初中数学知识扩展

主编:StarKing

初中数学知识扩展

主编:StarKing

初中数学知识扩展

2020 年 *04* 月 *27* 日

前 言

数学这门学科，从小学课堂贯穿到大学课堂，其重要性不言而喻. ”学好数理化，走遍天下都不怕”. 这一句严格来说不全对，但也说明了一个道理，学好数学、物理、化学是多么重要. 而数学，是自然科学的基础！所以学好数学是多么重要.

初中阶段的数学学习至关重要，作为小学算术的延伸，和作为高中数学的基础，初中数学起到承上启下的作用. 初中生的数学启蒙教育也至关重要. 初中阶段往往是培养数学兴趣和发掘数学天赋的好时机！

现阶段对初中优等生的数学培训愈发重视. 基于此，此书的定位是优等生的课外数学读物. 该书的内容不是传统的数学竞赛、也不是普通的科普读物. 而是在有良好的初中数学基础下，能通过此书来自主学习，以便了解数学的前沿知识. 同时也可作为初升高的衔接参考读物.

第一章第一节先介绍了有理数和无理数的概念. 估计大多数学生在刚开始学有理数时无法理解，课堂上也没重点强调“有理数”这个词的来源. 有理数是不是说明这个数是有理由呢？无理数是不是这个数没有理由呢？其实不是这样理解的. 在这一章你将找到答案. 接着简单地介绍了几个关于数论的猜想，有一定的小学数学基础都能看得懂这些猜想的内容. 而这些猜想的描述虽然简单，证明起来却非常困难！本章先给出这几个猜想的描述，然后介绍了目前数学界对这些猜想的研究最新进展. 在第二节中，介绍了欧几里得几何与非欧几何. 基于中学阶段的课本基本没有涉及到非欧几何，所以本书以非常易懂的描述来简介非欧几何的知识. 相信能大大地扩展初中生的数学知识. 在这节中，详细地讲了在非欧几何中三角形的内角和不等于 $180°$、平行线的再认识这些知识. 并以生活中地球表面飞机飞行的最短路线、植物螺旋攀爬为例. 在第三节，介绍了行列式在解二元一次方程组的用法. 现在的教学体系已经将行列式纳入大学课堂，但在这之前行列式是属于中学阶段的内容. 即使现在，在上海、江苏等教育发达的地区，行列式还是出现在中学的课本中. 此外，行列式还出现在课外培优的训练题和衡南县五科联考的试题中. 因此，简单地了解行列式还是非常有必要的.

第二章第一节介绍了数的开方问题. 在数系扩充下，负数也可以开方. 但初中阶段只涉及实数，所以对负数开方这一内容不强制学习，仅作为基本了解，但初步了解后对后续一元二次方程的解法有更高层次的了解. 紧接着介绍了如何笔算来开平方和开立方. 笔算开方是出现在上个世纪的初中数学课本中的，但现在的课本已经将其删除. 这一节详细地介绍了笔算开方的步骤，建议认真学习. 因为考试都不准带计算器，学会笔算开方后在以后考试没有计算器的情况下能快速解决很多计算问题. 基于初中数学和高中数学的知识脱节这一现实，第二节讲述了二项式定理、多项式的竖式除法、自然数幂和等. 二项式定理的杨辉三角形出现在初中课本的阅读板块，往往会被大多数学生忽略掉. 但杨辉三角却非常重要. 这一节相关的知识已经出现在中考和衡南县五科联考的试卷上. 学好这一节能为之后的高中数学打好坚实的基础. 紧接着讲述了自然数的幂和与拉马努金恒等式，这一部分作为课外延展，若你感兴趣可以读下去，甚至可以尝试做做后面的习题. 同样地，该部分作为课外知识补充，能弥补掉初中到高中数学知识脱节的遗憾. 第三节讲述了勾股定理的应用. 勾股定理是属于初中数学的重点知识，再怎么强调其重要性都不为过. 本节首先讲述勾股数组与费马大定理的关系，然后利用勾股定理导出求三角形面积的海伦-秦九韶公式，接着证明了三角形的三边长的关系. 最后讲述了利用勾股定理导出光的平面反射定律. 最后一节讲述了坐标系和函数. 由于初中课本没有详细讲述坐标系的种类，为了弥补这一缺点，本节首先介绍了坐标系的概念和种类，然后讲述如何在平面直角坐标系中求两点之间的距离和三角形的面积. 接着讲述了函数的概念. 函数也是数学中最重要的知识. 在本节中简单地介绍了线

性函数的概念. 然后将二元一次方程组与一次函数结合，这样能够从更高的层次来重新审视二元一次方程组.

