Aulas 5 e 6
Síntese numérica e gráfica de dados

• Nesta unidade estudaremos três tipos fundamentais de medidas estatísticas: medidas de *tendência central*, medidas de *dispersão* e medidas de *posição relativa*.

• As medidas de *tendência central* mostram o valor representativo em torno do qual os dados tendem a agrupar-se, dão o ponto central em torno do qual os dados se distribuem.

• As medidas de *dispersão* mostram o grau de afastamento dos valores observados em relação ao ponto central da distribuição dos dados.

•As medidas de *posição relativa* mostram pontos de corte na distribuição relativa dos dados da amostra.

- Objetivos:

  Identificação de valores que traduzem o elemento típico.

  Quantificação da variabilidade presente nos dados.

2.1 Medidas de tendência central

2.1.1 Média aritmética simples:

• De modo geral, é a mais importante de todas as medidas de tendência central.

• A média de uma amostra é denotada por $\overline{x}$ e a média de uma população é denotada por μ.

• Seja $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ uma amostra de *n* observações de certa variável *X*. Para calcular a média de um conjunto de valores é necessário somar todos os valores obtidos e dividir por *n* que representa o tamanho da amostra.

• Em notação matemática o cálculo da média é obtido por:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Exemplo 1: Calculando a média aritmética

Um pesquisador interessado em avaliar o nível de ruído em um determinado cruzamento movimentado da cidade, mediu o nível de ruído (em decibéis) durante 18 dias. Os dados encontram-se abaixo:

85	92	95	98	99	101	103	105	107
110	112	114	117	120	120	122	125	127

Neste conjunto de dados *n=18* e utilizando a fórmula da média encontramos:

$$\bar{x} = \frac{85 + 92 + ... + 125 + 127}{18} = 108{,}44$$

Portanto, podemos observar que o nível médio de ruído no cruzamento estudado foi de 108,44 decibéis.

2.1.2 Mediana:

- É o valor que divide o conjunto de dados ao meio, deixando os 50% menores valores de um lado e os 50% maiores valores do outro lado.
- É denotada por $\tilde{x}$.
- Para calcular a mediana é necessário que o conjunto de dados esteja organizado em ordem crescente.
- Se n é ímpar, a mediana é dada pelo valor que ocupa a *posição* $\frac{n+1}{2}$.
- Se n é par, a mediana será a média dos valores que ocupam as *posições* $\frac{n}{2}$ e $\frac{n+2}{2}$.

Voltando ao exemplo anterior, podemos observar que os dados já encontram-se dispostos em ordem crescente. Como o tamanho da amostra é par (*n=18*), a mediana é calculada fazendo-se uma média dos valores que encontram-se localizados nas posições $\frac{n}{2} = 9^{o}\, elemento$ e $\frac{n+2}{2} = 10^{o}\, elemento$.

Ou seja, $$\tilde{x} = \frac{107+110}{2} = 108{,}5$$

Podemos portanto concluir que em metade dos dias analisados o nível de ruído foi inferior ou igual a 108,5 decibéis.

2.1.3 Observações atípicas *(Outliers):*

•O que são? São valores muito grandes ou muito pequenos em relação aos demais.

•Quais as conseqüências da presença de observações atípicas em um conjunto de dados? Alteram enormemente a média e variabilidade dos dados.

•As principais causas do aparecimento de *outliers* são:

- ✓ Leitura, anotação ou transcrição incorreta dos dados.
- ✓ Erro na execução do experimento ou na tomada da medida.
- ✓ Característica inerente à variável estudada (grande variabilidade do que está sendo medido).

Importante

• Vale a pena lembrar que, pelo fato da média ser calculada levando-se em consideração todos os valores da amostra, ela é uma medida muito sensível a valores discrepantes e portanto deve ser utilizada com cautela!

• É importante levar em consideração que, pelo fato da mediana ser calculada com base apenas na posição (elemento do meio), ela é uma medida robusta, ou seja, não é tão sensível quanto a média a valores discrepantes (*Outliers*).

2.1.5 Moda (Mo):

- Dado um conjunto de valores, a Moda (Mo) desses valores será aquele que se repetir o maior número de vezes.

