Дифференциальные ур-я

Содержание

1 Ур-я с разделяющимися переменными

Общий вид:
$f(x)dx = g(y)dy.$

1.1 Метод разделения переменных

Пример:
$xy' - y = 0$

1. **Записать y' как $\frac{dy}{dx}$.**
   $x\frac{dy}{dx} - y = 0$
2. **В одной стороне собрать все x, а в другой - все y.**
   $\frac{1}{x}dx = \frac{1}{y}dy$
3. **Проинтегрировать.**
   $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{y}dy$
   $\ln|x| + C_1 = \ln|y| + C_2$
   $\ln|y| = \ln|x| + C_3$
4. **Выразить y и записать ответ.**
   $e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+C_3}$
   $|y| = |x| \cdot e^{C_3}$
   $|y| = |x| \cdot C_4$
   $y = x \cdot C_5$
   Ответ: $y = Cx,\ C \in \mathbb{R}$

2 Неоднородные линейные дифф. ур. 1-го порядка

Так называемый "НЛДУ1П".
Общий вид:
$y' + p(x) \cdot y = q(x)$, где
$q(x)$ обеспечивает неоднородность,
$p(x), q(x)$ – заданные функции,
$y = y(x)$ – искомая функция.

2.1 Метод вариации произвольных констант

Пример:
$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$

1. Убедиться, что это действительно НЛДУ1П.
   $y' + (-\operatorname{ctg} x) \cdot y = \sin x$
2. Записать соответствующее однородное дифф. ур. (вместо $q(x)$ записать 0).
   $y' - y \cdot \operatorname{ctg} x = 0$
3. Решить его (методом разделения переменных).
   [...]
   $y = C \cdot \sin x$
4. Записать фразу "Будем искать решение исходного ур-я в виде $y = ...C(x)...$".
   Будем искать решение исходного ур-я в виде $y = ...C(x)...$
5. Эту штуку (выражение справа) подставить в исходное ур-е.
   $(C(x)\sin x)' - C(x)\cos x - \sin x = 0$
   $(C(x)\sin x)' - C(x)\sin x \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$
   $C'(x)\sin x + C(x)\cos x - C(x)\cos x - \sin x = 0$
   $C'(x)\sin x = \sin x$ (на этом шаге C(x) обязательно должен пропасть)
   $C'(x) = 1$
   $C(x) = x + C_1$
6. Заглянуть в пункт 4 и записать ответ.
   Ответ: $y = (x + C)\sin x,\ C \in \mathbb{R}$

2.2 Метод Бернулли

Пример:

$y' - y \cdot \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$

1. Убедиться, что это действительно НЛДУ1П.

   $y' + (-\operatorname{ctg} x) \cdot y = \sin x$

2. Заменить $y = uv$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – пока неизвестные функции.

   $(uv)' + (\operatorname{tg} x)(uv) = \frac{1}{\cos x}$

   $u'v + uv' + uv \cdot tgx = \frac{1}{\cos x}$

3. Вынести u за скобки.

   $u'v + v(v' + v \operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos x}$

4. Найти какую-то конкретную функцию $v \neq 0$, которая обнуляет выражение в скобках.

   Решим $v' + v \operatorname{tg} x = 0$

   [...]

   $v = C_1 \cos x$

   Берём конкретное решение при $C_1 = 0$ $v = \cos x$

5. Подставить подобранную функцию v в ур-е из пункта 3.

   $u' \cos x = \frac{1}{\cos x}$

   $u = \operatorname{tg} x + C$

6. Заглянув в пункт 2, записать ответ.

   Ответ: $y = C \cos x + \sin x$

3 Ур-е Бернулли

Общий вид:

$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^b$, где

b – число, $b \neq 0$

3.1 Метод замены

Пример:

$xy' = \frac{x}{y} + y$

1. Убедиться, что это ур-е Бернулли.

   $y' - \frac{1}{x} y = y^{-1}$

2. Заменить $y = z^a$, где a – пока неизвестное число, $z = z(x)$ – пока неизвестная функция.

   $(z^a)' - \frac{1}{x} z^a = (z^a)^{-1}$

   $\boxed{(z(x)^a)'_x \Rightarrow (z^a)' = az^{a-1} \cdot z'}$

   $az^{a-1} \cdot z' - \frac{1}{x} z^a = z^{-a}$

3. Поделить обе части ур-я на выражение, стоящее перед z'.

   $z' - \frac{1}{ax} z = \frac{1}{a} z^{-2a+1}$

4. Подобрать число a так, чтобы в правой части было z^0.

   $-2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1/2$

5. Подобранное a подставить в ур-е из пункта 3.

   $z' - \frac{2}{x} z = 2$

6. Решить это ур-е (НЛДУ1П).

   [...]

