Introdução à Probabilidade

- A probabilidade está diariamente presente em nossas vidas: "Será que vai chover?" e "Quem vai ganhar as eleições?" são algumas das várias perguntas que nos fazemos que envolvem o cálculo de probabilidades.
- O conceito de probabilidade é fundamental para o estudo de situações onde os resultados são variáveis, isto é, situações em que os resultados possíveis são conhecidos, mas não se pode saber *a priori* qual deles ocorrerá.
- Os gerentes freqüentemente fundamentam suas decisões em uma análise de incertezas, como:
    - Quais são as chances de queda das vendas se aumentarmos os preços?
    - Qual é a chance de um novo investimento ser lucrativo?
    - Qual é a probabilidade do projeto ser concluído no prazo?
- A probabilidade é uma medida numérica da possibilidade de um evento ocorrer.
- Valores probabilísticos são sempre atribuídos em uma escala de 0 a 1. Uma probabilidade próxima de 0 indica que é pouco provável que um evento ocorra; uma probabilidade próxima de 1 revela que a ocorrência de um evento é quase certa.

3.1 Experimento aleatório. Espaço amostral. Evento.

- Antes de passarmos à definição de probabilidade, é necessário fixarmos os conceitos de experimento, espaço amostral e evento.
- Experimento aleatório: é qualquer processo que permite ao pesquisador fazer observações e cujos resultados são variáveis.
- Exemplo: observação do sexo das crianças nascidas em uma maternidade durante um mês.
- Espaço amostral: é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento. É denotado por Ω. No exemplo anterior,

Ω = { Feminino , Masculino}.

- Evento: é um subconjunto de elementos do espaço amostral. Deve-se sempre atribuir uma letra em maiúscula para cada evento do espaço amostral. Por exemplo, F = { Feminino}.

3.2 Probabilidade

- Suponha que estamos estudando um evento A, a probabilidade do evento ocorrer é denotada por P(A). A função P(A) só será uma probabilidade se ela satisfaz duas condições básicas:
    - $0 \leq P(A) \leq 1$
    - $P(\Omega) = 1$

3.2.1 Como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

- Por meio das características teóricas do experimento: Por exemplo, ao lançarmos uma moeda equilibrada sabemos que, teoricamente, cada face tem a mesma probabilidade de ocorrência, isto é, P(c) = P($\bar{c}$) = ½.
- Por meio das freqüências de ocorrências: Se A é o evento de interesse, a probabilidade de A é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{Número de vezes que A ocorreu}}{\text{Número total de repetições do experimento}}$$

Exemplo: De acordo com o IBGE (1988), a distribuição dos suicídios ocorridos no Brasil em 1986, segundo a causa atribuída foi a seguinte:

Causa do suicídio	Freqüência
Alcoolismo (A)	263
Dificuldade financeira (F)	198
Doença mental (M)	700
Outro tipo de doença (O)	189
Desilusão amorosa (D)	416
Outras causas (C)	217
Total	1983

Ao selecionarmos aleatoriamente uma das pessoas que tentaram suicídio, determine a probabilidade de que a causa atribuída tenha sido:

Desilusão amorosa:

$$P(D) = \frac{416}{1983} = 0{,}2097$$

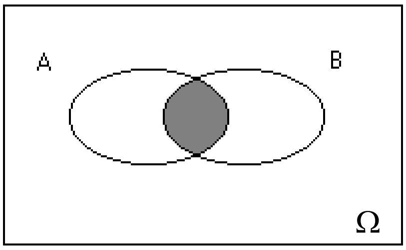
Doença mental:

$$P(M) = \frac{700}{1983} = 0{,}3530$$

3.3 Tipos de eventos

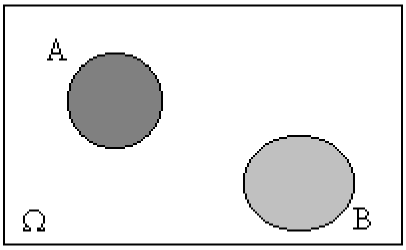
3.3.1 Interseção

- A interseção de dois eventos A e B corresponde à ocorrência simultânea dos eventos A e B. Contém todos os pontos do espaço amostral comuns a A e B. É denotada por A ∩ B. A interseção é ilustrada pela área hachurada do diagrama abaixo.



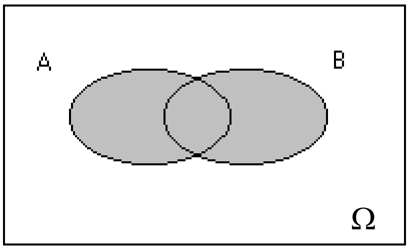
3.3.2 Disjuntos ou mutuamente exclusivos

- Dois eventos A e B são chamados disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é, A ∩ B =∅. O diagrama a seguir ilustra esta situação.



3.3.3 União

- A união dos eventos A e B equivale à ocorrência de A, ou de B, ou de ambos, ou seja, a ocorrência de pelo menos um dos eventos A ou B. É denotada por A ∪ B. A área hachurada na figura abaixo ilustra esta situação.

