l'on considère un ensemble discret de  $n$  coordonnées généralisées  $\{q_1, \dots, q_n\}$  pour décrire un système de particules, les équations de Newton prennent la forme des  $n$  équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (\text{II.10})$$

où  $\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt}$  et  $\mathcal{L} = E_c - V$  est le Lagrangien du système.

Passons alors à la description du mouvement d'une corde vibrante 1D, fixée à deux extrémités ( $x = 0$  et  $x = L$ ). À chaque instant  $t$ , la hauteur de la corde à la position  $x$  est donnée par  $\phi(x, t)$ . La corde peut être considérée comme un assemblage de petits bouts de corde, donc l'énergie cinétique totale est la somme des énergies cinétiques associées à chaque bout. En passant à la limite continue, on a :

$$T = \int_0^L \rho \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (\text{II.11})$$

où  $\rho$  est la densité linéique de masse de la corde. De même, son énergie potentielle est l'énergie

### III. Méthode de construction de l'interaction entre deux particules

---

élastique des déformations

$$V = \int_0^L k \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (\text{II.12})$$

où  $k$  est la constante élastique de la corde (homogène à une force). Posons  $c^2 = \frac{k}{\rho}$ , la densité linéique de Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \rho \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (\text{II.13})$$

Les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent à présent par rapport à la déformation  $\phi(x, t)$  et, comme il s'agit d'une fonction de plusieurs variables, on doit sommer les contributions de chaque variable, c'est à dire

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \phi)} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (\text{II.14})$$

où  $\partial_x \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}$  et  $\partial_t \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t}$ . En développant l'expression (II.14), on obtient l'équation de D'Alembert

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{II.15})$$

Tout comme le photon est la particule élémentaire (de masse nulle) associée au champ électromagnétique, on associe à toute particule élémentaire (électron, quark, ...) un champ, que l'on peut mathématiquement définir comme un ensemble d'objets distribués dans l'espace. La nature de l'objet qui représente le champ dépend du spin de la particule associée au champ. Ainsi, à un électron (de spin 1/2), on associera un champ de bi-spinneurs de Dirac alors qu'à un photon (de spin 1), on associera un champ de 4-vecteurs  $\mathcal{A}_\mu$ .

Ainsi, si la fonction  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  décrit un champ continu de nature quelconque, les équations d'Euler-Lagrange correspondant au Lagrangien  $\mathcal{L}(\phi, \partial_1 \phi, \dots, \partial_n \phi)$  (dans certains cas, le Lagrangien dépend aussi de  $\vec{x}$ ) s'écrivent (en convention de sommation d'Einstein sur l'indice  $i$ )

$$\partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

(II.16)

où  $\partial_i \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ .

### III Méthode de construction de l'interaction entre deux particules

Nous allons, dans cette section, nous intéresser à la construction du potentiel d'interaction entre deux particules comme étant la diffusion des deux particules par échange d'une particule virtuelle. Nous commencerons par étudier la diffusion de deux particules chargées, en suivant une méthode qui nous amènera jusqu'au potentiel d'interaction, qui se révélera être le potentiel de Coulomb. Pour cela, nous commencerons par écrire le Lagrangien QED et les équations d'Euler-Lagrange associées, en nous aidant de l'annexe C.

Ceci fait, nous emploierons la même méthode pour trouver l'expression du potentiel OPE.

#### III.1 : Lagrangien de l'électrodynamique quantique

Nous allons à présent nous intéresser au Lagrangien QED, que nous construirons par analogie au Lagrangien de l'électrodynamique classique (C.8). Dans QED, les fermions chargés, comme

### III. Méthode de construction de l'interaction entre deux particules

les électrons, sont représentés par des champs de spineurs de Dirac (à quatre composantes). Le Lagrangien QED peut ainsi s'écrire de manière générale

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Interaction}} + \mathcal{L}_{\text{champ EM libre}}, \quad (\text{III.1})$$

où  $\mathcal{L}_{\text{Dirac}}$  représente le Lagrangien associé au champ de Dirac libre,  $\mathcal{L}_{\text{champ}}$  est le Lagrangien associé au champ électromagnétique libre et  $\mathcal{L}_{\text{Interaction}}$  est le Lagrangien qui couple un champ de Dirac avec le champ électromagnétique. Commençons par traiter le cas du champ de Dirac. Considérons le spineur de Dirac  $\psi(\vec{x})$ , le Lagrangien associé au champ de Dirac libre s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}}(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi} \left( i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2 \right) \psi, \quad (\text{III.2})$$

où  $\bar{\psi}$  est donné par les propriétés (A.I.26). Exprimons à présent le Lagrangien associé au champ électromagnétique libre. On va le prendre de la même forme que celui adopté dans le cas de l'électrodynamique classique

$$\mathcal{L}_{\text{champ}} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (\text{III.3})$$

Finissons enfin par le terme d'interaction, qui prend en compte le couplage entre le champ de Dirac et le champ de 4-vecteurs  $\mathcal{A}_\mu(\vec{x})$ . Il s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{Interaction}} = -Qc \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \mathcal{A}_\mu \quad (\text{III.4})$$

où  $Q$  est la constante de couplage champ de Dirac/champ électromagnétique, identifiée à la charge électrique de la particule. Le Lagrangien QED s'écrit ainsi

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi} \left( i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - Qc \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu - mc^2 \right) \psi - \frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (\text{III.5})$$

Les équations d'Euler-Lagrange relatives au champ électromagnétique (C.7) s'écrivent sous la forme (C.9), où le courant conservé est ici  $J^\mu \stackrel{\text{déf}}{=} Qc \mu_0 \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ . De même, les équations d'Euler-Lagrange relatives au champ de Dirac

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0, \quad (\text{III.6})$$

s'écrivent sous la forme de l'équation de Dirac généralisée (en présence d'un terme de source)

$$(i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) \psi = Qc \mu_0 \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \psi. \quad (\text{III.7})$$

Cette équation peut se mettre sous la forme plus habituelle de l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \underbrace{\left( i\hbar c \gamma^0 \gamma^i \partial_i + mc^2 \right)}_{\mathcal{H}_{\text{libre}}} \psi + \underbrace{Qc \gamma^0 \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu}_{\mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{x})} \psi, \quad (\text{III.8})$$

où l'on identifie l'Hamiltonien libre  $\mathcal{H}_{\text{libre}}$  et le potentiel d'interaction  $\hat{V} \equiv \mathcal{H}_{\text{int}}$ .

#### III.2: Potentiel de Coulomb

À présent nous allons chercher l'expression du potentiel d'interaction de deux particules électriquement chargées (de même charge  $Q$ ) par échange d'un photon  $V_{1\gamma}$ . Pour cela, nous allons considérer un processus de diffusion dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$ , dans lequel une particule (2) va créer un champ électromagnétique avec lequel la particule (1) va interagir. Lors de la création du champ électromagnétique, la particule (2) va passer de l'état initial de 4-impulsion (on



### III. Méthode de construction de l'interaction entre deux particules

confond abusivement 4-vecteur d'onde et 4-impulsion) et spin  $(k_2^\mu, s_2)$  à l'état final  $(k_2^{\mu'}, s_2')$ . De même, l'interaction de la particule (1) avec le champ électromagnétique va induire une transition de l'état initial  $(k_1^\mu, s_1)$  à l'état final  $(k_1^{\mu'}, s_1')$ . Dans une telle situation, le spineur de l'équation (III.8) est celui associé à la particule (1) et le champ électromagnétique  $\mathcal{A}_\mu(\vec{x})$  est créé par la particule (2).

La transition de l'état initial à l'état final se fait par l'intermédiaire de l'opérateur de transition, défini dans la section II. Dans l'approximation de Born, on a

$$\langle \psi_{f_1} | \hat{T} | \psi_{i_1} \rangle \simeq \langle \psi_{f_1} | \hat{V} | \psi_{i_1} \rangle = \int d^4 \vec{x} \psi_{f_1}^\dagger(\vec{x}) \mathcal{H}_{\text{int}}(\vec{x}) \psi_{i_1}(\vec{x}). \quad (\text{III.9})$$

Or, en jauge de Lorentz ( $\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0$ ), les équations d'Euler-Lagrange (C.9) s'écrivent sous la forme

$$\square A^\nu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu, \quad (\text{III.10})$$

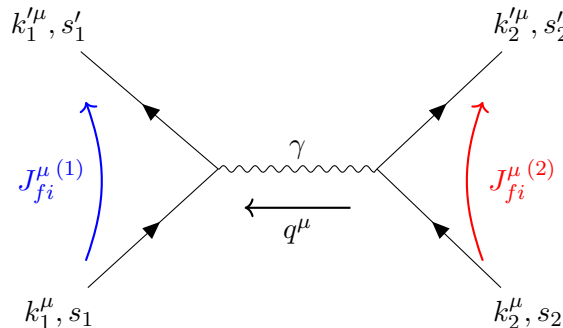
dite équation de Proca (généralisée et pour un champ de masse nulle). Dans l'approximation de Born (PWBA), le champ électromagnétique, le courant conservé et les spineurs de l'équation (III.9) sont des ondes planes

$$\begin{cases} \mathcal{A}^\nu &= \mathcal{A}_0^\nu e^{iq^\mu x_\mu} \\ \psi_{i,f} &= u_{i,f} e^{-ik_{i,f}^\mu x_\mu} \\ J_{fi}^\nu &= Q c \mu_0 \bar{u}_f \gamma^\nu u_i e^{iq^\mu x_\mu} \end{cases}, \quad (\text{III.11})$$

où l'expression de  $J_{fi}^\nu$  découle naturellement de l'équation (III.9),  $q^\mu = k_1^{\mu'} - k_1^\mu = k_2^{\mu'} - k_2^\mu$  est la 4-impulsion transférée et  $u$  est le spineur de Dirac

$$u = \sqrt{\frac{E + mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 \\ \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) \hbar c}{E + mc^2} \end{pmatrix} \chi_s, \quad (\text{III.12})$$

$\chi_s$  étant un spineur de Pauli et  $E$  étant l'énergie totale de la particule de masse  $m$ . Le courant  $J_{fi}^{\mu(1)}$ , associé à la particule (1), apparaît donc comme un courant de transition qui, par l'interaction entre (1) et le champ électromagnétique, va amener (1) de son état initial vers son état final. Le courant  $J_{fi}^{\mu(2)}$ , qui est la source du champ électromagnétique par l'équation (III.10), apparaît également comme un courant de transition car on doit avoir réciprocity du rôle des nucléons dans la diffusion, si (1) génère le champ électromagnétique, alors un courant de transition  $J_{fi}^{\mu(2)}$  doit amener (2) vers son état final. Le diagramme de Feynman suivant illustre notre propos



Injectant les ondes planes (III.11) dans l'équation (III.9), on obtient

$$\langle \psi_{f_1} | \hat{V} | \psi_{i_1} \rangle = -\frac{Q^2 c^2 \mu_0}{q^2} \int d^4 \vec{x} e^{i[k_1^{\mu'} + k_2^{\mu'} - k_1^\mu - k_2^\mu]x_\mu} \bar{u}_{s_1'}(k_1^{\mu'}) \gamma^\mu u_{s_1}(k_1^\mu) \bar{u}_{s_2'}(k_2^{\mu'}) \gamma_\mu u_{s_2}(k_2^\mu) \quad (\text{III.13})$$

### III. Méthode de construction de l'interaction entre deux particules

Soit alors  $V_{1\gamma}^0$  le potentiel affranchi des termes de normalisation  $(2\pi)^4 \delta^4(k_1^{\mu'} + k_2^{\mu'} - k_1^\mu - k_2^\mu)$ .

