Отчёт по лабораторной работе №2

Семён Бевзюк

19 марта 2019 г.

Постановка задачи №1

Рассмотрим систему, которая описывает авторегрессор с задержкой. Она имеет следующий вид:

$$\dot{x} = \frac{\alpha}{1 + x_\tau^n} - x \tag{1}$$

Где n – размерность белка, α – положительный коэффициент синтеза, x – концентрация белка в клетке, x_τ – концентрация с задержкой τ. Нужно построить зависимость $\tau(\alpha)$ при $n = 2, 4, 6$.

Решение задачи №1

Для систем с задержкой вида $\dot{x} = f(x_\tau) + g(x)$ известно, что собственные числа имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 = f'(x^*)e^{-\lambda_1 \tau} cos(\lambda_2 \tau) + g'(x^*) \\ \lambda_2 = -f'(x^*)e^{-\lambda_1 \tau} sin(\lambda_2 \tau) \end{cases} \tag{2}$$

Где x^* - состояние равновесия.

Система будет устойчивой, если $Re(\lambda_i) < 0$, если $Re(\lambda_i) > 0$, то система будет неустойчивой. Если $Re(\lambda_i) = 0$, то требуются дополнительные исследования. Так как $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, то $Re(\lambda) = \lambda_1$.

Введем некоторые переобозначения для уравнения (1):

$$f = \frac{\alpha}{1 + x_\tau^n} \tag{3}$$

$$g = -x \tag{4}$$

$$f'(x^*) = \frac{\alpha n x^{n-2}}{(1 + x_\tau^n)^2} \equiv -\beta \tag{5}$$

$$g'(x^*) = -1 \tag{6}$$

Тогда в нашем случае λ_1 и λ_2 имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -\beta e^{-\lambda_1 \tau} cos(\lambda_2 \tau) - 1 \\ \lambda_2 = \beta e^{-\lambda_1 \tau} sin(\lambda_2 \tau) \end{cases} \tag{7}$$

Один из признаков бифуркации - смена знака λ_1. Выразим τ из системы (7) при $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{cases} \beta cos(\lambda_2 \tau) = -1 \\ \lambda_2 = \beta sin(\lambda_2 \tau) \end{cases} \tag{8}$$

Тогда τ можно найти по формуле:

$$\tau = \frac{1}{\lambda_2} acrcos(-\frac{1}{\beta}) \tag{9}$$

Если возвести уравнения в системе (8) в квадрат и сложить, то мы сможем найти λ_2:

$${\lambda_2}^2 = \beta^2 - 1 \tag{10}$$

В (9) мы делим на λ_2, следовательно вытекают ограничения на β: $\beta > 1$. Для поиска τ нужно вычислить β, а для него требуется знать состояние равновесия системы (1), которое мы можем найти через метод Ньютона как корень $x^{n+1} + x - \alpha = 0$.

Построим график заисимости $\tau(\alpha)$ при $n = 2, 4, 6$. На Рис. 1 область

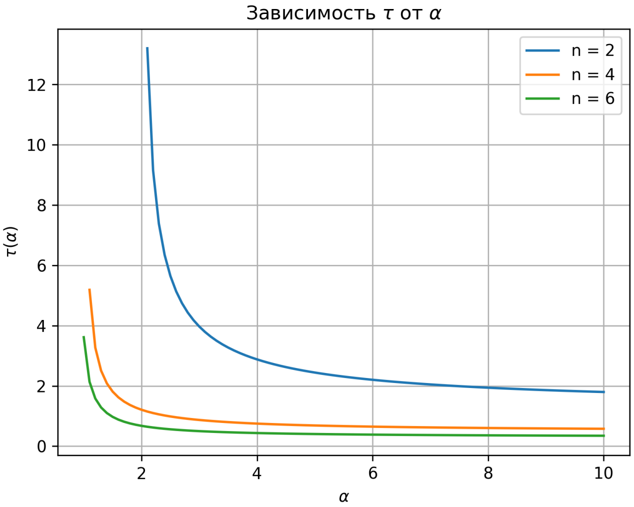

Рис. 1: Зависимость задержки τ от параметра α.

устойчивости расположена ниже кривой, а область неустойчивости - выше. Можно отметить, что система без задержки была устойчивой.