Отчёт по лабораторной работе №7

Семён Бевзюк

22 мая 2019 г.

Постановка задачи

В лабораторной работе необходимо:

1. Для уравнения Шрёдингера с периодической правой частью через матрицу пропагатор $U(T)$ найти квазиэнергии системы.

2. Построить собственные числа $U(T)$ на комплексной плоскости.

3. Проверить точность найденных собственных чисел.

Решение задачи

Рассматриваается уравнение Шрёдингера с периодической правой частью:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi\right\rangle = H(t)\left|\psi\right\rangle, H(t) = H_0(1 + A * \cos(t)) \tag{1}$$

где H_0 – GUE матрица, A – коэффициент модуляции, T – период правой части. Если $A = 0$, то модуляции нет, $A = 0.1$ – слабая модуляция, $A = 1$ – сильная модуляция.

Для нахождения Флоке-базиса в момент времени T используется матрица-пропагатор $U(T)$. Действие пропагатора $U(T)$ на вектор $\left|C(0)\right\rangle$ переводит его в $\left|C(T)\right\rangle$. Известно, что собственные векторы матрицы $U(T)$ являются Флоке-базисом в моменты kT, а собственнные значения матрицы определяют квазиэнергии системы.

Для нахождения столбцов матрицы $U(T)$ нужно решить численно N уравнений вида $\frac{\partial}{\partial t}\left|C\right\rangle = A(t)\left|C\right\rangle$. В качестве $A(t)$ примем правую часть $H_0(1 + A * \cos(t))$, а в качестве $\left|C\right\rangle$ возьмем последовательно N раз базисные орты евклидова пространства. Интегрируя уравнения до момента T методом Рунге-Кутты мы получим столбцы матрицы $U(T)$.

Заполнив таким образом матрицу $U(T)$ мы можем найти её собственные числа, которые будут соответствовать квазиэнергиям системы (1).

Если взять в качестве начального условия один из векторов Флоке-базиса и подействовать на него пропагатором, то $U(T)\left|\varphi(0)\right\rangle = \left|\psi(T)\right\rangle = \lambda\left|\varphi(0)\right\rangle$. Сравним это с теоремой Флоке:

$$\left|\psi(T)\right\rangle = e^{i\Xi T}\left|\varphi(T)\right\rangle \tag{2}$$

Следовательно, $\lambda = e^{i\Xi T}$, тогда в качестве оценки ошибки нахождения собственных числел $U(T)$ можно рассматривать отклонение собственных чисел от единичной окружности на комплексной плоскости: $|\lambda_k| - 1$.

Сгененируем матрицу $U(T)$ для $N = 10$ и посмотрим на расположение собственных чисел на рис. 1, рис. 2, рис. 3. Видно, что красные точки, которые соответствуют собственным числам, расположены на единичной окружности.

Посмотрим на отклонение модуля собственных чисел от единицы на рис. 4, рис. 5, рис. 6. Отклонение достаточно мало.

