# Une méthode itérative convergente pour le couplage FEMBEM élastodynamique-acoustique global en temps.

Alice NASSOR

Laboratoire Poems (CNRS, ENSTA Paris, INRIA) - Institut Polytechnique de Paris,
Naval Group - DGA
Encadrée par Stéphanie Chaillat et Marc Bonnet

17/09/2021

## Objectif

Simulation complète, réaliste et efficace du comportement de la structure lorsqu'elle est soumise à des explosions sous-marines à distance.

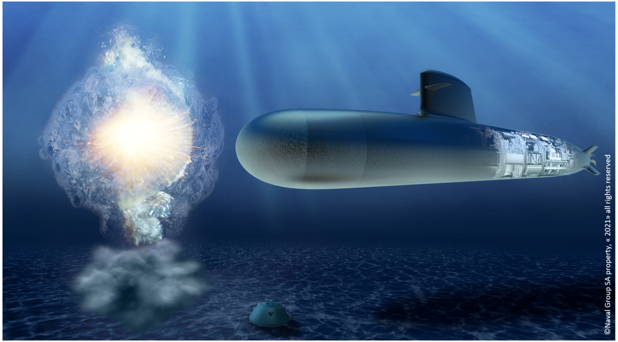



IMAGE : ©Naval Group (2011), sur le site https://www.inria.fr/fr/modeliser-logiciel-equipe-poems-naval-group

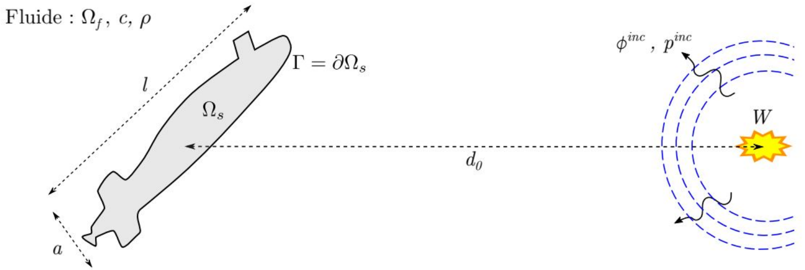
1. Le problème d'interaction fluide-structure couplé

2. Objectif : un couplage FEM/Z-BEM itératif, global en temps

3. Problèmes d'évolution : Neumann et Robin

4. Validation numérique de la procédure

# Explosion sous-marine à distance




Explosion sous-marine :

1. Onde rapide acoustique
2. Mouvement lent de fluide potentiel

IMAGE : D. Mavaleix-Marchessoux, “Modelling the fluid-structure coupling caused by a far-field underwater explosion”. PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, 2020

# Le problème couplé

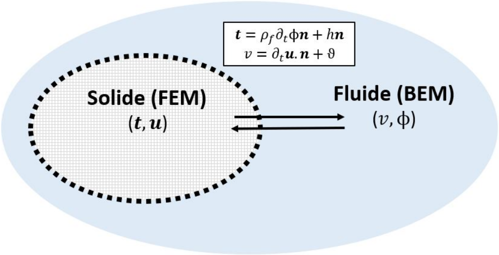
$$\text{Décomposition : } p^{\text{tot}} = p^{\text{inc}} + p$$

Variables fluides : $v = \nabla\phi.\mathbf{n} = \partial_n\phi, \quad p = -\rho_f\partial_t\phi$

Variables solides : $\mathbf{u}, \quad \mathbf{t} = \sigma[\mathbf{u}].\mathbf{n}$

$$\begin{cases} \Delta\phi - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\phi = 0 \quad \text{sur } \Omega_f \times [0,T] \\ -div\sigma[\mathbf{u}] + \rho_s\partial_{tt}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Omega_s \times [0,T] \\ \\ \mathbf{t} = \rho_f\partial_t\phi\mathbf{n} - p^{\text{inc}}\mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma \times [0,T] \\ v = \partial_t\mathbf{u}.\mathbf{n} - v^{\text{inc}} \quad \text{sur } \Gamma \times [0,T] \\ \\ \phi(0,x) = \partial_t\phi(0,x) = 0 \quad \text{sur } \Omega_f \\ \mathbf{u}(0,x) = \partial_t\mathbf{u}(0,x) = 0 \quad \text{sur } \Omega_s \end{cases}$$

