Дифференциальные уравнения

Содержание

1 Уравнения с разделяющимися переменными

Общий вид:
$f(x)dx = g(y)dy.$

1.1 Метод разделения переменных

Пример:
$xy' - y = 0$

1. **Записать y' как $\frac{dy}{dx}$.**

   $x\frac{dy}{dx} - y = 0$

2. **В одной стороне собрать все x, а в другой - все y.**

   $\frac{1}{x}dx = \frac{1}{y}dy$

3. **Проинтегрировать.**

   $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{y}dy$

   $\ln|x| + C_1 = \ln|y| + C_2$

   $\ln|y| = \ln|x| + C_3$

4. **Выразить y и записать ответ.**

   $e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C_3}$

   $|y| = |x| \cdot e^{C_3}$

   $|y| = |x| \cdot C_4$

   $y = x \cdot C_5$

   Ответ: $y = Cx,\ C \in \mathbb{R}.$

2 Неоднородные линейные дифф. ур. 1-го порядка

Так называемый "НЛДУ1П".
Общий вид:
$y' + p(x) \cdot y = q(x)$, где
$q(x)$ обеспечивает неоднородность,
$p(x), q(x)$ – заданные функции,
$y = y(x)$ – искомая функция.

2.1 Метод вариации произвольных констант

Пример:
$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$

1. Убедиться, что это действительно НЛДУ1П.

   $y' + (-\operatorname{ctg} x) \cdot y = \sin x$

2. Записать соответствующее однородное дифф. ур. (вместо $q(x)$ записать 0).

   $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 0$

3. Решить его (методом разделения переменных).

   [...]

   $y = C \cdot \sin x$

4. Записать фразу "Будем искать решение исходного уравнения в виде $y = ...C(x)...$".

   Будем искать решение исходного уравнения в виде $y = ...C(x)...$

5. Эту штуку (выражение справа) подставить в исходное уравнение.

   $(C(x)\sin x)' - C(x)\cos x - \sin x = 0$

   $(C(x)\sin x)' - C(x)\sin x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$

   $C'(x)\sin x + C(x)\cos x - C(x)\cos x - \sin x = 0$

   $C'(x)\sin x = \sin x$ (на этом шаге C(x) обязательно должен пропасть)

   $C'(x) = 1$

   $C(x) = x + C_1$

6. Заглянуть в пункт 4 и записать ответ.

   Ответ: $y = (x + C)\sin x,\ C \in \mathbb{R}.$

2.2 Метод Бернулли

Пример:

$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$

1. Убедиться, что это действительно НЛДУ1П.

   $y' + (-\operatorname{ctg} x) \cdot y = \sin x$

2. Заменить $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – пока неизвестные функции.

   $(uv)' + (\operatorname{tg} x)(uv) = \frac{1}{\cos x}$

   $u'v + uv' + uv \cdot tgx = \frac{1}{\cos x}$

3. Вынести u за скобки.

   $u'v + v(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}$

4. Найти какую-то конкретную функцию $v \neq 0$, которая обнуляет выражение в скобках.

   Решим $v' + v \operatorname{tg} x = 0$

   [...]

   $v = C_1 \cos x$

   Берём конкретное решение при $C_1 = 0$ $v = \cos x$

5. Подставить подобранную функцию v в уравнение из пункта 3.

   $u' \cos x = \frac{1}{\cos x}$

   $u = \operatorname{tg} x + C$

6. Заглянув в пункт 2, записать ответ.

   Ответ: $y = C \cos x + \sin x$.

3 Уравнение Бернулли

Общий вид:

$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^b$, где

b – число, $b \neq 0$

3.1 Метод замены

Пример:

$xy' = \frac{x}{y} + y$

1. Убедиться, что это уравнение Бернулли.

   $y' - \frac{1}{x} y = y^{-1}$

2. Заменить $y = z^a$, где a – пока неизвестное число, $z = z(x)$ – пока неизвестная функция.

