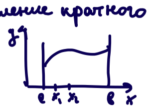
Глава 10. Кратный интеграл

Определение кратного интеграла

$\int_a^b f(x)\,dx$



$P: a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$

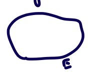
$M_j = \sup\limits_{x\in[x_{j-1}, x_j]} f(x) \qquad m_j = \inf\limits_{x\in[x_{j-1}, x_j]} f(x)$

$U(P,f) = \sum\limits_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j \qquad L(P,f) = \sum\limits_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j$

$\overline{I}(f) = \inf U(P,f) \qquad \underline{I}(f) = \sup L(P,f)$

$\mathbb{R}^n$ E – измеримое по Лебегу (Жордану) множество конечной меры

I Пусть f – ограниченная функция на E



Разбиение P мн-ва E – это представление $P: E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{N} E_k$, где E_k $k=1 \ldots N$ измеримые по Лебегу (Жордану) множества.

$M_k = \sup\limits_{x\in E_k} f(x) \qquad m_k = \inf\limits_{x\in E_k} f(x)$

$U_{(R)}(P,f) = \sum\limits_{k=1}^{N} M_k \mu_{(J)}(E_k)$

$L_{(R)}(P,f) = \sum\limits_{k=1}^{N} m_k \mu_{(J)}(E_k)$

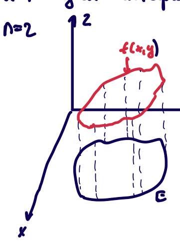
$(L)\overline{I}(f) = \inf\limits_P U(P,f); \quad (L)\underline{I}(f) = \sup\limits_P L(P,f)$

$(R)\overline{I}(f) = \inf\limits_P U_R(P,f); \quad (R)\underline{I}(f) = \sup\limits_P L_R(P,f)$

<u>Опр</u> Если верхний и нижний интегралы Лебега (Римана) совпадают, то их общее знач наз-ся интегралом Лебега (Римана): $\int\limits_E f(x)\,d\mu(x)$ $\left(\int\limits_E f(x)\,dx\right.$

а f наз-ся интегрируемой по Лебегу (Риману) на E

$n=2$



$z = f(x,y)$

$\int\limits_E f(x)\,dx = \iint f(x,y)\,dx\,dy$

Для обычного интеграла:

$P_1, P_2 \quad L(P_1 f) \le U(P_2 f)$

Для нашего случая:

$P_1: E = \bigsqcup\limits_{j=1}^{N_1} E_j^{(1)} \qquad P_2: E = \bigsqcup\limits_{k=1}^{N_2} E_k^{(2)}$

$P_1 \cup P_2: E = \bigsqcup\limits_{j,k} E_j^{(1)} \cap E_k^{(2)}$

$L_{(R)}(P_1 f) \le L_{(R)}(P_1 \cup P_2, f) \le U_{(R)}(P_1 \cup P_2, f) \le U_{(R)}(P_2, f)$

$(L)(R)\underline{I}(f) \le (L)(R)\overline{I}(f)$

f интегрируема по Лебегу (Риману) на $E \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists P: U_{(R)}(P,f) - L_{(R)}(P,f) < \varepsilon$

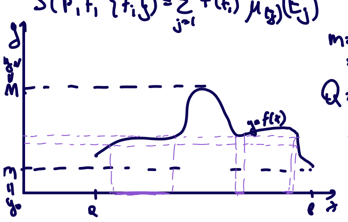
Были определены суммы:

$S(P, f, \{\xi_i\}) = \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$\Delta P = \max \Delta x_j \quad 1 \le j \le n$

Аналогично:

$S(P, f, \{\xi_i\}) = \sum\limits_{j=1}^{N} f(\xi_i)\,\mu_{(J)}(E_j)$



$m = \inf\limits_{x\in E} f(x) \qquad M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$

$Q: m = y_0 < y_1 \ldots < y_n = M$

* берем те x-сы, $f(x)$ попадает в интерв.