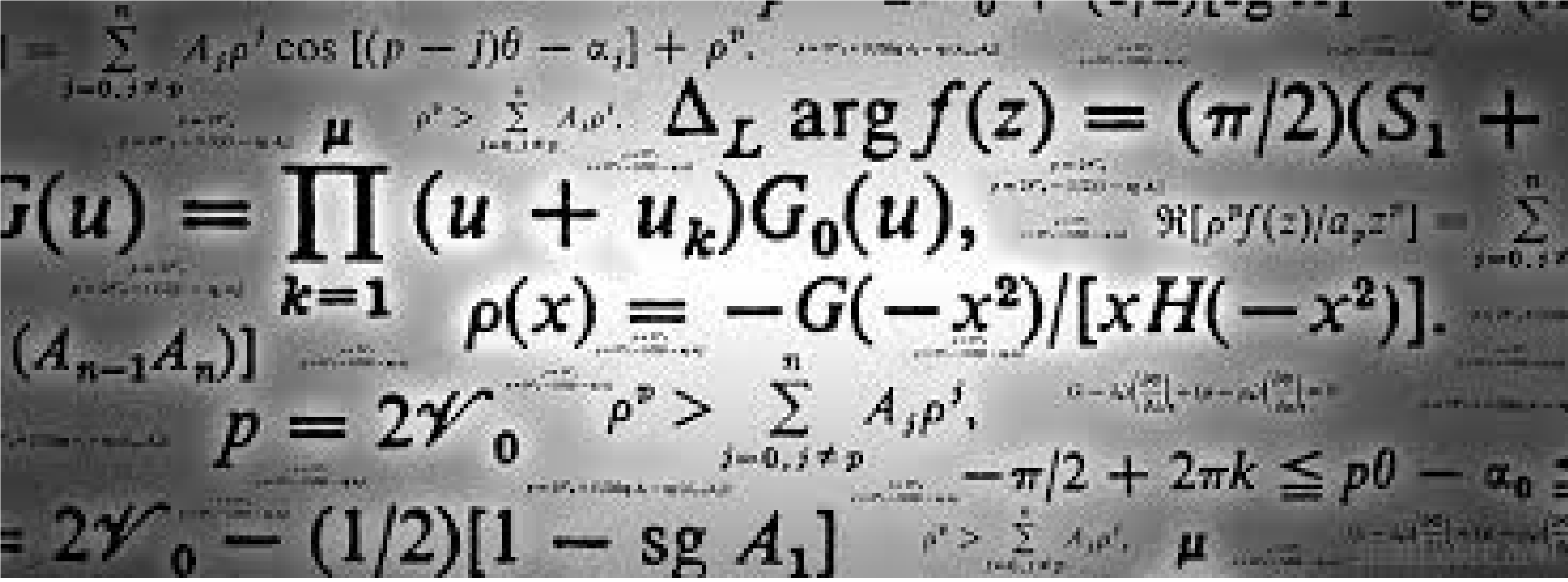
第三章可以作为初升高的衔接参考资料. 首先讲述了一元二次方程的解以及韦达定理，然后推广到一元高次方程的解和韦达定理. 这一部分可作为课外知识的补充，同样也作为学习高中数学的前提知识. 因高中数学的教材并没有系统讲解一元高次方程的解. 然后将二次函数与一元二次方程结合. 二次函数作为初中数学的重点，经常出现在中考压轴题中. 在考题中可能会考察二次函数的平移，所以在该节系统讲述函数的平移，同时也介绍了反比例函数的平移. 反比例函数的平移初中课堂没有讲解，但作为函数平移的推广，适当地了解也可以扩充数学的知识面. 接着详细地介绍了函数的蛛网模型. 该模型十分重要. 但初中和高中的数学课本都没有系统讲解. 而在实际的应用中却十分广泛. 例如物理课本中关于透镜成像的原理的描述非常晦涩. 常常需要记住长长的口诀. 但在该节中，利用了函数图像和蛛网模型来系统讲解透镜成像的原理. 蛛网模型也在求数列的递推关系和数列的通项关系式时发挥了重要的作用，但数列属于高中数学知识，所以此节没有介绍关于数列递推的知识. 但关于特殊数列递推关系的知识点经常出现在中考填空压轴题和衡南县五科联考的试题中. 所以建议仔细阅读该节. 然后讲述了三角函数. 三角函数在初中阶段没有作为重点考察的知识点，但却是高中数学的重点. 该节详细介绍了三角函数的定义、以及介绍了三角函数六边形的记忆方法. 这些知识课本也没系统涉及，但也却十分重要. 再接着讲述了三角函数的和差公式. 这部分属于高中数学的范围. 但提前学习可以解决掉很多初中数学竞赛的考题，同时也可以作为高中数学的预习资料. 最后讲述了黄金分割. 黄金分割在初中数学课本的阅读部分出现过. 但没系统讲解. 这一部分可以作为课外阅读材料. 供感兴趣的同学阅读.

