土卫六大气重力波模型及推导

StarKing

July 31, 2020

目　　录

1　大气重力波模型简介

基于理想气体的非弹性近似的一维线性波动模型可以研究土卫六高层大气的波动传播. 模型假设为土卫六背景大气是平面的 (局部) 以及是流体静力学平衡的. 由于土卫六的自转非常缓慢，因此可以假设科里奥利效应可以忽略、波的周期远小于土卫六的旋转周期, 且在下面的研究中忽略大气背景风.

模型的波动方程如下:

$$\nabla \cdot \vec{V}' - \frac{w'}{H_\rho} = 0, \tag{1}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right] u' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right] v' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right] w' = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\rho_0} g, \tag{4}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\nu}{Pr} \nabla^2\right] T' - \frac{1}{c_p \rho_0}\frac{\partial p'}{\partial t} = -\Gamma w', \tag{5}$$

$$\frac{p'}{p_0} = \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{T'}{T_0}, \tag{6}$$

其中 ρ_0, T_0, p_0 是背景大气的参考密度，温度，压力; ρ', T', p', 和 u' 是相应物理量的扰动; v' 和 w' 是子午线方向和垂直方向的风速扰动; $\vec{V}'$ 是风速矢量的扰动; $H_\rho = \left(-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)^{-1}$ 和 $H_p = \frac{RT_0}{g}$ 是密度和压强标高. 其中 g 为局部重力加

速度，R 为气体常数. Pr 是普朗特数，$\Gamma = \frac{\partial T_0}{\partial z} + \frac{g}{c_p}$ 是静态稳定数，c_p 是定压比热. $\nu = \mu/\rho_0$ 是动力黏度. μ 分子动力学黏度.

假设波扰可以写成 $X'(x,y,z,t) = \delta X(z) exp\left[i\left(k_x x + k_y y - \omega_0 t\right)\right]$ 的形式, 其中 X' 为波扰物理量，$\delta X(z)$ 表达为 WKB 解的形式：

$$\delta X(z) = \Delta X(z_0)\left(\frac{k_{zr}(z_0)}{k_{zr}(z)}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[\int_{z_0}^{z}\left(ik_z + \frac{1}{2H_\rho}\right)dz\right], \tag{7}$$

然后得到色散关系式:

$$k_z^2 = \frac{k_h^2 N^2}{\hat{\omega}\left(\hat{\omega} + i\beta\right)} - \frac{1}{4H_\rho^2} - k_h^2, \tag{8}$$

其中 ω_0 是波频, $k_h = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ 是水平波数, k_x and k_y 分别为 x, y 方向的波数. k_z 是垂直波数, k_{zr} 为垂直波数的实部. $N = \sqrt{\frac{g\Gamma}{T_0}}$ 是 Brunt-Väisälä 频率. Eq. 7 的 $\Delta X(z_0)$ 为在参考温度 z$_0$ 的扰动振幅 (比如 ΔW 为垂直风速的振幅). $\hat{\omega}$ 和 β 的定义与 Matcheva 和 Strobel 的定义类似，并采用非弹性近似的方法：

$$\hat{\omega} = \omega_r + i\omega_i, \tag{9}$$

$$\beta = \beta_r + i\beta_i, \tag{10}$$

其中

$$\omega_r = \widetilde{\omega}_0 + 2k_{zr}\nu\left(\frac{1}{2H_\rho} - k_{zi}\right), \tag{11}$$

$$\omega_i = \nu\left[k_{zr}^2 - \left(\frac{1}{2H_\rho} - k_{zi}\right)^2 + k_h^2\right], \tag{12}$$

$$\beta_r = \left(\frac{1}{Pr} - 1\right)\omega_i, \tag{13}$$

$$\beta_i = 2k_{zr}\nu\left(1 - \frac{1}{Pr}\right)\left(\frac{1}{2H_\rho} - k_{zi}\right). \tag{14}$$

上述方程中, $\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 - u_0 k_h$ 为波的内禀频率. 色散关系式 Eq. 8与 Matcheva & Strobel (1999) 的 Eq.9 相比，Eq. 8 保留了 k_h. 这是因为在土卫六高层大气中垂直波长与水平波长相当.