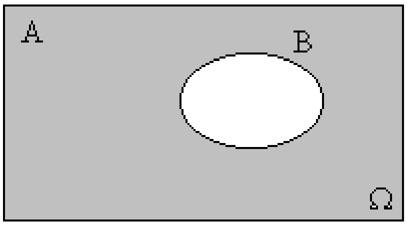


- Para encontrar a união de dois eventos deve-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

3.3.4 Complementares

- Dois eventos A e B são complementares se sua união corresponde ao espaço amostral e sua interseção é vazia. O diagrama a seguir ilustra tal situação.



- Para eventos dois eventos A e B complementares: $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$. Além disso, AC = B e BC = A.
- Pode-se observar também que: P(A) = 1- P(B) e que P(AC) = P(B) =1 – P(A).

<u>Exemplo:</u> Estudo da relação entre o hábito de fumar e a causa da morte, entre 1000 empresários.

Fumante	Causa da morte			Total
	Câncer (C)	Doença cardíaca (D)	Outros (O)	
Sim (F)	135	310	205	650
Não (F^C)	55	155	140	350
Total	190	465	345	1000

Um empresário é selecionado aleatoriamente entre os estudados na amostra. Determine as seguintes probabilidades:

a.) Ser fumante.
b.) Ter morrido de câncer.

c.) Não ser fumante e ter morrido de doença cardíaca.
d.) Ser fumante ou ter morrido de outras causas.

Resolução:

a.) $P(F) = \frac{650}{1000} = 0{,}65$

b.) $P(C) = \frac{190}{1000} = 0{,}19$

c.) $P(F^C \cap D) = \frac{155}{1000} = 0{,}155$

d.) $P(F \cup O) = P(F) + P(O) - P(F \cap O) = \frac{650}{1000} + \frac{345}{1000} - \frac{205}{1000} = 0{,}790$

3.4 Probabilidade condicional

- Em diversas situações práticas, a probabilidade de ocorrência de um evento A se modifica quando dispomos de informação sobre a ocorrência de um outro evento associado.
- A probabilidade condicional de A dado B é a probabilidade de ocorrência do evento A, sabido que o evento B já ocorreu. Pode ser determinada dividindo-se a probabilidade de ocorrência de ambos os eventos A e B pela probabilidade de ocorrência do evento B, como é mostrado a seguir:

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ , \ P(B) > 0}$$

- Da definição de probabilidade condicional, deduzimos a *regra do produto de probabilidades* que é uma relação bastante útil:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B).P(B) \ , \ P(B) > 0$$

3.5 Independência de eventos

➯ Dois eventos A e B são independentes se a ocorrência de um deles não afeta a probabilidade de ocorrência do outro. Se dois eventos A e B são independentes então:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(A \mid B) = P(A) \\ P(B \mid A) = P(B) \\ P(A \cap B) = P(A).P(B) \end{array}}$$

Exemplo: Estudo da relação entre o criminoso e a vítima

Criminoso	Vítima			Total
	Homicídio (H)	Furto (F)	Assalto (A)	
Estranho (E)	12	379	727	1118
Conhecido (C)	39	106	642	787
Ignorado (I)	18	20	57	95
Total	69	505	1426	2000

Se uma pessoa é escolhida ao acaso entre os estudados na amostra. Determine as probabilidades de:

a.) Ter sofrido um homicídio ou ter sido vítima de um estranho.
b.) Dado que a pessoa sofreu um assalto, ter sido vítima de um conhecido.
c.) A pessoa ter sofrido um furto, dado que ela foi vítima de um estranho.

Resolução:

a.) $P(H \cup E) = P(H) + P(E) - P(H \cap E) = \frac{69}{2000} + \frac{1118}{2000} - \frac{12}{2000} = 0{,}587$

b.) $P(C \mid A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{642/2000}{1426/2000} = 0{,}450$

c.) $P(F \mid E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{379}{1118} = 0{,}338$

3.6 Árvore de probabilidades

- A *árvore de probabilidades* é um diagrama que consiste em representar os eventos e as probabilidades condicionais associadas às realizações. Cada um dos caminhos da árvore indica uma possível ocorrência.

