Задание 1. Неделя 1

N55.16

$x^2=1 \Rightarrow G$ - коммутативна

Док-во: $(a\cdot b)^2=1 \Rightarrow abab=1=aba\underbrace{bb}_{1}b \Rightarrow aba=b \Rightarrow ab\underbrace{aa}_{1}=ba \Rightarrow ab=ba$ чтд.

N55.21

Все изоморфизмы между группами $(\mathbb{Z}_4,+)$ и $(\mathbb{Z}_5^*,\cdot)$

Изоморфизм сохраняет операции

$\varphi(0_{\mathbb{Z}_4}+0_{\mathbb{Z}_4})=\varphi(0_{\mathbb{Z}_4})\cdot\varphi(0_{\mathbb{Z}_4})=\underbrace{\varphi(0_{\mathbb{Z}_4})=1_{\mathbb{Z}_5^*}}$

$\varphi(1_{\mathbb{Z}_4}+3_{\mathbb{Z}_4})=\varphi(0_{\mathbb{Z}_4})=\varphi(1_{\mathbb{Z}_4})\cdot\varphi(3_{\mathbb{Z}_4})=1 \Rightarrow \varphi(1_{\mathbb{Z}_4})=\varphi^{-1}(3_{\mathbb{Z}_4}) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\varphi(1_{\mathbb{Z}_4})=2_{\mathbb{Z}_5^*}\\ \varphi(1_{\mathbb{Z}_4})=3_{\mathbb{Z}_5^*}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Изоморфизм 1: $\varphi(0_{\mathbb{Z}_4})=1_{\mathbb{Z}_5^*}$, $\varphi(1_{\mathbb{Z}_4})=2_{\mathbb{Z}_5^*}$, $\varphi(2_{\mathbb{Z}_4})=4_{\mathbb{Z}_5^*}$, $\varphi(3_{\mathbb{Z}_4})=3_{\mathbb{Z}_5^*}$

Изоморфизм 2: $\varphi(0_{\mathbb{Z}_4})=1_{\mathbb{Z}_5^*}$, $\varphi(1_{\mathbb{Z}_4})=3_{\mathbb{Z}_5^*}$, $\varphi(2_{\mathbb{Z}_4})=4_{\mathbb{Z}_5^*}$, $\varphi(3_{\mathbb{Z}_4})=2_{\mathbb{Z}_5^*}$

N55.23

Если $a\neq 0 \Rightarrow x\longmapsto ax$ - автоморфизм $\mathbb{Q}$

Док-во:

$\varphi(x+y)=a(x+y)=ax+ay=\varphi(x)+\varphi(y)$ чтд.

Другие автоморфизмы:

$\varphi(0+0)=\varphi(0)=\varphi(0)+\varphi(0) \Rightarrow \varphi(0)=0$

$\varphi(a-a)=\varphi(a)+\varphi(-a)=0 \Rightarrow \varphi(a)=\varphi(-a)$

$\varphi(a+a)=\varphi(a)+\varphi(a)=2\varphi(a) \Rightarrow \varphi(2a)=2\varphi(a)$

аналогично получим $\forall b\in\mathbb{Z}$ $\varphi(ba)=b\varphi(a)$

Для дробного значения b: пусть $b=\frac{p}{q}$ $p,q\in\mathbb{Z}$

$\underbrace{\varphi(\tfrac{p}{q}a)+\dots\varphi(\tfrac{p}{q}a)}_{q\text{ раз}}=\varphi(pa)=p\varphi(a)$

$\Rightarrow \varphi(\tfrac{p}{q}a)=\tfrac{p}{q}\varphi(a) \Rightarrow$ все автоморфизмы - это домножение на $a\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$

N55.23

G - множество всех пар (a,b) $a\neq 0$ из поля F относительно операции $(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b)$.

Доказать, что G - группа, изоморфная группе всех линейных функций $x\longmapsto ax+b$ относительно суперпозиции

G - группа?

Док-во:

1) $((a,b)(c,d))(e,f)=(ac,ad+b)(e,f)=(ace,acf+ad+b)$

$(a,b)((c,d)(e,f))=(a,b)(ce,cf+d)=(ace,acf+ad+b)$

2) $e=(1,0)$

3) $(a,b)^{-1}=(a^{-1},-a^{-1}b) \Rightarrow G$ - группа

G - изоморфна ...

$(a,b)\circ(c,d)\cong f\circ g$, где $f=ax+b$, $g=cx+d$

$(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b)$

$f\circ g=a(cx+d)+b=acx+ad+b$

чтд

56.6(а,б)

Элементы x и y группы G имеют конечный порядок и $xy=yx$

а) $(\operatorname{ord}(x)\operatorname{ord}(y))=1 \Rightarrow \operatorname{ord}(xy)=\operatorname{ord}(x)\operatorname{ord}(y)$

Док-во: Пусть это не так, тогда $\operatorname{ord}(x)=a$ $\operatorname{ord}(y)=b$ $\operatorname{ord}(x,y)=c$

1) $\operatorname{ord}(xy)\leq\operatorname{ord}(x)\cdot\operatorname{ord}(y)$, т.к. $(xy)^{ab}=\underbrace{(xyxy\dots xy}_{ab\text{ раз}}\overset{\text{из-за коммутации}}{=}\underbrace{x\dots x}_{ab}\underbrace{y\dots y}_{ab}=\underbrace{1\dots1}_{b}\underbrace{1\dots1}_{a}=1$

$\Rightarrow a\cdot b \vdots c$

2) $(xy)^c = 1 \Rightarrow x^c = y^{-c} \Rightarrow 1 = (x^c)^a = (y^{-c})^a \Rightarrow ca \vdots b$ (порядки обратных совпад при коммут) $\Rightarrow$ т.к. $(a,b)=1$, то $c \vdots b$

аналогично $c \vdots a \Rightarrow c = ab$

б) $\exists k, l$, что $ord(x^k y^l) = НОК(ord(x); ord(y))$

$ord(x) = a$ $\quad ord(y) = b$

Пусть $a \vdots p \quad b \vdots q \quad (p,q) = 1 \quad p \cdot q = НОК(a,b)$

тогда $k = \frac{a}{p} \quad l = \frac{b}{q}$

$\Rightarrow ord\, x^k = p \quad ord\, y^l = q$

причем $(p,q) = 1 \Rightarrow ord(x^k y^l) = pq$.

