$q_1 = 5{,}75$; $q_2 = 8{,}05$

d) Асимптотика:

$$\frac{\tilde{\theta} - \theta}{\sigma(\tilde{\theta})}\sqrt{n} \sim N(0,1); \quad \sigma(\tilde{\theta}) = \sqrt{J^{-1}(\theta)}$$

$$u_{\frac{1-\beta}{2}} < (\tilde{\theta} - \theta)\frac{\sqrt{n}}{\tilde{\theta} - 1} < u_{\frac{1+\beta}{2}} \qquad \tilde{\theta} - 0$$

$$\tilde{\theta} - \frac{\tilde{\theta} - 1}{\sqrt{n}} u_{\frac{1+\beta}{2}} < \theta < \tilde{\theta} - \frac{\tilde{\theta} - 1}{\sqrt{n}} u_{\frac{1-\beta}{2}};$$

№6

$n = 200$ мышей:

10 – без болезни

181 – однократно

9 – двукратно

$H_0: \xi \sim Bi(2)$; $m = 2$

$H_1: \overline{H_0}$;

$\tilde{p}_1 = \frac{10}{200}$; $\tilde{p}_2 = \frac{181}{200}$; $\tilde{p}_3 = \frac{9}{200}$

$B_i (m=2) \Rightarrow p_{B_i} = C_x^2 p^x (1-p)^{2-x}$; $C_x^n = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$

$p_1 = (1-p)^2$; $p_2 = 2\cdot p(1-p)$, $p_3 = p^2$

ОМП.

$L(p) = (1-p)^{2\cdot 10} \cdot (2p(1-p))^{181} \cdot p^{2\cdot 9} = (1-p)^{20} \cdot (2p(1-p))^{181} \cdot p^{18}$

~~$\ln L(p) = 20\ln(1-p) + 181$~~ $\to max$

$L(p) = \cancel{(1-p)^{20}} \cdot 2^{181} \cdot p^{199} \cdot (1-p)^{201}$

$\ln L(p) = 181 \ln 2 + 199 \ln p + 201 \ln(1-p)$ $\to max$

$\frac{d \ln L}{dp} = 0 + \frac{199}{p} - \frac{201}{1-p} = 0$;

$\frac{199 - 199p - 201p}{p(1-p)} = 0$; $199 - 400p = 0$

$p = \frac{199}{400}$

Считаем дельту: $\Delta = \sum_{1}^{3} \frac{(m_i - 200 \cdot p_i(\vec{\theta}))^2}{200 \cdot p_i(\vec{\theta})}$

$\Delta = \frac{\left(10 - 200\left(1 - \frac{199}{400}\right)^2\right)^2}{200\left(1 - \frac{199}{400}\right)^2} + \frac{\left(181 - 200 \cdot 2 \cdot \frac{199}{400} \cdot \frac{201}{400}\right)^2}{200 \cdot 2 \cdot \frac{199}{400} \cdot \frac{201}{400}} + \frac{\left(9 - \left(\frac{199}{400}\right)^2 \cdot 200\right)^2}{200 \cdot \left(\frac{199}{400}\right)^2} =$

$$= \frac{\left(10 - \frac{40401}{800}\right)^2}{\frac{40401}{800}} + \frac{\left(181 - \frac{39999}{400}\right)^2}{\frac{39999}{400}} + \frac{\left(9 - \frac{39601}{800}\right)^2}{\frac{39601}{800}} =$$

$$= 131,23 \approx 131$$

$$\Delta \sim \chi^2(s) = \chi^2(m-1-s) = \chi^2(3-1) = \chi^2(2)$$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geqslant \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{131}^{+\infty} \frac{1}{2\Gamma(1)} x^0 e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int_{131}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = 3,58 \cdot 10^{-29} \ll 0,05 \Rightarrow$$

H_0 отвергаем

№ 7

$n = 100$ деталей:

	$-$	$=$	$+$
I	25	50	25
II	52	41	7

H_0: они ~~независимы~~ (однородны)

H_1: $\overline{H_0}$

$$p_1 = \frac{77}{200}; \quad p_2 = \frac{91}{200}; \quad p_3 = \frac{32}{200}$$

$$\Delta_i = \sum_j \frac{(n_{ij} - n_i p_j)^2}{n_i p_j}$$

$$\Delta_1 = \frac{\left(25 - 100 \cdot \frac{77}{200}\right)^2}{100 \cdot \frac{77}{200}} + \frac{\left(50 - 100 \cdot \frac{91}{200}\right)^2}{100 \cdot \frac{91}{200}} + \frac{\left(25 - 100 \cdot \frac{32}{200}\right)^2}{\frac{32}{200} \cdot 100}$$

$$\Delta_1 = \frac{(25 - \frac{77}{2})^2}{\frac{77}{2}} + \frac{(50 - \frac{91}{2})^2}{\frac{91}{2}} + \frac{(25 - \frac{3}{16})^2}{16} = 10,241$$

$$\Delta_2 = \frac{(52 - \cancel{100}\ \frac{77}{2})^2}{\frac{77}{2}} + \frac{(41 - \frac{91}{2})^2}{\frac{91}{2}} + \frac{(7 - 16)^2}{16} = 10,241$$

$$\Delta = 20,\cancel{42}482 \Rightarrow \chi^2((3-1)(2-1)) = \chi^2(2)$$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{20,482}^{+\infty} \frac{1}{2\Gamma(1)} x^0 e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int_{20,482}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} dx = 0,0000356 = 3,56 \cdot 10^{-5} << 0,05$$