# Couplage itératif FEM/Z-BEM en temps




- Contexte industriel et déformations non linéaires possibles dans le solide → FEM
- Domaine fluide de grande taille → BEM
- Hautes fréquences → Z-BEM avec CQM

# Z-BEM [1] en temps avec CQM

Équation intégrale de frontière dans le domaine temporel (méthode des potentiels retardés) :

$$\boxed{\frac{1}{2}\phi(\mathbf{x},t) = -\int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n}(r,t)\star\phi(\mathbf{y},t)d\Gamma + \int_\Gamma G(r,t)\star\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{y},t)d\Gamma} \quad t\in[0,T],\mathbf{x}\in\Omega_f,\mathbf{y}\in\Gamma$$

Convolution quadrature method (CQM) [2]

Transformée Z d'un produit de convolution q = transformée de Laplace $\overline{G}$ $\times$ transformée en Z de F

$$q(t)=(G\star f)(t)=\int_0^t G(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad \forall t\geq 0 \text{ avec } f=\frac{\partial\phi}{\partial n} \text{ connu}$$

$$Q(\xi)=\overline{G}(s)F(\xi) \qquad \xi\in\mathbb{C}, \quad s=\frac{p(\xi)}{\Delta t}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\Phi(x,\xi) - \int_\Gamma \frac{\partial \overline{G}}{\partial n}(r,\frac{p(\xi)}{\Delta t})\Phi(y,\xi)d\Gamma + \int_\Gamma \overline{G}(r,\frac{p(\xi)}{\Delta t})\frac{\partial \Phi}{\partial n}(y,\xi)d\Gamma = 0}$$

1. D. Mavaleix-Marchessoux, "Modelling the fluid-structure coupling caused by a far-field underwater explosion". PhD thesis, Institut Polytechnique de Paris, 2020
2. C. Lubich. "Convolution quadrature and discretized operational calculus. I." Numerische Mathematik 52(1988) : 129-145

# Étapes de l'algorithme Z-BEM

$$[0, T]$$

$$\downarrow$$

$$t_0, t_1, ...t_{N_t}$$

$$\downarrow$$

$$\xi_k = \rho e^{\frac{2\pi i k}{2N_t}} \quad k \in [0, 2N_t]$$

$$\downarrow$$

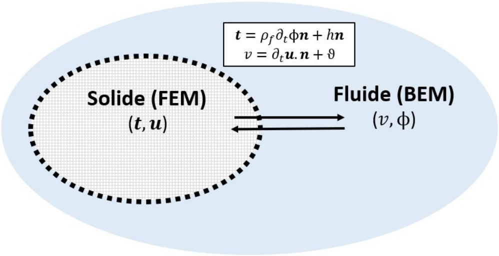
$$s_k = \frac{p(\xi_k)}{\Delta t} \quad k \in [0, 2N_t]$$

$$\downarrow$$

`Résolution de 2 Nt -1 problèmes BEM fréquentiels`

$$\downarrow$$

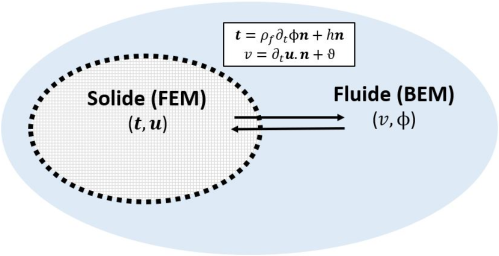
$$\psi(., t_n) =\simeq \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \Psi(., \xi_k) \xi_k^{-n} \quad \forall n \in [0, M]$$




- Contexte industriel et déformations non linéaires possibles dans le solide $\rightarrow$ FEM
- Domaine fluide de grande taille $\rightarrow$ BEM
- Hautes fréquences $\rightarrow$ Z-BEM avec CQM

$\Rightarrow$ Couplage itératif FEM/Z-BEM global en temps avec convergence garantie

# Couplage itératif FEM/Z-BEM en temps




- Contexte industriel et déformations non linéaires possibles dans le solide $\rightarrow$ FEM
- Domaine fluide de grande taille $\rightarrow$ BEM
- Hautes fréquences $\rightarrow$ Z-BEM avec CQM

$\Rightarrow$ Couplage itératif FEM/Z-BEM global en temps avec convergence garantie

Problème : une procédure itérative "naïve" ne converge pas.

Pourquoi ?
Comment définir un couplage FEM/ Z-BEM convergent ?

