Отчёт по лабораторной работе №5

Семён Бевзюк

10 апреля 2019 г.

Постановка задачи

Рассмотрим логистическое отображение:

$$x_{n+1} = r * x_n(1 - x_n) \tag{1}$$

где: x_n – принимает значение от 0 до 1, r – положительный параметр. Число неподвижных точек данного уравнения зависит от значения параметра r. С увеличением r будут появляться циклы периода два, четыре, восемь и так далее до некоторого предельного значения r_∞, после которого устойчивость приобретает шумоподобный характер.

Для исследования уравнения (1) нужно:

1. Построить бифуркационную диаграмму и убедиться в возникновении хаоса.

2. Оценить значения параметров, при которых возникают циклы периода один, два, четыре, восемь: r_1, r_2, r_4, r_8.

3. Визуально определить значение r_∞, после которого начинается хаотическое движение.

4. Определить интервал третьего окна периодичности.

Для определения устойчивости непериодической траектории можно использовать ляпуновский показатель:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^{n} |f'(x_k)| \tag{2}$$

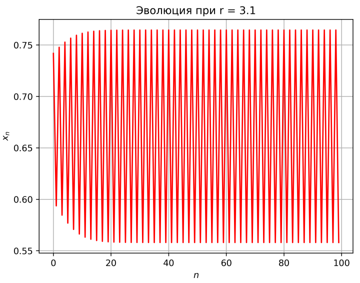
где: $f(x_n)$ – отображение точки x_n в x_{n+1}. Если $L > 0$, то установился режим динамического хаоса, то есть траектория неустойчивая. Если $L < 0$, то есть устойчивый цикл конечного периода. В лабораторной работе нужно вычислить ляпуновский показатель для каждой траектории и построить график зависимости L от параметра r.

Решение задачи

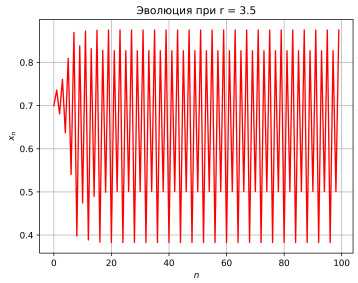
Реализуем на языке Python метод для построения бифуркационной диаграммы уравнения (1). Для этого для каждого значения параметра r проитерируем наш процесс с начального условия $x_0 = 10^{-5}$ до x_n, где $n = 10^5$. За это время траектория сойдется к своим предельным значениям и мы сможем взять их для построения графика. Для каждой траектории вычислим численный ляпуновский показатель $\widetilde{L}$ за n шагов и добавим его к графику.

Посмотрим на поведение двух траекторий при разном r: Рис. 1. На графике а) неподвижных точек две, на графике б) уже четыре неподвижные точки.

Теперь посмотрим на бифуркационную диаграмму при $r = [0, 4]$: Рис. 2. По графику и по значению ляпуновского показателя можно увидеть, что существует область динамического хаоса после некоторого значения параметра r_∞.



а) $r = 3.1$



б) $r = 3.5$

Рис. 1: Предельные точки при разном значении параметра r.

Определим интересующие нас значения r. Из Рис. 3 видно, что $r_1 = 3$, $r_2 \approx 3.449$, $r_4 \approx 3.544$, $r_8 \approx 3.564$. При переходе через $r_\infty \approx 5.57$ ляпуновский показатель меняет знак и начинается хаос. При $r > 4$ значения x_n расходятся.

На Рис. 4 можно более внимательно посмотреть на область при $r > 5.57$. При этом можно заметить самое окна периодичности. Самое широкое изображено на Рис. 5. Это интервал цикла с периодом три. Его левая граница 3.828, правая граница 3.849. В этом окне наблюдается устойчивое движение, ляпуновский показатель меньше нуля.