№56.20(а,б)

а) G - коммут группа; периодич часть G - подгруппа? $= T$

пусть $x, y \in T \Rightarrow ord(x) \in \mathbb{N}$; $ord(y) \in \mathbb{N}$

$p = ord\, x \quad q = ord\, y$

Тогда $(xy)^{pq} = x^{pq} y^{pq} = e \cdot e = e \Rightarrow p \cdot q \vdots ord(xy) \Rightarrow$

$\Rightarrow ord(x,y) \in \mathbb{N}$ чтд.

б) Рассмотрим $GL_2(\mathbb{Z})$

$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \in T$

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ при возведении в степень, т.к. все числа >0 будем получать матрицу с числами $>0 \Rightarrow$ в правом верхнем нуля не будет $\Rightarrow$ порядок бесконечный.

№56.18(а)

G - конечная группа; $d(G)$ - наим $s : g^s = e \quad \forall g \in G$

$d(G) \mid |G| = НОК_{g \in G}(ord(g))$

$\forall g \in G$ Пусть $ord(g) = s \Rightarrow s = |\underbrace{\langle g \rangle}_{=H}|$.

т.к. $|G| = |H| \cdot |G/H|$, то $ord(g) \mid |G|$

т.к. каждый $ord(g) \mid |G|$, то $d(G) \mid G$, иначе

это не наим число.

НОК порядков делится на каждый из порядков $\Rightarrow \forall g \quad g^{НОК_{g \in G}(ord(g))} = e \Rightarrow d(G) \mid НОК_{g \in G}(ord(g))$

С другой стороны пусть $НОК_{g \in G}(ord(g)) = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$

$d(G) = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m}$

Т.к. $d(G)$ делится на каждый из порядков, то он должен делиться и на НОК чтд.

№3.2(б,е)

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3\,6\,2\,7\,4\,5)$

е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ n+1 & n+2 & & 2n & 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = (1; n+1)(2; n+2)\dots(n; 2n)$

№3.4(а)

$[(135)(2467)] \cdot [(147)(2356)] =$

$= (1642573)$

№3.7(б,в)

б) $(i_1 i_2 \dots i_k) = (i_1 i_2) \dots (i_{k-1} i_k)$

каш цикл раскладывается на произведение транспозиций,

каждая транспозиция дает $+1$ к четности перестановки

Знак $k-1$ транспозиции $\Rightarrow$

если k - чет $\Rightarrow$ нечет

если k - нечет $\Rightarrow$ чет.

в) $(1473)(67246)(32) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \underset{\frac{6+4+4+1+2+1}{2}}{(8672431)}(5) \Rightarrow$ четная

№3.16(а)

Раскладывается в произведение четного числа транспозиций

Рассмотрим произведение двух транспозиций:

1) Если $(ab)(ab) \Rightarrow$ они сокращ.

2) Если $(a,b)(a,c) \Rightarrow (a\,bc)$ - тройной цикл

3) Если $(a,b)(c,d) \Rightarrow (a,b)(a,c)(a,c)(c\,d) \Rightarrow (abc)(a\,dc)$. Так раскладываем все пары. чтд.

№56.3(б, г, и)

б) $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6 \\ 2&3&4&5&1&6 \end{pmatrix} = (12345)(6)$

ord = 5 = НОК(5; 1)

г) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \in \mathbb{C}^*$

$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \text{ord} = 8$

и) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ \vdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$

λ_i – различные корни n-ой степени из 1

т.к. все λ_i различные, то нужно возвести минимум в n-ую степень

Матрица верхнетреугольная $\Rightarrow$ диагонализируемая, на диагонали стоят те же $\lambda_1 \dots \lambda_n$ (порядок не меняется).

При возв. в n-ую степень будут единицы. чтд.

№56.6(б, г)

$D_2(\mathbb{C}^*) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

при возв. в степень в степень возводятся элементы.

всего 2 эл-тов, которые $\alpha^6 = 1$, а в меньшей не дают. $2 \cdot 2 = 4$

еще есть 4 эл-та, которые дают 1 в 6-ой степени,

поэтому $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ (один эл-т из первой группы, один из второй)

из этих 4-ех 2 дают 1 в 3-ей степени, а 1 во 2 $\Rightarrow$ их тоже

можно комбинировать, т.к. НОД(ord s) = 6 $2 \cdot 2 = 4$

$4 + 16 + 4 = 24$

Ответ: 24

г) A_5 – группа четных перестановок

Если ord(σ) = 6 $\Rightarrow$ перестановка нечетная

$\Rightarrow$ ответ: 0

Задача 1

Рассмотрим перестановку σ, которая разбивается на n четных и m нечетных циклов

Теперь возведем в ^{2} $\Rightarrow$ нечетные циклы остались нечетными, а четные разбились на 2 цикла длины $n/2$

если цикл был длины :4 – то перешел в 2 четных, иначе в 2 нечетных $\Rightarrow$

чтобы σ^1 была квадратом, нужно чтобы четных циклов было четное число