Отчёт по лабораторной работе №1

Семён Бевзюк

10 марта 2019 г.

Постановка задачи №1

Рассмотрим систему, которая описывает авторегрессор без задержки. Она имеет следующий вид:

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{1 + x^n} - x \tag{1}$$

Где n – размерность белка, α – положительный коэффициент синтеза, x – концентрация белка в клетке.

Состояние равновесия можно найти приравняв нулю правую часть. После преобразований получим следующее уравнение:

$$x^{n+1} + x - \alpha = 0 \tag{2}$$

Данная функция монотонная, возрастающая, следовательно имеет один корень в области $x > 0$. Корень, обозначим его за x^*, можно найти численно используя метод Ньютона или метод бисекции.

Сравним эти методы для поиска корней нелинейного уравнения. Для этого нужно:

1. При разных n построить зависимость корня x^* от параметра α.

2. Зафиксируем n и α и сравним методы. Для этого построим графики сходимости методов к ответу.

Постановка задачи №2

Рассмотрим систему, которая описывает генный переключатель:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = \frac{\alpha}{1+{x_2}^n} - x_1 \\ \dot{x_2} = \frac{\alpha}{1+{x_1}^n} - x_2 \end{cases} \tag{3}$$

Система для поиска состояний равновесия:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\alpha}{1+{x_2}^n} \\ x_2 = \frac{\alpha}{1+{x_1}^n} \end{cases} \tag{4}$$

Выразим x_2 через x_1, подставим и упростим. Для поиска состояний равновесия нужно решить уравнение:

$$x_1(1 + {x_1}^n)^n - \alpha(1 + {x_1}^n)^n + \alpha^n x_1 = 0 \tag{5}$$

При $n = 2$ оно примет следующий вид:

$$x^5 - \alpha x^4 + 2x^3 - 2\alpha x^2 + (1 + \alpha^2)x - \alpha = 0 \tag{6}$$

Нужно решить данное уравнение и построить график зависимости корней от параметра α.

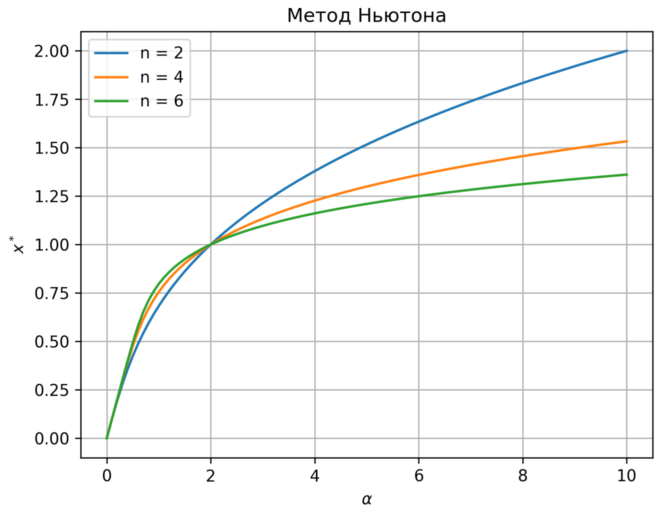

Рис. 1: Зависимость корня уравнения (2) от параметра α.

Решение задачи №1

Для решения задачи были реализованы метод Ньютона и метод бисекции на языке Python 3.7.

Найдём корни (2) используя метод Ньютона с критерием остановки $|f(x_{k-1}) - f(x_k)| < 10^{-6}$ при $n = \{2, 4, 6\}$. На Рис. 1 показан график зависимости корня от параметра α.

Теперь сравним методы. Пусть $n = 4$, $\alpha = 2$, точность решения $\varepsilon = 10^{-6}$. Метод Ньютона запустим из точки $x_0 = 0$, для метода бисекции левая граница $a = 0$, правая $b = 10$.

Результаты представлены на Рис. 2 и Рис. 3. Можно заметить, что метод Ньютона сходится к ответу быстрее. Метод же биссекции долго уточняет ответ.

