Задание 1 Неделя 2

№56.32(г)

A_4 - группа четных перестановок.

Если записывать перестановку через независимые циклы, то либо нет циклов, либо 2 цикла по 2 элемента, либо 1 из трех

$\Rightarrow$ все возможные перест:

тождеств; $(12)(34)$; $(1,3)(2,4)$; $(1,4)(2,3)$; (123); (132); (142); (124); (134); (143) (234) (243) $|G|=12$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

Подгруппы: $\langle(12)(34)\rangle$; $\langle(13)(2,4)\rangle$; $\langle(14)(23)\rangle$; $\langle(123)\rangle$; $\langle(142)\rangle$; $\langle(134)\rangle$; $\langle(234)\rangle$.

еще можно $\langle(12)(34); (13)(24); (14)(23)\rangle$ (при объедин только двух получ незамкн)

Объединение двух тройных циклов незамкнуто (порядок группы >5) (получаем третий и четвертый тройные циклы)

Объединение трех тройных циклов незамкнуто (порядок группы >5)

При объединение четырех порядок группы =12 $\Rightarrow$ незамкнуто

При объединении тройного и двух двойных порядок группы >4 $\Rightarrow$ незамкнуто

При других объединениях можно свести к объединению n-ого кол-ва тройных циклов.

№56.36(в,д,з)

$G_f = \{\sigma \in S_4 \mid f(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)} x_{\sigma(4)}) = f(x_1 x_2 x_3 x_4)\}$

G_f - подгруппа в S_4? найти подгруппу для многочлена.

Пусть $\sigma_1\sigma_2 \in G \Rightarrow f(x_{\sigma_2\sigma_1(1)} x_{\sigma_2\sigma_1(2)} x_{\sigma_2\sigma_1(3)} x_{\sigma_2\sigma_1(4)}) = f(x_{\sigma_2(1)} x_{\sigma_2(2)} x_{\sigma_2(3)} x_{\sigma_2(4)}) = f(x_1 x_2 x_3 x_4)$

$\Rightarrow$ замкнута

Нейтральный элемент: $\sigma = \varepsilon$

Ассоциативна по св-ву S_4

$f(x_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(2)} x_{\sigma^{-1}(3)} x_{\sigma^{-1}(4)}) \overset{?}{=} f(x_1 x_2 x_3 x_4)$

$f(x_{\sigma\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma\sigma^{-1}(2)} x_{\sigma\sigma^{-1}(3)} x_{\sigma\sigma^{-1}(4)}) = f(x_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(2)} x_{\sigma^{-1}(3)} x_{\sigma^{-1}(4)})$

$\parallel$

$f(x_1 x_2 x_3 x_4)$ $\Rightarrow$ Есть обратный $\Rightarrow$ подгруппа.

в) $f = x_1 x_2$

1 и 3 не входят в один цикл

1 и 4 не входят в один цикл

2 и 3 не входят в один цикл

2 и 4 не входят в один цикл

1 и 2 могут в одном цикле

3 и 4 могут в одном цикле

$\Rightarrow G_f = \langle(12), (34)\rangle$

д) $f = \prod\limits_{1 \le j < i \le 4} (x_i - x_j) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$

Пусть $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, тогда при нечетной перестановке у функции поменяется знак, т.к. каждая инверсия меняет знак выражения $\Rightarrow$ должны быть только четные перестановки.

При любой перестановке модуль скобки остается таким же (набор скобок не меняется)

$\Rightarrow$ все четные подходят.

Ответ: A_4

№56.37 Найти смежные классы:

а) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\langle 1+n\mathbb{Z}\rangle, \langle 2+n\mathbb{Z}\rangle, \langle 3+n\mathbb{Z}\rangle \dots \langle n\mathbb{Z}\rangle\}$

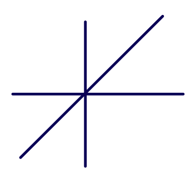
б) $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[i] = \{\langle x+yi+a+bi\rangle \mid x \in [0,1), a \in \mathbb{Z}; y \in [0,1), b \in \mathbb{Z}\}$

в) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \mid x \in [0;1)\}$

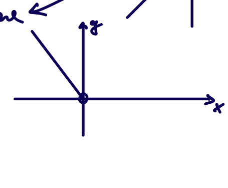
г) $\mathbb{C}/\mathbb{R} = \{xi + \mathbb{R}\}$