# Stratégie de couplage itérative "naïve" : deux problèmes de Neumann

**Décomposition de domaine :** à chaque itération i, on résout 2 problèmes distincts sur chaque sous-domaine. Chaque problème admet une condition limite de Neumann.

Itérations globales en temps : $\mathrm{i} \geq 1$, sur tout l'intervalle de temps$[0, T]$ :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta\phi^i(t) + \frac{1}{c_f^2}\partial_{tt}\phi^i(t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_f \\ \partial_n \phi^{\mathbf{i}}(t) = \partial_t \mathbf{u}^{\mathbf{i-1}}(t).\mathbf{n} - v^{\text{inc}} \quad \text{sur } \Gamma \\ \phi^i(0) = \partial_t\phi^i(0) = 0 \end{cases}}$$

Problème acoustique de Neumann (Z-BEM)

$$\boxed{\begin{cases} -div(\sigma[\mathbf{u}^{\mathbf{i}}]) + \rho_s\partial_{tt}\mathbf{u}^{\mathbf{i}}(t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_s \\ \mathbf{t}[\mathbf{u}^{\mathbf{i}}](t) = \rho_f \partial_t \phi^{\mathbf{i-1}}\mathbf{n} - p^{\text{inc}}\mathbf{n} \quad \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{u}^{\mathbf{i}}(0) = \partial_t \mathbf{u}^{\mathbf{i}}(0) = 0 \end{cases}}$$

Problème élastodynamique de Neumann (FEM)

Ces deux problèmes d'évolution sont-ils bien posés ?

# Problème d'évolution de Neumann

On considère l'un des deux problèmes

$$\begin{cases} \Delta\phi(t) + \frac{1}{c_f^2}\partial_{tt}\phi(t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_f \\ \partial_n\phi(t) = f(t) \quad \text{sur } \Gamma \\ \phi(0) = \partial_t\phi(0) = 0 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} -div(\sigma[\mathbf{u}]) + \rho_s\partial_{tt}\mathbf{u}(t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_s \\ \mathbf{t}[\mathbf{u}](t) = g(t) \qquad \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{u}(0) = \partial_t\mathbf{u}(0) = 0 \end{cases}$$

Par exemple, formulation variationnelle pour le problème acoustique :

$$\rho_f \int_\Omega \nabla\phi\nabla\widetilde{\phi}d\Omega + \frac{\rho_f}{c_f^2}\int_\Omega \phi''\widetilde{\phi}d\Omega = \int_\Gamma \partial_n\phi\widetilde{\phi}d\Gamma$$

Formulation variationnelle pour le problème de Neumann (acoustique ou élastodynamique) :

$$\begin{cases} a\left(\phi(t), \widetilde{\phi}\right) + b\left(\partial_{tt}\phi(t), \widetilde{\phi}\right) = \left(f(t), \widetilde{\phi}\right)_\Gamma \\ \forall\widetilde{\phi} \in H^1(\Omega), \quad t \in [0, T] \\ \phi(0) = \partial_t\phi(0) = 0 \end{cases}$$

# Problème d'évolution de Neumann

Trouver $\phi(t) \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} a\left(\phi(t), \widetilde{\phi}\right) + b\left(\partial_{tt}\phi(t), \widetilde{\phi}\right) = \left(f(t), \widetilde{\phi}\right)_\Gamma \\ \forall \widetilde{\phi} \in H^1(\Omega), \quad t \in [0,T] \\ \phi(0) = \partial_t \phi(0) = 0 \end{cases}$$

Identité d'énergie : $\|\phi\|^2_{1,\Omega,T} + \|\partial_t \phi\|^2_{0,\Omega,T} \leq C\, \|f\|^2_{H^1([0,T];L^2(\Gamma))}$

$f \in H^2([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma))$ conduit à une solution $\phi \in C^1([0,T]; H^1(\Omega))$

$\to \partial_t \phi \in C^0([0,T]; H^1(\Omega))$

$\to \partial_t \phi\, |_\Gamma \in C^0([0,T]; H^{1/2}(\Gamma))$

La trace de la solution a une régularité inférieure à celle des données !

