

Дифференциальные уравнения

Содержание

1	Уравнения с разделяющимися переменными	3
1.1	Метод разделения переменных	3
2	Неоднородные линейные дифф. уравнения 1-го порядка	3
2.1	Метод вариации произвольных констант	3
2.2	Метод Бернулли	4
3	Уравнение Бернулли	5
3.1	Метод замены $y = z^a$	5
4	Дифф. уравнения вида $y^n = f(x)$	6
4.1	Метод n-кратного интегрирования	6
5	Дифф. уравнения, в которых нет y без ' и которые содержат как минимум две производные	6
5.1	Метод замены $z = z(x) = y^{\min}$	6
6	Дифф. уравнения, в которых нет x	6
6.1	Метод замены $z = z(y) = y'$	6
7	Уравнение Лагранжа	7
7.1	Метод замены $p = p(x) = y'$	7
8	Уравнение Клеро	8
8.1	Метод замены $p = p(x) = y'$	9
9	Уравнение вида $x = F(y')$	9
9.1	Метод замены $p = y'$	9
10	Уравнение вида $y = F(y')$	10
10.1	Метод замены $p = y'$	10
11	Однородные дифф. уравнения	11
11.1	Метод замены $y = x \cdot u$	11
12	Уравнение вида $y' = F(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$	12
12.1	Метод решения подтипа 12а	12
12.2	Метод решения подтипа 12б	13

13 Уравнение в полных дифференциалах	14
13.1 Метод поиска полного дифференциала	14
13.2 Метод поиска интегрирующего множителя	15
14 Однородные линейные дифф. уравнения с постоянными коэффициентами	15
14.1 Метод линейных комбинаций	15
15 Неоднородные дифф. уравнения с постоянными коэффициентами	16
15.1 Метод вариаций произвольных констант	16
16 Однородные линейные дифф. уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью	17
16.1 Некоторые элементы теории	17
16.2 Метод поиска частного решения	18
17 Однородные системы дифф. уравнений 1-го порядка	19
17.1 Алгоритм решения ОСДУ1П	19
17.2 Алгоритмы обработки разных типов корней	20

1 Уравнения с разделяющимися переменными

Общий вид:

$$f(x)dx = g(y)dy$$

1.1 Метод разделения переменных

Пример:

$$xy' - y = 0$$

1. Записать y' как $\frac{dy}{dx}$.

$$x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

2. В одной стороне собрать все x , а в другой - все y .

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{y}dy$$

3. Проинтегрировать.

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{y}dy$$

$$\ln |x| + C_1 = \ln |y| + C_2$$

$$\ln |y| = \ln |x| + C_3$$

4. Выразить y и записать ответ.

$$e^{\ln |y|} = e^{\ln |x| + C_3}$$

$$|y| = |x| \cdot e^{C_3}$$

$$|y| = |x| \cdot C_4$$

$$y = x \cdot C_5$$

$$\text{Ответ: } y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2 Неоднородные линейные дифф. уравнения 1-го порядка

Так называемые НЛДУ1П.

Общий вид:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \text{ где}$$

$q(x)$ обеспечивает неоднородность,

$p(x), q(x)$ – заданные функции,

$y = y(x)$ – искомая функция.

2.1 Метод вариации произвольных констант

Пример:

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$$

1. Убедиться, что это действительно НЛДУ1П.

$$y' + (-\operatorname{ctg} x) \cdot y = \sin x$$

2. Записать соответствующее однородное дифф. ур. (вместо $q(x)$ записать 0).

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 0$$
3. Решить его (методом разделения переменных).

$$[...]$$

$$y = C \cdot \sin x$$
4. Записать фразу "Будем искать решение исходного уравнения в виде $y = ...C(x)...$ ".
Будем искать решение исходного уравнения в виде $y = ...C(x)...$
5. Эту штуку (выражение справа) подставить в исходное уравнение.

$$(C(x) \sin x)' - C(x) \cos x - \sin x = 0$$

$$(C(x) \sin x)' - C(x) \sin x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$$

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x - C(x) \cos x - \sin x = 0$$

$$C'(x) \sin x = \sin x \text{ (на этом шаге } C(x) \text{ обязательно должен пропасть)}$$

$$C'(x) = 1$$

$$C(x) = x + C_1$$
6. Заглянуть в пункт 4 и записать ответ.
Ответ: $y = (x + C) \sin x, C \in \mathbb{R}$.