Dans la limite non-relativiste ( $E \sim mc^2$  et  $\frac{\hbar|\vec{k}|c}{mc^2} \ll 1$ ), on a

$$\begin{cases} \bar{u}_{s'}(k^{\mu'}) \gamma^0 u_s(k^\mu) & \simeq \chi_{s'}^\dagger \chi_s \\ \bar{u}_{s'}(k^{\mu'}) \gamma^i u_s(k^\mu) & \simeq 0 \end{cases}, \quad (\text{III.14})$$

ce qui, puisque dans  $\mathcal{R}^*$ ,  $q^0 \simeq 0$  ( $E_2 \simeq mc^2 \simeq E'_2$  dans la limite non-relativiste), nous permet finalement d'obtenir l'expression du potentiel d'interaction entre les particules chargées (potentiel Coulombien dans  $\mathcal{R}^*$ , un facteur  $\frac{1}{4\pi}$  sortirait de la transformation de Fourier inverse)

$$\begin{cases} \langle \vec{k}_1' | \hat{V} | \vec{k}_1 \rangle & = (2\pi)^4 \delta^4(k_1^{\mu'} + k_2^{\mu'} - k_1^\mu - k_2^\mu) V_{1\gamma}^0 \\ V_{1\gamma}^0 & = \frac{Q^2}{|\vec{q}|^2 \varepsilon_0} \delta_{s_1 s_1'} \delta_{s_2 s_2'}, \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$V_{1\gamma}^0$  apparaît alors comme étant l'identité dans l'espace de spin.

#### III.3: Application au potentiel inter-nucléons par échange d'un pion

L'utilisation de la théorie effective chirale est pertinente dans le domaine d'énergie délimité par les énergies de masse des degrés de liberté (les particules qui interviendront au cours de l'interaction). Ainsi, nous prendrons comme valeur basse (approximative)  $Q_{\text{low}} \sim m_\pi c^2 \simeq 139.6 \text{ MeV}$  et comme valeur haute  $Q_{\text{high}} \sim m_\rho c^2 \simeq 700 - 800 \text{ MeV}$ . Nous admettrons ici l'expression du Lagrangien effectif chiral, dont on peut néanmoins trouver une justification dans [12]. Il s'écrit de manière générale

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\pi\pi} + \mathcal{L}_{\pi N} + \mathcal{L}_{NN} \quad (\text{III.16})$$

où  $\mathcal{L}_{\pi\pi}$  est le Lagrangien du champ de pions libre,  $\mathcal{L}_{\pi N}$  décrit l'interaction entre les pions et nucléons et  $\mathcal{L}_{NN}$  est un Lagrangien de contact. À l'ordre dominant, on montre que le Lagrangien effectif s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{1}{2\hbar c} \left( \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi} - \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \vec{\pi}^2 \right) + \bar{\psi} \left( i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - M_N c^2 - \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar c \gamma^\mu \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\pi} \right) \psi - (\bar{\psi} \Gamma_\alpha \psi) (\bar{\psi} \Gamma^\alpha \psi), \quad (\text{III.17})$$

où  $\vec{\pi}$  représente les champs du triplet de pions de masse  $m_\pi$ ,  $\vec{\tau}$  représente le triplet de matrices de Pauli,  $\psi$  est le spineur de Dirac associé au nucléon de masse  $M_N$  qui interagit avec le champ de pion,  $g_A = 1.26$  et  $f_\pi = 92.4 \text{ MeV}$  sont des constantes (dites constante de couplage axiale et constante de décroissance du pion) et les quantités  $\Gamma^\alpha$  sont des matrices constantes ayant pour contrainte d'être invariantes de Lorentz. Les équations d'Euler-Lagrange relatives aux champs de pions s'écrivent

$$\partial_\mu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \pi^a)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi^a} = 0 \Rightarrow \left( \square + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2} \right) \frac{\pi^a}{\hbar c} = \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar c \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau^a \psi). \quad (\text{III.18})$$

On obtient l'équation dite de Klein-Gordon généralisée (qui comporte un terme de source), on en conclut que  $J_a^\mu \equiv \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \tau_a \psi$  est un courant conservé, au sens où  $\partial_\mu J_a^\mu = 0$ .

Le Lagrangien d'interaction  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  couplant le courant  $J_a^\mu$  et le champ de pion s'écrit alors

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g_A}{2f_\pi} \hbar c J_a^\mu \partial_\mu \pi^a. \quad (\text{III.19})$$

Comme précédemment, l'approximation PWBA nous permet d'exprimer les champs et courants comme des ondes planes

$$\begin{cases} \pi^a & = N^a e^{iq^\mu x_\mu} \\ \psi_{if} & = u_{if} e^{-ik_{if}^\mu x_\mu} \\ J_a^{\mu(j)} & = \bar{u}_{fj} \gamma^\mu \gamma_5 \tau^a u_{ij} e^{iq^\mu x_\mu} \quad j = 1, 2 \end{cases}, \quad (\text{III.20})$$

### III. Méthode de construction de l'interaction entre deux particules

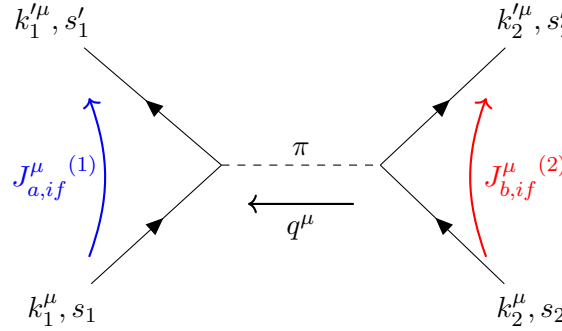
où  $u$  est le bi-spineur de Dirac (III.12) et où les courants  $J_a^{\mu(i)}$  sont des courants de transition (comme précédemment, on considère que le nucléon (2) va créer le champ de pion et que le nucléon (1) va interagir avec ce champ). Les équations d'Euler-Lagrange (III.18) nous donnent alors

$$\partial_\mu \pi^a = i q_\mu \frac{g_A}{2f_\pi} \hbar^2 c^2 \frac{i q_\nu}{-q^2 + \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2}} J_a^{\nu(2)}, \quad (\text{III.21})$$

où  $q^2 = q^\mu q_\mu$ . L'évaluation du Lagrangien d'interaction pour les ondes planes (III.20) est par conséquent

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \left( \frac{g_A \hbar c}{2f_\pi} \right)^2 J_a^{\mu(1)} \frac{q_\mu q_\nu \hbar c \delta^{ab}}{-q^2 + \Lambda_\pi^2} J_b^{\nu(2)}, \quad (\text{III.22})$$

où l'on a défini l'inverse de la longueur d'onde Compton réduite du pion  $\Lambda_\pi = \frac{m_\pi^2 c^2}{\hbar^2}$ . On cherche ici à décrire la transition entre l'état asymptotique initial d'un nucléon 1, de 4-impulsion  $k_1^\mu$  et de spin  $s_1$ , et l'état asymptotique final de ce même nucléon, de 4-impulsion  $k_1'^\mu$  et de spin  $s_1'$ , au travers de la diffusion de ce nucléon sur un autre nucléon, numéroté 2, dans le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$ . Au cours de cette diffusion, le nucléon 2 va créer un champ de pion (de spin nul et de 4-impulsion  $q^\mu$ ), passant ainsi d'un état initial de 4-impulsion  $k_2^\mu$  et de spin  $s_2$  à un état final avec  $(k_2'^\mu, s_2')$ . Le nucléon 1 va ensuite interagir avec ce champ de pion, passant ainsi de l'état initial à l'état final. L'interaction avec le champ de pion se fait par l'apparition du terme  $J_a^\mu \partial_\mu \pi^a$ . Ainsi, de même que précédemment, nous pouvons schématiser la diffusion décrite par le diagramme de Feynman suivant



De même que pour l'équation (III.13), dans l'approximation PWBA (II.8), on a  $\langle \psi_{f1} | \hat{V} | \psi_{i1} \rangle = -(2\pi)^4 \delta^4(k_1'^\mu + k_2'^\mu - k_1^\mu - k_2^\mu) \mathcal{L}_{\text{int}}$ , soit

$$\begin{aligned} \langle \psi_{f1} | \hat{V} | \psi_{i1} \rangle &= -(2\pi)^4 \delta^4(k_1'^\mu + k_2'^\mu - k_1^\mu - k_2^\mu) \\ &\times \left( \frac{g_A \hbar c}{2f_\pi} \right)^2 \hbar c (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \frac{\bar{u}_{s_1'}(k_1'^\mu) \gamma^\mu \gamma_5 u_{s_1}(k_1^\mu) q_\mu \bar{u}_{s_2'}(k_2'^\mu) \gamma^\nu \gamma_5 u_{s_2}(k_2^\mu) q_\nu}{-q^2 + \Lambda_\pi^2}. \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

Dans la limite non-relativiste ( $E \sim mc^2$  et  $\frac{\hbar |\vec{k}| c}{mc^2} \ll 1$ ), on a

$$\bar{u}_{s'}(k'^\mu) \gamma^\mu \gamma_5 u_s(k^\mu) q_\mu \simeq -\chi_{s'}^\dagger (\vec{\sigma} \cdot \vec{q}) \chi_s. \quad (\text{III.24})$$

Comme évoqué précédemment, dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ , on a  $q^0 \simeq 0$  (limite non-relativiste), donc  $q^2 = q^\mu q_\mu \simeq -|\vec{q}|^2$ . Ainsi, on peut réécrire  $V_{1\pi}^0$ , le potentiel OPE affranchi des termes de normalisation, sous la forme finale suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{k}_1' | \hat{V} | \vec{k}_1 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_1'^\mu + k_2'^\mu - k_1^\mu - k_2^\mu) V_{1\pi}^0 \\ V_{1\pi}^0 = - \left( \frac{g_A}{2f_\pi} \right)^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{q})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{q}) \hbar^3 c^3}{|\vec{q}|^2 + \Lambda_\pi^2} \end{array} \right. \quad (\text{III.25})$$

Ainsi, en procédant de la même manière que pour trouver le potentiel de Coulomb, on a trouvé le potentiel inter-nucléons par échange d'un pion. Il est bon de noter que, comme précédemment, il s'agit d'un opérateur agissant dans l'espace des spins des particules. On va à présent étudier les propriétés de  $V_{1\pi}^0$  dans le noyau le plus simple : le Deutéron, seulement constitué d'un proton et d'un nucléon.

