Отчёт по лабораторной работе №3

Семён Бевзюк

24 марта 2019 г.

Постановка задачи №1

Исследовать сходимость методов на устойчивых и неустойчивых системах вида:

$$\dot{x} = -x \tag{1}$$

$$\dot{x} = x \tag{2}$$

Построить точное решение, численное решение методами Эйлера и Рунге-Кутта четвертого порядка, график ошибок методов по сравнению с точным решением.

Постановка задачи №2

Для уравнения маятника построить точное решение, численное решение и график ошибки.

$$\ddot{x} + x = 0 \tag{3}$$

Постановка задачи №3

Численно решить систему Рёсслера, построить графики зависимости $y(x)$ и $z(x)$. Построить график ошибки для метода Эйлера и Рунге-Кутта.

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - r)z \end{cases} \tag{4}$$

Постановка задачи №4

Смоделировать процесс распада вещества, который описывается уравнением:

$$\dot{x} = -x \tag{5}$$

Использовать наивный алгоритм и алгорит Gillespie. Построить графики точного и численного решения. Сравнить время работы алгоритмов.

Постановка задачи №5

Смоделировать процесс синтеза молекул водорода из атомарного водорода и процесс распада молекул водорода на атомарный водород. Система имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = 2\gamma x_2 - 2a{x_1}^2 \\ \dot{x_2} = ax^2 - \gamma x_2 \end{cases} \tag{6}$$

Где x_1 – количество атомов водорода, x_2 – количество молекул водорода. Реакция синтеза с коэффициентом $a{x_1}^2$:

$$\begin{cases} x_1 - > x_1 - 2 \\ x_2 - > x_2 + 1 \end{cases} \tag{7}$$

Реакция распада с коэффициентом γx_2:

$$\begin{cases} x_1 \to x_1 + 2 \\ x_2 \to x_2 - 1 \end{cases} \tag{8}$$

Решение задачи №1

Реализуем на языке Python метод Эйлера и Рунге-Кутта. Так как точное решение уравнений (1) и (2) легко находится, то будем сравнивать численное решение с ним. Тогда $\Delta x = |x(t) - \widetilde{x}(t)|$ – ошибка численного метода, $x(t)$ – численное решение, $\widetilde{x}(t)$ – точное решение. Пусть $x_0 = 10$ – начальное условие, $\Delta t = 0.1$ – шаг по времени, $t_{max} = 20$ – ограничение на время.

Посмотрим на устойчивую систему. На Рис. 1 можно увидеть, что чис-

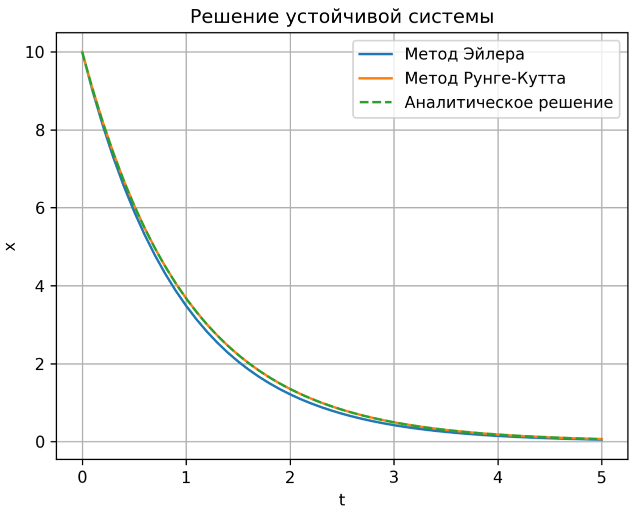

Рис. 1: Решение системы (1).

ленное решение методом Рунге-Кутта совпадает с точным решением, а решение методом Эйлера отличается, но сходится к точному. На графике ошибок (Рис. 2) это тоже заметно: метод Рунге-Кутта имеет минимальную ошибку, а метод Эйлера сначала накапливает ошибку, но наша система устойчивая, поэтому метод Эйлера в итоге сходится к точному решению.