   $(z^a)' - \frac{1}{x} z^a = (z^a)^{-1}$

   $\boxed{(z(x)^a)'_x \Rightarrow (z^a)' = az^{a-1} \cdot z'}$

   $az^{a-1} \cdot z' - \frac{1}{x} z^a = z^{-a}$

3. Поделить обе части уравнения на выражение, стоящее перед z'.

   $z' - \frac{1}{ax} z = \frac{1}{a} z^{-2a+1}$

4. Подобрать число a так, чтобы в правой части было z^0.

   $-2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1/2$

5. Подобранное a подставить в уравнение из пункта 3.

   $z' - \frac{2}{x} z = 2$

6. Решить это уравнение (НЛДУ1П).

   [...]

   $z = C_7 x^2 - 2x$

7. Заглянув в пункт 2, написать ответ.

   Ответ: $y = \sqrt{Cx^2 - 2x}$.

Уравнения, допускающие понижение порядка

Порядок – это наибольший встречающийся порядок производной в уравнении.

Например:

$y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$ – дифф. ур. 1-го порядка

$y'' - \sin(e^{y'''} + \frac{4}{y''}) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ – дифф. ур. 3-го порядка

4 Дифф. уравнения вида $y^n = f(x)$

4.1 Метод n-кратного интегрирования

Пример:

$y''' = 3x^2 + 6$

$y'' = x^3 + 6x + C_1$

$y' = \frac{x^4}{4} + 3x^2 + C_1x + C_2$

$y = \frac{x^5}{20} + x^3 + C_4x^2 + C_2x + C_3$

Ответ: $y = \frac{x^5}{20} + x^3 + C_4x^2 + C_2x + C_3$

5 Дифф. уравнения, в которых нет y без $'$ и которые содержат как минимум две производные

5.1 Метод замены

Пример:

$y'''' - y''' = e^x$

1. Заменить $z = z(x) = y^{(\dots)}$, где (...) — наименьший встречающийся порядок производной.

   Замена $z = z(x) = y'''$

2. Переписать уравнение через z.

   $z' - z = e^x$

   [...]

   $z = (x + C)e^x$

3. Заменить обратно.

   $y''' = e^x(x + C)$

   Решим методом n-кратного интегрирования

   [...]

   $y = e^x(x + C - 3) + C_7 + C_2x + C_8x^2$

   Ответ: $y = e^x(x + C - 3) + C_7 + C_2x + C_8x^2$.

6 Дифф. уравнения, в которых нет x

Пример:

$y'' \cdot y = y'^2$

6.1 Метод замены

1. Заменить $z = z(y) = y'$.

   Введём новую функцию $z = z(y) = y'$

2. Выразить через z все производные, встречающиеся в уравнении.

   $y' = z$

   $y'' = y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{d(y'_x)}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot y' = z' \cdot z$

   Имеем: $z' \cdot z \cdot y = z^2$ *(искомая функция* $z = z(y)$*)*

   $z' \cdot y = z$

   $\frac{dz}{dy} \cdot y = z$

   $\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$

   $\ln|z| = \ln|y| + C_1$

   $z = C_2y$

3. Заменить обратно.

   $y' = C_2y$

   $\frac{dy}{dx} = C_2dx$

   $\ln|y| = C_2x + C_3$

   $y = e^{C_2x} \cdot C_4$

   Ответ: $y = C_1e^{C_2x},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

7 Уравнение Лагранжа

Общий вид уравнения Лагранжа:
$y = x \cdot F(y') + G(y')$, где
$F(y'), G(y')$ – выражения, в которых нет $y,\ y'',\ y'''$ и т. д.