2.2 Метод Бернулли

Пример:

$$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$$

1. Убедиться, что это действительно НЛДУ1П.

$$y' + (-\operatorname{ctg} x) \cdot y = \sin x$$
2. Заменить $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – пока неизвестные функции.

$$(uv)' + (\operatorname{tg} x)(uv) = \frac{1}{\cos x}$$

$$u'v + uv' + uv \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$$
3. Вынести u за скобки.

$$u'v + u(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}$$
4. Найти какую-то конкретную функцию $v \neq 0$, которая обнуляет выражение в скобках.
Решим $v' + v \operatorname{tg} x = 0$

$$[...]$$

$$v = C_1 \cos x$$
Берём конкретное решение при $C_1 = 1$ $v = \cos x$
5. Подставить подобранную функцию v в уравнение из пункта 3.

$$u' \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

$$u = \operatorname{tg} x + C$$
6. Заглянув в пункт 2, записать ответ.
Ответ: $y = C \cos x + \sin x$.

3 Уравнение Бернулли

Общий вид:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^b, \text{ где} \\ b - \text{число, } b \neq 0$$

3.1 Метод замены $y = z^a$

Пример:

$$xy' = \frac{x}{y} + y$$

1. Убедиться, что это уравнение Бернулли.

$$y' - \frac{1}{x}y = y^{-1}$$

2. Заменить $y = z^a$, где a – пока неизвестное число, $z = z(x)$ – пока неизвестная функция.

$$(z^a)' - \frac{1}{x}z^a = (z^a)^{-1}$$

$$\boxed{(z(x)^a)' \Rightarrow (z^a)' = az^{a-1} \cdot z'}$$

$$az^{a-1} \cdot z' - \frac{1}{x}z^a = z^{-a}$$

3. Поделить обе части уравнения на выражение, стоящее перед z' .

$$z' - \frac{1}{ax}z = \frac{1}{a}z^{-2a+1}$$

4. Подобрать число a так, чтобы в правой части было z^0 .

$$-2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1/2$$

5. Подбранное a подставить в уравнение из пункта 3.

$$z' - \frac{2}{x}z = 2$$

6. Решить это уравнение (НЛДУ1П).

$$[...]$$

$$z = C_7x^2 - 2x$$

7. Заглянув в пункт 2, написать ответ.

$$\text{Ответ: } y = \sqrt{Cx^2 - 2x}.$$

Уравнения, допускающие понижение порядка

Порядок – это наибольший встречающийся порядок производной в уравнении.

Например:

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2} - \text{дифф. ур. 1-го порядка}$$

$$y'' - \sin(e^{y'''} + \frac{4}{y''}) = \frac{1}{\sqrt{y}} - \text{дифф. ур. 3-го порядка}$$

4 Дифф. уравнения вида $y^n = f(x)$

4.1 Метод n-кратного интегрирования

Пример:

$$y''' = 3x^2 + 6$$

$$y'' = x^3 + 6x + C_1$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + 3x^2 + C_1x + C_2$$

$$y = \frac{x^5}{20} + x^3 + C_4x^2 + C_2x + C_3$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{x^5}{20} + x^3 + C_4x^2 + C_2x + C_3$$

5 Дифф. уравнения, в которых нет y без $'$ и которые содержат как минимум две производные

5.1 Метод замены $z = z(x) = y^{\min}$

Пример:

$$y'''' - y''' = e^x$$

1. Заменить $z = z(x) = y^{(\dots)}$, где (...) — наименьший встречающийся порядок производной.

$$\text{Замена } z = z(x) = y'''$$

2. Переписать уравнение через z .

$$z' - z = e^x$$

$$[\dots]$$

$$z = (x + C)e^x$$

3. Заменить обратно.

$$y''' = e^x(x + C)$$

Решим методом n-кратного интегрирования

$$[\dots]$$

$$y = e^x(x + C - 3) + C_7 + C_2x + C_8x^2$$

$$\text{Ответ: } y = e^x(x + C - 3) + C_7 + C_2x + C_8x^2.$$

6 Дифф. уравнения, в которых нет x

Пример:

$$y'' \cdot y = y'^2$$

6.1 Метод замены $z = z(y) = y'$

1. Заменить $z = z(y) = y'$.

$$\text{Введём новую функцию } z = z(y) = y'$$

2. Выразить через z все производные, встречающиеся в уравнении.

$$y' = z$$

$$y'' = y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{d(y'_x)}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot y' = z' \cdot z$$

Имеем: $z' \cdot z \cdot y = z^2$ (искомая функция $z = z(y)$)

$$z' \cdot y = z$$

$$\frac{dz}{dy} \cdot y = z$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$$

$$\ln |z| = \ln |y| + C_1$$

$$z = C_2 y$$

3. Заменить обратно.

$$y' = C_2 y$$

$$\frac{dy}{dx} = C_2 y$$

$$\ln |y| = C_2 x + C_3$$

$$y = e^{C_2 x} \cdot C_4$$

Ответ: $y = C_1 e^{C_2 x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

7 Уравнение Лагранжа

Общий вид уравнения Лагранжа:

$$y = x \cdot F(y') + G(y'), \text{ где}$$

$F(y'), G(y')$ — выражения, в которых нет y, y'', y''' и т. д.