д) $\mathbb{C}^*/U = \{x+iy \mid x^2+y^2 = r \in \mathbb{R}\}$ ← в комплексной плоскости это окружность с фиксир. радиусом

е) $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^* = \{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ← в комплекс пл-сти это прямая



ж) $\mathbb{C}^*/\mathbb{R}_+ = \{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \mid r \in \mathbb{R}\}$ ← в компл плоскости, интервал



з) $\{(1,n)(2,n)(3,n)\dots(n-1,n)\dots\}$

и) $\begin{pmatrix} f & x \\ y & k \\ \varphi & m \end{pmatrix}$ - где f, x, y - фиксир, $k\, l\, m \in \mathbb{R}$

к) $ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ a,b - фиксир; $c,d,e,f\in\mathbb{R}$

л) если $\operatorname{ord}(a)=\infty$ $\quad a^l \mid l>4$

если $\operatorname{ord}(a)=4$ $\quad a^{l+4\mathbb{Z}} \mid l\in\{1,2,3,4\}$

если $\operatorname{ord}(a)=2$ $\quad a^{l+2\mathbb{Z}} \mid l\in\{1,2\}$

иначе $\quad a^{\mathbb{Z}}$

№56.39 H - подгруппа в группе G

отображение $xH\mapsto Hx^{-1}$ задает биекцию между мн-вом левых и правых классов

Пусть $t\in xH$, т.е. $\exists h: t=xh$; $t^{-1}=h^{-1}x^{-1}\in Hx^{-1}\Rightarrow f(t)=t^{-1}$ - биекция $\Rightarrow$

$xH\to Hx^{-1}$ биекция

№56.40 $g_1,g_2\in G$ $\quad H_1,H_2$ - подгруппы

$g_1H_1\subseteq g_2H_2 \Leftrightarrow H_1\subseteq H_2$ и $g_2^{-1}g_1\in H_2$

$\boxed{\Leftarrow}$ $g_2^{-1}g_1\in H_2 \Rightarrow g_1\in g_2H_2 \Rightarrow g_1H_2\subset g_2H_2 \Rightarrow g_1H_1\subseteq g_2H_2$, т.к. $H_1\subseteq H_2$

$\boxed{\Rightarrow}$ $g_1H_1\subseteq g_2H_2 \Rightarrow g_2^{-1}g_1H_1\subseteq H_2 \Rightarrow g_2^{-1}g_1\in H_2$

подставим $e\in H_1$

Пусть $t\notin H_2$, $t\in H_1$ $\quad g_2^{-1}g_1t\in H_2$

$g_2^{-1}g_1t=h \quad t=\underbrace{g_1^{-1}g_2}_{\in H_2}\underset{\in H_2}{h}\Rightarrow t\in H_2$ противоречие

$\Rightarrow H_1\subseteq H_2$

№56.42

$K=Hx$ $\quad x\in G$ - $H\le G$ если $x,y,z\in K$, то $xy^{-1}z\in K$

Док-во:

$\exists x_0,y_0,z_0: x_0,y_0,z_0\in H$ $\quad \underset{=x}{x_0k};\ \underset{=y}{y_0k};\ \underset{=z}{z_0k}\in K$

$xy^{-1}z=x_0kk^{-1}y_0^{-1}z_0k=\underbrace{x_0y_0^{-1}z_0}_{\in H}k\in K$ чтд

№56.47

K - непустое подмножество в G, причем если $x,y,z\in K$, то $xy^{-1}z\in K$

K - смежный класс G по H?

Рассмотрим подгруппу G =

$H=\{a_1b_1^{-1};\dots a_mb_m^{-1}\}$, где $a_i,b_i\in K$

замкнута относительно умножения,

замкнута относительно взятия обратных

есть нейтральный $=aa^{-1}=e$

Пусть $g\in K$. Докажем, что $K=Hg$

$\boxed{\Rightarrow}$ $k\in K\Rightarrow \underbrace{kg^{-1}}_{\in H\text{ - по построению}}g\in Hg\Rightarrow k\in Hg$ (вложенность K в Hg)

$\boxed{\Leftarrow}$ $k\in Hg\Rightarrow k=\underset{\in K}{a}\,\underset{\in K}{b^{-1}}\,\underset{\in K}{g}\Rightarrow \in K$ (вложенность Hg в K)

чтд.