7.1 Метод замены

Пример уравнение Лагранжа, не являющегося уравнением Клеро:
$y + 3y'^2 = 2xy'$ $(*)$

1. Убедиться, что это уравнение Лагранжа, не являющееся уравнением Клеро.
   $t = x \cdot 2y' + (-3y'^2)$
2. Заменить $p = p(x) = y'$.
   Замена $p = p(x) = y' \Rightarrow y = 2px - 3p^2$ $(**)$
3. Продифференцировать обе части.
   $y' = 2p'x + 2p - 6pp'$
4. Заменить y' на p.
   $p = 2p'x + 2p - 6pp'$
5. Все слагаемые с p' перенести влево, вынести за скобку p', а всё остальное — вправо.
   $(6p - 2x)p' = p$
6. Переписать p' как $\frac{dp}{dx}$ и умножить обе части на $\frac{dx}{dp}$.
   $(6p - 2x)\frac{dp}{dx} = p\frac{dx}{dp}$
   $6p - 2x = p\frac{dx}{dp}$
   $6p - 2x = px'$ *(это НЛДУ1П, искомая функция $x = x(p)$)*
7. Рассмотреть случай (множитель при x') $= 0$.
   (7а) $p = 0$
   $y' = 0$
   $y = A$
   (7б) Полученное выражение подставить в $(*)$.
   $A + 3 \cdot 0^2 = 2x \cdot 0$
   $A = 0$
   (7в) Первое решение дифф. уравнения.
   $y = 0$
8. Рассмотреть случай (множитель при x') $\neq 0$.
   (8а) Поделить на p'.
   $6 - \frac{2x}{p} = x'$
   $x' + \frac{2}{p}x = 6$
   [...]
   $x = 2p + \frac{B}{p^2}$
   (8б) Полученное выражение для x подставим в $(**)$.
   $y = 2p \cdot (2p + \frac{B}{p^2}) - 3p^2 = p^2 + \frac{2B}{p}$
9. Записать ответ,
   - учитывая результат 7в,
   - учитывая результат 8а и 8б,
   - заменяя константы на C,
   - заменяя p на x.

   Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = 0, \\ \begin{cases} x = 2t + \frac{C}{t^2}, \\ y = t^2 + \frac{2C}{t},\ C \in \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right.$.

8 Уравнение Клеро

Уравнение Клеро – частный случай уравнения Лагранжа.
Общий вид уравнения Клеро:
$y = xy' + G(y')$

8.1 Метод замены

Пример:

$y - y'^2 = xy'$ $(***)$

1–5. Шаги идентичны предыдущему методу.

6. Рассмотреть случай (множитель при x') $= 0$.

   (6а) $p' = 0$
   $y'' = 0$
   $y = Ax + B$

   (6б) Подставить выражения в $(***)$
   $Ax + B - A^2 = Ax$

   (6в) Выразить обе константы через какую-то одну
   $\begin{cases} A = A \\ B = A^2 \end{cases}$

   (6г) Записать первую серию решений уравнения
   $y = Ax + A^2$

7. Рассмотреть случай (множитель при x') $\neq 0$.

   (7а) $x + 2p = 0$ $x = -2p$

   (7б) Подставим выражение в пункт 2 $y = xp + p^2$ $y = (-2)p + p^2$ $y = -p^2$

8. Записать ответ

   - учитывая результат 6г,
   - учитывая результат 7а и 7б,
   - заменяя константы на C,
   - заменяя p на t.

   Ответ: $\left[\begin{array}{l} y = Cx + C^2,\ C \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} x = -2t, \\ y = -t^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = Cx + C^2,\ C \in \mathbb{R} \\ y = -\dfrac{x^2}{4} \end{array}\right.$.

Уравнения, не разрешённые относительно y'

Уравнение решено относительно y' $\Leftrightarrow$ y' выражено через всё остальное
Например:
$\sin x + y' = e^{xy'}$ – не решено относительно y'.