# Problème elliptique de Neumann

Pour un problème de la forme :

$$\begin{cases} \Delta\phi(t) + \phi(t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_f \\ \partial_n \phi(t) = f(t) \quad \text{sur } \Gamma \\ \phi(0) = \partial_t \phi(0) = 0 \end{cases}$$

Trouver $\phi(t) \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} a\left(\phi(t), \widetilde{\phi}\right) + b\left(\phi(t), \widetilde{\phi}\right) = \left(f(t), \widetilde{\phi}\right)_\Gamma \\ \forall \widetilde{\phi} \in H^1(\Omega), \quad t \in [0, T] \\ \phi(0) = \partial_t \phi(0) = 0 \end{cases}$$

# Problème elliptique de Neumann

Trouver $\phi(t) \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} a\left(\phi(t), \widetilde{\phi}\right) + b\left(\phi(t), \widetilde{\phi}\right) = \left(f(t), \widetilde{\phi}\right)_\Gamma \\ \forall \widetilde{\phi} \in H^1(\Omega), \quad t \in [0,T] \\ \phi(0) = \partial_t \phi(0) = 0 \end{cases}$$

$f \in H^2([0,T]; H^{-1/2}(\Gamma))$ conduit à une solution $\phi \in H^2([0,T]; H^1(\Omega))$

$\rightarrow \partial_t \phi \in H^1([0,T]; H^1(\Omega))$

$\rightarrow \partial_t \phi \mid_\Gamma \in H^1([0,T]; H^{1/2}(\Gamma))$

La trace de la solution a la même régularité que les données !

# Stratégie de couplage itérative : deux problèmes de Robin

**Décomposition de domaine :** à chaque itération i, 2 problèmes distincts sur chaque sous-domaine.

Itérations globales en temps : $i \geq 1$, sur tout l'intervalle de temps$[0, T]$ :

$$\boxed{\begin{cases} \Delta\phi^i(t) + \frac{1}{c_f^2}\partial_{tt}\phi^i(t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_f \\ k\partial_n\phi^i(t) - \rho_f\partial_t\phi^i(t) = f(t) \quad \text{sur } \Gamma \\ \phi^i(0) = \partial_t\phi^i(0) = 0 \end{cases}}$$

Problème acoustique de Robin (Z-BEM)

$$\boxed{\begin{cases} -div(\sigma[\mathbf{u^i}]) + \rho_s\partial_{tt}\mathbf{u^i}(t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_s \\ \mathbf{t}[\mathbf{u^i}](t) + k\partial_t\mathbf{u^i} = g(t) \quad \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{u^i}(0) = \partial_t\mathbf{u^i}(0) = 0 \end{cases}}$$

Problème élastodynamique de Robin (FEM)

avec k>0

Ces deux problèmes d'évolution sont-ils bien posés ?

# Problème d'évolution de Robin

On considère l'un des deux problèmes

$$\boxed{\begin{cases} \Delta\phi(t) + \frac{1}{c_f^2}\partial_{tt}\phi(t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_f \\ k\partial_n\phi(t) - \rho_f\partial_t\phi(t) = f(t) \quad \text{sur } \Gamma \\ \phi(0) = \partial_t\phi(0) = 0 \end{cases}}$$

ou

$$\boxed{\begin{cases} -div(\sigma[\mathbf{u}]) + \rho_s\partial_{tt}\mathbf{u}(t) = 0 \quad \text{sur } \Omega_s \\ \mathbf{t}[\mathbf{u}](t) + k\partial_t\mathbf{u} = g(t) \quad \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{u}(0) = \partial_t\mathbf{u}(0) = 0 \end{cases}}$$

Par exemple, formulation variationnelle pour le problème acoustique :

$$\int_\Omega \nabla\phi\nabla\widetilde{\phi}d\Omega + \frac{1}{c_f^2}\int_\Omega \phi''\widetilde{\phi}d\Omega - \frac{\rho_f}{k}\int_\Gamma \phi'\widetilde{\phi}d\Gamma = \left(\frac{1}{k}f, \widetilde{\phi}\right)_\Gamma$$

Formulation variationnelle pour le problème de Robin (acoustique ou élastodynamique) :

$$\begin{cases} a\left(\phi(t), \widetilde{\phi}\right) + b\left(\phi''(t), \widetilde{\phi}\right) + c\left(\phi'(t), \widetilde{\phi}\right) = \frac{1}{k}\left(f(t), \widetilde{\phi}\right)_\Gamma \\ \forall\widetilde{\phi} \in H^1(\Omega), \quad t \in [0, T] \\ \phi(0) = \partial_t\phi(0) = 0 \end{cases}$$

terme d'amortissement supplémentaire

# Problème d'évolution de Robin

Trouver $\phi(t) \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} a\left(\phi(t), \widetilde{\phi}\right) + b\left(\phi''(t), \widetilde{\phi}\right) + c\left(\phi'(t), \widetilde{\phi}\right) = \frac{1}{k}\left(f(t), \widetilde{\phi}\right)_\Gamma \\ \forall \widetilde{\phi} \in H^1(\Omega), \quad t \in [0,T] \\ \phi(0) = \partial_t \phi(0) = 0 \end{cases}$$