7.1 Метод замены $p = p(x) = y'$

Пример уравнение Лагранжа, не являющегося уравнением Клеро:

$$y + 3y'^2 = 2xy' \quad (*)$$

1. Убедиться, что это уравнение Лагранжа, не являющееся уравнением Клеро.

$$t = x \cdot 2y' + (-3y'^2)$$

2. Заменить $p = p(x) = y'$.

$$\text{Замена } p = p(x) = y' \Rightarrow y = 2px - 3p^2 \quad (**)$$

3. Продифференцировать обе части.

$$y' = 2p'x + 2p - 6pp'$$

4. Заменить y' на p .

$$p = 2p'x + 2p - 6pp'$$

5. Все слагаемые с p' перенести влево, вынести за скобку p' , а всё остальное — вправо.

$$(6p - 2x)p' = p$$

6. Переписать p' как $\frac{dp}{dx}$ и умножить обе части на $\frac{dx}{dp}$.

$$(6p - 2x) \frac{dp}{dx} = p$$

$$6p - 2x = p \frac{dx}{dp}$$

$$6p - 2x = px' \quad (\text{это НЛДУ1П, искомая функция } x = x(p))$$

7. Рассмотрим случай (множитель при x') $= 0$.

$$(7a) \quad p = 0$$

$$y' = 0$$

$$y = A$$

(7б) Полученное выражение подставить в (*).

$$A + 3 \cdot 0^2 = 2x \cdot 0$$

$$A = 0$$

(7в) Первое решение дифф. уравнения.

$$y = 0$$

8. Рассмотрим случай (множитель при x') $\neq 0$.

(8a) Поделить на p' .

$$6 - \frac{2x}{p} = x'$$

$$x' + \frac{2}{p}x = 6$$

$$[\dots]$$

$$x = 2p + \frac{B}{p^2}$$

(8б) Полученное выражение для x подставим в (**).

$$y = 2p \cdot (2p + \frac{B}{p^2}) - 3p^2 = p^2 + \frac{2B}{p}$$

9. Записать ответ,

- учитывая результат 7в,
- учитывая результат 8а и 8б,
- заменяя константы на C ,
- заменяя p на x .

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y = 0, \\ x = 2t + \frac{C}{t^2}, \\ y = t^2 + \frac{2C}{t}, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

8 Уравнение Клеро

Уравнение Клеро – частный случай уравнения Лагранжа.

Общий вид уравнения Клеро:

$$y = xy' + G(y')$$

8.1 Метод замены $p = p(x) = y'$

Пример:

$$y - y'^2 = xy' \quad (***)$$

1–5. Шаги идентичны предыдущему методу.

6. Рассмотреть случай (множитель при x') $= 0$.

(6а) $p' = 0$

$$y'' = 0$$

$$y = Ax + B$$

(6б) Подставить выражения в (***)

$$Ax + B - A^2 = Ax$$

(6в) Выразить обе константы через какую-то одну

$$\begin{cases} A = A \\ B = A^2 \end{cases}$$

(6г) Записать первую серию решений уравнения

$$y = Ax + A^2$$

7. Рассмотреть случай (множитель при x') $\neq 0$.

(7а) $x + 2p = 0 \Rightarrow x = -2p$

(7б) Подставим выражение в пункт 2 $y = xp + p^2 \Rightarrow y = (-2)p + p^2 \Rightarrow y = -p^2$

8. Записать ответ

- учитывая результат 6г,
- учитывая результат 7а и 7б,
- заменяя константы на C ,
- заменяя p на t .

$$\text{Ответ:} \quad \begin{cases} y = Cx + C^2, & C \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} x = -2t, \\ y = -t^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = Cx + C^2, & C \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{x^2}{4} \end{cases}.$$

Уравнения, не разрешённые относительно y'

Уравнение решено относительно $y' \Leftrightarrow y'$ выражено через всё остальное

Например:

$\sin x + y' = e^{xy'}$ — не решено относительно y' .

9 Уравнение вида $x = F(y')$

9.1 Метод замены $p = y'$

Пример:

$$\ln y' + \sin y' - x = 0$$

1. Убедиться, что это уравнение вида $x = F(y')$.

$$x = \ln y' + \sin y'$$

2. Заменить $p = y'$.

$$x = \ln p + \sin p$$

3. Взять дифференциал от обеих частей.

$$dx = d(\ln p + \sin p)$$

$$dx = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right)dp \quad (*)$$

4. Из замены выразить dx через dy .

$$p = y'$$

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$dx = \frac{dy}{p} \quad (**)$$

5. Подставить $(**)$ в $(*)$.

$$\frac{dy}{p} = \left(\frac{1}{p} + \cos p\right)dp$$

6. Выразить dy и проинтегрировать.

$$dy = p(1 + \cos p)dp$$

$$y = \int (1 + p \cos p)dp = p + C_1 + \int p \cos p dp = p + p \sin p \cos p + C$$