## IV Application aux états liés d'un système à deux corps : le Deutéron

Dans cette section, nous utiliserons le potentiel OPE obtenu dans l'équation (III.25) l'appliquons au cas du Deutéron, assimilable à un système à deux corps, dont on va étudier la réduction à un corps dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ . On notera  $\vec{k}$  l'impulsion relative des deux nucléons et  $\mu$  la masse réduite. Nous écrirons l'équation aux valeurs propres dans la base d'ondes partielles (dont une introduction est donnée dans l'annexe B) et la résoudrons numériquement. À la lumière des résultats obtenus, nous mettrons en évidence la nécessité de renormaliser le potentiel  $V_{1\pi}$ , ce que nous expliciterons à ce moment là. Enfin, nous étudierons l'impact de la renormalisation sur les observables physiques expérimentalement connues.

### IV.1 : Résolution numérique de l'équation aux valeurs propres dans l'espace impulsion

Le Deutéron ( $N = Z = 1$ ) a pour moment cinétique total et parité  $J^\pi = 1^+$ . Ainsi, puisque la fonction d'onde du Deutéron est paire (c'est à dire  $\hat{\Pi}|k L L_z S S_z T T_z\rangle = (-1)^L|k L L_z S S_z T T_z\rangle$ ), on a  $L$  (le moment cinétique orbital relatif) pair. De plus, puisque les nucléons sont de spin et isospin  $1/2$ , alors d'après les règles de composition des moments cinétiques  $S$  et  $T$  peuvent prendre les valeurs 0 et 1. Si  $T = 1$ , alors il résulte un triplet d'états, ce qui est contraire au fait que l'expérience nous dit que le Deutéron est le seul état lié d'un système de deux nucléons, on a donc nécessairement  $T = 0$  et donc  $T_z = 0$ . On a de plus  $J = |L - S|, \dots, L + S = 1$ , donc les états du Deutéron sont l'onde partielle  ${}^3S_1$  (en empruntant les notations spectroscopiques  $2S+1L_J$ ), associée au canal  $L = 0$  (on parlera de canal  ${}^3S_1$ ) et l'onde partielle  ${}^3D_1$ , associé au canal  $L = 2$ . Les éléments de matrice du potentiel d'interaction contiennent, en plus des canaux  ${}^3S_1$  et  ${}^3D_1$ , les canaux couplés  ${}^3S_1 - {}^3D_1$  ( $L' = 0, L = 2$ ) et  ${}^3D_1 - {}^3S_1$  ( $L' = 2, L = 0$ ). On sait enfin que l'énergie de liaison du Deutéron est  $B = -E = 2.2245$  MeV (où  $E$  est l'énergie du Deutéron), ce qui nous servira de référence pour les énergies propres que l'on pourra obtenir de l'équation aux valeurs propres.

Du fait des symétries que présente le potentiel OPE à l'ordre dominant (rotation, translation, parité, ...), les nombres quantiques  $S, J, J_z, T$  et  $T_z$  sont conservés. De plus, les éléments de matrice de l'interaction ne dépendent pas de  $J_z$ , donc la fonction d'onde radiale  $\Psi(k)$  non plus. De même, le nombre quantique d'isospin  $T_z$  est relatif au choix du noyau étudié et sera donc omis dans la fonction d'onde. L'équation aux valeurs propres, pour un système de deux nucléons (d'impulsion relative  $\vec{k}$ ) et dans la base d'ondes partielles, s'écrit donc

$$\frac{(\hbar k)^2}{2\mu} \Psi_L^{(SJT)}(k) + \sum_{L'} \int_0^\infty dk' k'^2 V_{LL'}^{(SJTT_z)}(k, k') \Psi_{L'}^{(SJT)}(k') = E \Psi_L^{(SJT)}(k), \quad (\text{IV.1})$$

où  $\mu$  est la masse réduite du système à deux corps,  $\Psi_L^{(SJT)}(k) = \langle k(LS)JJ_zTT_z | \Psi \rangle$  et  $V_{LL'}^{(SJTT_z)}(k, k') = \langle k(LS)JTT_z | \hat{V} | k'(L'S)JTT_z \rangle$ .

Afin d'obtenir les dites valeurs propres, il nous faut d'abord pouvoir construire la matrice de l'Hamiltonien, que l'on diagonalisera ensuite (approche non-perturbative). Nous écrirons cette matrice dans la base d'ondes partielles, elle sera diagonale par bloc et chaque bloc sera associé à l'un des canaux cités précédemment. En suivant la méthode d'Erkelenz et al. [23], on obtient les

expressions des éléments de matrice du potentiel OPE dans la base d'ondes partielles (B.IV.1). Nous pouvons alors injecter les expressions (B.IV.1) dans l'équation aux valeurs propres (IV.1), que nous allons résoudre numériquement en utilisant la méthode des maillages de Lagrange (détaillée dans l'annexe D), qui consiste à tronquer l'intégrale dans l'équation (IV.1) par l'impulsion relative maximum des deux nucléons  $k_{\max}$ . Les éléments de la matrice de l'Hamiltonien que l'on souhaite diagonaliser sont ainsi donnés par l'équation (D.I.12).

Après diagonalisation, on observe une divergence progressive des minimum et maximum d'énergie lorsque le cut-off des deux nucléons augmente (voir figure D.1), ce qui est bien entendu non physique. Cela vient du fait que le potentiel  $V_{1\pi}$  (III.25) est singulier (une fonction  $\delta(\vec{r})$  et un  $\frac{1}{r^3}$  apparaissent dans l'espace position). En effet, dans l'espace position, il s'écrit

$$V_{1\pi}(\vec{r}) = \frac{(2\pi)^3}{N_k} \frac{m_\pi^3}{12\pi} \left( \frac{g_A}{2f_\pi} \right)^2 (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \left[ T_{1\pi}(\Lambda_\pi r) \hat{S}_{12}(\vec{r}) + \left( Y_{1\pi}(\Lambda_\pi r) - \frac{4\pi}{\Lambda_\pi^3} \delta(\vec{r}) \right) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \right], \quad (\text{IV.2})$$

où  $\vec{r}$  est la position relative des nucléons et où l'opérateur  $\hat{S}_{12}(\vec{r})$  et les fonctions  $Y_{1\pi}$  et  $T_{1\pi}$  sont définis par

$$\begin{cases} \hat{S}_{12}(\vec{r}) &= \frac{3}{r^2} \left[ (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) - \frac{1}{3} r^2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right] \\ Y_{1\pi}(x) &= \frac{e^{-x}}{x} \\ T_{1\pi}(x) &= Y_{1\pi}(x) \left[ 1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right] \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Cependant, les divergences dues à la singularité du potentiel OPE sont absorbées lorsque l'on renormalise le potentiel, ce que nous allons faire à présent.

### IV.2: Renormalisation

Comme dit précédemment, la renormalisation est une procédure qui permet, entre autres, d'absorber les divergences en corrigeant l'expression du Lagrangien effectif (III.17) par l'ajout de contre-terme tels que le potentiel singulier se régularise. Cet ajout de contre-terme n'apparaît pas de nulle part. En effet, le Lagrangien contient une infinité de termes, que l'on organise par ordre décroissant d'importance (on peut effectuer une analyse dimensionnelle pour cela) et que l'on tronque afin que les calculs soient faisables. Cette façon d'organiser les termes du Lagrangien et de tronquer à un ordre que l'on estime suffisant pour reproduire les résultats expérimentaux s'appelle le comptage de puissance. La démarche employée précédemment pour trouver l'expression du potentiel OPE, appliquée au Lagrangien  $\mathcal{L}_{NN}$ , nous permet d'obtenir le potentiel de contact

$$\langle \vec{k}' | \hat{V}_{ct} | \vec{k} \rangle = C_S + C_T (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2), \quad (\text{IV.4})$$

où  $C_S$  et  $C_T$  sont des constantes (dites de basse énergie) à déterminer. Le potentiel total, à l'ordre dominant, est alors la somme des termes de courte ( $V_{ct}$ ) et longue portée ( $V_{1\pi}$ , il n'est adapté que pour des longues distances car il diverge sinon). Pour renormaliser ce potentiel, dans la base d'ondes partielles et dans le cas du Deutéron, il nous faut :

1. Ajouter des contre-terme de contact au potentiel OPE, pour les canaux qui le nécessitent (dans notre cas, le seul canal pour lequel on ajoutera un terme de contact est le canal  $^3S_1$ ), faisant ainsi intervenir des constantes de basse énergie.
2. Régulariser le potentiel total ainsi formé, ce que l'on va faire en le multipliant par une fonction de régularisation  $f_{\text{rég}}$ .
3. Ajuster la valeur des constantes en se basant sur la théorie sous-jacente ou les résultats expérimentaux (ce qui revient à paramétrer  $V_{ct}$ ) de sorte à absorber la dépendance en  $f_{\text{rég}}$ .

## IV. Application aux états liés d'un système à deux corps : le Deutéron

La fonction de régularisation que l'on utilisera, qui dépend des impulsions relatives entrantes  $k$  et sortantes  $k'$  est  $f_{\text{rég}}(k', k) = \exp[-(k'^4 + k^4)/\Lambda^4]$ , où  $\Lambda$  est un paramètre de coupure (que l'on peut aussi bien exprimer en MeV qu'en  $\text{fm}^{-1}$ , par un jeu des constantes  $\hbar$  et  $c$ ), que l'on relie à l'impulsion  $k_{\text{max}}$  (la borne supérieure de l'intégrale dans (IV.1)) par  $\hbar k_{\text{max}} c = (\Lambda + 700) \text{ MeV}$ . L'élément de matrice du potentiel total, dans le canal du  ${}^3S_1$  (pour les autres canaux il suffit de multiplier les expressions correspondantes de (B.IV.1) par  $f_{\text{rég}}$ ), est donc donné par

$$\langle k' (L=0 S=1) J=1 T T_z | \hat{V}_{\text{LO}} | k (L=0 S=1) J=1 T T_z \rangle = f_{\text{rég}}(k', k) \left( V_{ct}^{(3S_1)}(k', k) + V_{1\pi}^{(3S_1)}(k', k) \right) \quad (\text{IV.5})$$

$$\text{où } V_{ct}^{(3S_1)}(k', k) = \frac{4\pi N'_k}{N_k} C_{3S_1} \frac{\hbar c}{\Lambda_\pi^2},$$

avec  $C_{3S_1}$  une constante de basse énergie adimensionnée, dont la valeur dépend du paramètre de coupure  $\Lambda$ . En effet, en injectant le potentiel  $V_{\text{LO}}$  dans l'équation aux valeurs propres (IV.1), on diagonalise numériquement la matrice de l'Hamiltonien (D.I.12) ainsi formé, pour une valeur de  $\Lambda$ , puis on cherche la valeur de la constante  $C_{3S_1}$  telle que le spectre de l'Hamiltonien régularisé présente une unique valeur propre dont la valeur est égale (nous nous sommes arrêtés à une précision de l'ordre de 100 eV) de la valeur expérimentale de l'énergie de liaison du noyau (on a un état lié, l'énergie attendue est négative :  $E = -2.2245 \text{ MeV}$ ). En faisant varier  $\Lambda$ , nous obtenons la courbe  $C_{3S_1}(\Lambda)$  suivante

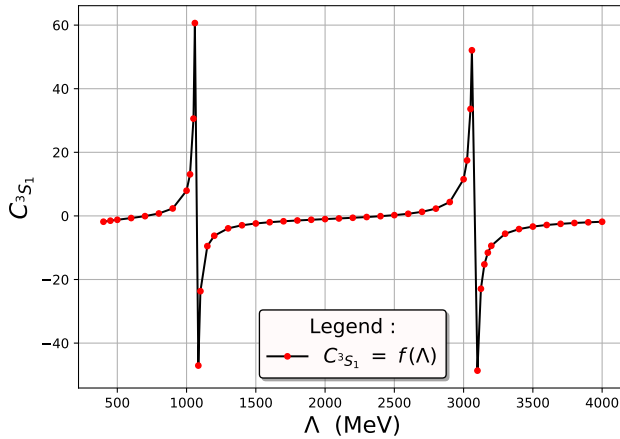


FIGURE 1 – Évolution de la constante  $C_{3S_1}$  en fonction de la valeur du cut-off  $\Lambda$ , ici exprimé en MeV. Le tracé noir interpole les points de calcul.