Identité d'énergie : $\|\phi\|^2_{1,\Omega,T} + \|\partial_t \phi\|^2_{0,\Omega,T} + \|\partial_t \phi\|^2_{0,\Gamma,T} \leq C \|f\|^2_{0,\Gamma,T}$

# Problème d'évolution de Robin

Trouver $\phi(t) \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} a\left(\phi(t), \widetilde{\phi}\right) + b\left(\phi''(t), \widetilde{\phi}\right) + c\left(\phi'(t), \widetilde{\phi}\right) = \frac{1}{k}\left(f(t), \widetilde{\phi}\right)_\Gamma \\ \forall \widetilde{\phi} \in H^1(\Omega), \quad t \in [0, T] \\ \phi(0) = \partial_t \phi(0) = 0 \end{cases}$$

Identité d'énergie : $\|\phi\|^2_{1,\Omega,T} + \|\partial_t \phi\|^2_{0,\Omega,T} + \|\partial_t \phi\|^2_{0,\Gamma,T} \leq C \|f\|^2_{0,\Gamma,T}$

$f \in L^2([0, T]; L^2(\Gamma))$ permet de définir $\partial_t \phi \mid_\Gamma \in L^2([0, T]; L^2(\Gamma))$

La trace de la solution en vitesse a la même régularité que la donnée !

- Un problème transitoire de **Neumann** présente une **perte de régularité** de la solution en vitesse sur la frontière par rapport à la donnée.

- Un problème transitoire de **Robin** a une solution en vitesse sur la frontière de même régularité que la donnée.

  $\rightarrow$ Permet de définir une procédure itérative à convergence **garantie**.

# Idée de preuve de convergence utilisant des estimations d'énergie [1]

1.Les champs d'erreur ($\phi^i_{err} = \phi^i - \phi$) à l'itération i dans $\Omega_f$ vérifient

$$
\begin{aligned}
a(\phi^i(t), \partial_t \phi^i(t)) + b(\partial_{tt}\phi^i(t), \partial_t \phi^i(t)) &= -(v^i(t), \partial_t \phi^i(t))_\Gamma \quad t \in [0,T] \qquad \text{(a.)}\\
A(\mathbf{u}^i, \partial_t \mathbf{u}^i(t)) + B(\partial_{tt}\mathbf{u}^i(t), \partial_t \mathbf{u}^i(t))_\Gamma &= (\mathbf{t}^i(t), \partial_t \mathbf{u}^i(t))_\Gamma \quad t \in [0,T] \qquad \text{(b.)}
\end{aligned}
$$

2. En intégrant sur t dans [0,s] et sommant a). et b). on obtient l'identité d'énergie

$$
E^i(s) = -(v^i, \partial_t \phi^i)_{\Gamma,s} + (\mathbf{t}^i, \partial_t \mathbf{u}^i)_{\Gamma,s}
$$

$$
\text{avec } E^i(s) = \frac{1}{2}\left\{a(\phi^i(s), \phi^i(s)) + b(\partial_t \phi^i(s), \partial_t \phi^i(s)) + A(\mathbf{u}^i(s), \mathbf{u}^i(s)) + B(\partial_t \mathbf{u}^i(s), \partial_t \mathbf{u}^i(s))_\Gamma\right\}
$$

3.On introduit les traces entrantes et sortantes :

$$
\mathbb{B}^i = \begin{Bmatrix} f^i \\ g^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\rho_f \partial_t \phi^i + kv^i \\ \mathbf{t}^i + k\mathbf{u}^i \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \overline{\mathbb{B}}^i = \begin{Bmatrix} \rho_f \partial_t \phi^i + kv^i \\ \mathbf{t}^i - k\mathbf{u}^i \end{Bmatrix}
$$

tels que les itérations de Robin s'écrivent :

$$
\mathbb{B}^{i+1} = \mathbb{X}\overline{\mathbb{B}}^i \qquad \text{avec } \mathbb{X}\mathbb{X} = \mathbb{I} \text{ et } \|\mathbb{X}\mathbb{B}\|^2_{\Gamma,T,\mathbb{K}} = \|\mathbb{B}\|^2_{\Gamma,T,\mathbb{K}}
$$