Разбиением Лебега P, соотв разбиению $Q: m=y_0<\ldots<y_N=M$ отрезка $[m,M]$ наз-ся $P: E=\bigcup\limits_{k=1}^{N} E_k$, где

$E_k=\{x\in E: f(x)\in[y_{k-1};y_k)\}$ $k=1\ldots N-1$ $E_N=\{x\in E: f(x)\in[y_{N-1},y_N]$

Теорема: основная теорема об интеграле Лебега для ограниченных измеримых функций

Если f-огр. измеримая на E ф-ция, то она интегр. по Лебегу на E, причем $\int\limits_E f(x)\,d\mu(x)$ равен пределу интегральных сумм $S(P,f,\{t_i\})=\sum\limits_{i=1}^{N} f(t_i)\,\mu(E_i)$, $t_i\in E_i$, для разбиений Лебега P соотв. разбиениям Q отрезка $[m=\inf\limits_{x\in E} f(x),\ M=\sup\limits_{x\in E} f(x)]$ при $\Delta(Q)\to 0$

Док-во:

Если $\mu(E)=0$, то очевидно. Пусть мера >0

Заметим, что $L(P,f)\leq S(P,f\{t_i\})\leq U(P,f)$

$U(P,f)-L(P,f)\leq\sum\limits_{k=1}^{N}(M_k-m_k)\,\mu(E_k)\leq\sum\limits_{k=1}^{N}(y_k-y_{k-1})\,\mu(E_k)\leq\Delta Q\sum\mu(E_k)=\Delta Q\cdot\mu(E)<\varepsilon$

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta:=\frac{\varepsilon}{\mu(E)})\,(U(P,f)-L(P,f))<\varepsilon$ $\forall P$, соотв Q $(\Delta Q\to 0)$

$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\Delta(P)\to 0} S(P,f\{t_i\})\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (\forall P,\ \Delta P<\delta)\ (\forall t_i;\ t_i\in[x_{j-1},x_j]\ |\ S(P,f,\{t_i\})-\int\limits_a^b f(x)\,dx|<\varepsilon$

$\int\limits_E f(x)\,d\mu(x)=\lim\limits_{\Delta(Q)\to 0} S(P_Q,f,\{t_j\})\Leftrightarrow(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall Q,\ \Delta(Q)<\delta)\ (\forall t_j,\ t_j\in E_j,\ P_Q: E=\bigcup\limits_{j=1}^{N} E_j)\ |S(P_Q,f,\{t_j\})-\int\limits_E f(x)\,d\mu(x)|<\varepsilon$

$(R)\underline{I}(f)\leq(L)\underline{I}(f)\leq(L)\overline{I}(f)\leq(R)\overline{I}(f)$

II f-неотрицательная на E конечной меры

$P: E=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} E_k$

$L(P,f)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k\,\mu(E_k)$ $U(P,f)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} M_k\,\mu(E_k)$

$E_0:=\{x\in E: f(x)=+\infty\}$

$M_\mu(E_k):=0$, если $M_k=+\infty$ $\mu(E_k)=0$

$\int\limits_E f(x)\,d\mu(x)=\overline{I}(f)=\underline{I}(f)$

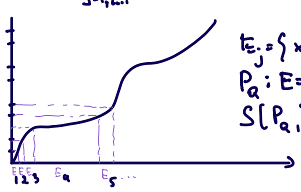
Опр: Если интеграл конечен, то f наз-ся суммируемой на E.

f суммируема на $E\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists P\ U(P,f)-L(P,f)<\varepsilon$

$f(x)\in[0,+\infty]$ $F_0=\{x\in E: f(x)=+\infty\}$

$Q: y_0=0<y_1\ldots$

$\Delta(Q)_1=\sup\limits_{j=1,2\ldots}\Delta y_j$



$E_j=\{x\in E: f(x)\in[y_{j-1},y_j)$ $j=1,2\ldots$

$P_Q: E=\bigcup\limits_{j=0}^{\infty} E_j$

$S(P_Q,f,\{t_j\})=\sum\limits_{j=0} f(t_j)\,\mu(E_j)$

Основная теорема для

Если f неотриц. изм. на измер E конечной меры, то f интегрируема по Лебегу на E, причем интеграл равен lim интегральных сумм $S(P_Q,f,\{t_j\})$ для разбиений Лебега соотв разбиениям Q полуоси $[0;+\infty]$ при $\Delta(Q)\to 0$