Посмотрим на неустойчивую систему. На Рис. 3 можно увидеть, что численное решение методом Рунге-Кутта все ещё совпадает с точным решением, а решение методом Эйлера заметно отличается и уже отходит от точного. На графике ошибок (Рис. 4) видно, что метод Рунге-Кутта снова имеет минимальную ошибку, а метод Эйлера достаточно быстро накапливает ошибку и уходит от точного решения, так как система является неустойчивой. Следовательно, метод Рунге-Кутта является более точным методом.

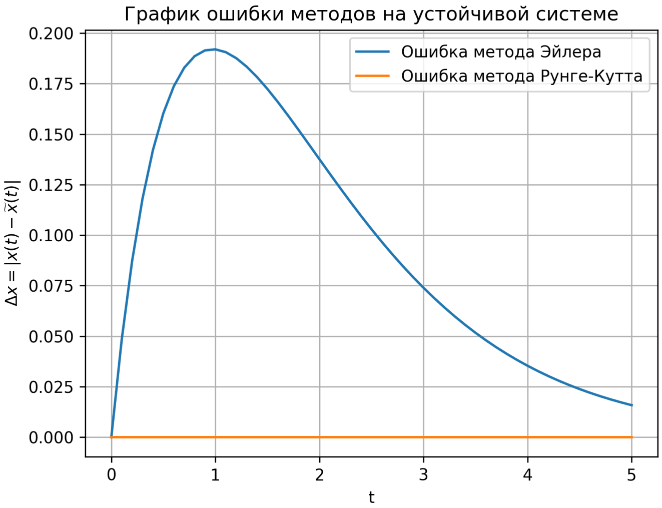

Рис. 2: Ошибка методов при решении системы (1).

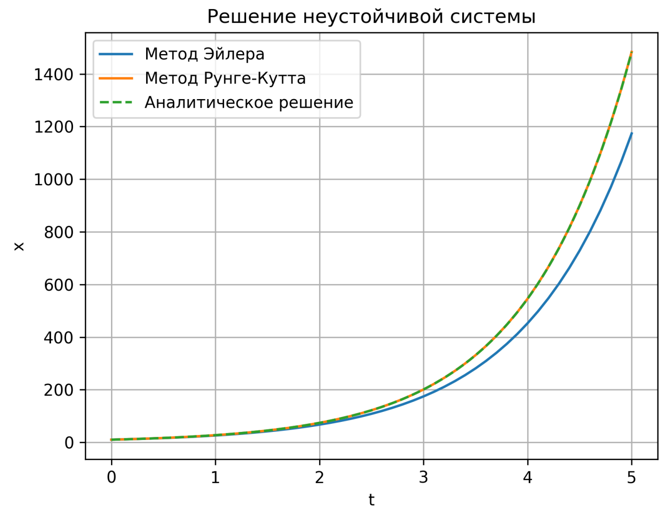

Рис. 3: Решение системы (2).

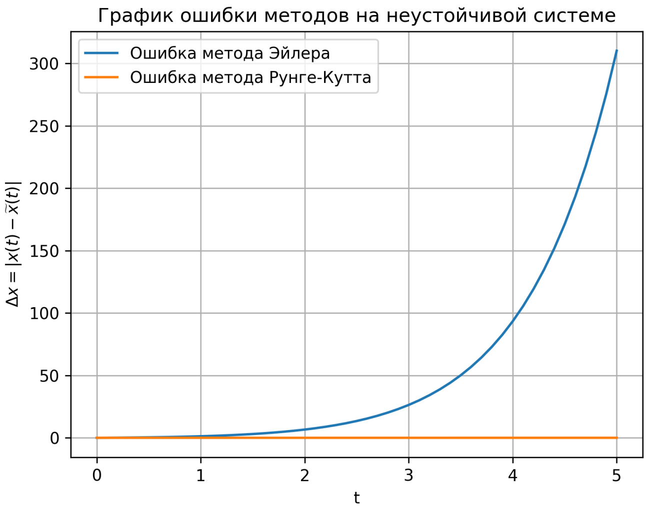

Рис. 4: Ошибка методов при решении системы (2).