第四章提供一些关于中国数学家的课外读物. 介绍了数学家陈景润与哥德巴赫猜想的励志故事. 该部分可以培养对数学的兴趣. 关于陈景润的励志故事，强烈推荐十四集连续电视剧《陈景润》. 然后简介了数学家华罗庚的故事，以及数学家丘成桐关于几何应用的演讲稿.

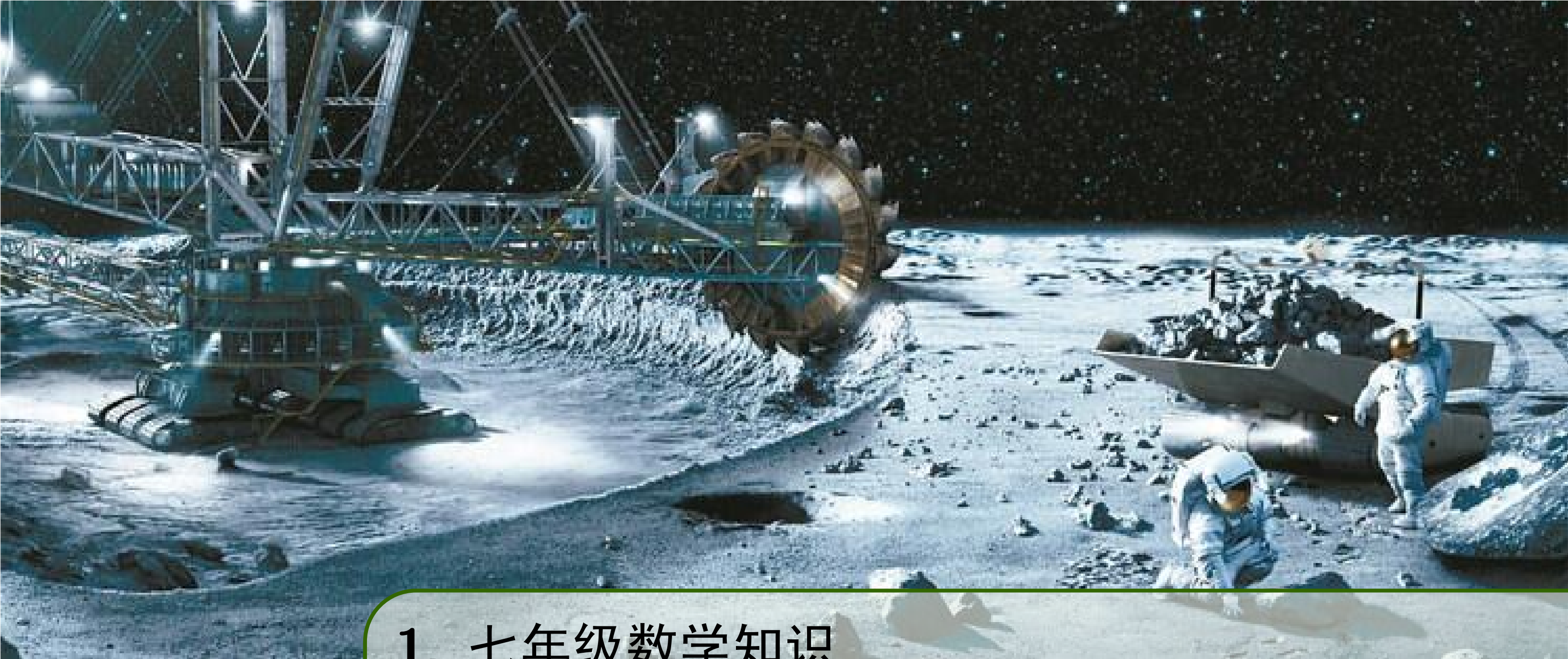
该书作为初中数学的课外扩展，不指望阅读一次就能全部弄懂，但“书读百遍，其义自见”. 有些章节可以反复阅读，甚至到了高中后也可以再次拿来阅读. 因为课本和课外的辅导资料并不过多讲述此书的内容，所以阅读此书可以让自己的中学数学知识得到延伸和升华. 同时也扩展了对数学的眼界. 该书共给出了 35 道习题，如果能把这 35 道习题全部做出，说明该书的知识掌握的差不多了.