- Podemos ter uma amostra que não tem moda que é chamada de amodal, também pode ocorrer duas modas (chamada bimodal) ou mais de duas modas (chamada multimodal).

- No exemplo 1, a moda é 120.

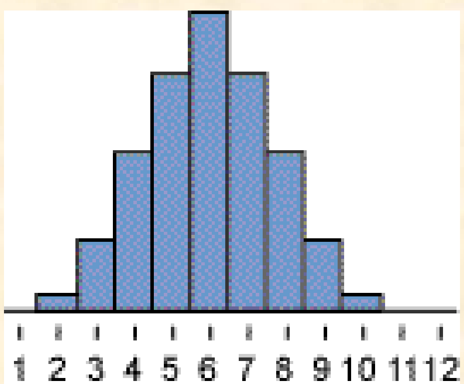
Importante

A moda é a única medida de tendência central que pode ser usada para descrever dados nominais.

2.1.6 Característica de uma distribuição: Assimetria

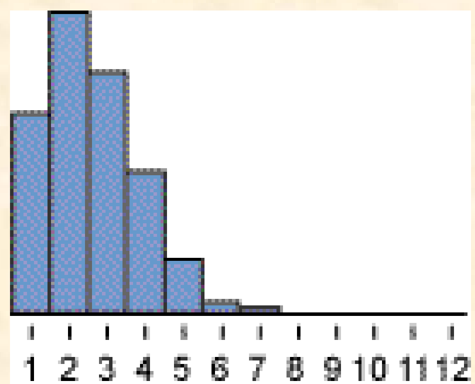
- A distribuição dos dados é *assimétrica* quando estende-se mais para um lado do que para o outro. Nesses casos, a média tende a deslocar-se para o lado da cauda mais longa. Observe a Figura 1 a seguir:

Simétrica



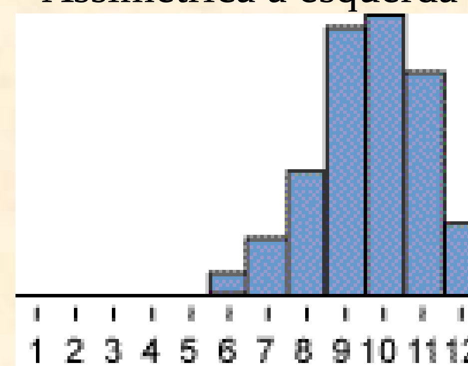
Moda = Média = Mediana

Assimétrica à direita



Média > Mediana > Moda

Assimétrica à esquerda



Média < Mediana < Moda

Importante

A média sempre irá cair na direção em que a distribuição for assimétrica. Por exemplo, quando uma distribuição for assimétrica à esquerda, a média estará à esquerda da mediana.

2.1.7 Qual é a melhor medida de tendência central?

• Não há regra fixa para se escolher tal ou qual medida de locação. Em cada situação específica o problema deve ser analisado:

- ✓A média aritmética é a medida sintetizadora mais adequada quando não há valores erráticos ou aberrantes.
- ✓A mediana deve ser usada sempre que possível como medida representativa de distribuições fortemente assimétricas, como distribuição de renda, etc.

2.1.8 Exercícios de fixação

Para os exercícios de 1 a 3:

a) Determine a média, a mediana e a moda dos dados, se possível. Se não for possível, explique por que a medida de tendência central não pôde ser determinada.

b) Qual é a medida de tendência central que melhor representa os dados? Explique seu raciocínio.

1. **Salários de funcionários:** Os salários, em R$, das pessoas que trabalham em determinada obra (engenheiros, mestres, pedreiros, ajudantes, estagiários, etc.) encontram-se a seguir:

200	250	250	300	450	460	2300

2. **Carros esportivos:** O tempo (em segundos) que uma amostra de seis carros esportivos leva para ir de zero a 60 milhas por hora encontra-se a seguir:

3,7	4,0	4,8	4,8	4,8	5,1

3. **Preferência de compra:** As respostas em uma amostra de 1001 pessoas a quem se perguntou se a sua próxima compra de carro seria de uma marca nacional ou estrangeira foram:

Respostas	**No. de pessoas**
Nacional	704
Estrangeira	253
Não sabe	44

2.2 Medidas de variabilidade

• Quase nunca uma única medida é suficiente para descrever de modo satisfatório um conjunto de dados.