1. Dautray et Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for science and technology : Volume 5 : Evolution problems 1*, 1988

4. On montre que :

$$E^i(s) = -(v^i, \partial_t \phi^i)_{\Gamma,s} + (\mathbf{t}^i, \partial_t \mathbf{u}^i)_{\Gamma,s} = \frac{1}{4}\left\|\mathbb{B}^i\right\|^2_{\Gamma,s,K} - \frac{1}{4}\left\|\overline{\mathbb{B}}^i\right\|^2_{\Gamma,s,K}$$

et que la somme des $E^i$ sur les itérations i s'écrit

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\underbrace{E^i(s) + \frac{1}{r}(\frac{1}{r}-1)\left\|\mathbb{X}\overline{\mathbb{B}}^i - \mathbb{B}^i\right\|^2_{\Gamma,s,K}}_{\geq 0}\right\} + \underbrace{\frac{1}{r}\left\|\mathbb{B}_N\right\|^2_{\Gamma,s,K}}_{\text{indépendent de i}} = \underbrace{\frac{1}{r}\left\|\mathbb{B}_0\right\|^2_{\Gamma,s,K}}_{\text{indépendent de}}$$

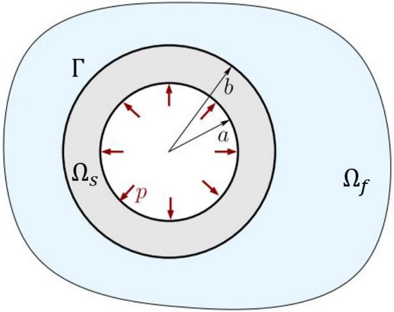
$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty}\left\{E^i(s) + \frac{1}{r}(\frac{1}{r}-1)\left\|\mathbb{X}\overline{\mathbb{B}}^i - \mathbb{B}^i\right\|^2_{\Gamma,s,K}\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} E^i(s) = 0 \qquad \forall s \in [0,T]$$

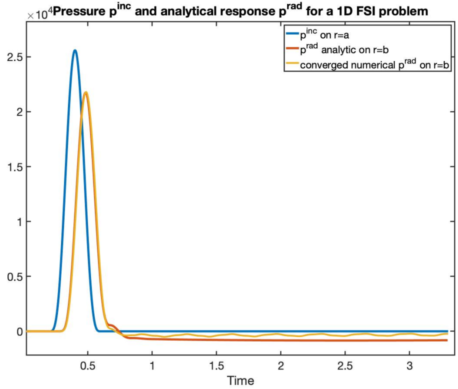
5. Les champs d'erreur tendent vers 0 quand $i \to \infty$

$$\lim_{i\to\infty}\left\|\phi^i - \phi\right\|^2_{H^1(\Omega)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{i\to\infty}\left\|\partial_t\phi^i - \partial_t\phi\right\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$$

# Validation numérique : problème axisymétrique couplé

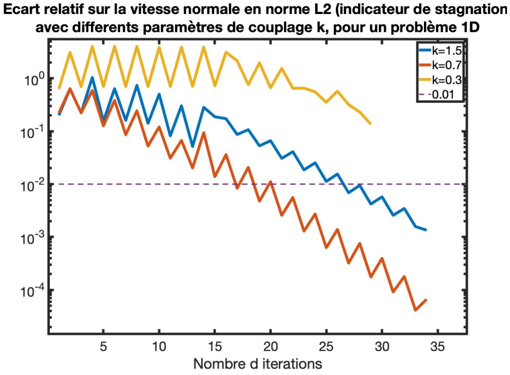


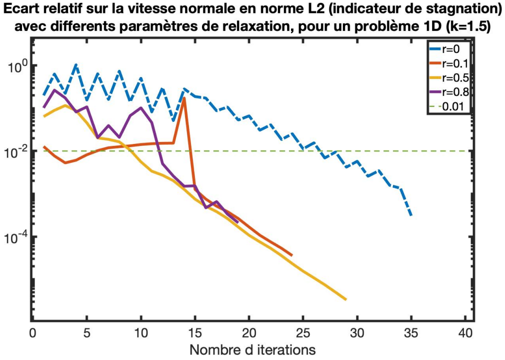

Problème couplé axisymétrique




Pression incidente interne $p^{inc}(r = a)$ et pression rayonnée $p^{rad}(r = b)$