Док-во:

$L(P,f)\leq S(P_j,f,\{t_j\})\leq U(P,f)$

$U(P,f)-L(P,f)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(M_k-m_k)\,\mu E_k\leq\Delta Q\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)=\Delta Q\,\mu(E)$

на E конечной меры

III f неограниченная. Рассмотрим $\left.\begin{array}{l} f^+(x)=\max(f(x),0)\\ f^-(x)=-\min(f(x),0)\end{array}\right\}$ неотрицательны, измеримые $\Rightarrow$ интегрируемы по Лебегу

Если хотя бы одна из них суммируема, то определен $\int\limits_E f(x)\,d\mu(x):=\int\limits_E f^+(x)\,d\mu(x)-\int\limits_E f^-(x)\,d\mu(x)$ и f назовем интегр. по Лебегу на E. Если f^+ и f^- - суммируемые, то $\underbrace{f}_{\text{суммируема на } E}$

Пример: $f(x)\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$

$E:=[0,1]$ $Q:=\{y_0=0<y_1<\ldots y_N=1\}$

$N>1$ $L(P_a, f)=0$ $U(P_a, f)=\sum_{k=1}^{N} M_k \mu(E_k) = M_1 \underset{0}{\mu(E_1)} + M_N \underset{0}{\mu(E_N)}$

// не интегр по Риману, измерима по Лебегу

§2 Свойства интеграла Лебега

T_1 Линейность и монотонность

1) Если f_1 и f_2 суммируемы на E, то $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $c_1 f_1 + c_2 f_2$ суммируемы на E, причем $\int_E c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) d\mu(x) = c_1 \int_E f_1(x) d\mu(x) + c_2 \int_E f_2 d\mu(x)$

2) Если $f_1 f_2$ суммир. на E и $f_1(x) \le f_2(x)$ $\forall x \in E$, то

$$\int_E f_1(x) d\mu(x) \le \int_E f_2(x) d\mu(x)$$

Док-во: 1) $c_1 = c_2 = 1$

Пусть f_1 f_2 ограниченно-измеримы

Тогда $L(P, f_1) + L(P, f_2) \le \underline{L(P, f_1 + f_2) \le U(P, f_1 + f_2)} \le U(P, f_1) + U(P, f_2)$

// получаем суммируемость

$\int_E (f_1 + f_2)(x) d\mu(x)$ и $\int_E f_1(x) d\mu(x) + \int_E f_2(x) d\mu(x)$ лежат в красной зоне. чтд.

Пусть f_1 f_2 - неогрнич. измеримы

$f_1 = f_1^+ - f_1^-$ $f_2 = f_2^+ - f_2^-$

$f_1(x) + f_2(x) = f_1^+(x) - f_1^-(x) + f_2^+(x) - f_2^-(x) = (f_1 + f_2)^+(x) - (f_1 + f_2)^-(x) \Leftrightarrow (f_1 + f_2)^+(x) + f_1^-(x) + f_2^-(x) = (f_1 + f_2)^-(x) + f_1^+(x) + f_2^+(x)$

$$\int_E (f_1 + f_2)(x) d\mu(x) = \int_E (f_1 + f_2)^+(x) d\mu(x) - \int_E (f_1 + f_2)^-(x) d\mu(x) = \int_E f_1(x) d\mu(x) + \int_E f_2(x) d\mu(x)$$

Л1 (Признак суммируемости)

Если $f(x)$ суммируема на измеримом по Лебегу множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ конечной меры, а F измерима на E и $|F(x)| \le f(x)$ $\forall x \in E$, то F суммируема на E.