7. Записать ответ $\begin{cases} p \rightarrow t \\ const \rightarrow C \end{cases}$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t + t \sin t + \cos t + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

10 Уравнение вида $y = F(y')$

10.1 Метод замены $p = y'$

Пример:

$$e^{\ln y - y'} = y'^2$$

1. Убедиться, что это уравнение вида $y = F(y')$.

$$\frac{y}{e^{y'}} = y'^2$$

$$y = y'^2 e^{y'}$$

2. Заменить $p = y'$.

$$y = p^2 e^p$$

3. Взять дифференциал от обеих частей.

$$dy = (2pe^p + p^2 e^p)dp \quad (*)$$

4. Из замены выразить dy через dx .

$$p = y'$$

$$p = \frac{dy}{dx}$$

$$dy = p dx \quad (**)$$

5. Подставить $(**)$ в $(*)$.

$$p dx = (2pe^p + p^2 e^p) dp$$

6. Выразить dx и проинтегрировать.

$$dx = \frac{2pe^p + p^2 e^p}{p} dp$$

$$dx = (2e^p + pe^p) dp$$

$$x = 2 \int e^p dp + \int pe^p dp = (2e^p + A) + (pe^p - e^p + B) = e^p + pe^p + C$$

$$\int pe^p dp = pe^p - \int e^p dp = pe^p - e^p + B$$

7. Записать ответ $\begin{cases} p \rightarrow t \\ const \rightarrow C \end{cases}$.

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y = t^2 e^t, \\ x = te^t - e^t + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

11 Однородные дифф. уравнения

Опред. Однородным называется уравнение вида $y' = F(\frac{y}{x})$.

Не путать с НЛДУ1П – уравнением вида $y' + p(x)y = q(x)$

11.1 Метод замены $y = x \cdot u$

Пример:

$$xy' - y - xe^{\frac{y}{x}} = 0$$

1. Убедиться, что это уравнение вида $y' = F(\frac{y}{x})$.

$$xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$$

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

2. Заменить $y = x \cdot u$, где $u = u(x)$.

$$\text{Замена } y = x \cdot u$$

$$(xu)' = e^u + u$$

$$u + xu' = e^u + u$$

$$xu' = e^u$$

3. Решить полученное уравнение относительно $u = u(x)$ (методом разделения переменных).

$$x \frac{du}{dx} = e^u$$

$$\frac{1}{e^u} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{e^u} du = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{e^u} &= \ln|x| + C_1 \\
e^{-u} &= C_2 - \ln|x| \\
\ln e^{-u} &= \ln(C_2 - \ln|x|) \\
u &= -\ln C_2 - \ln|x|
\end{aligned}$$

4. Заменить обратно и записать ответ.

Ответ: $y = -x \ln(C - \ln|x|)$, $C \in \mathbb{R}$.

12 Уравнение вида $y' = F\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Данный тип уравнения делится на 2 подтипа:

(12а) Если $a_1x + b_1y$ и $a_2x + b_2y$ пропорциональны.

(12б) Если $a_1x + b_1y$ и $a_2x + b_2y$ непропорциональны.

12.1 Метод решения подтипа 12а

Пример:

$$(x - 2y + 3)dx = (-2x + 4y + 8)dy$$

1. Убедиться, что это уравнение подтипа 12а.

$$y' = \frac{x-2y+3}{-2x+4y+8} \quad (*)$$

$$F(t) = t$$

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 1 & b_1 = 2 & c_1 = 3 \\
a_2 = -2 & b_2 = 4 & c_2 = 8
\end{array}$$

2. Заменить $z = z(x) = [\text{одному из этих членов } a_1x + b_1y \text{ или } a_2x + b_2y]$.

$$z = z(x) = x - 2y$$

3. Выразить отсюда y и продифференцировать по x .

$$y = \frac{x}{2} - \frac{z}{2}$$

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{z'}{2}$$

4. В ур-и (*) из пункта 1 заменить левую и правую часть.

$$\frac{1}{2} - \frac{z'}{2} = \frac{z+3}{-2z+8} - \text{искомая функция } z = z(x)$$

5. Решить полученное ДУ (заведомо пройдёт метод разделения переменных).

[...]

$$\frac{1}{4}(2z - 1 - 7 \ln|2z - 1|) = x + C_1 - \text{решение в неявном виде}$$

6. Заменить обратно и записать ответ.

$$\frac{1}{4}(2x - 4y - 1 - 7 \ln|2x - 4y - 1|) = x + C_1$$

$$\text{Ответ: } \frac{x}{2} + y + \frac{7}{4} \ln|2x - 4y - 1| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

12.2 Метод решения подтипа 12б

Пример:

$$(x - y - 1)dx + (x + 2y - 4)dy = 0$$

1. Убедиться, что это уравнение подтипа 12б.

$$y' = \frac{x-y-1}{-x-2y+4} \quad (*)$$

$$F(t) = t$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = 1 & b_1 = -1 & c_1 = 1 \\ a_2 = -1 & b_2 = -2 & c_2 = 4 \end{array}$$

2. Записать и решить систему $\begin{cases} \text{Числитель} = 0 \\ \text{Знаменатель} = 0 \end{cases}$ и обозначить решение через x_0 и y_0 .