✓ Tomemos como exemplo o caso da média aritmética, que é uma medida de locação, ou de tendência central, largamente empregada, e consideremos os dois conjuntos de observações:

A: {25 28 31 34 37} B:{17 23 30 39 46}

Ambos têm a mesma média, 31. No entanto, pode-se perceber intuitivamente que o conjunto B tem maior dispersão do que o conjunto A.

• É necessário estabelecer medidas que indiquem o grau de dispersão, ou variabilidade, em relação ao valor central.

2.2.1 Amplitude:

- A notação utilizada para representar a amplitude é: *A*.
- É definida como sendo a diferença entre o maior e o menor valor do conjunto de dados.
- A vantagem da amplitude é sua facilidade de cálculo porém, tem a desvantagem de levar em conta apenas dois valores, desprezando todos os outros.

Exemplo 2: Calculando a amplitude

Um pesquisador está interessado em avaliar o tempo (em segundos) que os consumidores demoram entre o início e a finalização de uma compra em um determinado *site* na Internet. Para isso, observou 12 consumidores escolhidos aleatoriamente no sistema. Os dados encontram-se abaixo:

71	73	73	74	74	75
76	77	77	79	81	83

A amplitude dos tempos é: $A = 83 - 71 = 12$ segundos.

2.2.2 Variância e desvio padrão:

• A variância e o desvio padrão são medidas de variação bastante úteis e largamente utilizadas.

• A dispersão (variabilidade) de um conjunto de dados é pequena se os dados estão concentrados em torno da média, e é grande se os dados estão muito afastados da média.

• A *variância* e o *desvio padrão* medem a variação do conjunto de dados em torno da média.

• As notações utilizadas para representarmos as duas medidas são:

Medidas	População	Amostra
Variância	σ^2	s^2
Desvio padrão	σ	s

• Como a *variância* e o *desvio padrão* levam em consideração todos os valores da amostra e também o valor da média amostral, seu cálculo é mais demorado. Vejam as fórmulas a seguir:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} \quad \text{ou} \quad s^2 = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right]}{n-1}$$

• É possível perceber que a unidade de medida da variância equivale à unidade de medida dos dados ao quadrado. Dessa maneira, é mais comum trabalharmos com a raiz quadrada da variância, ou seja, com o *desvio padrão*.

• Para o exemplo 2 que representa o tempo (em segundos) gasto entre o início e a finalização de compras em um *site* na Internet, vamos calcular a variância e o desvio padrão utilizando as duas fórmulas anteriores:

- ✓ Utilizando a 1ª fórmula:

O tempo médio é de 76,08 segundos.

A variância é:

$$s^2 = \frac{(71-76{,}08)^2 + (73-76{,}08)^2 + \ldots + (81-76{,}08)^2 + (83-76{,}08)^2}{12-1} = 12{,}447$$

O desvio padrão é: $s = \sqrt{12{,}447} = 3{,}528 \;\; segundos.$

✓ Utilizando a 2ª fórmula:

$$\sum x_i = 71 + 73 + \ldots + 81 + 83 = 913.$$

$$\sum x_i^2 = 71^2 + 73^2 + \ldots + 81^2 + 83^2 = 69601$$

A variância é: $$s^2 = \frac{(69601) - \left[\frac{(913)^2}{12}\right]}{12 - 1} = 12{,}447.$$

O desvio padrão é: $s = \sqrt{12{,}447} = 3{,}528 \ \textit{segundos.}$

• Ao compararmos os desvios padrões de vários conjuntos de dados, podemos avaliar quais se distribuem de forma mais ou menos dispersa.