   $z = C_7 x^2 - 2x$

7. Заглянув в пункт 2, написать ответ.

   Ответ: $y = \sqrt{Cx^2 - 2x}$

Ур-я, допускающие понижение порядка

Порядок – это наибольший встречающийся порядок производной в уравнении.

Например:

$y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$ – дифф. ур. 1-го порядка

$y'' - \sin(e^{y'''} + \frac{4}{y''}) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ – дифф. ур. 3-го порядка

4 Дифф. ур-я вида $y^n = f(x)$

4.1 Метод n-кратного интегрирования

Пример:

$y''' = 3x^2 + 6$
$y'' = x^3 + 6x + C_1$
$y' = \frac{x^4}{4} + 3x^2 + C_1x + C_2$
$y = \frac{x^5}{20} + x^3 + C_4x^2 + C_2x + C_3$
Ответ: $y = \frac{x^5}{20} + x^3 + C_4x^2 + C_2x + C_3$

5 Дифф. ур-я, в которых нет y без $'$ и которые содержат как минимум две производные

5.1 Метод замены

Пример:

$y'''' - y''' = e^x$

1. Заменить $z = z(x) = y^{(\dots)}$, где (...) — наименьший встречающийся порядок производной.

   Замена $z = z(x) = y'''$

2. Переписать ур-е через z.

   $z' - z = e^x$

   [...]

   $z = (x + C)e^x$

3. Заменить обратно.

   $y''' = e^x(x + C)$

   Решим методом n-кратного интегрирования

   [...]

   $y = e^x(x + C - 3) + C_7 + C_2x + C_8x^2$

   Ответ: $y = e^x(x + C - 3) + C_7 + C_2x + C_8x^2$

6 Дифф. ур-я, в которых нет x

Пример:

$y'' \cdot y = y'^2$

6.1 Метод замены

1. Заменить $z = z(y) = y'$.

   Введём новую функцию $z = z(y) = y'$

2. Выразить через z все производные, встречающиеся в уравнении.

   $y' = z$

   $y'' = y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{d(y'_x)}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot y' = z' \cdot z$

   Имеем: $z' \cdot z \cdot y = z^2$ *(искомая функция* $z = z(y)$*)*

   $z' \cdot y = z$

   $\frac{dz}{dy} \cdot y = z$

   $\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}$

   $\ln|z| = \ln|y| + C_1$

   $z = C_2y$

3. Заменить обратно.

   $y' = C_2y$

   $\frac{dy}{dx} = C_2dx$

   $\ln|y| = C_2x + C_3$

   $y = e^{C_2x} \cdot C_4$

   Ответ: $y = C_1e^{C_2x},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$

7 Ур-е Лагранжа

Общий вид ур-я Лагранжа:
$y = x \cdot F(y') + G(y')$, где
$F(y'), G(y')$ – выражения, в которых нет y, y'', y''' и т. д.

7.1 Метод замены

Пример ур-е Лагранжа, не являющегося ур-ем Клеро:
$y + 3y'^2 = 2xy'$ $(*)$

1. Убедиться, что это ур-е Лагранжа, не являющееся ур-ем Клеро.
   $t = x \cdot 2y' + (-3y'^2)$
2. Заменить $p = p(x) = y'$.
   Замена $p = p(x) = y' \Rightarrow y = 2px - 3p^2$ $(**)$
3. Продифференцировать обе части.
   $y' = 2p'x + 2p - 6pp'$
4. Заменить y' на p.
   $p = 2p'x + 2p - 6pp'$
5. Все слагаемые с p' перенести влево, вынести за скобку p', а всё остальное — вправо.
   $(6p - 2x)p' = p$
6. Переписать p' как $\frac{dp}{dx}$ и умножить обе части на $\frac{dx}{dp}$.
   $(6p - 2x)\frac{dp}{dx} = p\frac{dx}{dp}$
   $6p - 2x = p\frac{dx}{dp}$
   $6p - 2x = px'$ *(это НЛДУ1П, искомая функция $x = x(p)$)*
7. Рассмотреть случай (множитель при x') $= 0$.
   (7а) $p = 0$
   $y' = 0$
   $y = A$
   (7б) Полученное выражение подставить в $(*)$.
   $A + 3 \cdot 0^2 = 2x \cdot 0$
   $A = 0$
   (7в) Первое решение дифф. ур-я.
   $y = 0$
8. Рассмотреть случай (множитель при x') $\neq 0$.
   (8а) Поделить на p'.
   $6 - \frac{2x}{p} = x'$
   $x' + \frac{2}{p}x = 6$
   [...]
   $x = 2p + \frac{B}{p^2}$
   (8б) Полученное выражение для x подставим в $(**)$.
   $y = 2p \cdot (2p + \frac{B}{p^2}) - 3p^2 = p^2 + \frac{2B}{p}$
9. Записать ответ,
   - учитывая результат 7в,
   - учитывая результат 8а и 8б,
   - заменяя константы на C,
   - заменяя p на x.