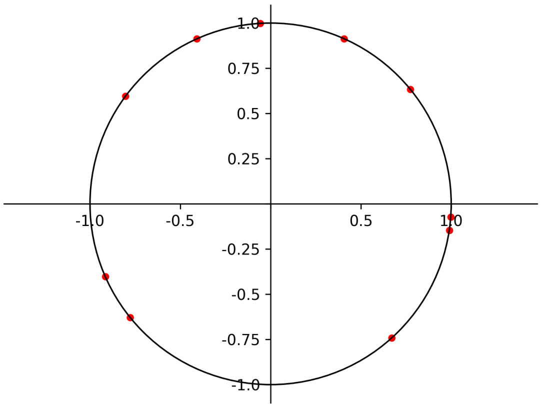

Рис. 1: Собственные числа матрицы-пропагатора $U(T)$ при $A = 0.0$

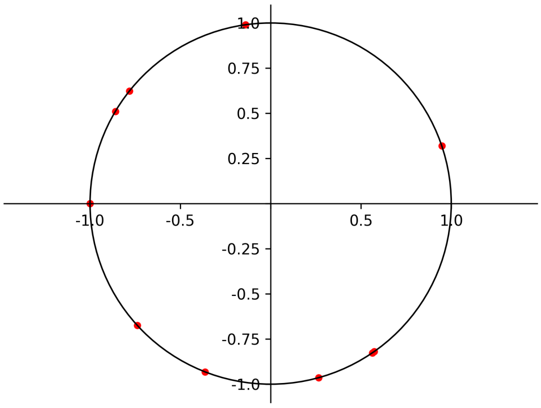

Рис. 2: Собственные числа матрицы-пропагатора $U(T)$ при $A = 0.1$

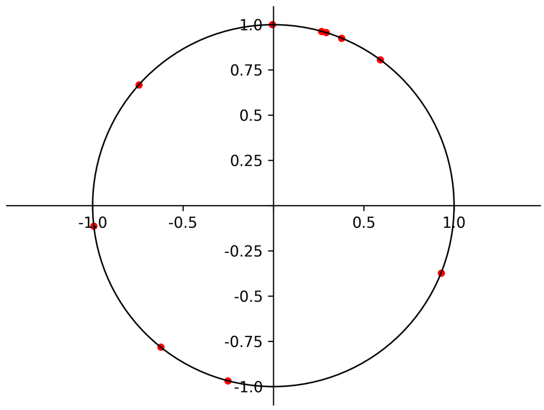

Рис. 3: Собственные числа матрицы-пропагатора $U(T)$ при $A = 1.0$

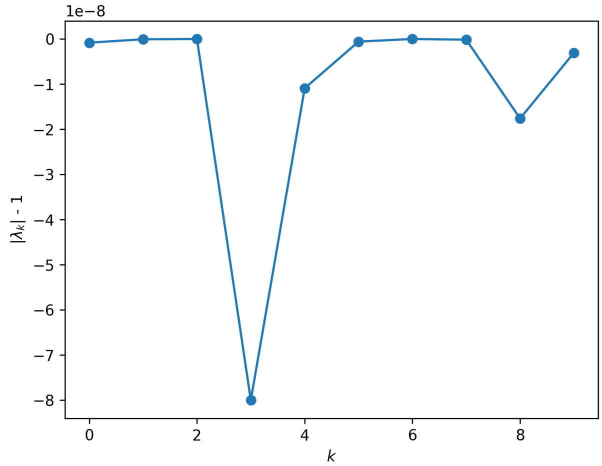

Рис. 4: Отклонение модуля собственных чисел матрицы-пропагатора $U(T)$ от единицы при $A = 0$

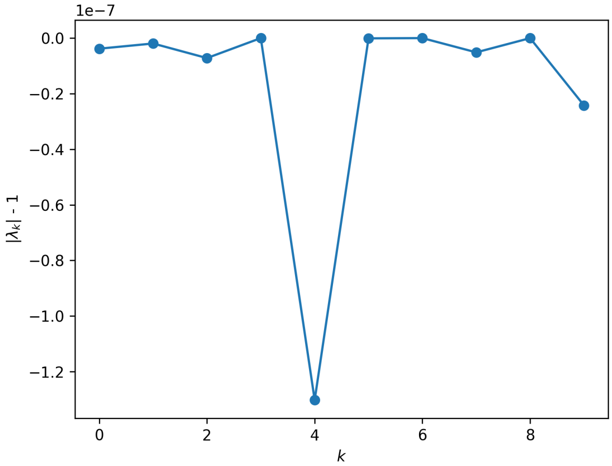

Рис. 5: Отклонение модуля собственных чисел матрицы-пропагатора $U(T)$ от единицы при $A = 0.1$

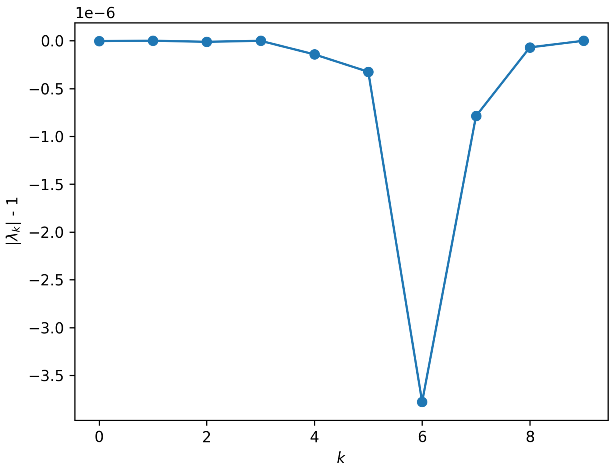

Рис. 6: Отклонение модуля собственных чисел матрицы-пропагатора $U(T)$ от единицы при $A = 1.0$