通过 WKB 近似 (Eq. 9) 求解垂直速度扰动 w', 然后可以求解线性波动方程组 Eq. 1 - Eq. 6. 在非弹性近似条件下，u', T', p', ρ' 与 w' 的关系由如下的极化关系式表出：

$$u' = -\frac{ik_x}{k_h^2}\left(-ik_z + \frac{1}{2H_\rho}\right)w', \tag{15}$$

$$T^{'} = -\frac{i}{\hat{\omega} + i\beta}\left[\Gamma + \frac{\widetilde{\omega}_0\hat{\omega}}{c_p k_h^2}\left(-ik_z + \frac{1}{2H_p}\right)\right]w^{'}, \tag{16}$$

$$p' = -\frac{i\rho_0\hat{\omega}}{k_h^2}\left(-ik_z + \frac{1}{2H_\rho}\right)w', \tag{17}$$

和

$$\frac{\rho^{'}}{\rho_0} = i\left\{\frac{\Gamma}{T_0\left(\hat{\omega}+i\beta\right)} - \frac{\hat{\omega}}{k_h^2}\left[\frac{1}{RT_0} - \frac{\tilde{\omega}_0}{T_0 c_p\left(\hat{\omega}+i\beta\right)}\right]\left(-ik_z + \frac{1}{2H_p}\right)\right\}w^{'}. \tag{18}$$

在缺乏任何波的阻尼机制的大气中，由垂直传播的波携带的能流和动量流从波源处进入时一直保持不变. 分子耗散可以压制波振幅的增长，因此可以减少沿着波传播的方向的能流和动量流. 除了由于阻尼导致波的衰减外，波扰之间相速度的差异可以使波能流和动量流发生汇集和发散. 这就会导致背景大气的加热和制冷. 然而，由于能量守恒，垂直综合的加热率和制冷率并不会导致背景大气净热和净冷.

总的波的加热率和制冷率:

$$H_{tot} \equiv -\frac{\partial F_{tot}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(F_h + F_v + F_p + F_d\right). \tag{19}$$

其中，$F_h = \rho_0 c_p\left\langle w^{'}T^{'}\right\rangle$ 为感热通量，$F_v = -\int_z^\infty\left\langle\sigma^{'}:\nabla\vec{V}^{'}\right\rangle dz$ 为由于黏性耗散导致的能流，σ' 为分子黏性压力张量. $F_p = -\int_z^\infty\left\langle\vec{V}^{'}\cdot\nabla p^{'}\right\rangle dz$ 为由波导的压力梯度导致的功率，$F_d = -\int_z^\infty\left\langle w^{'}\rho^{'}\right\rangle g dz$ 为由波导的欧拉位移导致的功率. 方括号 $\langle\rangle$ 运算为 $\langle AB\rangle = \frac{1}{2}Re(AB^*)$，其中 A，B 为任意的复函数，$*$ 为复共轭运算符.

下面给出该模型方程组的推导过程.

2 重力波模型推导过程

根据流体动力学方程组:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\vec{V} \tag{20}$$

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \frac{\mu}{\rho}\left[\nabla^2\vec{V}^{'} + \frac{1}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}^{'}\right)\right] \tag{21}$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = \frac{\theta}{T}\frac{\nu}{Pr}\nabla^2 T^{'} \tag{22}$$

$$\theta = T\left(\frac{p_s}{p}\right)^{\frac{R}{c_p}} \tag{23}$$

其中 $\vec{V} = (u, v, w)$，θ 为位温，p_s 为标准压. 物质导数为 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla$.

利用扰动法，即 $X=X_0+X^{'}$. 这里 $X=u,v,w,T,p,\rho,\theta$. X_0 为背景大气各物理量的值，$X^{'}$ 为扰动值. 将其代入各上式.

