曲率

> 描述曲线的弯曲程度

直观认识

- 直线的弯曲程度为0
- 圆上每一点的弯曲程度相同，不同的圆，半径越小，弯曲程度越大
- 曲线转过同一角度，弧越长，弯曲程度越小
- 曲线弧长相等，转角越大，弯曲程度越大

曲率的定义

设曲线$y=f(x)$有两阶导数，自点M开始取弧段，其长度为Δs
对应切线的转角为$\Delta\alpha$，称

$$\bar{K}=|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|$$

为曲线$y=f(x)$在Δs上的平均曲率

令$\Delta s\to 0$，称

$$\lim_{\Delta s\to 0}|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|$$

为$f(x)$在M处的曲率，记为$|\frac{d\alpha}{ds}|$

曲率的计算

$\tan\alpha=y'\Rightarrow\alpha=\arctan y'$

$$d\alpha=\frac{y''dx}{1+y'^2}$$

$\because dy=y'dx$

$\therefore ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(1+y'^2)}dx$

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

联系到$Taylor$公式，
发现原函数和多项式函数在展开点的函数值相同、切线相同、弯曲程度相同

例题

求曲线$y=ax^2+bx+c$上曲率最大点

解：

$y'=2ax+b$，$y''=2a$

$k=\frac{|2a|}{[1+(2ax+b)^2]^{\frac{3}{2}}}$

当$x=-\frac{b}{2a}$时，曲率最大