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ -x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 2, y_0 = 1$$

3. Заменить $\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$, где u, v – новые переменные и $v = v(u)$.

$$\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v + 1 \end{cases}$$

4. Подставить это в уравнение $(*)$ из пункта 1.

$$\text{Левая часть} = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+1)}{d(u+2)} = \frac{dv}{du} = v'_u$$

$$\text{Правая часть} = \frac{u+2-v-1-1}{-u-2-2v-2+4} = \frac{u-v}{-u-2v}$$

Если в числителе и знаменателе не исчезли свободные члены, ищи ошибку!

Приходим к ур-ю

$$v' = \frac{u-v}{-u-2v}$$

5. Решить это ДУ, разделив числитель и знаменатель на u и рассмотрев как уравнение вида

$$v' = F\left(\frac{v}{u}\right).$$

$$v' = \frac{1 - \frac{v}{u}}{-1 - 2\frac{v}{u}}$$

[...]

...u...v... = ...u...v... – решение в неявном виде

6. Заменить обратно и записать ответ.

$$\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y - 1 \end{cases}$$

Ответ: ... (x - 2) ... (y - 1) ... = ... (x - 2) ... (y - 1)

13 Уравнение в полных дифференциалах

Дифференциал:

$$\begin{aligned}d(u(x, y)) &= u'_x dx + u'_y dy \\d(x^2 \ln y) &= 2x \ln y dx + \frac{x^2}{y} dy\end{aligned}$$

Опред. Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, у которого в левой части стоит дифференциал некоторой функции двух переменных, т. е.

$$\exists u(x, y) : \begin{cases} P(x, y) = u'_x \\ Q(x, y) = u'_y \end{cases}.$$

13.1 Метод поиска полного дифференциала

Пример:

$$(-x^2 + y \cos x)dx + (y + \sin x)dy = 0$$

1. Убедиться, что это уравнение в полных дифференциалах.

$$\begin{cases} (-x^2 + y \cos x)'_y = \cos x \\ (y + \sin x)'_x = \cos x \end{cases} \Rightarrow \cos x = \cos x \Rightarrow \text{это уравнение в полных дифференциалах}$$

2. Записать систему $\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$.

$$\begin{cases} u'_x = -x^2 + y \cos x & (1) \\ y'_y = y + \sin x & (2) \end{cases}$$

3. Выбрать любое уравнение и проинтегрировать по соответствующей переменной.

$$(1) \Rightarrow u(x, y) = \int (-x^2 + y \cos x)dx = -\frac{x^3}{3} + y \sin x + A(y)$$

$A(y)$ – константа с точки зрения интегрирования по x

4. Полученное выражение подставить в другое уравнение из системы пункта 2.

$$\begin{aligned}(2) \Rightarrow (-\frac{x^3}{3} + y \sin x + A(y))'_y &= y + \sin x \\ \sin x + A'_y(y) &= y + \sin x \\ A(y) &= \frac{y^2}{2} + C_1\end{aligned}$$

5. Записать окончательное выражение для $u(x, y)$.

$$u(x, y) = -\frac{x^3}{3} + y \sin x + \frac{y^2}{2} + C_1$$

6. Вернуться к истокам.

$$\begin{aligned}u'_x dx + u'_y dy &= 0 \\ d(u(x, y)) &= 0 \\ u(x, y) &= C_2 \\ -\frac{x^3}{3} + y \sin x + \frac{y^2}{2} + C_1 &= C_2 \\ \text{Ответ: } -\frac{x^3}{3} + y \sin x + \frac{y^2}{2} &= C, C \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

13.2 Метод поиска интегрирующего множителя

В контрольной работе задания на данный метод не будет.

Пример:

$$\left(-\frac{3}{x} - 2y\right)dx + \left(\frac{6}{y} - 3x\right)dy = 0$$

1. Убедиться, что это уравнение не в полных дифференциалах.

$$\begin{cases} \left(-\frac{3}{x} - 2y\right)'_y = -2 \\ \left(\frac{6}{y} - 3x\right)'_x = -3 \end{cases} \Rightarrow -2 \neq -3 \Rightarrow \text{это не уравнение в полных дифференциалах}$$

2. Стоит поискать интегрирующий множитель в виде $x^a \cdot y^b$, где a, b – числа.

$$\begin{aligned} & \left[\left(-\frac{3}{x} - 2y\right)dx + \left(\frac{6}{y} - 3x\right)dy \right] \cdot x^a y^b = 0 \cdot x^a y^b \\ & (3x^{a-1}y^b - 2x^a y^{b+1})dx + (6x^a y^{b-1} - 3x^{a+1}y^b)dy = 0 \end{aligned}$$