$\forall P: E = \bigsqcup_{k=0} E_k$ $U(P, |F|) \le U(P, f)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists P$ $U(P, f) \le \int_E f(x) d\mu(x) + \varepsilon$

$\exists P: U(P, |F|) < +\infty \Rightarrow \inf_P U(P, |F|) = \int_E |F(x)| d\mu(x) < +\infty$

F суммируема $\Leftrightarrow$ F^+ и F^- суммир $0 \le F^\pm(x) \le |F(x)| \Rightarrow U(P, F^\pm) \le U(P, |F|)$

Т2. (Интеграл от неогрнич функции как предел интегралов от срезок)

Если $f(x) \ge 0$ $\forall x \in E \subset \mathbb{R}^n$ изм. кон. меры и f измерима, то $\lim_{N \to \infty} \int_E f_{[N]}(x) d\mu(x) = \int_E f(x) d\mu(x)$, где

срезки $f_{[N]}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \le N \\ N, \text{ при } f(x) > N \end{cases}$, $N \in \mathbb{N}$

Док-во:

$\int_E f_{[N]}(x) d\mu(x) \le \int_E f_{[N+1]}(x) d\mu(x)$

$i = \lim_{N \to \infty} \int_E f_{[N]}(x) d\mu(x)$

$f_{[N]}(x) \le f(x)$

$\int_E f_{[N]}(x) d\mu(x) \le \int_E f(x) d\mu(x)$ (если f суммируема, то из-за свойств монотонности; если f не сумм $\Rightarrow \int f = +\infty \Rightarrow$ нер-во верно)

$i \le \int f(x) d\mu(x)$

От противного: $i < \int_E f(x) d\mu(x) = \sup_P L(P, f) \Rightarrow \exists P: i < L(P, f)$

$L(P, f) = \sum_{k=0} m_k \mu(E_k)$; $E_0 = \{x \in E : f(x) = +\infty\}$

$\mu(E_0) > 0$ $(\forall x \in E_0)$ $f_{[N]}(x) = N$

$$\int_E f_{[N]}(x)\,d\mu(x) \geq \int_{E_0} f_{[N]}(x)\,d\mu(x) = N\mu(E_0) \Rightarrow i = +\infty$$ (противоречие)

по св-ву конечной аддит для огр. изм ф-ций

$\Rightarrow \mu(E_0) = 0$

$L(P,f) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k\,\mu(E_k)$ – обычный числовой ряд

$\exists K: i < \sum_{k=1}^{K} m_k\,\mu(E_k)$

$N > \max(m_1 \dots m_K)$

$m_k = \inf_{x\in E_k} f(x) < N \Rightarrow m_k^{(N)} = \inf_{x\in E_k} f_{[N]}(x)$

$$\int_E f_{[N]}(x)\,d\mu(x) \geq \sum_{k=1}^{K}\int_{E_k} f_{[N]}(x)\,d\mu(x) \geq \sum_{k=1}^{K} m_k^{(N)}\mu(E_k) = \sum_{k=1}^{K} m_k\,\mu(E_k)$$

T3 (Интеграл от постоянной)

Постоянная ф-ция $f(x)=c$ суммируема на изм мн-ве $E\subset\mathbb{R}^n$ конечной меры, причем $\int_E c\,d\mu(x) = c\mu(E)$

(Полная или σ-аддитивность)

Если f суммируема на изм. мн-ве $E\subset\mathbb{R}^n$ конечной меры и $E=\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$ E_k - измеримы, то f суммируемо на E_k $\forall k$ и $\int_E f(x)\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\,d\mu(x)$. Обратно, если f суммир на E_k $\forall k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} |f(x)|\,d\mu(x)$ сходится, то f сумм. на $E=\bigsqcup_{k=1}^{\infty} E_k$, конечной меры, причем $\int_E f(x)\,d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k} f(x)\,d\mu(x)$

(Абсолютная непрерывность)

Если f суммир. на изм $E\subset\mathbb{R}^n$ конечной меры, то $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall$ изм $e\subset E$, $\mu(e)<\delta)$ $\left|\int_e f(x)\,d\mu(x)\right| < \varepsilon$

Док-во:

1) $U(P,c) = L(P,c) = c\mu(E)$

2) Пусть f – огр изм $E = E_1 \cup E_2$

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) \overset{?}{=} \int_{E_1} f(x)\,d\mu(x) + \int_{E_2} f(x)\,d\mu(x)$$

