

# Дифференциальные ур-я

## Содержание

<b>1</b>	<b>Ур-я с разделяющимися переменными</b>	<b>2</b>
1.1	Метод разделения переменных . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Неоднородные линейные дифф. ур. 1-го порядка</b>	<b>2</b>
2.1	Метод вариации произвольных констант . . . . .	2
2.2	Метод Бернулли . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Ур-е Бернулли</b>	<b>3</b>
3.1	Метод замены $y = z^a$ . . . . .	3
<b>4</b>	<b>Дифф. ур-я вида <math>y^n = f(x)</math></b>	<b>4</b>
4.1	Метод n-кратного интегрирования . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Дифф. ур-я, в которых нет <math>y</math> без <math>'</math> и которые содержат как минимум две производные</b>	<b>4</b>
5.1	Метод замены $z = z(x) = y^{(\dots)}$ . . . . .	4
<b>6</b>	<b>Дифф. ур-я, в которых нет <math>x</math></b>	<b>4</b>
6.1	Метод замены $z = z(y) = y'$ . . . . .	4
<b>7</b>	<b>Ур-е Лагранжа</b>	<b>5</b>
7.1	Метод замены $p = p(x) = y'$ . . . . .	5
<b>8</b>	<b>Ур-е Клеро</b>	<b>5</b>
8.1	Метод замены $p = p(x) = y'$ для Клеро . . . . .	6
<b>9</b>	<b>Ур-е вида <math>x = F(y')</math></b>	<b>6</b>
9.1	Метод замены $p = y'$ . . . . .	6
<b>10</b>	<b>Ур-е вида <math>y = F(y')</math></b>	<b>7</b>
10.1	Метод замены $p = y'$ . . . . .	7
<b>11</b>	<b>Однородные дифф. ур-я</b>	<b>7</b>
11.1	Метод замены $y = x \cdot u$ . . . . .	7
<b>12</b>	<b>Ур-е вида <math>y' = F(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})</math></b>	<b>8</b>
12.1	Метод решения подтипа 12а . . . . .	8
12.2	Метод решения подтипа 12б . . . . .	8

# 1 Ур-я с разделяющимися переменными

Общий вид:

$$f(x)dx = g(y)dy.$$

## 1.1 Метод разделения переменных

Пример:

$$xy' - y = 0$$

1. Записать  $y'$  как  $\frac{dy}{dx}$ .

$$x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

2. В одной стороне собрать все  $x$ , а в другой - все  $y$ .

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{y}dy$$

3. Проинтегрировать.

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{y}dy$$

$$\ln|x| + C_1 = \ln|y| + C_2$$

$$\ln|y| = \ln|x| + C_3$$

4. Выразить  $y$  и записать ответ.

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C_3}$$

$$|y| = |x| \cdot e^{C_3}$$

$$|y| = |x| \cdot C_4$$

$$y = x \cdot C_5$$

$$\text{Ответ: } y = Cx, C \in \mathbb{R}.$$

## 2 Неоднородные линейные дифф. ур. 1-го порядка

Так называемый "НЛДУ1П".

Общий вид:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \text{ где}$$

$q(x)$  обеспечивает неоднородность,

$p(x), q(x)$  – заданные функции,

$y = y(x)$  – искомая функция.

### 2.1 Метод вариации произвольных констант

Пример:

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$$

1. Убедиться, что это действительно НЛДУ1П.

$$y' + (-\operatorname{ctg} x) \cdot y = \sin x$$

2. Записать соответствующее однородное дифф. ур. (вместо  $q(x)$  записать 0).

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 0$$

3. Решить его (методом разделения переменных).

$$[...]$$

$$y = C \cdot \sin x$$

4. Записать фразу "Будем искать решение исходного ур-я в виде  $y = \dots C(x) \dots$ ".

$$\text{Будем искать решение исходного ур-я в виде } y = \dots C(x) \dots$$

5. Эту штуку (выражение справа) подставить в исходное ур-е.

$$(C(x) \sin x)' - C(x) \cos x - \sin x = 0$$

$$(C(x) \sin x)' - C(x) \sin x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$$

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \cos x - \sin x = 0$$

$$C'(x) \sin x = \sin x \text{ (на этом шаге } C(x) \text{ обязательно должен пропасть)}$$

$$C'(x) = 1$$

$$C(x) = x + C_1$$

6. Заглянуть в пункт 4 и записать ответ.