La courbe obtenue est similaire à la figure 2 de l'article [18].

Afin de compléter notre étude, il est nécessaire d'observer la dépendance en  $\Lambda$  de quelques observables du Deutéron (autres que l'énergie), afin de confronter les prédictions théoriques et l'expérience. On s'attend à observer une faible dépendance en  $\Lambda$ , et donc obtenir des valeurs proches de celles expérimentales.

### IV.3 : Impact de la renormalisation sur les observables du Deutéron

Nous avons déterminé  $C_{3S_1}$  en essayant de retrouver la valeur expérimentale de l'énergie du Deutéron, on va à présent utiliser les valeurs de  $C_{3S_1}$  obtenues pour des valeurs données de  $\Lambda$  afin de trouver la valeur d'autres observables du Deutéron. On va ainsi s'intéresser à la dimension caractéristique du noyau ainsi que sa forme, c'est à dire la valeur moyenne de sa taille  $\langle r \rangle$ , dont la valeur expérimentale est  $\langle r \rangle_{\text{exp}} = 1.97535 \text{ fm}$  et son moment quadrupolaire  $Q_{20}$ , qui rend compte de la non-sphéricité du noyau et dont la valeur expérimentale est  $|Q_{20}|_{\text{exp}} = 0.2859 \text{ fm}^2$  [12]. On peut les définir par

$$\langle r \rangle = \langle \psi | \hat{R} | \psi \rangle = \int dr r^2 \sum_{L=0,2} r |\psi_L(r)|^2 \quad ; \quad |Q_{20}| = \left| \langle \psi | \hat{Q}_{20} | \psi \rangle \right| = \left| \int dr \int d\hat{r} r^2 \sum_{L=0,2} r^2 Y_2^0(\hat{r}) |\psi_L(r)|^2 \right| \quad (\text{IV.6})$$

## V. Conclusion

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 2

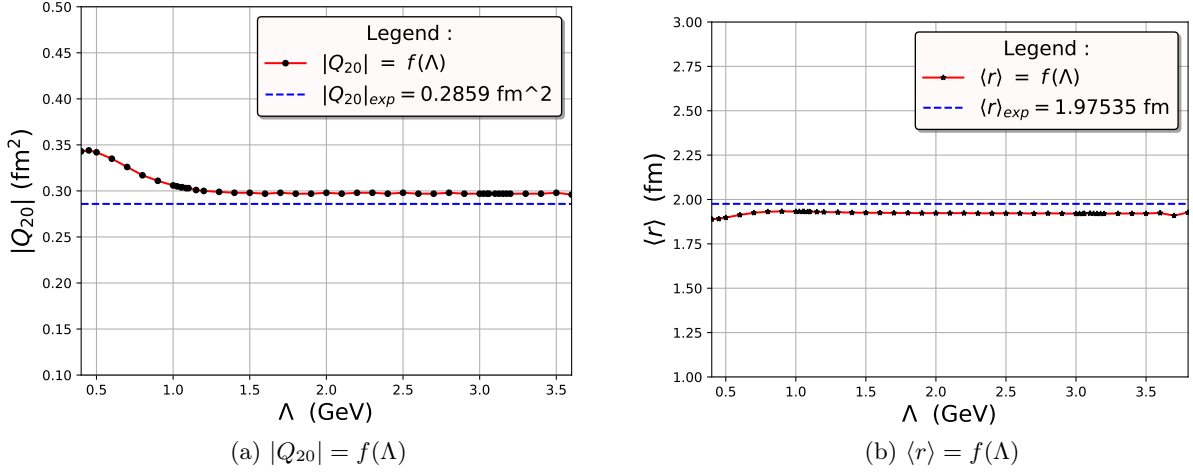


FIGURE 2 – À gauche, la courbe  $|Q_{20}| = f(\Lambda)$ , ainsi qu'un fit linéaire de la partie d'intérêt. À droite, la courbe  $\langle r \rangle = f(\Lambda)$ , avec également un fit linéaire de la partie d'intérêt.

Tout d'abord, il est bon de noter que le moment quadrupolaire est négatif, donc le Deuteron est aplati vis-à-vis de l'axe d'observation. À basse énergie, on remarque que les observables sont sensibles à la coupure  $\Lambda$ , mais dans un régime intermédiaire il n'y a pas de dépendance significative en  $\Lambda$  et les valeurs théoriques sont assez proches des valeurs expérimentales. On peut en conclure que les termes à l'ordre dominant que l'on a considéré dans l'expression du Lagrangien effectif (III.16) suffisent pour reproduire les données expérimentales.

## V Conclusion

Au cours de ce travail, nous avons cherché à construire l'interaction entre deux nucléons et avons, pour cela, assimilé cette interaction à un processus de diffusion dans lequel le nucléon 1 interagit avec le champ du pion, créé par le nucléon 2, ce qui les amène de l'état initial à l'état final, ce qu'on a décrit sous la forme d'un courant de transition.

Afin de poser le cadre de notre étude, il était nécessaire de présenter quelques éléments de la théorie de la diffusion, notamment les notions d'opérateur de diffusion, de transition et l'approximation de Born PWBA, qui nous a permis de relier les opérateurs de transition et potentiel. De même, basant notre étude sur le formalisme de la théorie effective des champs, nous devons expliciter la notion de champ et poser le cadre mathématique associé, notamment le Lagrangien d'un ensemble continu de coordonnées, tel qu'un champ.

Avant de construire l'interaction inter-nucléons, nous avons mis au point une méthode permettant de retrouver l'expression du potentiel de Coulomb à partir d'un processus de diffusion, ce qui était pertinent puisque l'interaction Coulombienne n'est autre que l'interaction entre une charge 1 et le champ électromagnétique créé par une charge 2. Étant plus habitués à l'électromagnétisme qu'à l'interaction forte, nous disposons alors d'une méthode par analogie nous permettant de trouver de même l'expression du potentiel OPE.

Une fois l'expression de ce potentiel obtenue, nous l'avons appliquée au cas du Deuteron, afin de confronter les résultats théoriques et expérimentaux. Nous avons pour cela exprimé l'équation aux valeurs propres dans la base d'ondes partielles et avons diagonalisé numériquement la matrice de l'opérateur Hamiltonien, à l'aide de la méthode des maillages de Lagrange. Nous avons alors remarqué que les énergies propres divergeaient avec l'impulsion relative maximum des deux nucléons, ce que nous avons associé au fait que le potentiel OPE, dans l'espace position, était singulier. Nous avons alors renormalisé le potentiel afin d'absorber les divergences du potentiel OPE, introduisant ainsi un paramètre de coupure  $\Lambda$  et une constante de basse énergie  $C_{3S_1}$ , que nous avons ajustée à partir des données expérimentales, afin de supprimer la dépendance en la

fonction de régularisation. Il était alors nécessaire de vérifier que la théorie effective qui nous a permis de trouver le potentiel inter-nucléons reproduisait bien les données expérimentales, nous avons alors testé l'évolution des observables du Deutéron en fonction de  $\Lambda$  et avons confirmé qu'à part pour de faibles coupures, les observables ne dépendaient que faiblement de  $\Lambda$ .



## Annexe A

# Définitions et notations

### A.I Notations et conventions employées

Dans l'ensemble du rapport, nous avons employé les raccourcis 4-vecteurs et 3-vecteurs pour désigner les quadrivecteurs et les trivecteurs. Nous avons également appliqué la convention de sommation d'Einstein sur des indices répétés.

On définit les composantes contravariantes du 4-vecteur position (ou 4-position) par

$$x^\mu = (ct, \vec{r}) \quad (\text{A.I.1})$$

où  $\vec{r}$  est le 3-vecteur position. On définit également les composantes contravariantes de la 4-impulsion par

$$p^\mu = \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (\text{A.I.2})$$

On rappelle alors que dans le cadre de la relativité restreinte, on a  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$  et  $E = \gamma mc^2$ , où  $\gamma$  est le facteur de Lorentz, que l'on définira plus bas.

- Les indices grecs  $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$  seront utilisés afin de désigner les composantes spatio-temporelles des 4-vecteurs.
- Les indices latins  $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$  désigneront quant à eux les composantes des 3-vecteurs.

On adopte également la métrique de Minkowski, définie par la matrice des composantes contravariantes et covariantes du tenseur métrique

$$(g^{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.I.3})$$

On définit alors les composantes covariantes des 4-vecteurs précédents par

$$\begin{cases} x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{r}) \\ p_\mu &= g_{\mu\nu} p^\nu = \left( \frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \end{cases} \quad (\text{A.I.4})$$

Le carré de l'intervalle infinitésimal d'espace-temps s'écrit donc

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx^\mu dx_\mu = dx_\nu dx^\nu = c^2(dt)^2 - (d\vec{r})^2 \quad (\text{A.I.5})$$

Définissons aussi l'opérateur 4-nabla dont les composantes covariantes et contravariantes sont

$$\begin{cases} \partial_\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \\ \partial^\mu \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \end{cases} \quad (\text{A.I.6})$$

Soient  $x^\mu$  le 4-vecteur position (on s'affranchit à présent du fait de préciser de quelles composantes il s'agit) d'un évènement dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen et  $x'^\nu$  le 4-vecteur position d'un évènement dans  $\mathcal{R}'$  galiléen également. On considère que  $\mathcal{R}'$  est en translation rectiligne et uniforme selon l'axe  $(Ox)$  à la vitesse  $v$ . Les 4-vecteurs définis plus haut (ainsi que n'importe quel 4-vecteur) obéissent à la règle de transformation suivante (dite de Lorentz spéciale selon  $(Ox)$ ) :

$$\begin{cases} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \end{cases} \quad (\text{A.I.7})$$

où les  $\Lambda^\mu{}_\nu$  sont les éléments de la matrice de Lorentz :

$$(\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (\text{A.I.8})$$

et les  $\Lambda_\mu{}^\nu$  sont les éléments de la matrice de Lorentz inverse :

$$(\Lambda_\mu{}^\nu) = (\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.I.9})$$

On a donc la propriété suivante :

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\mu{}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{A.I.10})$$