对于 Eq (20):

$$\frac{D}{Dt}\left(\rho_0+\rho^{'}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0+\rho^{'}\right)+\left(\vec{V_0}+\vec{V}^{'}\right)\cdot\nabla\left(\rho_0+\rho^{'}\right)=-\left(\rho_0+\rho^{'}\right)\nabla\cdot\left(\vec{V_0}+\vec{V}^{'}\right)$$

考虑到 $\frac{\partial\rho_0}{\partial t}+\vec{V_0}\cdot\nabla\rho_0=-\rho_0\nabla\cdot\vec{V_0}$、$\frac{\partial\rho^{'}}{\partial t}+\vec{V_0}\cdot\nabla\rho^{'}=-\rho^{'}\nabla\cdot\vec{V_0}$ 以及忽略扰动的二阶项，故上式可整理为:

$$\rho_0\nabla\cdot\vec{V}^{'}+\vec{V}^{'}\cdot\nabla\rho_0=0$$

由于 ρ_0 只是关于高度 z 的变量，故 $\nabla\rho_0=\left(0,0,\frac{d\rho}{dz}\right)^T$. 从而有:

$$\nabla\cdot\vec{V}^{'}-\frac{w^{'}}{H_\rho}=0 \tag{24}$$

其中 $H_\rho=\left(-\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\right)^{-1}$ 为密度标高.

对于 Eq(21)，当重力波的垂直波长 $\lambda_z\ll 4\pi H_\rho$ 时，相比于 $\nabla^2\vec{V}^{'}$ 项，$\frac{1}{3}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{V}^{'}\right)$ 可以忽略. 故 Eq(21) 可整理为:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right)=-\nabla p+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V}^{'}$$

将 $X=X_0+X^{'}$ 代入其中，同理，考虑到 $\rho_0\left(\frac{\partial\vec{V_0}}{\partial t}+\vec{V_0}\cdot\nabla\vec{V_0}\right)=-\nabla p_0+\rho_0\vec{g}$ 以及忽略扰动的二阶项，得:

$$\rho_0\left(\frac{\partial\vec{V}^{'}}{\partial t}+\vec{V_0}\cdot\nabla\vec{V}^{'}\right)=-\nabla p^{'}+\rho^{'}\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V}^{'}$$

一般只考虑 x 方向的水平风速，故 $\vec{V_0}=(u_0,0,0)$. 且 $\vec{g}=(0,0,-g)$，$\nu=\frac{\mu}{\rho_0}$. 此时上式展开为:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}-\nu\nabla^2\right]u'=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}, \tag{25}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}-\nu\nabla^2\right]v'=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial y}, \tag{26}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}-\nu\nabla^2\right]w'=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial z}-\frac{\rho'}{\rho_0}g \tag{27}$$

值得注意的是，在本文研究中，已假设无背景风速，即 $u_0=0$，从而 Eq(25)-(27) 即为 Eq(2)-(4).

由 Eq(23)，以及理想气体状态方程 $p=\rho RT$，可知：

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\theta}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial t}-\frac{1}{\rho c_p}\frac{\partial p}{\partial t}\right),\nabla\theta=\frac{\theta}{T}\left(\nabla T-\frac{1}{\rho c_p}\nabla p\right)$$

故:

$$\frac{D\theta}{Dt}=\frac{\partial\theta}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\theta=\frac{\theta}{T}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla T\right)-\frac{1}{\rho c_p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla p\right)\right]$$

将该式代入 Eq(22)，得：

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla T\right)-\frac{1}{\rho c_p}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla p\right)=\frac{\nu}{Pr}\nabla^2 T^{'}$$