# Validation numérique : Convergence avec et sans relaxation



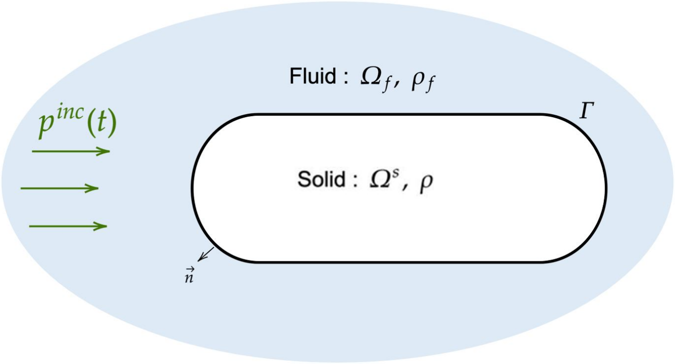

Conditions de Robin :

$$\begin{cases} k\partial_n \phi(t) - \rho_f \partial_t \phi(t) = f(t) \\ \mathbf{t}[\mathbf{u}](t) + k\partial_t \mathbf{u} = g(t) \end{cases}$$

Conditions de Robin relaxées :

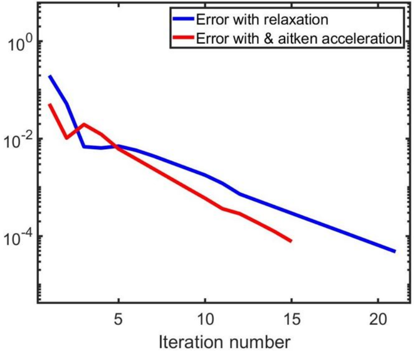
$$\begin{cases} k\partial_n \phi^i(t) - \rho_f \partial_t \phi^i(t) = [1-r]\alpha^{i-1} + rf(t) \\ \mathbf{t}[\mathbf{u^i}](t) + k\partial_t \mathbf{u^i} = [1-r]\beta^{i-1} + rg(t) \end{cases}$$

# Validation numérique : problème couplé 2D



# Validation numérique : Convergence et accélération aitken

Ecart relatif sur la vitesse normale en norme L2 (indicateur de stagnation) pour un problème 2D (k=0.725, r=0.5)




Accélérateur de convergence Aitken $\forall i \geq 0$

$$\mathrm{B}^i = \begin{Bmatrix} f^i(t) \\ g^i(t) \end{Bmatrix} \quad \text{and} \quad \Delta^i = B^i - B^{i+1}$$

$$\mathrm{t}^* = \frac{\left(\Delta^i, \Delta^i - \Delta^{i-1}\right)}{\left\|\Delta^i - \Delta^{i-1}\right\|_2^2}$$

$$B^{i+1} = B^i + t^* \left(B^{i-1} - B^i\right)$$

$$\Updownarrow$$

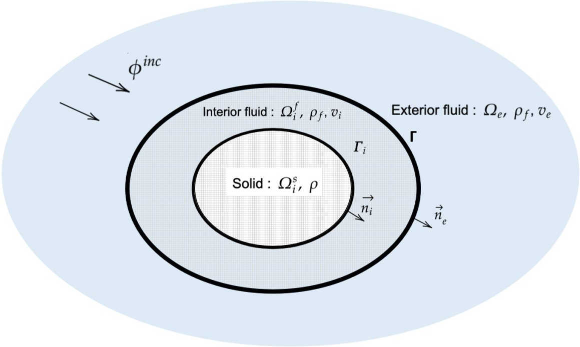
$$\begin{cases} k\partial_n \phi^{i+1}(t) - \rho_f \partial_t \phi^{i+1}(t) = f^i(t) + t^* \left(f^{i-1}(t) - f^i(t)\right) \\ \mathbf{t}[\mathbf{u}^{\mathbf{i+1}}](t) + k\partial_t \mathbf{u}^{\mathbf{i+1}} = g^i(t) + t^* \left(g^{i-1}(t) - g^i(t)\right) \end{cases}$$

- Un problème transitoire de **Robin** admet une solution en vitesse sur la frontière de même régularité que la donnée.
  $\rightarrow$ Permet de définir une procédure itérative à convergence **garantie**.