9 Уравнение вида $x = F(y')$

9.1 Метод замены

Пример:

$\ln y' + \sin y' - x = 0$

1. Убедиться, что это уравнение вида $x = F(y')$.
   $x = \ln y' + \sin y'$
2. Заменить $p = y'$.
   $x = \ln p + \sin p$
3. Взять дифференциал от обеих частей.
   $dx = d(\ln p + sinp)$
   $dx = (\frac{1}{p} + \cos p)dp$ $(*)$
4. Из замены выразить dx через dy.
   $p = y'$
   $p = \frac{dy}{dx}$
   $dx = \frac{dy}{p}$ $(**)$
5. Подставить $(**)$ в $(*)$.
   $\frac{dy}{p} = (\frac{1}{p} + \cos p)dp$
6. Выразить dy и проинтегрировать.
   $dy = (1 + \cos p)dp$
   $y = \int (1 + p\cos pdp = p + C_1 + \int p\cos pdp = p + p\sin p\cos p + C$

7. Записать ответ $\begin{cases} p \to t \\ const \to C \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t + t \sin t + \cos t + C, \ C \in \mathbb{R} \end{cases}$.

10 Уравнение вида $y = F(y')$

10.1 Метод замены

Пример:

$e^{\ln y - y'} = y'^2$

1. Убедиться, что это уравнение вида $y = F(y')$.

   $\frac{y}{e^{y'}} = y'^2$

   $y = y'^2 e^{y'}$

2. Заменить $p = y'$.

   $y = p^2 e^p$

3. Взять дифференциал от обеих частей.

   $dy = (2pe^p + p^2 e^p)dp \ (*)$

4. Из замены выразить dy через dx.

   $p = y'$

   $p = \frac{dy}{dx}$

   $dy = pdx \ (**)$

5. Подставить $(**)$ в $(*)$.

   $pdx = (2pe^p + p^2 e^p)dp$

6. Выразить dx и проинтегрировать.

   $dx = \frac{2pe^p + pe^2}{p} dp$

   $dx = (2e^p + pe^p)dp$

   $x = 2\int e^p dp + \int pe^p dp = (2e^p + A) + (pe^p - e^p + B) = e^p + pe^p + C$

   $\int pe^p dp = pe^p - \int e^p dp = pe^p - e^p + B$

7. Записать ответ $\begin{cases} p \to t \\ const \to C \end{cases}$.

   Ответ: $\begin{cases} y = y'^2 e^y, \\ x = te^t + e^t + C, \ C \in \mathbb{R} \end{cases}$.

11 Однородные дифф. уравнения

Опред. Однородным называется уравнение вида $y' = F(\frac{y}{x})$.
Не путать с НЛДУ1П – уравнением вида $y' + p(x)y = q(x)$

11.1 Метод замены $y = x \cdot u$

Пример:

$xy' - y - xe^{\frac{y}{x}} = 0$

1. Убедиться, что это уравнение вида $y' = F(\frac{y}{x})$.

   $xy' = xe^{\frac{y}{x}} + y$

   $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

2. Заменить $y = x \cdot u$, где $u = u(x)$.

   Замена $y = x \cdot u$

   $(xu)' = e^u + u$

   $u + xu' = e^u + u$

   $xu' = e^u$

3. Решить полученное уравнение относительно $u = u(x)$ (методом разделения переменных).
   $x\frac{du}{dx} = e^u$
   $\frac{1}{e^u}du = \frac{1}{x}dx$
   $\int \frac{1}{e^u}du = \int \frac{1}{x}dx$
   $-\frac{1}{e^u} = \ln|x| + C_1$
   $e^{-u} = C_2 - \ln|x|$
   $\ln e^{-u} = \ln(C_2 - \ln|x|)$
   $u = -\ln C_2 - \ln|x|$
4. Заменить обратно и записать ответ.
   Ответ: $y = -x\ln(C - \ln|x|),\ C \in \mathbb{R}.$

12 Уравнение вида $y' = F(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

Данный тип уравнения делится на 2 подтипа:

(12а) Если $a_1x + b_1y$ и $a_2x + b_2y$ пропорциональны.

(12б) Если $a_1x + b_1y$ и $a_2x + b_2y$ непропорциональны.