$$\text{Ответ: } y = (x + C) \sin x, C \in \mathbb{R}.$$

## 2.2 Метод Бернулли

Пример:

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$$

1. Убедиться, что это действительно НЛДУ1П.

$$y' + (-\operatorname{ctg} x) \cdot y = \sin x$$

2. Заменить  $y = uv$ , где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – пока неизвестные функции.

$$(uv)' + (\operatorname{tg} x)(uv) = \frac{1}{\cos x}$$

$$u'v + uv' + uv \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$

3. Вынести  $u$  за скобки.

$$u'v + v(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}$$

4. Найти какую-то конкретную функцию  $v \neq 0$ , которая обнуляет выражение в скобках.

$$\text{Решим } v' + v \operatorname{tg} x = 0$$

[...]

$$v = C_1 \cos x$$

$$\text{Берём конкретное решение при } C_1 = 0 \quad v = \cos x$$

5. Подставить подобранную функцию  $v$  в ур-е из пункта 3.

$$u' \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u = \operatorname{tg} x + C$$

6. Заглянув в пункт 2, записать ответ.

$$\text{Ответ: } y = C \cos x + \sin x.$$

## 3 Ур-е Бернулли

Общий вид:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^b, \text{ где}$$

$b$  – число,  $b \neq 0$

### 3.1 Метод замены $y = z^a$

Пример:

$$xy' = \frac{x}{y} + y$$

1. Убедиться, что это ур-е Бернулли.

$$y' - \frac{1}{x}y = y^{-1}$$

2. Заменить  $y = z^a$ , где  $a$  – пока неизвестное число,  $z = z(x)$  – пока неизвестная функция.

$$(z^a)' - \frac{1}{x}z^a = (z^a)^{-1}$$

$$\boxed{(z(x)^a)'_x \Rightarrow (z^a)' = az^{a-1} \cdot z'}$$

$$az^{a-1} \cdot z' - \frac{1}{x}z^a = z^{-a}$$

3. Поделить обе части ур-я на выражение, стоящее перед  $z'$ .

$$z' - \frac{1}{ax}z = \frac{1}{a}z^{-2a+1}$$

4. Подобрать число  $a$  так, чтобы в правой части было  $z^0$ .

$$-2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1/2$$

5. Подбранное  $a$  подставить в ур-е из пункта 3.

$$z' - \frac{2}{x}z = 2$$

6. Решить это ур-е (НЛДУ1П).

[...]

$$z = C_7 x^2 - 2x$$

7. Заглянув в пункт 2, написать ответ.

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{Cx^2 - 2x}.$$

## Ур-я, допускающие понижение порядка

Порядок – это наибольший встречающийся порядок производной в уравнении.

Например:

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} - \text{дифф. ур. 1-го порядка}$$

$$y'' - \sin(e^{y'''} + \frac{4}{y'}) = \frac{1}{\sqrt{y}} - \text{дифф. ур. 3-го порядка}$$

## 4 Дифф. ур-я вида $y^n = f(x)$

### 4.1 Метод n-кратного интегрирования

Пример:

$$y''' = 3x^2 + 6$$

$$y'' = x^3 + 6x + C_1$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + 3x^2 + C_1x + C_2$$

$$y = \frac{x^5}{20} + x^3 + C_4x^2 + C_2x + C_3$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{x^5}{20} + x^3 + C_4x^2 + C_2x + C_3$$

## 5 Дифф. ур-я, в которых нет $y$ без ' и которые содержат как минимум две производные

### 5.1 Метод замены $z = z(x) = y^{(\dots)}$

Пример:

$$y'''' - y''' = e^x$$

1. Заменить  $z = z(x) = y^{(\dots)}$ , где  $(\dots)$  — наименьший встречающийся порядок производной.

$$\text{Замена } z = z(x) = y'''$$

2. Переписать ур-е через  $z$ .

$$z' - z = e^x$$

$$[\dots]$$

$$z = (x + C)e^x$$

3. Заменить обратно.

$$y''' = e^x(x + C)$$

Решим методом n-кратного интегрирования

$$[\dots]$$

$$y = e^x(x + C - 3) + C_7 + C_2x + C_8x^2$$

$$\text{Ответ: } y = e^x(x + C - 3) + C_7 + C_2x + C_8x^2.$$

## 6 Дифф. ур-я, в которых нет $x$

Пример:

$$y'' \cdot y = y'^2$$

### 6.1 Метод замены $z = z(y) = y'$

1. Заменить  $z = z(y) = y'$ .