但愿阅读完此书后对你有所帮助!

写于 2020 年 4 月 27 日



目　　录



1. 七年级数学知识

1.1 数系的扩充

1.1.1 有理数与无理数

小学时已学过正整数、小数和正分数，比如 1，2，3，4，0.2，1.5，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$ 等. 但现在已学过负数的概念. 故现在的数已扩充到负数. 故现在正整数、零和负整数统称为**整数**. 同理，正分数和负分数统称为**分数**. 整数和分数统称为**有理数**. 那为什么称为有理数呢? 华东师大版七年级上册的教材 (以下简称七上)P12 的" 读一读" 写到：有理数的英文名为 rational number. rational 为成比例的、成比率的意思. 故有理数也就是比例数，为两个整数之比.

■ **例 1.1.1** 1, -2, $\frac{1}{2}$，$-\frac{2}{3}$，0.13 为有理数. ■

✎ **解.**

(1) 1 为整数，可以写成 $\frac{1}{1}$，也就是整数 1 与整数 1 之比，故 1 称为比例数，即有理数；
(2) -2 为整数，可以写成 $\frac{-2}{1}$，也就是整数-2 与整数 1 之比，故-2 称为比例数，即有理数；
(3) $\frac{1}{2}$ 为分数，是整数 1 与整数 2 之比，故 $\frac{1}{2}$ 称为比例数，即有理数；
(4) $-\frac{2}{3}$ 为分数，是整数-2 与整数 3 之比，故 $-\frac{2}{3}$ 称为比例数，即有理数；
(5) 0.13 为小数，可以写成 $\frac{13}{100}$，是整数 13 与整数 100 之比，$\frac{13}{100}$ 称为比例数，即 0.13 为有理数. □

有限小数可以写成分数的形式，故有限小数也为有理数. 那无限小数呢? 无限小数分为两种情况：无限循环小数和无限不循环小数. 那这两种是不是都是有理数呢?

定义 1.1.1 无限循环小数为有理数. 无限不循环小数为无理数.