Решение задачи №2

Уравнение (3) запишем как систему:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 \end{cases} \tag{9}$$

Где $x_1 = x$ и $x_2 = \dot{x}$. При $x_1(0) = 0$ и $x_2(0) = 1$ система имеет решение: $x_1(t) = \sin(t)$, $x_2(t) = \cos(t)$. Решим систему численно и посмотрим на поведение решения по $x_1 = x$.

Возникли периодические колебания (Рис. 5). Метод Эйлера достаточно быстро начинает расходиться с точным решением (Рис. 5)(Рис. 6). Метод Рунге-Кутта решает данную систему гораздо точнее.

Решение задачи №3

Рассмотрим систему Рёсслера (4) при $a = b = 5.7$, $r = 5.7$. При данных параметрах в системе возникает хаотический аттрактор. Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0.035$, $\Delta t = 0.01$, $t_{max} = 300$. Посмотрим на численное решение разными методами (Рис. 7)(Рис. 8)(Рис. 9)(Рис. 10). Можем наблюдать хаотическое движение.

Посмотрим теперь на ошибку методов. У нас нет точного решения системы, поэтому будем сравнивать решение метода с решением метода с меньшим шагом. Получили график (Рис. 11). Ошибка растет из-за того, что метод с меньшим шагом мог перейти на другую траекторию и, в силу хаотического движения, она может сильно отойти от траектории метода с большим шагом.

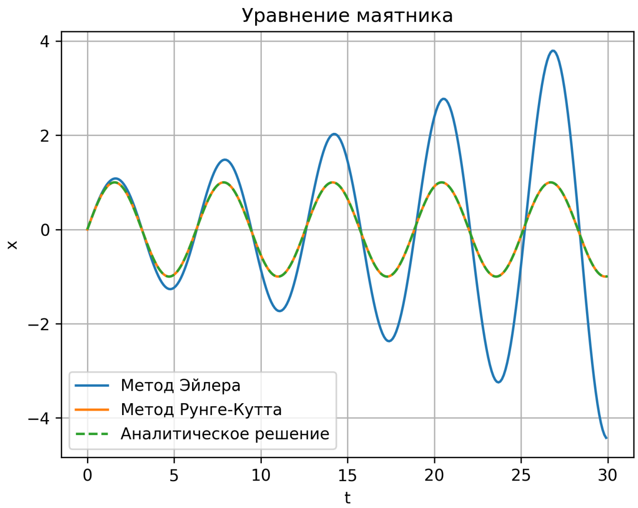

Рис. 5: Решение системы (9).

Решение задачи №4

Смоделируем для системы (8) процесс распада вещества при $x_0 = 100$ наивным алгоритмом, алгоритмом Gillespie и построим точное решение уравнения.

По Рис. 12 видно, что моделирование процесса распада достаточно хорошо соответствует точному решению (8). Стоит отметить, что алгоритм Gillespie работает быстре наивного алгоритма: $t_{Gillespie} = 0.000358$, $t_{naive} = 0.003641$.

Решение задачи №5

Смоделируем для системы (6) процесс распада и синтеза водорода при $a = \gamma = 1$, $x_1(0) = 100$, $x_2(0) = 0$. Систему (6) решим методом Рунге-Кутта при аналогичных начальных условиях. На Рис. 13 и Рис. 14 видим, что моделирование близко к численному решению системы (6).