(все интегралы определены)

$$\inf_{x\in E} f(x) = \underbrace{y_0 = m < y_1 < \dots y_N}_{=Q} = M = \sup_{x\in E} f(x)$$

$$\int_E f(x)\,d\mu(x) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} S(Q,f,\{t_i\}) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} U(P,f) = \lim_{\Delta(Q)\to 0} L(P,f)$$ $P: E = \bigcup_{i=1}^{N} E^{(i)}$ $E^{(i)}\{x: f(x)\in[y_{i-1}; y_i]\}$ $i=1\dots N-1$ спец дела N

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall Q\ \Delta(Q)<\delta)(\forall\{t_i\}\ t_i\in E^{(i)})$ $\left|S(Q,f,\{t_i\}) - \int_E f(x)\,d\mu(x)\right| < \varepsilon$

$$S(Q,f,\{t_i\}) = \sum_{i=1}^{N} f(t_i)\,\mu(E^{(i)}) < \int_E f(x)\,d\mu(x) + \varepsilon$$

$$\vee\ \int f(x)\,d\mu(x) - \varepsilon$$

Посмотрим на суммы Дарбу:

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{N} M_i\,\mu(E^{(i)}) = \sum_{i=1}^{N} M_i\,\mu(E^{i}\cap E_1) + \mu(E^{(i)}\cap E_2) \geq U_{E_1}(P,f) + U_{E_2}(P,f)$$

$$U_{E_1}(P,f) = \sum_{i=1}^{N}\sup_{x\in E^{(i)}\cap E_1} f(x)\,\mu(E^{(i)}\cap E_1)$$

$$\int f(x)\,d\mu(x) - \varepsilon \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq \int_E f(x)\,d\mu(x) + \varepsilon$$

$$\leq L_{E_1}(P,f) + L_{E_2}(P,f) \leq U_{E_1}(P,f) + U_{E_2}(P,f) \leq$$

$$\int_{E_1} f(x)\,d\mu(x) \leq L_{E_1}(P,f) \leq U_{E_1}(P,f) \leq \int_{E_1} f(x)\,d\mu(x) + \varepsilon$$

здесь $\int_{E_1} f(x)\,d\mu(x)$ $\Rightarrow$ при сложение интегралы совпадают

$$\int_E f_{[N]}(x)\,d\mu(x) = \int_{E_1} f_{[N]}(x)\,d\mu(x) + \int_{E_2} f_{[N]}(x)\,d\mu(x)$$

(для f любого знака разделим f^+ f^- и аналогично)

2.1) $E=\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ f-огр. изм. на E $|f(x)|\le M$ $(\forall x\in E)$

$\mu(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu(E_k)$ $\exists K:\sum_{k=K+1}^{\infty}\mu(E_k)<\frac{\varepsilon}{2M}$

$R_K:=\bigcup_{k=K+1}^{\infty}E_k$ $\mu(R_K)<\frac{\varepsilon}{2M}$

$E=\left(\bigcup_{k=1}^{K}E_k\right)\cup R_K\Rightarrow \int_E f(x)\,d\mu(x)=\sum_{k=1}^{K}\int_{E_k}f(x)\,d\mu(x)+\int_{R_K}f(x)\,d\mu(x)$

$\underset{-|f(x)|}{\overset{\vee\!\!/}{f(x)}}\le|f(x)|$ + монотонность $\Rightarrow\left|\int_E f(x)\,d\mu(x)\right|\le\int_E|f(x)|\,d\mu(x)$

$\left|\int_{R_K}f(x)\,d\mu(x)\right|\le\int_{R_K}|f(x)|\,d\mu(x)\le M\mu(R_K)<\varepsilon/2$

$\Rightarrow$ ряд сходится и интегралы равны

$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$ f-неотриц на E, сумм

$\int_E f(x)\,d\mu(x)=\lim_{N\to\infty}\int_E f_{[N]}(x)\,d\mu(x)$ $\exists N$ $\int_E f(x)\,d\mu(x)-\varepsilon<\int_E f_{[N]}(x)\,d\mu(x)\le\int_E f(x)\,d\mu(x)$

$\exists K:\int f(x)\,d\mu(x)-\varepsilon<\sum_{k=1}^{K}\int_{E_k}\cancel{f_{[N]}}(x)\,d\mu(x)\le\int_E f(x)\,d\mu(x)$ $\qquad\sum_{k=1}^{K}\int_{E_k}f_{[N]}(x)\,d\mu(x)$

устремляем $N\to\infty$

f-любого знака $f=f^+-f^-$ $\int_E f^{\pm}(x)\,d\mu(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int f^{\pm}(x)\,d\mu(x)$ + действие с рядами

обратное утверж.