3. Записать условие того, что это уравнение в полных дифференциалах.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (3x^{a-1}y^b - 2x^a y^{b+1})'_y \\ (6x^a y^{b-1} - 3x^{a+1}y^b)'_x \end{cases} \\ & \begin{cases} 3x^{a-1} \cdot by^{b-1} - 2x^a \cdot (b+1)y^b \\ y^{b-1} \cdot 6ax^{a-1} - y^b \cdot 3(a+1)x^a \end{cases} \\ & \begin{cases} 3bx^{a-1}y^{b-1} - 2(b+1)x^a y^b \\ 6ax^{a-1}y^{b-1} - 3(a+1)x^a y^b \end{cases} \Rightarrow \\ & \begin{cases} 3b = 6a \\ 2(b+1) = 3(a+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

4. Домножить исходное дифф. ур. на угаданный интегрирующий множитель.

$$(3y^2 - 2x^3)dx + (6xy - 3x^2y^2)dy = 0$$

Решаем как уравнение в полных дифференциалах [...]

14 Однородные линейные дифф. уравнения с постоянными коэффициентами

Так называемый ОЛДУ с ПК.

Пример:

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 13y''' = 0$$

14.1 Метод линейных комбинаций

1. Записать характеристическое уравнение: $y \rightarrow \lambda$, порядок производной \rightarrow степень.

$$\lambda^5 - 4\lambda^4 + 13\lambda^3 = 0$$

2. Разложить левую часть на линейные множители.

$$(\lambda - 3)^3(\lambda - 2 - 3i)(\lambda - 2 + 3i) = 0$$

3. Выписать список корней и их кратности.

$$\lambda_1 = 0, k_1 = 3$$

$$\lambda_2 = 2 \pm 3i, k_2 = 1$$

4. Около каждого корня (или пары комплексных сопряжённых корней) выписать серию функций (или две серии функций):

- $\lambda = \alpha, k = m \rightarrow e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x}$
- $\lambda = \alpha \pm \beta i (\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0), k = m, \rightarrow$
 $(e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \cos \beta x),$
 $(e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x} \sin \beta x)$

$$\lambda_1 = 0, k_1 = 3 \rightarrow e^{0x}, xe^{0x}, x^2e^{0x}$$

$$\lambda_2 = 2 \pm 3i, k_2 = 1 \rightarrow (e^{2x} \cos 3x), (e^{2x} \sin 3x)$$

5. Записать ответ в виде линейной комбинации этих функций.

$$\text{Ответ: } y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{2x} \cos 3x + C_5e^{2x} \sin 3x, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}.$$

15 Неоднородные дифф. уравнения с постоянными коэффициентами

Так называемые НЛДУ с ПК.

Пример:

$$y'' - 2y' + y = 6xe^x$$

15.1 Метод вариаций произвольных констант

1. Решить соответствующее ОЛДУ и получить решение в виде $y = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + \dots + C_n\phi_n(x)$.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}$$

2. Записать фразу "Будем искать решение исходного уравнения в виде $y = \dots C_1 \dots C_2 \dots$ ".

$$\text{Будем искать решение исходного уравнения в виде } y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$$

3. Записать систему
$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \dots & \phi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} & \dots & \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}_{n \times n} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ \vdots \\ C_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix},$$

где f – функция из правой части исходного уравнения, n – порядок исходного уравнения.

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6xe^x \end{pmatrix}$$

4. Решить полученную систему, используя формулы Крамера, и найти $C_1(x), \dots, C_n(x)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ 6xe^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -6x^2e^{2x}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & 6xe^x \end{vmatrix} = 6xe^{2x}$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -6x^2$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 6x$$

$$C_1 = \int C_1'(x) = -2x^3 + A$$

$$C_2 = \int C_2'(x) = 3x^2 + B$$

5. Записать ответ, заглянув в пункт 2.

$$\text{Ответ: } y = (-2x^3 + C_1)e^x + (3x^2 + C_2)xe^x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

16 Однородные линейные дифф. уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Так называемые "НЛДУ с ПК и СПЧ".

16.1 Некоторые элементы теории

Теорема о структуре решения НЛДУ с произвольными константами n-го порядка

Общее решение НЛДУ является суммой общего решения соответствующего ОЛДУ и частного решения НЛДУ:

$$y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$$

Функция специального вида

Функцией специального вида называется сумма слагаемых вида $Ax^k e^{\alpha x} \cos \beta x$ и $Ax^k e^{\alpha x} \sin \beta x$, ($A, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots$)

Диаграммы для функций специального вида

Для каждого слагаемого функции специального вида можно составить диаграмму:

1. α	коэфф. в степени e
2. β	коэфф. аргумента \cos или \sin
3. k	степени x
4. m	максимальная степень x , т. е. k_{\max}
5. $\tilde{\lambda}$	$\alpha \pm \beta i$

Пример:

$$xe^x \cos 2x + 3x^2 \sin 2x + x^3 e^x \sin 2x + 4x^2 + 5 \cos 2x - \frac{1}{2} + x \sin 2x$$

α	1	α	0	α	0
β	2	β	2	β	0
k	1, 3	k	2, 0, 1	k	2, 0
m	3	m	2	m	2
$\tilde{\lambda}$	$1 \pm 2i$	$\tilde{\lambda}$	$2i$	$\tilde{\lambda}$	0

16.2 Метод поиска частного решения

Пример:

$$y'' - 2y' + y = x + 10e^x$$

1. Решить соответствующее ОЛДУ.