$$\text{Введём новую функцию } z = z(y) = y'$$

2. Выразить через  $z$  все производные, встречающиеся в уравнении.

$$y' = z$$

$$y'' = y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{d(y'_x)}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot y' = z' \cdot z$$

$$\text{Имеем: } z' \cdot z \cdot y = z^2 \text{ (искомая функция } z = z(y))$$

$$z' \cdot y = z$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot y = z$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln|z| = \ln|y| + C_1$$

$$z = C_2y$$

3. Заменить обратно.

$$y' = C_2y$$

$$\frac{dy}{dx} = C_2y$$

$$\ln|y| = C_2x + C_3$$

$$y = e^{C_2x} \cdot C_4$$

$$\text{Ответ: } y = C_1e^{C_2x}, C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

## 7 Ур-е Лагранжа

Общий вид ур-я Лагранжа:

$$y = x \cdot F(y') + G(y'), \text{ где} \\ F(y'), G(y') - \text{выражения, в которых нет } y, y'', y''' \text{ и т. д.}$$

### 7.1 Метод замены $p = p(x) = y'$

**Пример ур-е Лагранжа, не являющегося ур-ем Клеро:**

$$y + 3y'^2 = 2xy' \quad (*)$$

1. Убедиться, что это ур-е Лагранжа, не являющееся ур-ем Клеро.

$$t = x \cdot 2y' + (-3y'^2)$$

2. Заменить  $p = p(x) = y'$ .

$$\text{Замена } p = p(x) = y' \Rightarrow y = 2px - 3p^2 \quad (**)$$

3. Продифференцировать обе части.

$$y' = 2p'x + 2p - 6pp'$$

4. Заменить  $y'$  на  $p$ .

$$p = 2p'x + 2p - 6pp'$$

5. Все слагаемые с  $p'$  перенести влево, вынести за скобку  $p'$ , а всё остальное — вправо.

$$(6p - 2x)p' = p$$

6. Переписать  $p'$  как  $\frac{dp}{dx}$  и умножить обе части на  $\frac{dx}{dp}$ .

$$(6p - 2x) \frac{dp}{dx} = p \frac{dx}{dp}$$

$$6p - 2x = p \frac{dx}{dp}$$

$$6p - 2x = px' \quad (\text{это НЛДУ1П, искомая функция } x = x(p))$$

7. Рассмотреть случай (множитель при  $x'$ ) = 0.

$$(7a) \quad p = 0$$

$$y' = 0$$

$$y = A$$

- (7б) Полученное выражение подставить в (\*).

$$A + 3 \cdot 0^2 = 2x \cdot 0$$

$$A = 0$$

- (7в) Первое решение дифф. ур-я.

$$y = 0$$

8. Рассмотреть случай (множитель при  $x'$ )  $\neq 0$ .

- (8а) Поделить на  $p'$ .

$$6 - \frac{2x}{p} = x'$$

$$x' + \frac{2}{p}x = 6$$

$$[...]$$

$$x = 2p + \frac{B}{p^2}$$

- (8б) Полученное выражение для  $x$  подставим в (\*\*).

$$y = 2p \cdot (2p + \frac{B}{p^2}) - 3p^2 = p^2 + \frac{2B}{p}$$

9. Записать ответ,

- учитывая результат 7в,
- учитывая результат 8а и 8б,
- заменяя константы на  $C$ ,
- заменяя  $p$  на  $x$ .

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y = 0, \\ x = 2t + \frac{C}{t^2}, \\ y = t^2 + \frac{2C}{t}, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

## 8 Ур-е Клеро

Уравнение Клеро – частный случай ур-я Лагранжа.

Общий вид ур-я Клеро:

$$y = xy' + G(y')$$

## 8.1 Метод замены $p = p(x) = y'$ для Клеро

**Пример:**

$$y - y'^2 = xy' \quad (**)$$

1–5. Шаги идентичны предыдущему методу.