En mécanique quantique, l'opérateur 4-impulsion est défini (en représentation position) par

$$\begin{cases} p^\mu &= i\hbar \partial^\mu = \left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla} \right) \\ p_\mu &= i\hbar \partial_\mu = \left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, i\hbar \vec{\nabla} \right) \end{cases} \quad (\text{A.I.11})$$

Soit alors  $\psi(\vec{x})$  le champ spinoriel relativiste d'un nucléon de masse  $M_N$ , son évolution est déterminée par l'équation de Dirac (pour un champ libre) :

$$[\not{p}c - M_N c^2] \psi(\vec{x}) = 0 \quad (\text{A.I.12})$$

où  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu = i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu$  (notation de Feynman), les quantités  $\gamma^\mu$  étant les matrices  $4 \times 4$  de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.I.13})$$

où  $\mathbb{1}_2$  est la matrice identité bi-dimensionnelle et les matrices  $\sigma^i$  sont les matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.I.14})$$

qui sont hermitiques et obéissent aux règles de commutation

$$[\sigma^i, \sigma^j] = \sigma^i \sigma^j - \sigma^j \sigma^i = 2i \varepsilon^{ijk} \sigma^k \quad (\text{A.I.15})$$

où  $\varepsilon^{ijk}$  est le symbole de Levi-Civita, défini par

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, j = k, i = k \\ -1 & \text{si } (i, j, k) = (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 1, 3) \\ +1 & \text{si } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \end{cases} \quad (\text{A.I.16})$$

Les matrices  $\sigma^i$  obéissent également aux règles d'anticommutation

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = \sigma^i \sigma^j + \sigma^j \sigma^i = 2\delta_{ij} \quad (\text{A.I.17})$$

ce qui nous permet d'obtenir la relation

$$\sigma^i \sigma^j = i\varepsilon^{ijk} \sigma^k + \delta_{ij} \quad (\text{A.I.18})$$

Enfin, si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont des opérateurs vectoriels tels que

$$[A_i, \sigma_i] = [B_i, \sigma_i] = 0 \quad (\text{A.I.19})$$

on a

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = (\sigma_i A_i)(\sigma_i B_i) = (\vec{A} \cdot \vec{B})\mathbb{1}_2 + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{A.I.20})$$

où l'on a sommé sur l'indice  $i$ .

On peut considérer que les protons et neutrons sont deux facettes d'une même particule, le nucléon, dont la différence principale (on ignore la différence de masse) provient du fait que le proton est chargé, contrairement au neutron. Ceci est décrit par l'opérateur d'isospin  $\vec{T}$ , qui agit de la même manière que l'opérateur de spin, mais dans l'espace d'isospin (il a pour composantes  $T_1, T_2, T_3$ ). Ainsi, de même que l'on prend en compte les degrés de liberté de spin, on prendra en compte les degrés de liberté d'isospin. Si l'on considère que le nucléon est décrit par le vecteur  $|t m_t\rangle$ , l'analogie avec le spin donne

$$\begin{cases} \vec{T}^2 |t m_t\rangle &= t(t+1) |t m_t\rangle \\ T_3 |t m_t\rangle &= m_t |t m_t\rangle \end{cases} \quad (\text{A.I.21})$$

où il y a  $(2t+1)$  valeurs  $m_t = -t, -t+1, \dots, t-1, t$ . Dans le cas d'un système de deux nucléons, comme nous l'avons vu pour le Deutéron,  $t$  peut prendre les valeurs 0 et 1 (analogie de l'addition de deux spin  $1/2$ ). La valeur  $t = 1$  conduit à un triplet d'état (qui ne peuvent donc pas décrire le Deutéron, qui est le seul état lié de deux nucléons) et la valeur  $t = 0$  conduit à un singulet

$$\begin{cases} |t=1, m_t=1\rangle &= pp \\ |t=1, m_t=0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}(pn + np) \\ |t=1, m_t=-1\rangle &= nn \\ |t=0, m_t=0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}(pn - np) \end{cases} \quad (\text{A.I.22})$$

On peut également, de manière similaire au spin, définir les matrices de Pauli d'isospin

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.I.23})$$

qui vérifient les relations

$$\tau^i \tau^j = i \varepsilon^{ijk} \tau^k + \delta_{ij} \quad (\text{A.I.24})$$

Les matrices de Dirac, quant à elles, vérifient l'algèbre de Clifford

$$\frac{1}{2} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu} \mathbb{1}_4 = \begin{cases} \mathbb{1}_4 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ -\mathbb{1}_4 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (\text{A.I.25})$$

et satisfont les propriétés

$$\begin{cases} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \gamma^0 \gamma^0 = \gamma^0 \\ \gamma^{i\dagger} &= \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = -\gamma^i \\ \bar{\psi} &= \psi^\dagger \gamma^0 \end{cases} \quad (\text{A.I.26})$$

Afin de compléter notre collection de matrices, on peut définir la matrice  $\gamma^5$  par

$$\gamma^5 = \gamma_5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.I.27})$$

et qui satisfait les propriétés

- $\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0$
- $(\gamma^5)^2 = \mathbb{1}_4$
- $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$

Le commutateur des matrices de Dirac est

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (\text{A.I.28})$$

et on a

$$\begin{cases} \gamma^\mu \gamma^\nu &= g^{\mu\nu} - i \sigma^{\mu\nu} \\ \sigma^{ij} &= \varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix} \\ \sigma^{0i} &= i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma^{i0} \end{cases} \quad (\text{A.I.29})$$

## A.II Brèves définitions sur les symétries

On va à présent proposer quelques définitions générales des types de symétrie rencontrées au cours de notre étude ainsi que des brisures de symétrie qui y sont associées.

- **Symétrie continue** : La symétrie continue renvoie à la structure mathématique du groupe utilisé pour décrire formellement la symétrie. On dit qu'une symétrie est continue lorsque les paramètres qui la déterminent varient continûment. On peut citer par exemple la symétrie de rotation, associée au groupe  $SO(3)$ , paramétré par les angles d'Euler. De manière plus générale, une symétrie continue est associée à un groupe de Lie.

- **Symétrie globale** : La symétrie globale renvoie à la structure physique de la théorie en question. On dit qu'une symétrie est globale si on effectue la même transformation en tous les points du système afin d'aboutir à une configuration du système équivalente à la configuration de départ. À titre d'exemple, la loi de la gravitation universelle de Newton est invariante sous les transformations globales de rotation et de translation, c'est à dire que l'interaction gravitationnelle qui s'exerce entre deux corps est inchangée lorsque l'on effectue une rotation et/ou une translation identiques sur les deux corps.
- **Symétrie locale** : Lorsque l'on effectue une transformation différente en chaque point de l'espace (comme la transformation de jauge des potentiels en électromagnétisme), et que la théorie admet une symétrie qui autorise ces transformations, on parle de symétrie locale. Dans le cas de l'électromagnétisme, la symétrie locale est une symétrie interne, qui agit sur les champs de la théorie. Ainsi, les champs étant invariant lors de la transformation de jauge des potentiels, on parle d'invariance de jauge. On dit alors que l'électromagnétisme est une théorie de jauge.
- **Brisure de symétrie** : Lorsque la symétrie attendue n'est pas observée, on parle de brisure de symétrie. Si la symétrie n'est pas fondamentalement invariante, on dit que la brisure est explicite, c'est notamment le cas de la symétrie chirale, que l'on a simplement évoqué. Si en revanche la symétrie attendue est fondamentalement invariante mais que les conditions expérimentales sont telles que la symétrie n'apparaît pas, la brisure de symétrie est alors dite spontanée, c'est le cas du ferromagnétisme. En effet, un corps ferromagnétique admet une aimantation spontanée en dessous de sa température de Curie, ce qui fixe une direction de l'espace pour le comportement des électrons dans le matériau et brise ainsi l'isotropie des lois de la mécanique quantique (symétrie de rotation). Enfin, le fait de passer d'une phase où la symétrie est brisée à une phase où elle est présente s'appelle une transition de phase.

## Annexe B

# La base d'ondes partielles

Dans cette annexe, nous allons introduire la base d'ondes partielles dans les espaces position et impulsion, nous nous limiterons ici à l'étude d'un corps seul (issu de la réduction du problème à deux corps). Nous utiliserons, pour cela, les notations utilisées dans [1] et [2].

Dans toute la suite de cette annexe, les kets position  $|\vec{r}\rangle$  seront normalisés selon

$$\langle \vec{r} | \vec{r}' \rangle = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

et obéiront à la relation de fermeture

$$\int d^3\vec{r} |\vec{r}\rangle \langle \vec{r}| = \mathbb{1}.$$

### B.I Base d'ondes partielles dans l'espace impulsionnel

Les ondes planes  $|\vec{k}\rangle$  sont des états propres de l'opérateur impulsion  $\hat{\vec{P}}$  associés aux valeurs propres  $\hbar\vec{k}$ , où  $\hbar\vec{k}$  est ici l'impulsion relative du système à deux corps. Ils sont normalisés selon

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = N_k \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{B.I.1})$$

où  $N_k$  est un facteur de normalisation tel que la relation de fermeture s'écrit

$$\frac{1}{N_k} \int d^3\vec{k} |\vec{k}\rangle \langle \vec{k}| = \mathbb{1}. \quad (\text{B.I.2})$$

La distribution de Dirac  $\delta(\vec{k} - \vec{k}')$  s'obtient à partir de la transformation de Fourier

$$\delta(\vec{k} - \vec{k}') = \int \frac{d^3\vec{r}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}}, \quad (\text{B.I.3})$$

ce qui nous permet d'écrire la projection de l'onde plane  $|\vec{k}\rangle$  dans l'espace position comme

$$\langle \vec{r} | \vec{k} \rangle = \sqrt{\frac{N_k}{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (\text{B.I.4})$$

Définissons à présent la base d'ondes partielles. Un état d'onde partielle (aussi appelé état d'onde sphérique) est un état d'énergie cinétique et de moment cinétique orbital parfaitement définis, la base d'ondes partielles, que nous exprimerons dans la représentation impulsion, et que nous

noterons  $\{|k L L_z\rangle\}$  est donc composée d'états propres communs aux opérateurs d'énergie cinétique  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2\mu}$  (où  $\mu$  est la masse réduite du système à deux corps) et de moments orbitaux  $\hat{L}^2$  et  $\hat{L}_z$

$$\begin{cases} \hat{H}_0 |k L L_z\rangle &= \frac{(\hbar k)^2}{2\mu} |k L L_z\rangle \\ \hat{L}^2 |k L L_z\rangle &= L(L+1)\hbar^2 |k L L_z\rangle \\ \hat{L}_z |k L L_z\rangle &= L_z \hbar |k L L_z\rangle \end{cases} \quad (\text{B.I.5})$$

Les états d'ondes partielles sont normalisés selon

$$\langle k L L_z | k' L' L'_z \rangle \stackrel{\text{déf}}{=} N'_k \frac{\delta(k - k')}{k k'} \delta_{LL'} \delta_{L_z L'_z} \quad (\text{B.I.6})$$

et obéissent à la relation de fermeture

$$\frac{1}{N'_k} \sum_{L=0}^{+\infty} \sum_{L_z=-L}^L \int_0^{+\infty} dk k^2 |k L L_z\rangle \langle k L L_z| = \mathbb{1}. \quad (\text{B.I.7})$$