• O desvio padrão será sempre não negativo e será tão maior quanto mais disperso forem os valores observados:

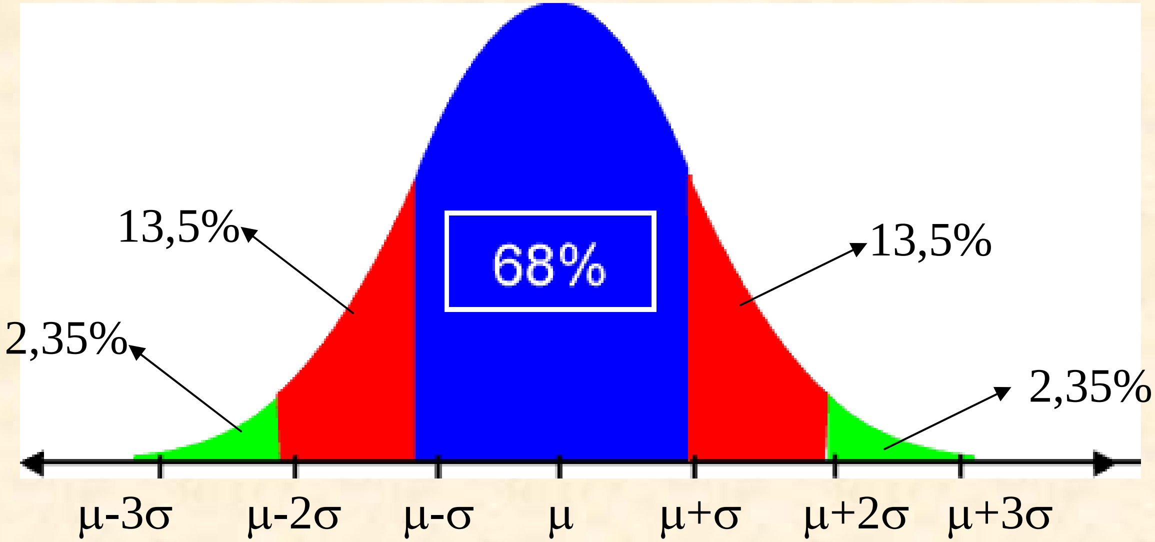
✓ A tabela abaixo mostra o desvio padrão das notas de três turmas de alunos:

Turma	Nº de alunos	Média	Desvio padrão
A	8	6,00	1,31
B	8	6,00	3,51
C	7	6,00	2,69

Analisando a tabela acima: Os alunos das três tenderam a ter notas em torno de seis.Pelos desvios padrão concluímos que os alunos da turma A obtiveram notas relativamente próximas umas das outras, quando comparados aos alunos das outras turmas. Por outro lado, as notas dos alunos da turma B foram as que se apresentaram mais heterogêneas.

• Interpretação empírica para o desvio padrão :

✓ Para conjuntos de dados com distribuição **simétrica** (onde o valor da média é igual ao da mediana) pode-se dizer que:



•Cerca de 68% dos dados estão a até 1 desvio padrão da média.

•Cerca de 95% dos dados estão a até 2 desvios padrão da média.

•Cerca de 99,7% dos dados estão a até 3 desvios padrão da média.

2.2.4 Coeficiente de variação (CV)

• O desvio padrão embora seja a medida de dispersão mais utilizada, ela mede a dispersão em termos absolutos.

• O coeficiente de variação definido por

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

mede a dispersão em termos relativos.

• Por vezes é conveniente exprimir a variabilidade em termos relativos, isto porque, por exemplo, um desvio padrão de 10 pode ser insignificante se a média é 10.000 mas altamente significativo para um conjunto de dados onde a média é 100.

- O coeficiente de variação é adimensional (não tem unidade de medida), tornando-se útil quando queremos comparar a variabilidade de observações com diferentes unidades de medidas.

- Observe os três conjuntos de dados abaixo:

Conjunto de valores	Média	Desvio padrão	Coeficiente de variação
1.) {1 2 3}	2	1	0,5
2.) {101 102 103}	102	1	0,01
3.) {100 200 300}	200	100	0,5

Os conjuntos 1 e 2 têm o mesmo desvio padrão, pois os intervalos entre os valores são iguais.

Os níveis de variabilidade nos conjuntos 1 e 3 são proporcionalmente iguais, logo, eles têm o mesmo coeficiente de variação.

• O CV é adimensional, isto é, um número puro e é expresso em porcentagem. É zero quando não houver variabilidade entre os dados, ou seja, quando $s=0$, o que ocorre quando todos os valores da amostra são iguais. Sua grande utilidade é fornecer uma medida para a homogeneidade do conjunto de dados. Quanto menor o coeficiente de variação, mais homogêneo é o conjunto de dados.