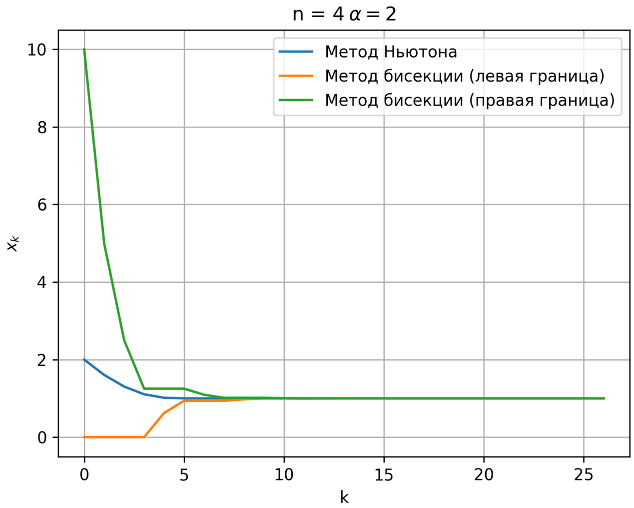

Рис. 2: Зависимость текущей точки метода от итерации

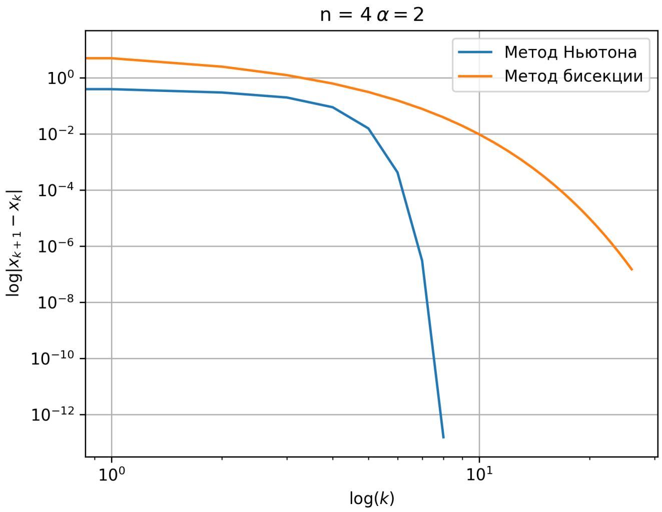

Рис. 3: Зависимость разности между двумя испытаниями от итерации

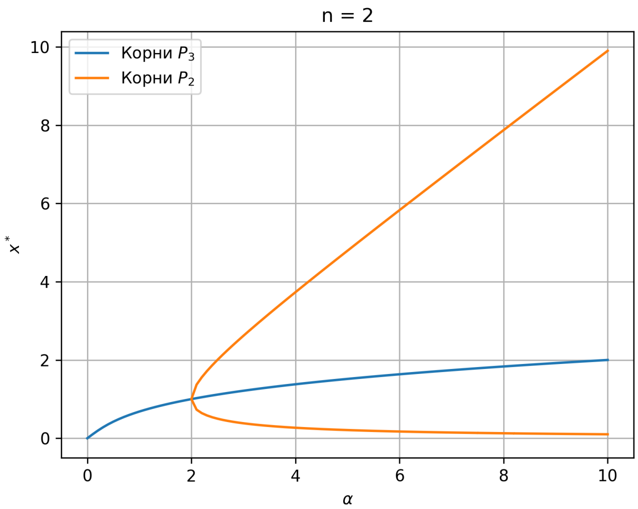

Рис. 4: Зависимость корней уравнения (6) от параметра α.

Решение задачи №2

Представим уравнение (6) в ином виде:

$$\begin{cases} P_5(x) = P_3(x) * P_2(x) \\ P_3(x) = x^3 + x - \alpha \\ P_2(x) = x^2 - \alpha x + 1 \end{cases} \tag{7}$$

Для $P_3(x)$ мы можем легко найти корень используя численный метод и мы знаем, что он один. Для $P_2(x)$ можно найти корень точно или численно. При $\alpha = 2$ уравнение имеет ровно один корень. При $\alpha > 2$ уравненеи имеет два корня. Следовательно исходное уравнение $P_5(x)$ имеет один или три корня.

Построим зависимость корней от параметра α. На Рис. 4 видно, что при переходе значения параметра α через 2 появляются новые корни, то есть появляются новые состояния равновесия исходной системы (3).