- Les résultats numériques 2D corroborent les conclusions théoriques sur la convergence.

Inconvénient : dans un contexte industriel, l'imposition de conditions de Robin sur le domaine solide peut ne pas être possible.

# Couplage acoustique-acoustique avec conditions de Robin




Avantages :

- Pas de condition Robin imposée dans la partie solide
- Couplage avec conditions de Robin à convergence garantie
- Possibilité d'introduire des non-linéarités dans la partie FEM-fluide

# Conclusion

- Un problème transitoire de **Robin** admet une solution en vitesse sur la frontière de même régularité que la donnée.
  $\rightarrow$ Permet de définir une procédure itérative à convergence **garantie**.

- Les résultats numériques 2D corroborent les conclusions théoriques sur la convergence.

- Une procédure itérative acoustique-acoustique de Robin a une convergence **garantie**.

Merci pour votre attention !

# Méthode des éléments de frontière (BEM) : Représentation intégrale

Fonction de Green acoustique 2D

$$\Delta G(\mathbf{x},\mathbf{y}) + k^2 G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{y}), \qquad \left(\text{acoustique 2D : } G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{y}-\mathbf{x}|)\right)$$

La formule de Green ne peut pas s'appliquer car $\delta_y \notin L^2$.
Théorème de représentation pour le problème extérieur

$$\int_\Gamma \left(-G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \left[\partial_n \psi\right]^s(\mathbf{y}) + \partial_n G(\mathbf{x},\mathbf{y}) \left[\psi(\mathbf{y})\right]^s\right) d\Gamma = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \Omega_s \\ \psi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_f \end{cases}$$

Opérateurs intégraux de simple et double couche :

$$Sp(\mathbf{x}) := \int_\Gamma G(\mathbf{x}-\mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\Gamma_y, \quad Dq(\mathbf{x}) := \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}(\mathbf{y})}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) q(\mathbf{y}) d\Gamma_y, \quad \mathbf{x} \notin \Gamma \qquad \text{(G connue)}$$

Représentation intégrale (= produits matrice-vecteur)

$$\boxed{\psi(\mathbf{x}) = D\left[\psi\right]_\Gamma(\mathbf{x}) - S\left[\partial_n \psi\right]_\Gamma(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f} \qquad [f]_\Gamma = f^s - f^f, \text{ la différence des traces}$$

Il faut résoudre une équation intégrale pour déterminer $[\psi]_\Gamma$ et $[\partial_n \psi]_\Gamma$

# Solution semi-analytique

Problème IFS axisymétrique :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r u\right) - \frac{u}{r^2} - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}u = 0 & \text{(élastodynamique)} \\ \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r \phi\right) - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}\phi = 0 & \text{(équation des ondes)} \end{cases}}$$

Passage dans le domaine de Laplace

$$\boxed{\begin{cases} \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r \overline{u}\right) - \frac{\overline{u}}{r^2} - \frac{1}{c^2}s^2\overline{u} = 0 & \text{(élastodynamique)} \\ \frac{1}{r}\partial_r\left(r\partial_r \overline{\phi}\right) - \frac{1}{c^2}s^2\overline{\phi} = 0 & \text{(équation des ondes)} \end{cases}}$$

$=$ équations de Bessel modifiées

Solutions analytiques fréquentielles

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{u}}(r,s) = A(s)I_1(\frac{sr}{c}) + B(s)K_1(\frac{sr}{c}) \\ \overline{\mathbf{\Phi}}(r,s) = C(s)K_0(\frac{sr}{c}) \end{cases}$$

avec (A,B,C) proportionnels à $\overline{\mathbf{P}}(s)$ donc

$$\begin{cases} \overline{\mathbf{u}}(r,s) = \overline{\mathbf{U_1}}(r,s)\overline{\mathbf{P}}(s) \\ \overline{\mathbf{\Phi}}(r,s) = \overline{\Phi_1}(r,s)\overline{\mathbf{P}}(s) \end{cases}$$

Retour temporel par transformée en Z inverse

$$\Rightarrow \begin{cases} u(r,t_n) = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\overline{\mathbf{u}}(r,\xi_k)\xi_k^{-n} \\ \phi(r,t_n) = \frac{1}{L}\sum_{k=0}^{L-1}\overline{\mathbf{\Phi}}(r,\xi_k)\xi_k^{-n} \end{cases} \quad n \in [0, N$$