Connaissant la décomposition en ondes sphériques de l'onde plane

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 4\pi \sum_L \sum_{L_z} i^L j_L(kr) \left( Y_L^{L_z}(\hat{k}) \right)^* Y_L^{L_z}(\hat{r}), \quad (\text{B.I.8})$$

où les fonctions  $j_L(x)$  sont les fonctions de Bessel d'ordre  $L$  et les quantités  $Y_L^{L_z}(\hat{k})$  sont les harmoniques sphériques ( $\hat{k}$  et  $\hat{r}$  désignent respectivement les parties angulaires de  $\vec{k}$  et  $\vec{r}$ ), on peut exprimer l'onde plane  $|\vec{k}\rangle$  dans la base d'ondes partielles et inversement

$$\begin{cases} |\vec{k}\rangle &= \sqrt{\frac{N_k}{N'_k}} \sum_{L=0}^{+\infty} \sum_{L_z=-L}^L i^L \left( Y_L^{L_z}(\hat{k}) \right)^* |k L L_z\rangle \\ |k L L_z\rangle &= \sqrt{\frac{N'_k}{N_k}} i^{-L} \int d\hat{k} Y_L^{L_z}(\hat{k}) |\vec{k}\rangle \end{cases} \quad (\text{B.I.9})$$

## B.II Base d'ondes partielles dans l'espace des positions

De même que dans l'espace des impulsions, on définit la base d'ondes partielles dans l'espace position  $\{|r L L_z\rangle\}$  comme étant la base composée des vecteurs propres de  $\hat{R}^2$ ,  $\hat{L}^2$  et  $\hat{L}_z$

$$\begin{cases} \hat{R}^2 |r L L_z\rangle &= r^2 |r L L_z\rangle \\ \hat{L}^2 |r L L_z\rangle &= L(L+1)\hbar^2 |r L L_z\rangle \\ \hat{L}_z |r L L_z\rangle &= L_z \hbar |r L L_z\rangle \end{cases} \quad (\text{B.II.1})$$

Ces états d'ondes partielles, dans l'espace position, sont normalisés selon

$$\langle r L L_z | r' L' L'_z \rangle = \frac{\delta(r - r')}{r r'} \delta_{LL'} \delta_{L_z L'_z} \quad (\text{B.II.2})$$

et la relation de fermeture s'écrit

$$\sum_{L=0}^{+\infty} \sum_{L_z=-L}^L \int_0^{+\infty} dr |r L L_z\rangle \langle r L L_z| = \mathbb{1}. \quad (\text{B.II.3})$$

De même que pour l'équation (B.I.9), on peut projeter  $|\vec{r}\rangle$  dans la base d'ondes partielles et inversement

$$\begin{cases} |\vec{r}\rangle &= \sum_L \sum_{L_z} \left( Y_L^{L_z}(\hat{r}) \right)^* |r L L_z\rangle \\ |r L L_z\rangle &= \int d\hat{r} Y_L^{L_z}(\hat{r}) |\vec{r}\rangle \end{cases} \quad (\text{B.II.4})$$

En se servant alors de l'expression (B.I.4) et des projections (B.I.9) et (B.II.4), on peut calculer le produit scalaire des vecteurs de la base d'ondes partielles de chaque espace

$$\langle r L' L'_z | k L L_z \rangle = \delta_{L'L} \delta_{L'_z L_z} \sqrt{\frac{2}{\pi}} N'_k j_L(kr). \quad (\text{B.II.5})$$

De plus, soit  $|\psi\rangle$  l'état du système à deux corps réduit, qui appartient à l'espace  $\mathcal{E}_r$  des positions, on peut l'exprimer dans la base d'ondes partielles de chaque espace

$$|\psi\rangle = \sum_L \sum_{L_z} \int dr r^2 \int d\hat{r} \underbrace{\left( Y_L^{L_z}(\hat{r}) \right)^* \psi(\vec{r})}_{\psi_{LL_z}(r)} |r L L_z\rangle \quad (\text{B.II.6a})$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{N'_k} \sum_L \sum_{L_z} \int dk k^2 \int d\hat{k} \underbrace{\left( Y_L^{L_z}(\hat{k}) \right)^* \tilde{\psi}(\vec{k})}_{\tilde{\psi}_{LL_z}(k)} |k L L_z\rangle, \quad (\text{B.II.6b})$$

où  $\tilde{\psi}(\vec{k}) = \mathcal{F}\{\psi(\vec{r})\}$  est la transformée de Fourier de  $\psi(\vec{r})$ .

### B.III Ajout des degrés de liberté de spin et d'isospin

L'ajout des degrés de liberté de spin et d'isospin à la base d'ondes planes donne

$$|\vec{k} S S_z T T_z\rangle = |\vec{k}\rangle \otimes |S S_z\rangle \otimes |T T_z\rangle = \sqrt{\frac{N_k}{N'_k}} \sum_{L=0}^{+\infty} \sum_{L_z=-L}^L i^L \left( Y_L^{L_z}(\hat{k}) \right)^* |k L L_z\rangle \otimes |S S_z\rangle \otimes |T T_z\rangle. \quad (\text{B.III.1})$$

On peut alors définir la base d'ondes partielles avec couplage spin-orbite  $\{|k(LS) J J_z T T_z\rangle\}$ , dont les vecteurs sont des éléments de l'espace produit tensoriel  $\mathcal{E}_r \otimes \mathcal{E}_S \otimes \mathcal{E}_T$  des espaces radial, de spin et d'isospin et peuvent être exprimés par

$$|k(LS) J M T T_z\rangle = \sum_{L_z=-L}^L \sum_{S_z=-S}^S C_{LL_z S S_z}^{J J_z} |k L L_z\rangle \otimes |S S_z\rangle \otimes |T T_z\rangle, \quad (\text{B.III.2})$$

où les quantités  $C_{LL_z S S_z}^{J J_z}$  sont les coefficients de Clebsch-Gordan, et sont normalisés selon

$$\langle k(LS) J J_z T T_z | k'(L'S') J' J'_z T' T'_z \rangle = N'_k \frac{\delta(k-k')}{k k'} \delta_{LL'} \delta_{SS'} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \delta_{TT'} \delta_{T_z T'_z}. \quad (\text{B.III.3})$$

Ils obéissent à la relation de fermeture

$$\frac{1}{N_k} \sum_{\substack{L, S, J \\ J_z, T, T_z}} \int_0^{+\infty} dk k^2 |k(LS) J J_z T T_z\rangle \langle k(LS) J J_z T T_z| = \mathbb{1}, \quad (\text{B.III.4})$$

où  $J = |L - S|, \dots, L + S$  et  $J_z = -J, \dots, J$ .

En s'appuyant sur [2], introduisons alors le tenseur harmonique sphérique de rang  $S$

$$\mathcal{Y}_{JJ_z}^{LS}(\hat{k}) = \sum_{S_z=-S}^S \left\{ \sum_{L_z=-L}^L Y_L^{L_z}(\hat{k}) C_{LL_z S S_z}^{J J_z} \right\} |S S_z\rangle, \quad (\text{B.III.5})$$



## B.IV. Expression des éléments de matrice du potentiel OPE dans la base d'ondes partielles

qui nous permet d'écrire les relations de passage de la base d'ondes planes comprenant les degrés de liberté de spin et d'isospin à celle d'ondes partielles avec couplage spin-orbite et comprenant également ces degrés de liberté

$$|\vec{k} S S_z T T_z\rangle = \sqrt{\frac{N_k}{N'_k}} \sum_{L, J, J_z} i^L \left( \mathcal{Y}_{JJ_z}^{LS}(\hat{k}) \right)_{S_z}^* |k (LS) J J_z T T_z\rangle \quad (\text{B.III.6a})$$

$$|k (LS) J J_z T T_z\rangle = \sqrt{\frac{N'_k}{N_k}} i^{-L} \sum_{S_z} \int d\hat{k} \left( \mathcal{Y}_{JJ_z}^{LS}(\hat{k}) \right)_{S_z} |\vec{k} S S_z T T_z\rangle. \quad (\text{B.III.6b})$$

Dans l'espace des positions, on peut également définir des états d'ondes partielles couplant les moments cinétique orbital et de spin

$$|r (LS) J J_z T T_z\rangle = \sum_{L_z, S_z} Y_L^{L_z}(\hat{r}) C_{LL_z S S_z}^{JJ_z} |r L L_z\rangle \otimes |S S_z T T_z\rangle. \quad (\text{B.III.7})$$

De même que précédemment, on a

$$|\vec{r} S S_z T T_z\rangle = \sum_{L, L_z, J, J_z} \left( \mathcal{Y}_{JJ_z}^{LS}(\hat{r}) \right)_{S_z}^* |r (LS) J J_z T T_z\rangle \quad (\text{B.III.8a})$$

$$|r (LS) J J_z T T_z\rangle = \sum_{S_z} \int d\hat{k} \left( \mathcal{Y}_{JJ_z}^{LS}(\hat{r}) \right)_{S_z} |\vec{r} S S_z T T_z\rangle. \quad (\text{B.III.8b})$$

Ces états sont de plus normalisés selon

$$\langle r (LS) J J_z T T_z | r' (L'S) J' J'_z T' T'_z \rangle = \frac{\delta(r' - r)}{r r'} \delta_{LL'} \delta_{JJ'} \delta_{J_z J'_z} \delta_{TT'} \delta_{T_z T'_z} \quad (\text{B.III.9})$$

et obéissent à la relation de fermeture

$$\sum_{\substack{L, S, J \\ J_z, T, T_z}} \int_0^{+\infty} dr r^2 |r (LS) J J_z T T_z\rangle \langle r (LS) J J_z T T_z| = \mathbb{1}. \quad (\text{B.III.10})$$

## B.IV Expression des éléments de matrice du potentiel OPE dans la base d'ondes partielles

Nous allons ici détailler les expressions des éléments de matrice du potentiel OPE dans la base d'ondes partielles, que l'on obtient en suivant la méthode d'Erkelenz et al. [23]

$$\left\{ \begin{array}{lcl} V_{1\pi}^{(3S_1)}(k', k) & = & -\frac{4\pi}{3} \frac{N'_k}{N_k} \left( \frac{g_A \hbar c}{2f_\pi} \right)^2 \hbar c \left( 1 + \frac{\Lambda_\pi^2}{4kk'} K_0^{(0)}(a) \right) (\delta_{T1} - 3\delta_{T0}) \\ V_{1\pi}^{(3D_1)}(k', k) & = & \frac{4\pi}{3} \frac{N'_k}{N_k} \left( \frac{g_A \hbar c}{2f_\pi} \right)^2 \hbar c \left( \frac{1}{2} K_1^{(0)}(a) - \frac{k'^2 + k^2}{4kk'} K_2^{(0)}(a) \right) (\delta_{T1} - 3\delta_{T0}) \\ V_{1\pi}^{(3S_1-3D_1)}(k', k) & = & 4\pi \frac{N'_k}{N_k} \left( \frac{g_A \hbar c}{2f_\pi} \right)^2 \hbar c \frac{\sqrt{2}}{6kk'} (\delta_{T1} - 3\delta_{T0}) \left( k^2 K_0^{(0)}(a) + k'^2 K_2^{(0)}(a) - 2kk' K_1^{(0)}(a) \right) \\ V_{1\pi}^{(3D_1-3S_1)}(k', k) & = & V_{1\pi}^{(3S_1-3D_1)}(k, k') \end{array} \right., \quad (\text{B.IV.1})$$

où les intégrales  $K_n^{(0)}(a)$  sont définies par

$$K_n^{(0)}(a) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(z)}{z - a} dz, \quad (\text{B.IV.2})$$

avec  $a = \frac{k'^2 + k^2 + \Lambda_\pi^2}{2kk'}$ ,  $z = \cos(\widehat{\vec{k}', \vec{k}})$ ,  $\vec{k}$  l'impulsion relative des deux nucléons et  $P_n(z)$  le polynôme de Legendre de degré  $n$ .