•Uma possível classificação de homogeneidade de acordo com o CV é:

- ✓ < 10%: homogeneidade muito alta.
- ✓ de 10% a 20%: homogeneidade alta:
- ✓ de 20% a 30%: homogeneidade média;
- ✓ > 30%: homogeneidade baixa;

2.3 Medidas de Posição Relativa

2.3.1 Quartis, Decis e Percentis:

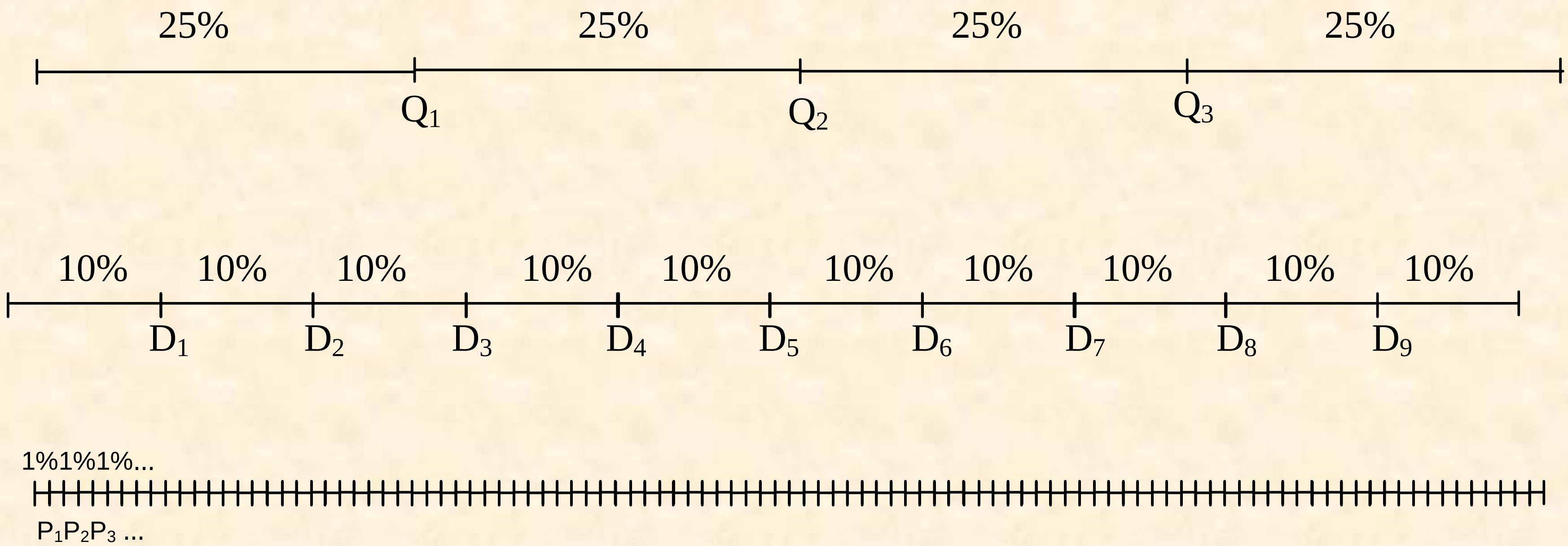
- Assim como a mediana divide os dados em duas partes iguais, os três quartis, denotados por Q_1, Q_2 e Q_3, dividem as observações ordenadas (dispostas em ordem crescente) em quatro partes aproximadamente iguais, ou seja, há cerca de 25% dos dados em cada grupo.
- Analogamente, há nove decis, denotados por D_1, D_2, D_3, ..., D_9, que dividem os dados em 10 grupos com cerca de 10% dos dados em cada grupo.
- Há, finalmente, 99 percentis, que dividem os dados em 100 grupos com cerca de 1% dos dados em cada grupo.

• Para o cálculo de quartis, decis e percentis, primeiramente, é necessário que os dados estejam organizados em ordem crescente.

