

# Отчёт по лабораторной работе №6

Семён Бевзюк

2 мая 2019 г.

## Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо:

1. Сгенерировать случайную эрмитову матрицу  $A$  размера  $N$  и найти её собственные значения.
2. Показать, что плотность распределения собственных значений (уровней системы) будет подчиняться полукруговому распределению Вигнера.
3. Показать, что распределение межуровневых расстояний  $s$  случайной эрмитовой матрицы близко к распределению Вигнера-Дайсона.

## Решение задачи

Рассмотрим матрицу  $A \in \mathbf{C}^{N \times N}$  такую, что  $A = A^\dagger$  и элементы матрицы имеют вид:  $a_{i,j} = \mathcal{N}(0,1) + i\mathcal{N}(0,1)$ . Такая матрица является членом гауссова унитарного ансамбля (Gaussian Unitary Ensemble).

Данные матрицы имеют  $N$  действительных собственных чисел. Если их нормировать на  $\sqrt{N}$ , то плотность распределения собственных чисел будет описываться полукруговым законом Вигнера:

$$W_{sc}(\lambda\sqrt{N}) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - \lambda^2} \quad (1)$$

Построим гистограмму распределения собственных значений матриц из GUE при  $N = 1000$ . Для этого генерируем 1000 реализаций случайной матрицы, вычислим для каждой собственные значения и нормируем. Полученную гистограмму сравним с теоретическим распределением. На Рис. 1 видно, что гистограмма почти совпадает с теоретическим распределением (1).

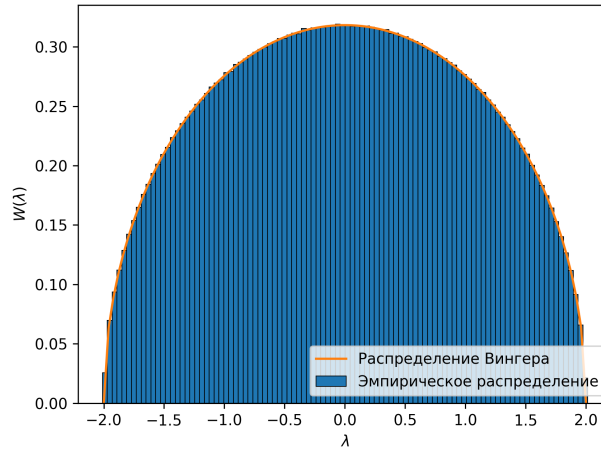


Рис. 1: Распределение нормированных собственных значений для GUE.

Теперь найдём расщепление уровней. Упорядочим набор собственных значений матрицы  $A$  по возрастанию. Тогда расщепление уровней есть следующая величина:

$$s_i = \lambda_{i+1} - \lambda_i, i = \overline{1, N-1} \quad (2)$$

Но в данном виде сложно сравнивать матрицы разного размера. Для того, чтобы распределение расщеплений не зависело от размера матрицы, вводится нормировка:

$$\bar{s}_i = \frac{s_i}{\langle s \rangle} \quad (3)$$

Где  $\langle s \rangle$  — средняя величина расщепления.

Распределений расщеплений для матриц GUE описывается распределением Вигнера-Дайсона:

$$P(\bar{s}) = \frac{32}{\pi^2} \bar{s}^2 e^{-\frac{4}{\pi} \bar{s}^2} \quad (4)$$

На Рис. 2 показана нормированная гистограмма расщеплений и график функции (4). Гистограмма качественно похожа на график теоретического распределения. В нуле плотность принимает нулевое значение, следовательно, между уровнями есть взаимодействие.

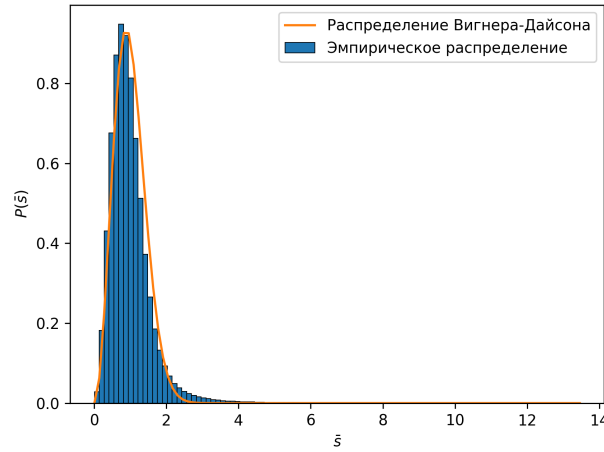


Рис. 2: Распределение нормированных расщеплений уровней для GUE