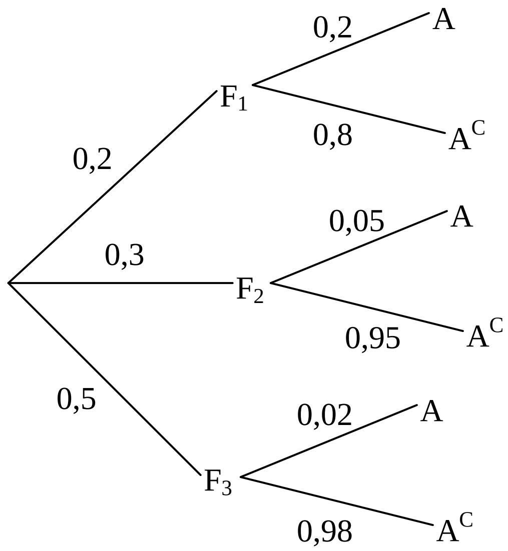
Exemplo: Suponha que você é o gerente de uma fábrica de sorvetes. Você sabe que 20% de todo o leite que utiliza na fabricação dos sorvetes provém da fazenda F_1, 30% são de uma outra fazenda F_2 e 50% de uma fazenda F_3. Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa, e observou que 20% do leite produzido por F_1 estava adulterado por adição de água, enquanto que para F_2 e F_3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente. Na indústria de sorvetes que você gerencia os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas. Para um galão escolhido ao acaso, calcule:

a) A probabilidade de que o galão contenha leite adulterado.

b) A probabilidade de que o galão tenha vindo da fazenda F_3, sabendo que contém leite não adulterado.

Resolução:

Se denotarmos por A o evento “o leite está adulterado”, temos que $P(A|F_1)=0{,}20$, $P(A|F_2)=0{,}05$ e $P(A|F_3)=0{,}02$. Além disso, $P(F_1)=0{,}2$, $P(F_2)=0{,}3$ e $P(F_3)=0{,}5$. Dessa forma, podemos construir a *árvore de probabilidades* da seguinte maneira:



a)

$$P(A) = P(F_1 \cap A) + P(F_2 \cap A) + P(F_3 \cap A) =$$
$$= [P(A \mid F_1).P(F_1)] + [P(A \mid F_2).P(F_2)] + [P(A \mid F_3).P(F_3)] =$$
$$= (0{,}2.0{,}2) + (0{,}05.0{,}3) + (0{,}02.0{,}5) = 0{,}065$$

b)

$$P(F_3 \mid A^C) = \frac{P(F_3 \cap A^C)}{P(A^C)} = \frac{P(A^C \mid F_3).P(F_3)}{1 - P(A)} = \frac{0{,}98.0{,}5}{1 - 0{,}065} = 0{,}5241$$

3.7 Exercícios de Fixação

1. Na Tabela 1, temos os dados referentes a alunos matriculados em quatro cursos de uma universidade em dado ano.

Tabela 1 – Distribuição de alunos segundo o sexo e a escolha do curso.

Curso	Sexo		Total
	Masculino	Feminino	
Computação	70	40	110
Matemática	15	15	30
Estatística	10	20	30
Ciências Atuariais	20	10	30
Total	115	85	200

Selecionado-se ao acaso um aluno do conjunto desses quatro cursos determine a probabilidade:

a) Que o aluno seja do sexo masculino. 0,575
b) Que o aluno esteja matriculado do curso de Estatística. 0,15
c) Que o aluno seja do sexo feminino e matriculado em Matemática. 0,075
d) Que o aluno seja do sexo masculino ou matriculado em Ciências Atuariais. 0,625

2. Uma determinada peça é manufaturada por três fábricas A., B e C. Sabe-se que a fábrica A produz o dobro de peças que B, e B e C produziram o mesmo número de peças (durante um período de produção especificado). Sabe-se também que 2% das peças produzidas por A e por B são defeituosas, enquanto 4% daquelas produzidas por C são defeituosas. Todas as peças produzidas são colocadas em um depósito, e depois uma peça é extraída ao acaso.
   a) Qual é a probabilidade de que essa peça seja defeituosa? 0,025
   b) Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela fábrica B, sabendo-se que é perfeita? 0,251

3. Uma escola do ensino médio do interior de São Paulo tem 40% de estudantes do sexo masculino. Entre estes, 20% nunca viram o mar, ao passo que, entre as meninas, essa porcentagem é de 50%. Qual a probabilidade de que um aluno selecionado ao acaso seja:
   a) Do sexo masculino e nunca tenha visto o mar? 0,08
   b) Do sexo feminino ou nunca tenha visto o mar? 0,68

4. Na tabela abaixo, os números que aparecem são probabilidades relacionadas com a ocorrência de A, B, $A \cap B$, etc. Assim, P(A) = 0,10, enquanto $P(A \cap B)$ = 0,04.

	B	B^C	Total
A	0,04	0,06	0,10
A^C	0,08	0,82	0,90
Total	0,12	0,88	1,00

Verifique se A e B são independentes. Como $P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$, A e B não são independentes.

5. Você entrega a seu amigo uma carta, destinada à sua namorada, para ser colocada no correio. Entretanto, ele pode se esquecer com probabilidade 0,1. Se não se esquecer, a probabilidade de que o correio extravie a carta é de 0,1. Finalmente, se foi enviada pelo correio a probabilidade de que a namorada não a receba é de 0,1.
   a) Sua namorada não recebeu a carta, qual a probabilidade de seu amigo ter esquecido? 0,369
   b) Avalie as possibilidades desse namoro continuar se a comunicação depender das cartas enviadas. 0,729