同样地,将 $X=X_0+X^{'}$ 代入其中,并考虑到 $\left(\frac{\partial T_0}{\partial t}+\vec{V}_0\cdot\nabla T_0\right)-\frac{1}{\rho_0 c_p}\left(\frac{\partial p_0}{\partial t}+\vec{V}_0\cdot\nabla p_0\right)=0$，以及忽略扰动的二阶项，得:

$$\frac{\partial T^{'}}{\partial t}+\vec{V}_0\cdot\nabla T^{'}+\vec{V}^{'}\cdot\nabla T_0-\frac{1}{\rho_0 c_p}\left(\frac{\partial p^{'}}{\partial t}+\vec{V}_0\cdot\nabla p^{'}+\vec{V}^{'}\cdot\nabla p_0\right)=\frac{\nu}{Pr}\nabla^2 T^{'}$$

其中 $\vec{V}_0=(u_0,0,0)$，$\nabla T_0=(0,0,\frac{dT_0}{dz})^T$. 利用流体静力学平衡方程 $\frac{dp_0}{dz}=-\rho_0 g$，得 $\nabla p_0=(0,0,-\rho_0 g)^T$. 从而上式可整理为:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\nu}{Pr}\nabla^2\right]T'-\frac{1}{c_p\rho_0}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_0\frac{\partial}{\partial x}\right)p'=-\Gamma w', \tag{28}$$

其中 $\Gamma=\frac{dT_0}{dz}+\frac{g}{c_p}$. 本文研究中 $u_0=0$，故 Eq(28) 即为 Eq(5).

将 $X=X_0+X^{'}$ 代入理想气体状态方程 $p=\rho RT$，得:

$$p_0+p^{'}=R\left(\rho_0+\rho^{'}\right)\left(T_0+T^{'}\right)$$

展开并忽略 $\rho^{'}T^{'}$ 项，且由 $p_0=\rho_0 RT_0$ 得:

$$p^{'}=R\left(\rho_0 T^{'}+\rho^{'}T_0\right)$$

两边同除以 $p_0=\rho_0 RT_0$，即得:

$$\frac{p^{'}}{p_0}=\frac{\rho^{'}}{\rho_0}+\frac{T^{'}}{T_0} \tag{29}$$

此即为 Eq(6).

假设扰动 $X^{'}$ 是以波动的形式表示，即 $X^{'}=\delta X(z)e^{i(k_x x+k_y y-\omega_0 t)}$，将此式代入 Eq(24)-(28)，得:

$$ik_x u^{'}+ik_y v^{'}+\frac{dw^{'}}{dz}-\frac{w^{'}}{H_\rho}=0 \tag{30}$$

$$-i\hat{\omega}u^{'} = -\frac{1}{\rho_0}ik_xp^{'} \tag{31}$$

$$-i\hat{\omega}v^{'} = -\frac{1}{\rho_0}ik_yp^{'} \tag{32}$$

$$-i\hat{\omega}w^{'} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{dp^{'}}{dz} - \frac{\rho^{'}}{\rho_0}g \tag{33}$$

$$(-i\hat{\omega}+\beta)\,T^{'} + \frac{i\widetilde{\omega}_0}{c_p\rho_0}p^{'} = -\Gamma w^{'} \tag{34}$$

其中，$k_h = \sqrt{k_x^2+k_y^2}$，$\widetilde{\omega}_0 = \omega_0 - u_0k_h$，$\alpha = \frac{1}{X^{'}}\nabla^2 X^{'}$，$\hat{\omega} = \widetilde{\omega}_0 - i\nu\alpha$，$\beta = \left(1-\frac{1}{Pr}\right)\nu\alpha$.

联立 Eq(29)-(34)，可得：

$$\frac{d^2w^{'}}{dz^2} - \frac{1}{H_\rho}\frac{dw^{'}}{dz} + \left[\frac{1}{H_\rho^2}\frac{dH_\rho}{dz} - k_h^2 + \frac{k_h^2N^2}{\hat{\omega}\,(\hat{\omega}+i\beta)}\right]w^{'} + \left[\frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz} + \frac{(\gamma-1)\,g\widetilde{\omega}_0}{c_s^2\,(\hat{\omega}+i\beta)}\right]\left(\frac{w^{'}}{H_\rho} - \frac{dw^{'}}{dz}\right) = 0$$