## Annexe C

# Formulation Lagrangienne des équations de Maxwell

Nous allons tout d'abord chercher l'expression du Lagrangien dont les équations d'Euler-Lagrange sont les équations de Maxwell.

Le système ici considéré est un ensemble de particules chargées en interaction par l'intermédiaire d'un champ électromagnétique. Le Lagrangien total du système s'écrit de manière générale

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{part. libres}} + \mathcal{L}_{\text{champ libre}} + \mathcal{L}_{\text{int}} , \quad (\text{C.1})$$

où

- $\mathcal{L}_{\text{part. libres}}$  est le Lagrangien associé aux particules en l'absence de champ.
- $\mathcal{L}_{\text{champ libre}}$  est le Lagrangien associé au champ électromagnétique seul.
- $\mathcal{L}_{\text{int}}$  est le Lagrangien associé à l'interaction champ-particules.

Commençons par le Lagrangien pour une particule libre. Les équations d'Euler-Lagrange devant être covariantes (invariantes par transformation de Lorentz), le Lagrangien doit être invariant de Lorentz. Le Lagrangien le plus simple, dans le cas d'une particule libre, qui respecte cette condition est un 4-scalaire constant. Cependant, les équations d'Euler-Lagrange mettent en jeu des dérivées spatio-temporelles du Lagrangien total, un terme constant comme celui-ci s'effacera et ne sera donc pas pris en compte dans la suite.

Dans le cas d'un ensemble fini de charges  $q_\alpha$  distribuées dans l'espace (on notera  $\rho$  la densité volumique de charges), le Lagrangien d'interaction des charges avec le champ électromagnétique s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\mathcal{A}_\mu J^\mu , \quad (\text{C.2})$$

où  $J^\mu = \rho \frac{dx^\mu}{d\tau}$  est le 4-vecteur densité de courant (il est conservé,  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , ce qui se traduit par la conservation de la charge) et  $\mathcal{A}_\mu(\vec{x}) = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$  est le champ de 4-vecteur potentiels ( $\phi$  est le potentiel électrique et  $\vec{A}$  le potentiel vecteur) qui représente le champ électromagnétique.

Afin de trouver l'expression du Lagrangien du champ électromagnétique libre, nous commençons tout d'abord par introduire le tenseur (au sens de la relativité restreinte) antisymétrique suivant, dit tenseur champ ou tenseur de Faraday, dont les composantes covariantes sont définies par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu . \quad (\text{C.3})$$

Définissant les 3-vecteurs champ électrique et champ magnétique par

$$\begin{cases} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases}, \quad (\text{C.4})$$

on montre que la matrice du tenseur champ s'écrit

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & -B_3 & B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & B_3 & 0 & -B_1 \\ -\frac{E_3}{c} & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.5})$$

Le Lagrangien devant, comme toujours, être un 4-scalaire, le Lagrangien le plus simple faisant intervenir le tenseur champ (C.3) s'écrit

$$\mathcal{L}_{\text{champ}} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{C.6})$$

où le préfacteur  $k = -\frac{1}{4\mu_0}$  apparaît lorsque l'on relie les équations d'Euler-Lagrange aux équations de Maxwell. En effet, les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\alpha} - \partial_\beta \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta \mathcal{A}_\alpha)} \right\} = 0, \quad (\text{C.7})$$

associées au Lagrangien de l'électrodynamique classique

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{ED}} = -\mathcal{A}_\mu J^\mu + k F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}, \quad (\text{C.8})$$

s'écrivent

$$-J^\alpha = 4k \partial_\beta F^{\beta\alpha}. \quad (\text{C.9})$$

- Pour  $\alpha = 0$ , reprenant  $k = -\frac{1}{4\mu_0}$ , on retrouve l'équation de Maxwell-Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (\text{C.10})$$

- Pour  $\alpha = 1, 2, 3$ , on retrouve l'équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (\text{C.11})$$

Les autres équations de Maxwell émergent de la définition même du tenseur champ en tant que 4-rotationnel. En tant que tel, sa 4-divergence doit être nulle, c'est à dire

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0. \quad (\text{C.12})$$

Les équations non-triviales (parmis ce système de 64 équations) mènent alors aux équations de Maxwell sans terme de source

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{cases}. \quad (\text{C.13})$$

## Annexe D

# Discrétisation de l'équation aux valeurs propres par la méthode des maillages de Lagrange

Dans cette annexe, nous allons discrétiser l'équation aux valeurs propres (IV.1) à l'aide de la méthode des maillages de Lagrange. Ceci fait, nous exposerons la courbe représentant l'évolution des maximum et minimum des valeurs propres obtenues, après diagonalisation de la matrice de l'Hamiltonien, en fonction de l'impulsion relative maximum des deux nucléons  $k_{\max}$ .

### D.I Méthode des maillages de Lagrange

La méthode des maillages de Lagrange se base, ici, sur l'évaluation du potentiel pour certains points  $\kappa_i$ , appelés noeuds du maillage, et la décomposition des fonctions propres de l'Hamiltonien en terme des fonctions régularisées de Lagrange (associées à une quadrature de Gauss donnée, nous allons y revenir), qui forment une base d'un espace appelé espace des fonctions de base. L'intégrale est, quant à elle, approchée par une somme discrète, appelée quadrature de Gauss de l'intégrale.

$$\int_a^b f(\kappa) \omega(\kappa) d\kappa = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i f(\kappa_i), \quad (\text{D.I.1})$$

où  $\omega(\kappa)$  désigne la fonction de poids et les quantités  $\omega_i$  sont les poids associés à chaque noeuds  $\kappa_i$ . Nous allons tronquer l'intégrale de (IV.1) en considérant que l'impulsion relative maximum  $k_{\max}$  des deux nucléons est finie. Dans un tel cas, on discrétise la variable impulsionnelle  $k$  par les racines  $\kappa_i$  des polynômes de Legendre (on parlera donc de quadrature de Gauss-Legendre), dont les fonctions régularisées sont données dans [25] et satisfont la propriété suivante

$$f_j(\kappa_i) = \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{\lambda_j}}, \quad (\text{D.I.2})$$

où les quantités  $\lambda_i = \frac{\omega_i}{\omega(\kappa_i)}$  sont les poids de Gauss-Legendre associés aux racines des polynômes de Legendre (généralisés à un intervalle quelconque). La quadrature de Gauss-Legendre s'écrit donc

$$\int_0^{k_{\max}} dk g(k) \simeq \sum_{i=1}^n \lambda_i g(\kappa_i), \quad (\text{D.I.3})$$

avec  $g(k) = \omega(k) f(k)$ . Les fonctions régularisées de Lagrange ne sont pas exactement orthogonales mais, dans l'approximation de Gauss, on a

$$\int_0^{k_{\max}} dk f_i(k) f_j(k) \simeq \delta_{ij}. \quad (\text{D.I.4})$$

Les poids  $\lambda_i$  sont calculables car reliés aux racines  $\kappa_i$  par

$$\ln \lambda_i = \kappa_i - \ln \kappa_i + 2 \ln n! - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \ln(\kappa_i - \kappa_j)^2. \quad (\text{D.I.5})$$

De plus, on peut décomposer la fonction d'onde radiale  $\Psi_L^{(SJT)}(k)$  en termes des fonctions régularisées  $f_i$

$$\Psi_L^{(SJT)}(k) = \sum_{i=1}^n C_{L,i}^{(SJT)} \frac{f_i(\kappa)}{\sqrt{h} k}, \quad (\text{D.I.6})$$

où  $h = k/\kappa$  est un facteur d'échelle, homogène à une impulsion, de sorte à ce que  $\kappa$  soit adimensionné et où les quantités  $C_{L,i}^{(SJT)}$  sont les coefficients de la projection de la fonction d'onde dans la base des fonctions régularisées de Lagrange. Injectant alors la décomposition (D.I.6) dans l'équation aux valeurs propres (IV.1) et évaluant l'intégrale à l'aide d'une quadrature de Gauss-Legendre, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{2\mu} (h\kappa)^2 \sum_{i=1}^n C_{L,i}^{(SJT)} \frac{f_i(\kappa)}{\sqrt{h} h\kappa} + \frac{1}{N'_k} \int_0^{k_{\max}} dk' k'^2 \sum_{L'} \langle (h\kappa)(LS)JTT_z | \hat{V} | k'(L'S)JTT_z \rangle \sum_{i=1}^n C_{L',i}^{(SJT)} \frac{f_i(\kappa')}{\sqrt{h} k'} \\ &= E \sum_{i=1}^n C_{L,i}^{(SJT)} \frac{f_i(\kappa)}{\sqrt{h} h\kappa}. \end{aligned} \quad (\text{D.I.7})$$

On peut maintenant multiplier cette équation par  $h^{3/2} \kappa f_j(\kappa)$  et intégrer sur  $[0; k_{\max}]$ , puis utiliser la quadrature de Gauss-Legendre, obtenant ainsi

$$\begin{aligned} & \int_0^{k_{\max}} d\kappa \kappa f_j(\kappa) \left[ \frac{\hbar^2}{2\mu} (h\kappa)^2 \sum_{i=1}^n C_{L,i}^{(SJT)} \frac{f_i(\kappa)}{\kappa} + \frac{1}{N'_k} \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} h^3 \kappa_i \sum_{L'} V_{L,L'}^{(SJT T_z)}(h\kappa, h\kappa_i) C_{L',i}^{(SJT)} \right] \\ &= E \int_0^{k_{\max}} d\kappa f_j(\kappa) \sum_{i=1}^n C_{L,i}^{(SJT)} f_i(\kappa) \approx E C_{L,j}^{(SJT)}. \end{aligned} \quad (\text{D.I.8})$$

Nous aboutissons alors à l'équation radiale discrétisée suivante,  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}$ , à l'approximation de Gauss

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} (h\kappa_i)^2 C_{L,i}^{(SJT)} + \frac{1}{N'_k} \sum_{j=1}^n h^3 \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \kappa_i \kappa_j \sum_{L'} V_{L,L'}^{(SJT T_z)}(h\kappa_i, h\kappa_j) C_{L',j}^{(SJT)} = E C_{L,i}^{(SJT)}. \quad (\text{D.I.9})$$

Construisons alors la matrice colonne  $C^{(SJT)}$  comme

$$C^{(SJT)} = \begin{pmatrix} C_{0,1}^{(SJT)} \\ \vdots \\ C_{0,n}^{(SJT)} \\ \vdots \\ C_{L,1}^{(SJT)} \\ \vdots \\ C_{L,n}^{(SJT)} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (\text{D.I.10})$$

## D.II. Courbe d'évolution $E_{\min/\max} = f(k_{\max})$

---

et définissons un multi-index  $\alpha$  représentant le moment orbital  $L$  et l'indice de discrétisation  $i$ . L'équation aux valeurs propres prend la forme matricielle bien connue

$$H^{(SJT)} C^{(SJT)} = E C^{(SJT)} \quad (\text{D.I.11})$$

où la matrice hermitienne  $H^{(SJT)}$  est définie par ses éléments

$$H_{\alpha\beta}^{(SJT)} = H_{Li,L'j}^{(SJT)} = \delta_{LL'} \delta_{ij} \frac{\hbar^2}{2\mu} (h\kappa_i)^2 + \frac{h^3}{N'_k} \sqrt{\lambda_i \lambda_j} \kappa_i \kappa_j V_{L,L'}^{(SJT T_z)}(h\kappa_i, h\kappa_j) \quad (\text{D.I.12})$$

## D.II Courbe d'évolution $E_{\min/\max} = f(k_{\max})$

Une fois la matrice Hamiltonienne diagonalisée, nous pouvons faire varier l'impulsion relative maximum  $k_{\max}$  des deux nucléons, et observer l'impact que cela a sur les énergies du système neutron-proton, c'est ce qui est représenté sur la figure D.1.