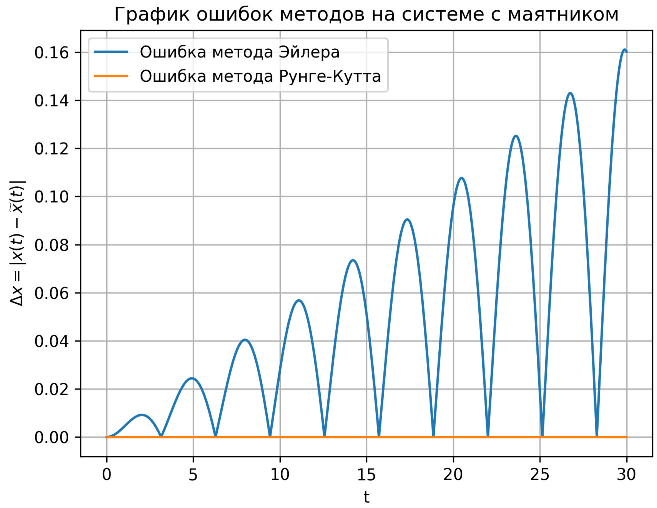

Рис. 6: Ошибка методов при решении системы (9).

Рис. 7: Решение системы (4) $y(x)$ методом Рунге-Кутта.

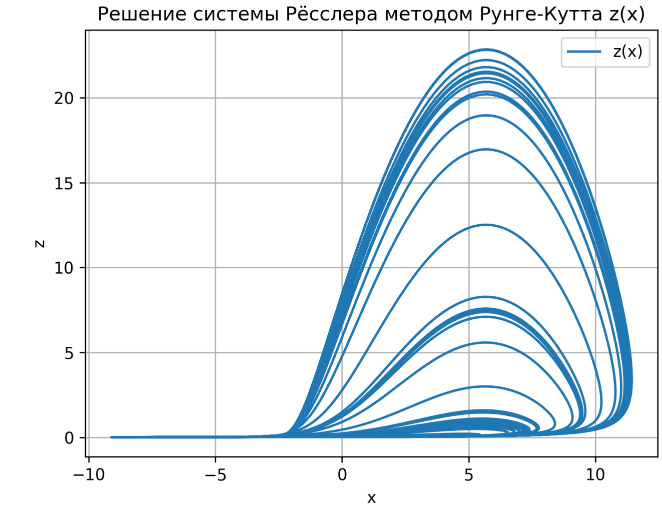

Рис. 8: Решение системы (4) $z(x)$ методом Рунге-Кутта.

Рис. 9: Решение системы (4) $y(x)$ методом Эйлера.

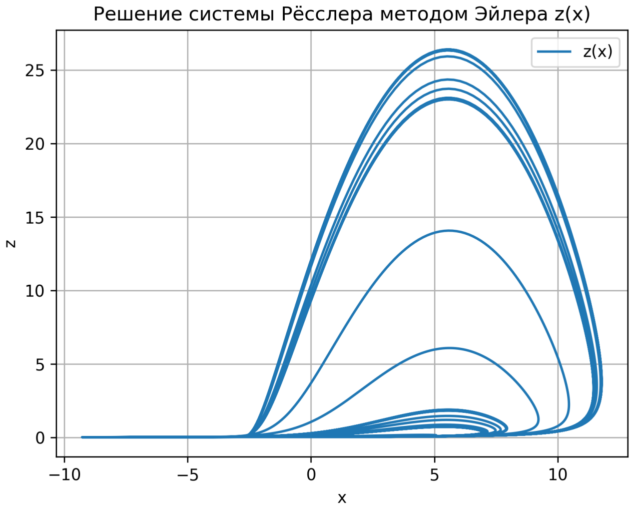

Рис. 10: Решение системы (4) $z(x)$ методом Эйлера.

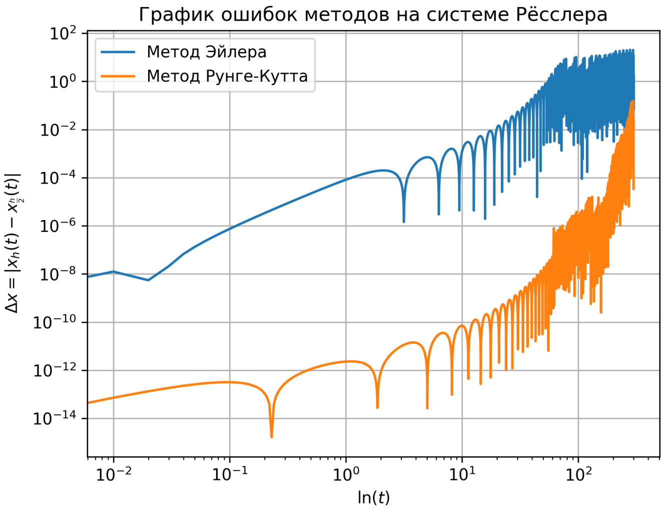

Рис. 11: Ошибка методов при решении системы (4).