6. Рассмотреть случай (множитель при  $x'$ )  $= 0$ .

$$\begin{aligned} (6a) \quad & p' = 0 \\ & y'' = 0 \\ & y = Ax + B \end{aligned}$$

$$(6б) \quad \text{Подставить выражения в } (**) \\ Ax + B - A^2 = Ax$$

$$(6в) \quad \text{Выразить обе константы через какую-то одну} \\ \begin{cases} A = A \\ B = A^2 \end{cases}$$

$$(6г) \quad \text{Записать первую серию решений ур-я} \\ y = Ax + A^2$$

7. Рассмотреть случай (множитель при  $x'$ )  $\neq 0$ .

$$(7a) \quad x + 2p = 0 \quad x = -2p$$

$$(7б) \quad \text{Подставим выражение в пункт 2} \quad y = xp + p^2 \quad y = (-2)p + p^2 \quad y = -p^2$$

8. Записать ответ

- учитывая результат 6г,
- учитывая результат 7а и 7б,
- заменяя константы на  $C$ ,
- заменяя  $p$  на  $t$ .

$$\text{Ответ:} \quad \begin{cases} y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} x = -2t, \\ y = -t^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = Cx + C^2, \quad C \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{x^2}{4} \end{cases}.$$

## Ур-я, не разрешённые относительно $y'$

Ур-е решено относительно  $y' \Leftrightarrow y'$  выражено через всё остальное

Например:

$\sin x + y' = e^{xy'}$  – не решено относительно  $y'$ .

## 9 Ур-е вида $x = F(y')$

### 9.1 Метод замены $p = y'$

**Пример:**

$$\ln y' + \sin y' - x = 0$$

1. Убедиться, что это ур-е вида  $x = F(y')$ .

$$x = \ln y' + \sin y'$$

2. Заменить  $p = y'$ .

$$x = \ln p + \sin p$$

3. Взять дифференциал от обеих частей.

$$dx = d(\ln p + \sin p)$$

$$dx = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right)dp \quad (*)$$

4. Из замены выразить  $dx$  через  $dy$ .

$$p = y'$$

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{p} \quad (**)$$

5. Подставить  $(**)$  в  $(*)$ .

$$\frac{dy}{p} = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right)dp$$

6. Выразить  $dy$  и проинтегрировать.

$$dy = (1 + \cos p)dp$$

$$y = \int (1 + p \cos p)dp = p + C_1 + \int p \cos p dp = p + p \sin p \cos p + C$$

$$7. \text{ Записать ответ } \begin{cases} p \rightarrow t \\ const \rightarrow C \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t + t \sin t + \cos t + C, C \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

## 10 Ур-е вида $y = F(y')$

### 10.1 Метод замены $p = y'$

**Пример:**

$$e^{\ln y - y'} = y'^2$$

1. Убедиться, что это ур-е вида  $y = F(y')$ .

$$\frac{y}{e^{y'}} = y'^2$$

$$y = y'^2 e^{y'}$$

2. Заменить  $p = y'$ .

$$y = p^2 e^p$$

3. Взять дифференциал от обеих частей.

$$dy = (2pe^p + p^2 e^p) dp (*)$$

4. Из замены выразить  $dy$  через  $dx$ .

$$p = y'$$

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = p dx (**)$$

5. Подставить (\*\*) в (\*).

$$p dx = (2pe^p + p^2 e^p) dp$$

6. Выразить  $dx$  и проинтегрировать.

$$dx = \frac{2pe^p + p^2 e^p}{p} dp$$

$$dx = (2e^p + pe^p) dp$$

$$x = 2 \int e^p dp + \int pe^p dp = (2e^p + A) + (pe^p - e^p + B) = e^p + pe^p + C$$

$$\int pe^p dp = pe^p - \int e^p dp = pe^p - e^p + B$$

$$7. \text{ Записать ответ } \begin{cases} p \rightarrow t \\ const \rightarrow C \end{cases}.$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y = y'^2 e^y, \\ x = te^t + e^t + C, C \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

## 11 Однородные дифф. ур-я

Однородным называют ур-е вида  $y' = F(\frac{y}{x})$ .