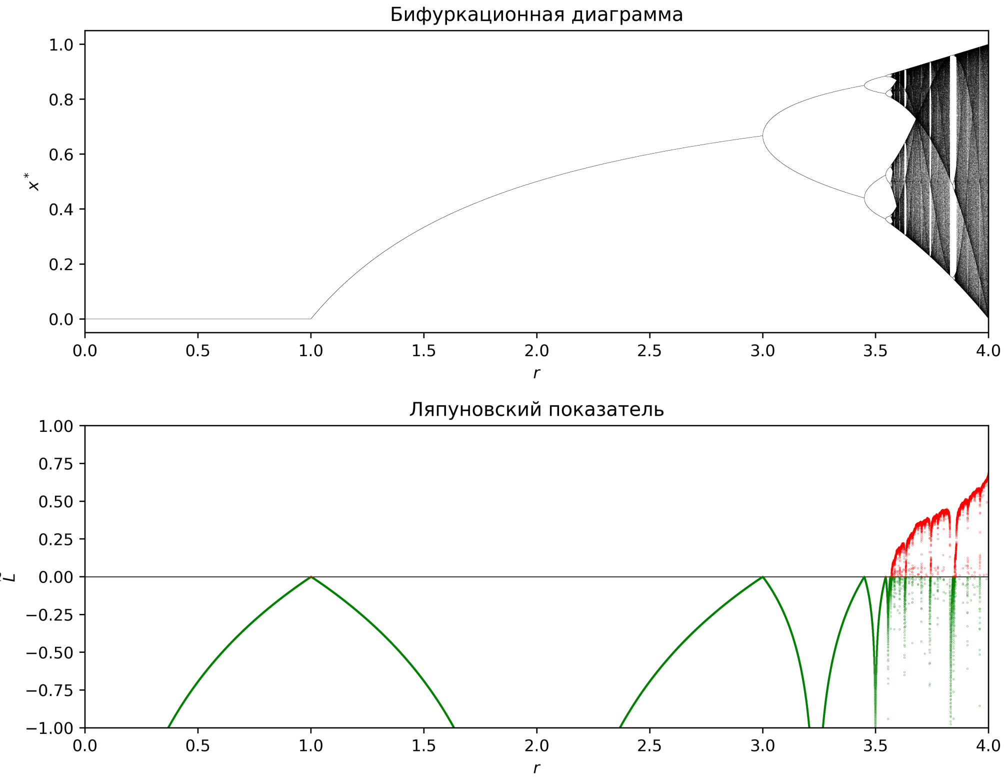


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма и ляпуновский показатель при $r = [0,\ 4]$.

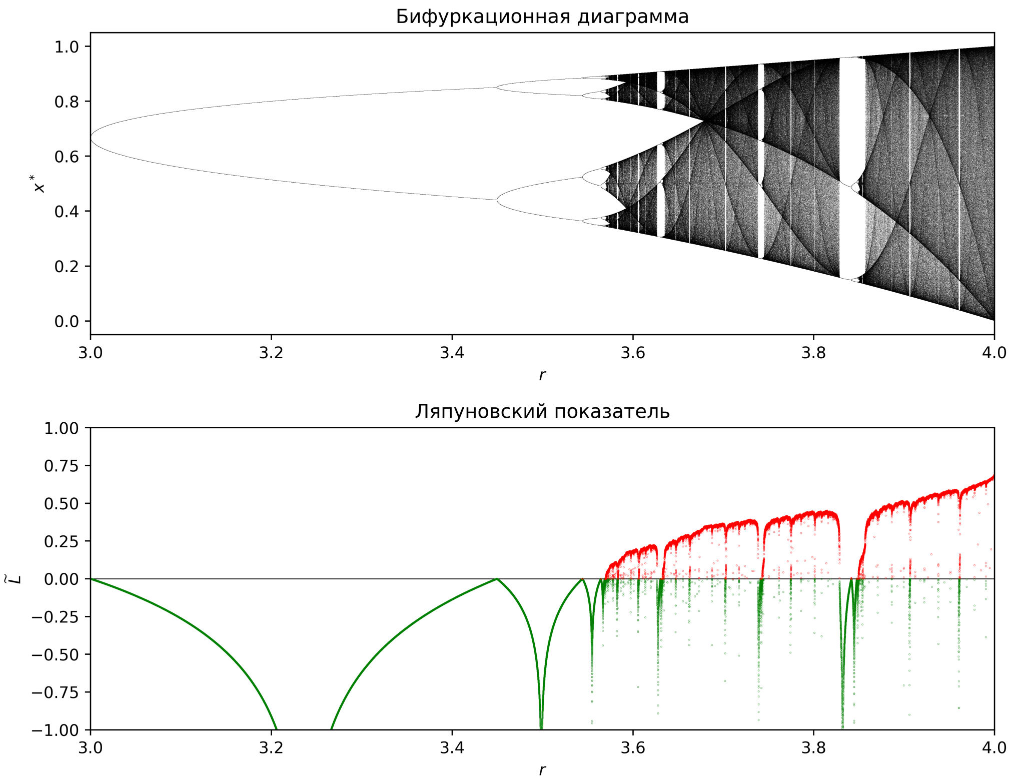


Рис. 3: Бифуркационная диаграмма и ляпуновский показатель при $r = [3,\ 4]$.