12.1 Метод решения подтипа 12а

Пример:

$(x - 2y + 3)dx = (-2x + 4y + 8)dy$

1. Убедиться, что это уравнение подтипа 12а.
   $y' = \frac{x-2y+3}{-2x+4y+8}$ $(*)$
   $F(t) = t$
   $$\begin{array}{rrr} a_1 = 1 & b_1 = 2 & c_1 = 3 \\ a_2 = -2 & b_2 = 4 & c_2 = 8 \end{array}$$
2. Заменить $z = z(x) =$ *[одному из этих членов $a_1x + b_1y$ или $a_2x + b_2y$].*
   $z = z(x) = x - 2y$
3. Выразить отсюда y и продифференцировать по x.
   $y = \frac{x}{2} - \frac{z}{2}$
   $y' = \frac{1}{2} - \frac{z'}{2}$
4. В ур-и $(*)$ из пункта 1 заменить левую и правую часть.
   $\frac{1}{2} - \frac{z'}{2} = \frac{z+3}{-2z+8}$ – *искомая функция $z = z(x)$*
5. Решить полученное ДУ (заведомо пройдёт метод разделения переменных).
   [...]
   $\frac{1}{4}(2z - 1 - 7\ln|2z - 1|) = x + C_1$ – *решение в неявном виде*
6. Заменить обратно и записать ответ.
   $\frac{1}{4}(2x - 4y - 1 - 7\ln|2x - 4y - 1|) = x + C_1$
   Ответ: $\frac{x}{2} + y + \frac{7}{4}\ln|2x - 4y - 1| = C,\ C \in \mathbb{R}.$

12.2 Метод решения подтипа 12б

Пример:

$(x - y - 1)dx + (x + 2y - 4)dy = 0$

1. Убедиться, что это уравнение подтипа 12б.
   $y' = \frac{x-y-1}{-x-2y+4}$ $(*)$
   $F(t) = t$
   $$\begin{array}{rrr} a_1 = 1 & b_1 = -1 & c_1 = 1 \\ a_2 = -1 & b_2 = -2 & c_2 = 4 \end{array}$$
2. Записать и решить систему $\begin{cases} \textit{Числитель} = 0 \\ \textit{Знаменатель} = 0 \end{cases}$ и обозначить решение через x_0 и y_0.
   $$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ -x - 2y + 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow\ x_0 = 2,\ y_0 = 1$$

3. Заменить $\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}$, где u, v – новые переменные и $v = v(u)$.

   $\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v + 1 \end{cases}$

4. Подставить это в уравнение $(*)$ из пункта 1.

   Левая часть $= y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+1)}{d(u+2)} = \frac{dv}{du} = v'_u$

   Правая часть $= \frac{u+2-v-1-1}{-u-2-2v-2+4} = \frac{u-v}{-u-2v}$

   Если в числителе и знаменателе не исчезли свободные члены, ищи ошибку!

   Приходим к ур-ю

   $v' = \frac{u-v}{-u-2v}$

5. Решить это ДУ, разделив числитель и знаменатель на u и рассмотрев как уравнение вида $v' = F(\frac{v}{u})$.

   $v' = \frac{1-\frac{v}{u}}{-1-2\frac{u}{v}}$

   [...]

   $...u...v... = ...u...v...$ – *решение в неявном виде*

6. Заменить обратно и записать ответ.

   $\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y - 1 \end{cases}$

   Ответ: $...(x-2)...(y-1)... = ...(x-2)...(y-1)....$

13 Уравнение в полных дифференциалах

Дифференциал:

$d(u(x,u)) = u'_x dx + u'_y dy$

$d(x^2 \ln y) = 2x \ln y dx + \frac{x}{y} dy$

Опред. Уравнением в полных дифференциалах называется уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, у которого в левой части стоит дифференциал некоторой функции двух переменных, т. е. $\exists u(x,y)$: $\begin{cases} P(x,y) = u'_x \\ Q(x,y) = u'_y \end{cases}$.