сходится $\int$ от $|\ |\Rightarrow$ сх-ся $\sum\int f^{\pm}\Rightarrow\int f^{\pm}$ конечны $\Rightarrow$ пользуемся прямой частью

если f не сумм $\Rightarrow$ всё стремится к ∞

3) Пусть f огр изм.

$|f(x)|\le M$

$\left|\int_e f(x)\,d\mu(x)\right|\le\int_e|f(x)|\,d\mu(x)\le M\mu(e)$

$\delta:=\varepsilon/M$

f-неотр изм N: $0\le\int_E f(x)\,d\mu(x)-\int_E f_{[N]}(x)\,d\mu(x)<\varepsilon$

$(\exists\delta>0)(\forall e,\mu(e)<\delta)$ $\left|\int_e f_{[N]}(x)\,d\mu(x)\right|<\varepsilon$

$\int_e f(x)\,d\mu(x)=\int_e(f(x)-f_{[N]}(x))\,d\mu(x)+\int_e f_{[N]}(x)\,d\mu(x)<\int_E(f(x)-f_{[N]}(x))\,d\mu(x)+\varepsilon<2\varepsilon$

$f^{\pm}$ берем $\min(\delta_1,\delta_2)$

$\mu(e)<\delta_1\Rightarrow\int_e f^+(x)\,d\mu(x)$

и разность между ними $<\delta$

Следствие:

1) Если f суммир. на изм по Лебегу мн-ве $E\subset\mathbb{R}^n$ конечной меры, $f(x)=g(x)$ при почти всех $x\in E$, то g суммир. на E, причем $\int_E f(x)\,d\mu(x)=\int_E g(x)\,d\mu(x)$

2) Если $f(x)\ge0$ почти всюду на E(изм-м $\subset\mathbb{R}^n$ конечной меры) и $\int_E f(x)\,d\mu(x)=0$, то $f(x)=0$ п.в. на E

Док-во:

1) $E_0\subset E$ $E_0=\{x\in E: f(x)=g(x)\}$ $\qquad\boxed{\sum m_k\,d\mu(\underset{=0}{E_k})=0}$

$\mu(E\setminus E_0)=0\Rightarrow\forall h(x):E\setminus E_0\to\overline{\mathbb{R}}$ суммир. на $E\setminus E_0$, $\int_E h(x)\,d\mu(x)=0$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow g \text{ суммир на } E\setminus E_0\\ g \text{ суммир на } E_0\end{array}\right\}\overset{\text{конеч. аддит.}}{\Longrightarrow}\int_E g(x)\,d\mu(x)=\underbrace{\int_{E\setminus E_0}g(x)\,d\mu(x)}_{0}+\int_{E_0}g(x)\,d\mu(x)=\underbrace{\int_{E\setminus E_0}f(x)\,d\mu(x)}_{0}+\int_{E_0}f(x)\,d\mu(x)=\int f(x)\,d\mu(x)$

2) От противного:

$\{x\in E: f(x)>0\}=\lim_{m\to\infty}\{x\in E: f(x)\ge\frac{1}{m}\}$

$(\exists m_0\in\mathbb{N})$ $\mu\underbrace{\{x\in E: f(x)\ge\frac{1}{m_0}\}}_{B}=\mu(B)>0$

$0=\int_E f(x)\,d\mu(x)=\int_B f(x)\,d\mu(x)+\int_{E\setminus B}f(x)\,d\mu(x)\ge\int_B f(x)\,d\mu(x)\ge\int_B\frac{1}{m_0}\,d\mu(x)=\frac{\mu(B)}{m}>0$ противоречие