   Ответ: $\left[\begin{array}{c} y = 0, \\ \begin{cases} x = 2t + \frac{C}{t^2}, \\ y = t^2 + \frac{2C}{t}, \ C \in \mathbb{R} \end{cases} \end{array}\right.$.

8 Ур-е Клеро

Уравнение Клеро – частный случай ур-я Лагранжа.
Общий вид ур-я Клеро:
$y = xy' + G(y')$

8.1 Метод замены

Пример:

$y - y'^2 = xy'$ $(***)$

1–5. Шаги идентичны предыдущему методу.

6. Рассмотреть случай (множитель при x') $= 0$.

   (6а) $p' = 0$
   $y'' = 0$
   $y = Ax + B$

   (6б) Подставить выражения в $(***)$
   $Ax + B - A^2 = Ax$

   (6в) Выразить обе константы через какую-то одну
   $\begin{cases} A = A \\ B = A^2 \end{cases}$

   (6г) Записать первую серию решений ур-я
   $y = Ax + A^2$

7. Рассмотреть случай (множитель при x') $\neq 0$.

   (7а) $x + 2p = 0$ $x = -2p$

   (7б) Подставим выражение в пункт 2 $y = xp + p^2$ $y = (-2)p + p^2$ $y = -p^2$

8. Записать ответ

   - учитывая результат 6г,
   - учитывая результат 7а и 7б,
   - заменяя константы на C,
   - заменяя p на t.

$$\textit{Ответ:}\ \left[\begin{array}{l} y = Cx + C^2,\ C \in \mathbb{R} \\ \begin{cases} x = -2t, \\ y = -t^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = Cx + C^2,\ C \in \mathbb{R} \\ y = -\dfrac{x^2}{4} \end{array}\right. .$$

Ур-я, не разрешённые относительно y'

Ур-е решено относительно y' $\Leftrightarrow$ y' выражено через всё остальное
Например:
$\sin x + y' = e^{xy'}$ – не решено относительно y'.

9 Ур-е вида $x = F(y')$

9.1 Метод замены

Пример:

$\ln y' + \sin y' - x = 0$

1. Убедиться, что это ур-е вида $x = F(y')$.

   $x = \ln y' + \sin y'$

2. Заменить $p = y'$.

   $x = \ln p + \sin p$

3. Взять дифференциал от обеих частей.

   $dx = d(\ln p + sinp$

   $dx = (\frac{1}{p} + \cos p)dp$ $(*)$

4. Из замены выразить dx через dy.

   $p = y'$

   $p = \frac{dy}{dx}$

   $dx = \frac{dy}{p}$ $(**)$

5. Подставить $(**)$ в $(*)$.

   $\frac{dy}{p} = (\frac{1}{p} + \cos p)dp$

6. Выразить dy и проинтегрировать.

   $dy = (1 + \cos p)dp$

   $y = \int (1 + p\cos pdp = p + C_1 + \int p\cos pdp = p + p\sin p \cos p + C$

7. Записать ответ $\begin{cases} p \to t \\ const \to C \end{cases}$.

   Ответ: $\begin{cases} x = \ln t + \sin t \\ y = t + t\sin t + \cos t + C, \ C \in \mathbb{R} \end{cases}$.

10 Ур-е вида $y = F(y')$

10.1 Метод замены

Пример:

$e^{\ln y - y'} = y'^2$

1. Убедиться, что это ур-е вида $y = F(y')$.

   $\frac{y}{e^{y'}} = y'^2$

   $y = y'^2 e^{y'}$

2. Заменить $p = y'$.

   $y = p^2 e^p$

3. Взять дифференциал от обеих частей.

   $dy = (2pe^p + p^2 e^p)dp \ (*)$

4. Из замены выразить dy через dx.

   $p = y'$

   $p = \frac{dy}{dx}$

   $dy = pdx \ (**)$

5. Подставить $(**)$ в $(*)$.

   $pdx = (2pe^p + p^2 e^p)dp$

6. Выразить dx и проинтегрировать.

   $dx = \frac{2pe^p + pe^2}{p} dp$

   $dx = (2e^p + pe^p)dp$

   $x = 2\int e^p dp + \int pe^p dp = (2e^p + A) + (pe^p - e^p + B) = e^p + pe^p + C$

   $\int pe^p dp = pe^p - \int e^p dp = pe^p - e^p + B$

7. Записать ответ $\begin{cases} p \to t \\ const \to C \end{cases}$.

   Ответ: $\begin{cases} y = y'^2 e^y, \\ x = te^t + e^t + C, \ C \in \mathbb{R} \end{cases}$.