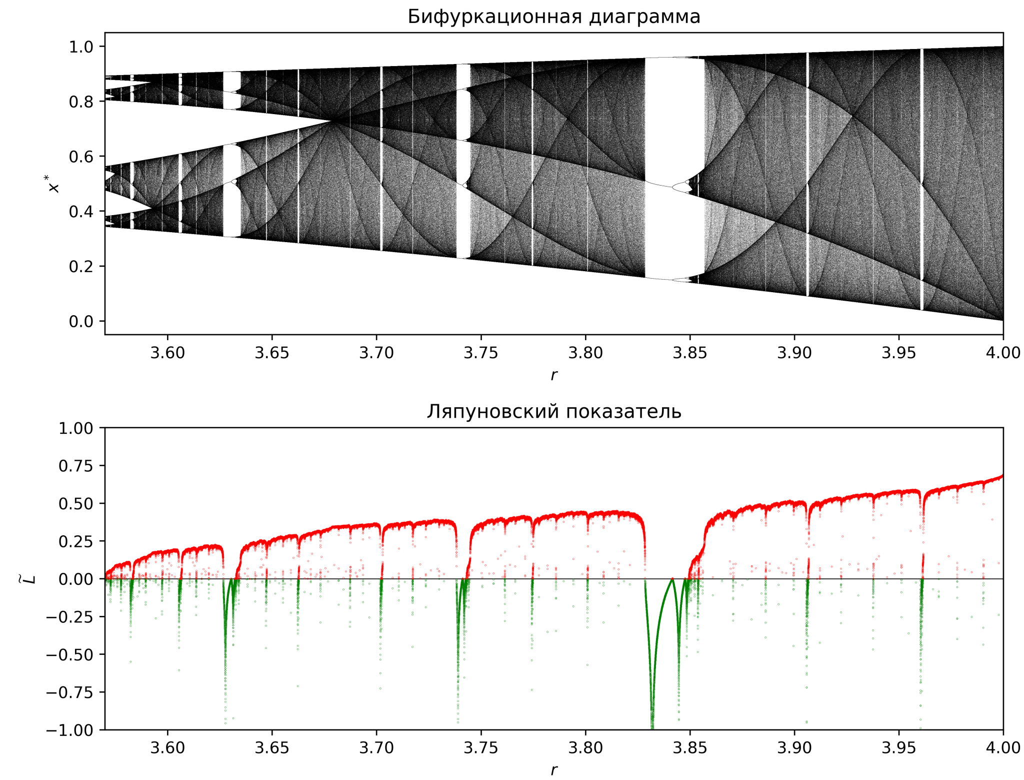


Рис. 4: Бифуркационная диаграмма и ляпуновский показатель при $r = [3.57,\ 4]$.

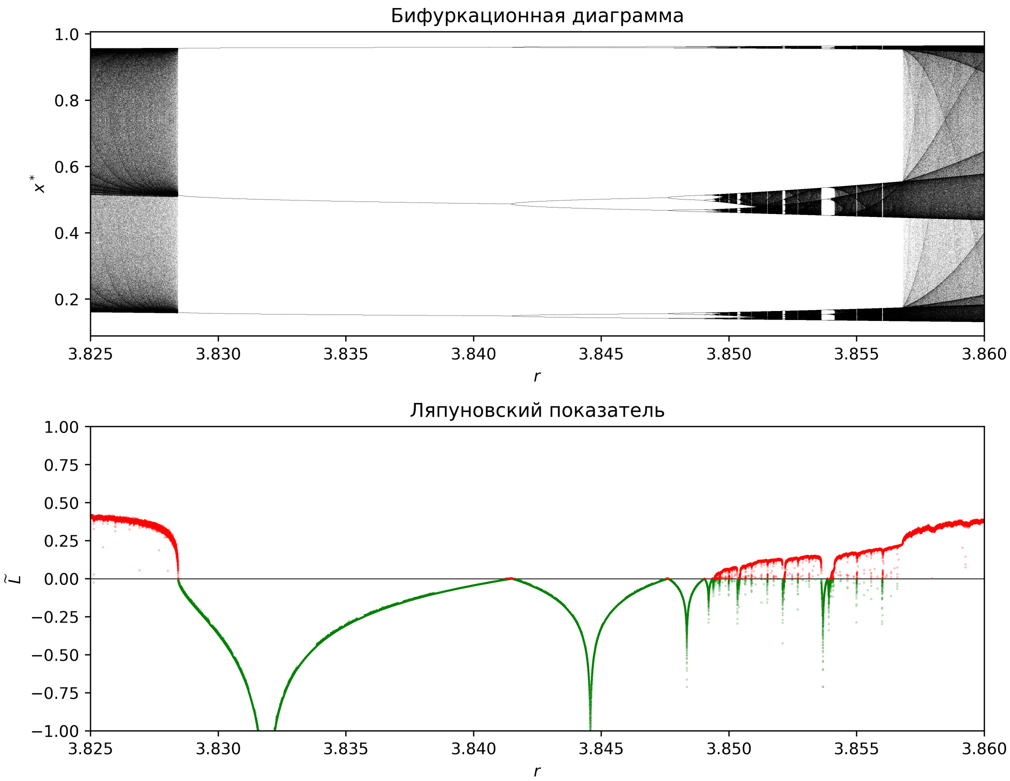


Рис. 5: Окно периодичности.