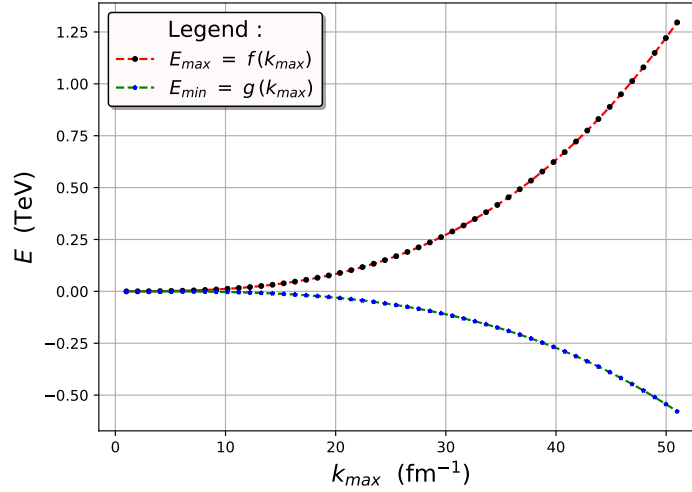


FIGURE D.1 – Évolution des maximum et minimum des énergies propres de l'Hamiltonien en fonction de l'impulsion relative maximum des deux nucléons  $k_{\max}$ , pour le Deutéron.

Les valeurs de  $E_{\max}$  correspondent à des états non liés, pour laquelle la description que l'on a faite n'est pas pertinente, il faudrait plutôt résoudre numériquement l'équation de Lippmann-Schwinger.

# Bibliographie

- [1] L. BONNEAU, *Notes on the NN interaction*, Unpublished, 2015.
- [2] D. A. VARSHALOVICH, A. N. MOSKALEV & V. K. KHERKONSKII, *Quantum Theory of Angular Momentum*, (World Scientific, Singapore, 1988).
- [3] C. J. JOACHAIN, *Quantum Collision Theory*, North-Holland, 1975.
- [4] J. R. TAYLOR, *Scattering Theory*, (Wiley, New York), 1972.
- [5] J. S. BAENA, *Study of quantum scattering T-matrix*, Master Thesis, Encadré par F. M. Castrillejo & A. P. Marti, Université de Barcelone, (2016).
- [6] J. PEREZ, *Théorie des champs*, Les presses de l'ENSTA, 2ème édition, 2017.
- [7] J.M. RAIMOND, *Théorie Classique des Champs*, Cours de l'Université Pierre et Marie Curie, 2016.
- [8] W. APPEL, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*, H. et K. Editions, 2002.
- [9] S. WEINBERG, *The Quantum Theory of Fields*, volume I, Cambridge University Press, 1995.
- [10] C. QUIGG, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*, The Benjamin-Cummings Publishing Company, (1983).
- [11] R. BECKER & F. SAUTER, *Electromagnetic Fields and Interactions, Volume II : Quantum Theory of Atoms and Radiation*, Blaisdell Publishing Company, (1964).
- [12] R. MACHLEIDT & D. R. ENTEM, *Chiral effective field theory and nuclear forces*, Phys. Rep. 503 (2011) 1-75, 2011.

- [13] C.J. BATTY, E. FRIEDMAN, H.J. GILS, R. MACHLEIDT, H. REBEL, *Advances in Nuclear Physics*, volume 19, p. 210-215, Plenum Press, édité par J.W. NEGELE & E. VOGT, 1989.
- [14] S. WEINBERG, *The Quantum Theory of Fields*, volume II, Cambridge University Press, 1996.
- [15] S. WEINBERG, *Nuclear forces from chiral Lagrangians*, Phys. Lett. B **363** (1990) 288.
- [16] V. CUPLOV, *Brisures d'isospin et Corrections radiatives au processus  $K_{\ell 4}$* , Thèse de Doctorat, Université de la Méditerranée, Faculté des Sciences de Luminy, Centre de Physique Théorique, 2004.  
Disponible à : [https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/\\_Public/39/107/39107533.pdf](https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/39/107/39107533.pdf)
- [17] M. SANCHEZ SANCHEZ, *Effective field theories of strong-interacting systems in nucleon scattering and heavy-quark bound states*, Nuclear Theory [nucl-th], Université Paris-Saclay, 2017, English, NNT : 2017SACLS419 .  
Disponible à : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01695540>.
- [18] A. NOGGA, R. G. E. TIMMERMANS & U. VAN KOLCK, *Renormalization of one-pion exchange and power counting*, Phys. Rev. C **72**, 054006 (2005).  
DOI : [10.1103/PhysRevC.72.054006](https://doi.org/10.1103/PhysRevC.72.054006)
- [19] U. VAN KOLCK, *The Problem of Renormalization of Chiral Nuclear Forces*, [arXiv :2003.06721v1](https://arxiv.org/abs/2003.06721v1) [nucl-th] (2020).
- [20] H.-W. HAMMER, S. KÖNIG & U. VAN KOLCK, *Nuclear effective field theory : status and perspectives*, [arXiv :1906.12122v2](https://arxiv.org/abs/1906.12122v2) [nucl-th] (2020).
- [21] G. P. LEPAGE, *How to renormalize the Schrödinger equation*, Notes de cours VIII à la Jorge André Swieca Summer School, Brésil, [arXiv :nuc1-th/9706029v1](https://arxiv.org/abs/nuc1-th/9706029v1), 1997.
- [22] C. COHEN-TANNOUDJI & Y. SACQUIN, *Symétrie et brisure de symétrie*, EDP Sciences, 1999.
- [23] K. ERKELENZ, R. ALZETTA & K. HOLINDE, Nuc. Phys. A **176**, 413 (1971).
- [24] G. LACROIX, C. SEMAY & F. BUISSERET, Phys. Rev. E **86**, 026705 (2012).



# *Bibliographie*

---

- [25] D. BAYE, *The Lagrange-mesh method*, Université libre de Bruxelles, 2015.
- [26] I. BOGAERT, *Iteration-Free Computation of Gauss-Legendre Quadrature Nodes and Weights*, SIAM J. Sci. Comput. 36 (2014).
- [27] A. GEZERLIS, *Numerical methods in Physics with Python*, Cambridge University Press, 2020.

## Résumé

**Titre :** Interaction effective Nucléon-Nucléon

**Mots clés :** Théorie effective chirale ; Nucléon ; Diffusion ; Deutéron ; Renormalisation

De nos jours, l'utilisation d'une théorie effective, qui remplace une théorie des champs dans un certain domaine d'énergie, est couramment utilisé pour décrire l'interaction entre les nucléons. Dans ce mémoire, nous mettons l'accent sur l'interaction entre deux nucléons comme processus de diffusion d'un des nucléons sur l'autre, en utilisant le formalisme de la théorie effective chirale. Nous commençons donc par rappeler des notions importantes de théorie de la diffusion et de ce qu'est un champ. Ensuite, étant plus habitués à l'électromagnétisme que l'interaction forte, nous construisons une première interaction, celle de Coulomb, qui nous permet ensuite, par analogie, de construire l'interaction inter-nucléons par échange d'un pion (OPE).

Une fois le potentiel d'interaction obtenu, nous l'utilisons pour décrire les états liés d'un système à deux corps : le Deutéron. Nous écrivons donc l'équation aux valeurs propres correspondant au potentiel OPE dans la base d'ondes partielles et diagonalisons l'Hamiltonien (approche non-perturbative).

Les valeurs propres obtenues divergent pour de grandes valeurs de l'impulsion relative maximum des deux nucléons  $\Lambda$  (cut-off), impliquant la nécessité d'utiliser la procédure de renormalisation, permettant d'absorber les divergences du potentiel OPE, qui est singulier dans l'espace position. Cela se fait en ajoutant un terme de courte-portée, qui introduit une constante,  $C_{3S_1}$ , qui varie selon la valeur de  $\Lambda$ . La courbe  $C_{3S_1} = f(\Lambda)$  est conforme aux courbes observées dans la littérature et les observables du Deutéron (autres que l'énergie, qui nous permet d'ajuster la valeur de  $C_{3S_1}$ ) ont bien la dépendance attendue en  $\Lambda$ .

---

## Abstract

**Title :** Two-nucleons effective interaction

**Keywords :** Chiral effective theory ; Nucleons ; Scattering ; Deuteron ; Renormalization

Nowadays, more and more people use effective field theory, which replaces quantum field theory for specific energies, when they describe the interaction that occurs between nucleons.

In this report, we insist on the comparison between two-nucleons interaction and scattering process, using the chiral effective theory formalism. That's why we begin by reminding some scattering theory concepts and also what does field mean here. Being more used to electromagnetism than to strong interaction, we first build Coulomb interaction, which provides us an analogy to build one-pion exchange (OPE) two-nucleons interaction.

Once this potential is obtained, we use it in order to describe the bound states of a two-bodies system : the Deuteron. We therefore write the eigenvalues equation which corresponds to the OPE potential in the partial-wave basis and then diagonalize the Hamiltonian matrix (non-perturbative approach).

What we get is that eigenvalues diverge for large values of the maximum relative momentum of the two nucleons  $\Lambda$  (cut-off) because the OPE potential is singular in coordinates space. We therefore have to use renormalization, that will absorb the infinite self-energies. We can do that by adding a short-range term that introduces a constant,  $C_{3S_1}$ , whose value depend on the parameter. In the end, we obtain that the  $C_{3S_1} = f(\Lambda)$  curve matches the ones one can find in papers and that the Deuteron observables (others than the energy, which has been used to fit the  $C_{3S_1}$  value) have the expected  $\Lambda$  dependence.