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)^2 = 0$$

$$\lambda = 1 \text{ (кратность} = 2)$$

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

2. Записать диаграмму правой части дифф. уравнения.

α	0	α	1
β	0	β	0
k	1	k	0
m	1	m	0
$\tilde{\lambda}$	0	$\tilde{\lambda}$	1

3. Добавить в каждую таблицу кратность числа $\tilde{\lambda}$ в характеристическом уравнении из пункта 1. Это число r . Если $\tilde{\lambda}$ не является корнем характеристического уравнения, то считать $r = 0$.

α	0	α	1
β	0	β	0
k	1	k	0
m	1	m	0
$\tilde{\lambda}$	0	$\tilde{\lambda}$	1
r	0	r	2

4. При помощи таблиц построить общий вид частного решения НЛДУ, причём для каждой таблицы своё слагаемое:

$$y_{\text{ч.н.}} = x^r e^{\alpha x} [(...) \cos \beta x + (...) \sin \beta x] + \dots$$

где r, α, β – числа из таблицы, (...) – многочлен степени m с неопределёнными коэффициентами, причём все многочлены с разными коэффициентами.

$$y_{\text{ч.н.}} = x^0 e^{0x} [(Ax + B) \cos 0x + (Cx + D) \sin 0x] + x^2 e^x [E \cos 0x + F \sin 0x] = Ax + B + Ex^2 e^x$$

5. Подставить полученное выражение в исходное уравнение.

$$(Ax + B + Ex^2 e^x)'' - 2(Ax + B + Ex^2 e^x)' + (Ax + B + Ex^2 e^x) = x + 10e^x$$

...

$$2Ee^x - 2Ex + Ax - 2A + B = x + 10e^x$$

6. Привести подобные слагаемые.

$$2Ee^x + Ax + (B - 2A) = x + 10e^x$$

7. Приравнять коэффициенты в правой и левой частях и вычислить значения коэффициентов.

$$\begin{cases} 2E = 10 \\ A = 1 \\ B - 2A = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} E = 5 \\ A = 1 \\ B = 2 \end{cases}$$

8. Записать окончательный вид частного решения НЛДУ.

$$y_{\text{ч.н.}} = x + 2 + 5x^2e^x$$

9. Записать ответ, используя теорему о структуре решения НЛДУ.

$$\text{Ответ: } y = C_1e^x + C_2xe^x + 5x^2e^x + x + 2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

17 Однородные системы дифф. уравнений 1-го порядка

Так называемые "ОСДУ1П".

Мы будем изучать только систему вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

где $a_{ij} \in \mathbb{R}$ – заданные коэффициенты, $x_1 = x_1(t)$, \dots , $x_n = x_n(t)$ – искомые функции, t – независимая переменная, $\dot{x}_k = \frac{d(x_k(t))}{dt}$.

17.1 Алгоритм решения ОСДУ1П

1. Записать матрицу системы, т. е. матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

2. Записать характеристический многочлен матрицы $\det A - \lambda E = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$.

3. Разложить на линейные множители и выписать список корней с их кратностями. При этом могут возникнуть корни следующих четырёх типов:

Простые корни:

$$\begin{cases} \text{I. } \lambda = \alpha \text{ (кратность 1)} \\ \text{II. } \lambda = \alpha \pm \beta i \text{ (оба кратности 1)} \end{cases}$$

Кратные корни:

$$\begin{cases} \text{III. } \lambda = \alpha \text{ (кратность } m \geq 2) \\ \text{IV. } \lambda = \alpha \pm \beta i \text{ (кратность } m \geq 2) \end{cases}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta > 0$$

4. Подвергнуть "обработке" каждый корень/пару комплексно сопряжённых корней, в результате которой получится фрагмент – столбец функций – конечного решения системы.
5. Записать ответ – линейную комбинацию с коэффициентами C_1, \dots, C_n всех полученных фрагментов.

17.2 Алгоритмы обработки разных типов корней

I. Пусть $\lambda = \alpha$ (кратность 1).

- (a) Найти собственный вектор $\vec{S} \in \mathbb{R}^n$ матрицы A , соответствующий собственному значению λ .
- (b) Составить произведение $\vec{S} \cdot e^{\lambda t}$, где \vec{S} – найденный собственный вектор, λ – обрабатываемое число. Это и есть фрагмент решения.