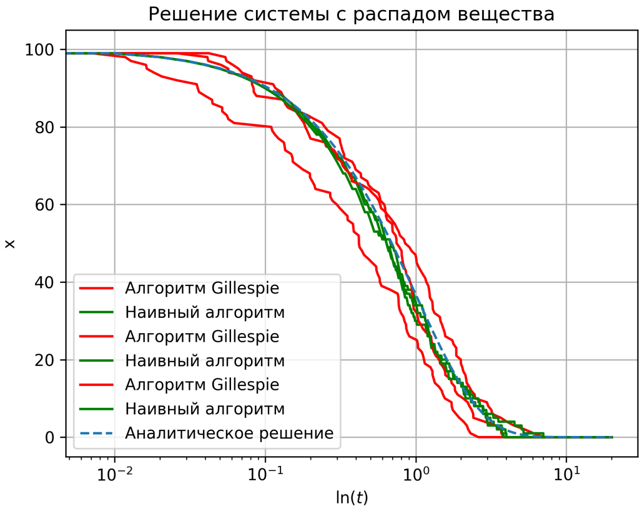

Рис. 12: Реализации процесса распада (8).

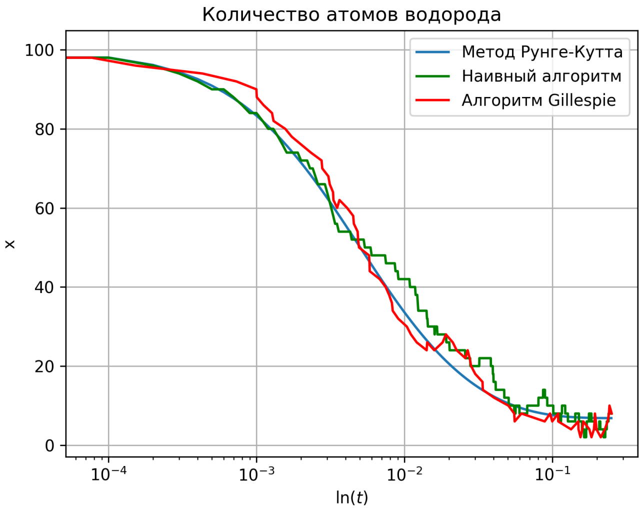

Рис. 13: Количество атомов водорода.

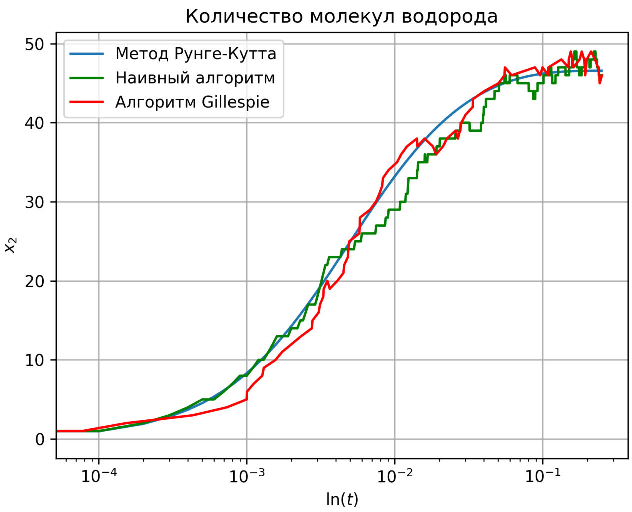

Рис. 14: Количество молекул водорода.