• Tabela de correspondência entre os quartis, decis e percentis:

Quartil	Decil	Percentil
Q_1	$D_{2,5}$	P_{25}
Q_2	D_5	P_{50}
Q_3	$D_{7,5}$	P_{75}

- Esquema ilustrativo:



- Cálculo do percentil (P_k) :

1º: Ordenar os dados do menor para o maior (ordem crescente);

2º: Calcular a posição ocupada pelo percentil (P_k) por meio da seguinte fórmula:

$$L = \left(\frac{k}{100} \right).n$$

onde, *n* é o tamanho da amostra, *k* é o percentil que se deseja calcular e *L* é a posição do percentil na amostra.

> <u>Se o valor de *L* é um número inteiro:</u> o percentil P_k será obtido pela média entre os valores que ocupam as posições *L* e *L+1*.
>
> <u>Se o valor de *L* é um número decimal:</u> devemos arredondar o valor de *L* para o <u>maior inteiro</u> mais próximo, aí sim o percentil P_k será obtido pelo valor que ocupa a posição *L* já arrendondada.

• Para o exemplo 1 que estuda o nível de ruído (em decibéis) em um cruzamento vamos calcular os percentis 25 e 50:

P_{25}:

$$L = \left(\frac{25}{100} \right) .18 = 4{,}5$$

O percentil 25 (P_{25}) será o elemento que ocupa a 5ª posição na amostra já ordenada, ou seja, P_{25} = 99. Dessa maneira, podemos dizer que em aproximadamente 25% dos dias pesquisados, o nível de ruído no cruzamento foi de no máximo de 99 decibéis.

P_{50}:

$$L = \left(\frac{50}{100}\right).18 = 9$$

O percentil 50 (P_{50}) será a média entre os elementos que ocupam as 9ª e 10ª posições na amostra já ordenada, ou seja,

$$P_{50} = \frac{107 + 110}{2} = 108{,}5$$

Dessa maneira, podemos dizer que em aproximadamente 50% dos dias pesquisados o nível de ruído foi superior a 108,5 decibéis.

2.3.2 Exercícios:

O tempo de utilização de caixas eletrônicos depende de cada usuário e das operações efetuadas. Foram coletadas 26 medidas desse tempo (em minutos):

0,8	0,9	0,9	1	1	1,1	1,2	1,2	1,2	1,3	1,3	1,3	1,4
1,4	1,5	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6	1,6	1,7	1,7	1,7	1,7	1,8

Calcule e interprete:

- 3º quartil
- 4º decil
- Percentil 60

2.3.2 Escore *z* ou escore padronizado:

• Sabe-se que o QI médio é aquele igual a 100. À partir daí sabe-se que um QI igual a 102 é bastante comum, enquanto um QI de 170 é raro. Esse QI de 102 é bastante comum porque está próximo da média, mas o QI de 170 é raro porque está bem acima de 100, que é a média.

• O objetivo de se calcular o escore z é expressar em unidades de desvio padrão quanto um determinado número está distante da média.

•Para o cálculo do escore z é necessário conhecer a média ($\bar{x}$)e o desvio padrão (s):

$$\textbf{Escore z} = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

- Exemplo: Para uma turma de Estatística, as notas dos alunos na 1ª avaliação (no valor de 20 pontos) encontram-se a seguir:

2	3	4	5	6	14
15	16	17	18	19	

Para essa amostra calculou-se a média e o desvio padrão: $\bar{x}$ =10,8 e s = 6,7.

O escore z de um aluno que tirou 15 pontos na prova é:

$$\textbf{Escore z} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{15 - 10,8}{6,7} = 0,63$$

Ou seja, esse aluno tirou uma nota que está situada a 0,63 desvios-padrão acima da média.

O escore z de um aluno que teve uma nota igual a 4 na prova é:

$$\textbf{Escore z} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{4 - 10{,}8}{6{,}7} = -1{,}01$$

Ou seja, esse aluno tirou uma nota que está situada a 1,01 desvios-padrão <u>abaixo</u> da média.

• A importância dos escores z na estatística reside no fato de que eles permitem distinguir entre valores usuais e valores raros, ou incomuns. Consideramos usuais os valores cujos escores padronizados estão entre –2,00 e 2,00, e incomuns os valores com escore z inferior a –2,00 ou superior a 2,00. Veja o esquema a s