II. Пусть $\lambda = \alpha \pm \beta i$ (оба кратности 1).

- (a) Выбрать из пары какой-то один корень (про другой забыть навечно).
- (b) Для выбранного значения λ найти собственный вектор $\vec{S} \in \mathbb{C}^n$ матрицы A .
- (c) Составить произведение $\vec{S} \cdot e^{\lambda t}$.
- (d) Фрагментами конечного решения являются векторы $Re(\vec{S}e^{\lambda t})$ и $Im(\vec{S}e^{\lambda t})$. Детали их получения – на примерах.

III. Пусть $\lambda = \alpha$ (кратность $m \geq 2$).

(a) Записать матрицу
$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

- (b) Посредством элементарных преобразований над строками привести матрицу к ступенчатому виду.
- (c) Записать число N – количество нулевых строк в полученной матрице. Как минимум одна нулевая строка обязана быть.
- (d) Сравнить N с числом m :

- i. $N = m$:
"Приятный"случай,
 - ii. $N < m$:
"Неприятный"случай,
 - iii. $N > m$:
Невозможный случай.
- (a) Если это невозможный случай.
- i. Перерешать.
- (b) Если это "приятный"случай.
- i. Из матрицы ступенчатого вида составить однородную систему уравнений с переменными y_1, \dots, y_n .
 - ii. Решить систему и получить ответ вида $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} + \dots + C_m \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$,
где $\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}$ – векторы высоты n с конкретными числовыми координатами.
 - iii. Фрагмент корня λ в конечном ответе будет иметь вид $[C_1 \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} + \dots + C_m \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}]e^{\lambda t}$.
- (c) Если это "неприятный"случай.
- i. Записать выражение вида $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} t^2 + \dots + \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} t^{m-N}]e^{\lambda t} (*)$.
 - ii. Это выражение подставить в исходную систему уравнений, записанную в матричном виде.
 - iii. Продифференцировать, раскрыть скобки, привести подобные слагаемые и приравнять соответствующие коэффициенты в правой и левой части.
 - iv. Выразить все неопределённые коэффициенты системы уравнений через какие-то m из них.
 - v. Полученное выражение подставить в $(*)$ – это и есть фрагмент корня λ в конечном ответе.

Пример ОСДУ1П с корнем I типа:

$$\dot{x} = 5x + 6y + 3z$$

$$\dot{y} = z - x$$

$$\dot{z} = x + 2y - z$$

1.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 6 & 3 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} =$$

3.

$$= (\lambda + 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$$

$$\begin{cases} \lambda = -2 \text{ (кратность 1)} \\ \lambda = 2 \text{ (кратность 1)} \\ \lambda = 4 \text{ (кратность 1)} \end{cases}$$

4.

$$\lambda_1 = -2$$

$$\dots$$

$$\vec{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{S}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\dots$$

$$\vec{S}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{S}_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\dots$$

$$\vec{S}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{S}_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

5. *Ответ:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_3 \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

Пример ОСДУ1П с корнем II типа:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 5y \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases}$$

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -5 \\ 2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} =$$

3.

$$\begin{aligned} &= (\lambda - (2 + 3i))(\lambda - (2 - 3i)) \\ \lambda &= 2 \pm 3i \text{ (оба кратности 1)} \end{aligned}$$

4. (a) Выберем корень $\lambda = 2 + 3i$

(b) Для корня $\lambda = 2 + 3i$ найдём собственный вектор

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} \vec{S}e^{\lambda t} &= \begin{pmatrix} -5 \\ 1 + 3i \end{pmatrix} e^{(2+3i)t} = \\ &= \begin{pmatrix} -5 + 0i \\ 1 + 3i \end{pmatrix} e^{2t+3it} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] e^{3it} \cdot e^{2t} = \\ &= \{e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi\} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] (\cos 3t + i \sin 3t) e^{2t} = \\ &= \left[\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 3t + i \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cos 3t + i \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 3t - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right] e^{2t} = \\ &= \begin{pmatrix} -5 \cos 3t \\ \cos 3t - 3 \sin 3t \end{pmatrix} e^{2t} + i \begin{pmatrix} -5 \sin 3t \\ 3 \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} e^{2t} \\ \Rightarrow \operatorname{Re}(\vec{S}e^{\lambda t}) &= \begin{pmatrix} -5 \cos 3t \\ \cos 3t - 3 \sin 3t \end{pmatrix} e^{2t}, \operatorname{Im}(\vec{S}e^{\lambda t}) = \begin{pmatrix} -5 \sin 3t \\ 3 \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} e^{2t} \end{aligned}$$

5. Ответ:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -5 \cos 3t \\ \cos 3t - 3 \sin 3t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} -5 \sin 3t \\ 3 \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix} e^{2t}$$