Не путать с НЛДУП – ур-ем вида  $y' + p(x)y = q(x)$

### 11.1 Метод замены $y = x \cdot u$

**Пример:**

$$xy' - y - xe^{\frac{y}{x}} = 0$$

1. Убедиться, что это ур-е вида  $y' = F(\frac{y}{x})$ .

$$xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$$

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

2. Заменить  $y = x \cdot u$ , где  $u = u(x)$ .

$$\text{Замена } y = x \cdot u$$

$$(xu)' = e^u + u$$

$$u + xu' = e^u + u$$

$$xu' = e^u$$

3. Решить полученное ур-е относительно  $u = u(x)$  (методом разделения переменных).

$$x \frac{du}{dx} = e^u$$

$$\frac{1}{e^u} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{e^u} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$-\frac{1}{e^u} = \ln |x| + C_1$$

$$e^{-u} = C_2 - \ln |x|$$

$$\ln e^{-u} = \ln (C_2 - \ln |x|)$$

$$u = -\ln C_2 - \ln |x|$$

4. Заменить обратно и записать ответ.

$$\text{Ответ: } y = -x \ln (C - \ln |x|), \quad C \in \mathbb{R}.$$

## 12 Ур-е вида $y' = F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Данный тип ур-я делится на 2 подтипа:

(12а) Если  $a_1x + b_1y$  и  $a_2x + b_2y$  пропорциональны.

(12б) Если  $a_1x + b_1y$  и  $a_2x + b_2y$  непропорциональны.

### 12.1 Метод решения подтипа 12а

**Пример:**

$$(x - 2y + 3)dx = (-2x + 4y + 8)dy$$

1. Убедиться, что это ур-е подтипа 12а.

$$y' = \frac{x-2y+3}{-2x+4y+8} \quad (*)$$

$$F(t) = t$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & b_1 = 2 & c_1 = 3 \\ a_2 = -2 & b_2 = 4 & c_2 = 8 \end{array}$$

2. Заменить  $z = z(x) = [\text{одному из этих членов } a_1x + b_1y \text{ или } a_2x + b_2y]$ .

$$z = z(x) = x - 2y$$

3. Выразить отсюда  $y$  и продифференцировать по  $x$ .

$$y = \frac{x}{2} - \frac{z}{2}$$

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{z'}{2}$$

4. В ур-и  $(*)$  из пункта 1 заменить левую и правую часть.

$$\frac{1}{2} - \frac{z'}{2} = \frac{z+3}{-2z+8} \quad - \text{ искомая функция } z = z(x)$$

5. Решить полученное ДУ (заведомо пройдет метод разделения переменных).

$$[...]$$

$$\frac{1}{4}(2z - 1 - 7 \ln |2z - 1|) = x + C_1 \quad - \text{ решение в неявном виде}$$

6. Заменить обратно и записать ответ.

$$\frac{1}{4}(2x - 4y - 1 - 7 \ln |2x - 4y - 1|) = x + C_1$$

$$\text{Ответ: } \frac{x}{2} + y + \frac{7}{4} \ln |2x - 4y - 1| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

### 12.2 Метод решения подтипа 12б

**Пример:**

$$(x - y - 1)dx + (x + 2y - 4)dy = 0$$

1. Убедиться, что это ур-е подтипа 12б.

$$y' = \frac{x-y-1}{-x-2y+4} \quad (*)$$

$$F(t) = t$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & b_1 = -1 & c_1 = 1 \\ a_2 = -1 & b_2 = -2 & c_2 = 4 \end{array}$$

2. Записать и решить систему  $\begin{cases} \text{Числитель} = 0 \\ \text{Знаменатель} = 0 \end{cases}$  и обозначить решение через  $x_0$  и  $y_0$ .

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ -x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = 1$$



3. Заменить  $\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$ , где  $u, v$  – новые переменные и  $v = v(u)$ .

$$\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v + 1 \end{cases}$$

4. Подставить это в ур-е (\*) из пункта 1.

$$\text{Левая часть} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+1)}{d(u+2)} = \frac{dv}{du} = v'_u$$

$$\text{Правая часть} = \frac{u+2-v-1-1}{-u-2-2v-2+4} = \frac{u-v}{-u-2v}$$

**Если в числителе и знаменателе не исчезли свободные члены, ищи ошибку!**

*Приходим к ур-ю*

$$v' = \frac{u-v}{-u-2v}$$

5. Решить это ДУ, разделив числитель и знаменатель на  $u$  и рассмотрев как ур-е вида  $v' = F(\frac{v}{u})$ .

$$v' = \frac{1 - \frac{v}{u}}{-1 - 2\frac{v}{u}}$$

[...]

$...u...v... = ...u...v... - \text{решение в неявном виде}$

6. Заменить обратно и записать ответ.

$$\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y - 1 \end{cases}$$

*Ответ:*  $...(x-2)...(y-1)... = ...(x-2)...(y-1)....$