13.1 Метод поиска полного дифференциала

Пример:

$(-x^2 + y\cos x)dx + (y + \sin x)dy = 0$

1. Убедиться, что это уравнение в полных дифференциалах.

   $\begin{cases} (-x^2 + y\cos x)'_y = \cos x \\ (y + \sin x)'_x = \cos x \end{cases} \Rightarrow \cos x = \cos x \Rightarrow$ *это уравнение в полных дифференциалах*

2. Записать систему $\begin{cases} u'_x = P \\ u'_y = Q \end{cases}$.

   $\begin{cases} u'_x = -x^2 + y\cos x \ (1) \\ y'_y = y + \sin x \ (2) \end{cases}$

3. Выбрать любое уравнение и проинтегрировать по соответствующей переменной.

   $(1) \ \Rightarrow \ u(x,y) = \int(-x^2 + y\cos x)dx = -\frac{x^3}{3} + y\sin x + A(y)$

   $A(y)$ – *константа с точки зрения интегрирования по* x

4. Полученное выражение подставить в другое уравнение из системы пункта 2.

   $(2) \ \Rightarrow \ (-\frac{x^3}{3} + y\sin x + A(y))'_y = y + \sin x$

   $\sin x + A'_y(y) = y + \sin x$

   $A(y) = \frac{y^2}{2} + C_1$

5. Записать окончательное выражение для $u(x,y)$.

   $u(x,y) = -\frac{x^3}{3} + y\sin x + \frac{y^2}{2} + C_1$

6. Вернуться к истокам.

   $u'_x dx + u'_y dy = 0$

   $d(u(x,y)) = 0$

   $u(x,y) = C_2$

   $-\frac{x^3}{3} + y\sin x + \frac{y^2}{2} + C_1 = C_2$

   Ответ: $-\frac{x^3}{3} + y\sin x + \frac{y^2}{2} = C, C \in \mathbb{R}$

13.2 Метод поиска интегрирующего множителя

В контрольной работе задания на данный метод <u>не будет</u>.
Пример:

$(-\frac{3}{x} - 2y)dx + (\frac{6}{y} - 3x)dy = 0$

1. Убедиться, что это уравнение не в полных дифференциалах.

   $\begin{cases} (-\frac{3}{x} - 2y)'_y = -2 \\ (\frac{6}{y} - 3x)'_x = -3 \end{cases} \Rightarrow -2 \neq -3 \Rightarrow$ *это не уравнение в полных дифференциалах*

2. Стоит поискать интегрирующий множитель в виде $x^a \cdot y^b$, где a, b – числа.

   $[(-\frac{3}{x} - 2y)dx + (\frac{6}{y} - 3x)dy] \cdot x^a y^b = 0 \cdot x^a y^b$

   $(3x^{a-1}y^b - 2x^a yb + 1)dx + (6x^a y^{b-1} - 3x^{a+1}y^b)dy = 0$

3. Записать условие того, что это уравнение в полных дифференциалах.

   $\begin{cases} (3x^{a-1}y^b - 2x^a yb + 1)'_y \\ (6x^a y^{b-1} - 3x^{a+1}y^b)'_x \end{cases}$

   $\begin{cases} 3x^{a-1} \cdot by^{b-1} - 2x^a \cdot (b+1)y^b \\ y^{b-1} \cdot 6ax^{a-1} - y^b \cdot 3(a+1)x^a \end{cases}$

   $\begin{cases} 3bx^{a-1}y^{b-1} - 2(b+1)x^a y^b \\ 6ax^{a-1}y^{b-1} - 3(a+1)x^a y^b \end{cases} \Rightarrow$

   $\begin{cases} 3b = 6a \\ 2(b+1) = 3(a+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$

4. Домножить исходное дифф. ур. на угаданный интегрирующий множитель.

   $(3y^2 - 2x^3)dx + (6xy - 3x^2y^2)dy = 0$

   Решаем как уравнение в полных дифференциалах [...]