<u>H_0 отвергаем</u>

№ 8

$n = 300$:

	2	3	4	5
1 поток	33	43	80	144
2 поток	39	35	72	154

H_0: гипотеза однородности

H_1: $\overline{H_0}$

$$p_1 = \frac{72}{600},\ p_2 = \frac{78}{600},\ p_3 = \frac{152}{600};\ p_4 = \frac{298}{600}$$

$$\Delta_1 = \cancel{\frac{(33 - 300 \cdot \frac{72}{600})^2}{}}\ \frac{(33-36)^2}{36} + \frac{(43-39)^2}{39} + \frac{(80-76)^2}{76}$$

$$+ \frac{(144-149)^2}{149} = \cancel{0,25}4\ 1,03857$$

$$\Delta_2 = \frac{(39-36)^2}{36} + \frac{(35-39)^2}{39} + \frac{(72-76)^2}{76} + \frac{(154-149)^2}{149} =$$

$$= 1{,}038$$

$$\Delta = 2{,}076 \sim \chi^2(3)$$

$$p\text{-value} = P(\Delta > \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{2{,}076}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}\Gamma(\frac{3}{2})} \sqrt{x}\, e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int_{2{,}076}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x}\, e^{-\frac{x}{2}} dx = 0{,}5567 \gg 0{,}05$$

$\Rightarrow$ не отвергаем H_0

№9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
I:	5	8	6	12	14	18	11	6	13	7

а) Проверим $H_0: \xi \sim R$; $H_1: \overline{H_0}$

$$p = \frac{1}{10}$$

$$\Delta = \frac{(5-10)^2}{10} + \ldots + \frac{(7-10)^2}{10} = 2{,}5 + 0{,}4 + 1{,}6 + 0{,}9 +$$

$$+ 1{,}6 + 6{,}4 + 0{,}1 + 1{,}6 + 0{,}9 + 0{,}9 = 16{,}94$$

$$\Delta \sim \chi^2(9)$$

$$p\text{-value} = \int_{16{,}4}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{9}{2}} \cdot \Gamma(\frac{9}{2})} x^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_{16{,}4}^{+\infty} \frac{1}{105\sqrt{2\pi}} x^{\frac{7}{2}} e^{-\frac{x}{2}} dx =$$

$= 0,0589 > 0,05$ - нет оснований отвергнуть H_0

Колмогоров:

$\Delta = \sqrt{n} \sup_{\mathbb{R}} |F(x) - \tilde{F}(x)| \rightsquigarrow K(x)$

у нас равномерное распределение:

$\tilde{\Delta} = \max_i \left[|\tilde{F}(x_i - 0) - F(x_i)|, |F(x_i + 0) - F(x_i)| \right]$

$\Rightarrow$ считаем в Python

$\tilde{\Delta} = 1,59 \approx 1,6$

$K(x) = P(\sqrt{n}\Delta < x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2}$

$p\text{-value} = 1 - (1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\tilde{\Delta}^2}) = 0,011952 \approx$

$\approx 0,012 < 0,05$ - H_0 отвергается.

$\Rightarrow$ разные результаты, но 0,0589 было очень близко к тому, чтобы быть отвергнутым.

Если бы $\alpha = 0,01 \Rightarrow$ обе бы подтвердились (не было бы оснований отвергнуть H_0).

б) $H_0: \xi \sim N(a, \sigma^2)$; $H_1: \overline{H_0}$

N $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)$

$p_1 = \int_{-\infty}^{0,5} \rho(x)\,dx$, ... $p_{10} = \int_{8,5}^{+\infty} \rho(x)\,dx$

$L = p_1^5 \cdot \ldots \cdot p_{10}^7 \to \max$

$\Rightarrow \tilde{a} = 4,81$; $\tilde{\sigma} = 2,67$

$\tilde{\Delta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - np_i(\tilde{a}, \tilde{\sigma}))^2}{np_i(\tilde{a}, \tilde{\sigma})} = 9,82$

$\Delta \rightsquigarrow \chi^2(10-2-1) = \chi^2(7)$

$P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{9,82}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{7}{2}}\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)} x^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\,dx = 0,19924$
$\geq \alpha$

– нет основ. отвергнуть H_0

Колмогоров:

$\tilde{\Delta} = 0,862$; p-value $= 0,9934 > \alpha$ –

нет основ. отвергнуть H_0