

Расчетно графическая работа по функциональному анализу

Выполнил студент группы М80-308Б-22 Караев Тариел Жоомартбекович.

Задание III

Вычислите интеграл Лебега–Стилтьеса $\int [a, b] = f(x)dF(x)$.

Вариант 9

$$\begin{aligned}k &= 8, l = 15, \\[a, b] &= [-2k, 3l]; \\f(x) &= \sin kx + 4\chi\left(2x - \frac{l}{5}\right) - 3x^2, \\F(x) &= e^x + 3\chi(x - 1) + \chi(2x - k) + x^2 \cdot \operatorname{sgn} x \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow [a, b] &= [-16, 45]; \\f(x) &= \sin 8x + 4\chi(2x - 9) - 3x^2, \\F(x) &= e^x + 3\chi(x - 1) + \chi(2x - 8) + x^2 \cdot \operatorname{sgn} x\end{aligned}$$

Решение

Функция $F(x)$ состоит из абсолютно непрерывной части и точек разрыва:

- Абсолютно непрерывна на $(-\infty, 1) \cup (1, 4) \cup (4, \infty)$
- Разрывы в точках $x = 1$ (скачок $\Delta F = 3$) и $x = 4$ (скачок $\Delta F = 1$)

Тогда интеграл запишем как:

$$\begin{aligned}\int_{-16}^{45} f(x) dF(x) &= \int_{-16}^1 f(x) dF(x) + \int_1^4 f(x) dF(x) + \\&+ \int_4^{45} f(x) dF(x) + f(1) \cdot \Delta F(1) + f(4) \cdot \Delta F(4)\end{aligned}$$

Производная $F'(x)$ почти всюду:

$$F'(x) = (e^x + x^2 \cdot \operatorname{sgn}(x))' = e^x + 2|x|$$

Тогда интегралы:

$$I_1 = \int_{-16}^1 f(x)(e^x + 2|x|) dx$$

$$I_2 = \int_1^4 f(x)(e^x + 2|x|) dx$$

$$I_3 = \int_4^{45} f(x)(e^x + 2|x|) dx$$

Сумма скачков:

$$\Delta_1 = f(1) \cdot 3, \quad \Delta_2 = f(4) \cdot 1$$

Итоговое выражение:

$$\int_{-16}^{45} f(x) dF(x) = I_1 + I_2 + I_3 + \Delta_1 + \Delta_2$$

Далее необходимо вычислить данный интеграл.

Код программы на языке программирования Python

```
import numpy as np
from scipy.integrate import quad

def chi(x):
    return 1 if x >= 0 else 0

def f(x):
    return np.sin(8 * x) + 4 * chi(2 * x - 9) - 3 * x**2

def F_prime(x):
    return np.exp(x) + 2 * abs(x)

if __name__ == '__main__':
    I1, _ = quad(lambda x: f(x) * F_prime(x), -16, 1)
    I2, _ = quad(lambda x: f(x) * F_prime(x), 1, 4)
    I3, _ = quad(lambda x: f(x) * F_prime(x), 4, 45)

    f1 = f(1)
    f4 = f(4)

    D1 = f1 * 3
    D2 = f4 * 1

    result = I1 + I2 + I3 + D1 + D2

    print(
        'Интеграл Лебега-Стиельтеса: \n'
        f'{result:.6f}'
    )
```

Вывод программы

Консоль:

```
uv run lab3/main.py
```

Интеграл Лебега–Стилтьеса:

```
-202861576902282431168512.000000
```

Вывод

В ходе работы был вычислен интеграл Лебега–Стилтьеса с учётом как абсолютно непрерывной части, так и дискретных скачков функции распределения. Используя численные методы и язык программирования Python, удалось получить итоговое значение интеграла, подтверждающее корректность разложения меры.