其中 $c_s = \sqrt{\gamma RT_0}$ 为声速，$N = \sqrt{\frac{g\Gamma}{T_0}}$. 考虑到本文研究中的土卫六背景大气温度变化缓慢以及非弹性近似，故 $\frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz} \to 0$，$c_s \to +\infty$. 从而上述方程简化为:

$$\frac{d^2w^{'}}{dz^2} - \frac{1}{H_\rho}\frac{dw^{'}}{dz} + \left[\frac{1}{H_\rho^2}\frac{dH_\rho}{dz} - k_h^2 + \frac{k_h^2N^2}{\hat{\omega}\,(\hat{\omega}+i\beta)}\right]w^{'} = 0 \tag{35}$$

作变换 $w^{'} = exp\left[i(k_xx+k_yy-\omega_0t) + \int_{z_0}^{z}\frac{1}{2H_\rho}dz\right]\widetilde{w}$，则 Eq(35) 可整理为:

$$\frac{d^2\widetilde{w}}{dz^2} + k_z^2\widetilde{w} = 0 \tag{36}$$

其中:

$$k_z^2 = \frac{k_h^2N^2}{\hat{\omega}\,(\hat{\omega}+i\beta)} - \frac{1}{4H_\rho^2}\left(1-2\frac{dH_\rho}{dz}\right) - k_h^2 \tag{37}$$

本文中已假设密度标高 H_ρ 变化缓慢，即 $\frac{dH_\rho}{dz} \approx 0$，从而 Eq(37) 即为 Eq(8).

Eq(36) 可以取 WKB 近似解，即:

$$\widetilde{w}(z) = \Delta W(z_0)\sqrt{\frac{k_z(z_0)}{k_z(z)}}e^{i\int_{z_0}^{z}k_zdz} \tag{38}$$

实际上，该近似解满足如下微分方程：

$$\frac{d^2\widetilde{w}}{dz^2} + k_z^2\,(1+d)\,\widetilde{w} = 0 \tag{39}$$

其中残数 d 为：

$$d = \frac{1}{2k_z^3}\frac{d^2k_z}{dz^2} - \frac{3}{4k_z^4}\left(\frac{dk_z}{dz}\right)^2$$

若 $d \ll 1$，则 Eq(39) 接近于 Eq(36). 本文中选取的 9 个重力波的垂直波长满足 $d \ll 1$，故该近似解可以采用. 故 $w^{'}$ 的表达式为:

$$w^{'} = \Delta W(z_0)\sqrt{\frac{k_z(z_0)}{k_z(z)}}exp\left[i(k_x x + k_y y - \omega_0 t) + i\int_{z_0}^{z}\left(k_z + \frac{1}{2H_\rho}\right)dz\right] \quad (40)$$

故 $\frac{\partial w^{'}}{\partial z} = i\left(k_z + \frac{1}{2H_\rho}\right)w^{'}$，$\frac{\partial^2 w^{'}}{\partial z^z} = -\left(k_z + \frac{1}{2H_\rho}\right)^2 w^{'}$. 此时 $\alpha = \frac{1}{w^{'}}\nabla^2 w^{'} = -k_h^2 - \left(k_z + \frac{1}{2H_\rho}\right)^2$. 结合上述等式，即得到 $\hat{\omega}$ 与 β 的表达式 Eq(9)-(14). 另将上述等式代入 Eq(29)-(34)，即可得到极化关系式 Eq(15)-(18).

参考文献

[1] Matcheva K I, Strobel D F. Heating of Jupiter’s Thermosphere by Dissipation of Gravity Waves Due to Molecular Viscosity and Heat Conduction[J/OL]. Icarus, 1999, 140:328-340. DOI: 10.1006/icar.1999.6151.

[2] Wang, X., Lian, Y., Cui, J.,Richardson, M., Wu, Z., & Li, J.(2020). Temperature variability in titan’s upper atmosphere: The role of wave dissipation. Journal of Geophysical Research: Planets, 125, e2019JE006163. https://doi.org/ 10.1029/2019JE006163