■ **例 1.1.2** 无限循环小数 $0.\dot{1}\dot{3}$，$0.\dot{2}\dot{8}$ 为有理数；无限不循环小数 $\pi = 3.1415926....$，$\sqrt{2} = 1.414....$ 为无理数. ■

✎ **解.**

(1) 为什么无限循环小数 $0.\dot{1}\dot{3}$ 为有理数呢? 刚才我们提到有理数可以写成两个整数之比的形式，那么 $0.\dot{1}\dot{3}$ 是否可以写成两个整数之比的形式呢? 答案是能. 事实上令 $x = 0.\dot{1}\dot{3} = 0.131313....$，则 $100x = 13.131313...$，两式相减，得 $100x - x = 99x = 13$，故 $x = 0.\dot{1}\dot{3} = \frac{13}{99}$. 故 $0.\dot{1}\dot{3}$ 可以写成整数 13 与整数 99 的比；所以无限循环小数 $0.\dot{1}\dot{3}$ 为有理数；
(2) 同理，无限循环小数 $0.\dot{2}\dot{8}$ 也为有理数，因为可以写成整数 28 与整数 99 的比；

(3) 无限不循环小数 $\pi = 3.1415926....$，$\sqrt{2} = 1.414....$ 无法像上面那种方法写成两个整数之比的形式，故不能写成两个整数之比的形式的数称为无理数.

□

■ **例 1.1.3** 证明：$0.\dot{9} = 1$. ■

证明. 设 $x = 0.\dot{9} = 0.9999....$，则 $10x = 9.9999.....$ 相减得: $10x - x = 9x = 9.999... - 0.999... = 9$，故 $x = 1$. □

有理数与无理数统称为实数. 这样现在对数系的认识已经从小学的自然数扩充到实数范围. 但你会马上问到，数系还能不能继续扩充呢? 答案是能. 事实上与实数对应的是虚数. 就像与有理数对应的是无理数一样. 实数与虚数又统称为复数. 当然初中阶段只会接触到实数. 到了高中阶段会慢慢接触到虚数. 这里就不展开讲虚数了.

1.1.2 数论简介

数学中研究整数的性质的一门分支叫做数论. 数论早期称为算术. 到 20 世纪初，才开始使用数论的名称，而算术一词则表示“基本运算”，不过在 20 世纪的后半，有部分数学家仍会用“算术”一词来表示数论. 1952 年时数学家哈罗德・达文波特仍用“高等算术”一词来表示数论，英国数学家戈弗雷・哈罗德・哈代和爱德华・梅特兰・赖特在 1938 年写《数论介绍》简介时曾提到“我们曾考虑过将书名改为《算术介绍》，某方面而言是更合适的书名，但也容易让读者误会其中的内容”. 著名数学家卡尔・弗里德里希・高斯曾说：“数学是科学的皇后，数论是数学的皇后.”

小学时已学过质数 (素数)、合数、奇数、偶数. 正整数按乘法性质划分，可以分成质数，合数，1，质数产生了很多一般人能理解却又悬而未解的问题，如**哥德巴赫猜想**，**孪生质数猜想**等. 即，很多问题虽然形式上十分初等，事实上却要用到许多艰深的数学知识. 这一领域的研究从某种意义上推动了数学的发展，催生了大量的新思想和新方法. 数论除了研究整数及质数外，也研究一些由整数衍生的数（如有理数）或是一些广义的整数 (如代数整数).

下面简单地介绍数论中几个比较有意思的猜想.

首先是哥德巴赫猜想. 哥德巴赫猜想（Goldbach’s conjecture）是数论中存在最久的未解问题之一. 这个猜想最早出现在 1742 年普鲁士人克里斯蒂安・哥德巴赫与瑞士数学家莱昂哈德・欧拉的通信中. 这个猜想的内容是这样的：

定理 1.1.1 哥德巴赫猜想：任一大于 2 的偶数，都可表示成两个素数之和.

两个素数之和可以表示为”1+1”, 故哥德巴赫猜想可以简称为”1+1”. 举几个例子，比如 $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7 = 5 + 5, 12 = 5 + 7, 14 = 3 + 11 = 7 + 7....$

哥德巴赫猜想在提出后的很长一段时间内毫无进展，直到二十世纪二十年代，数学家从组合数学与解析数论两方面分别提出了解决的思路，并在其后的半个世纪里取得了一系列突破. 目前最好的结果是中国数学家陈景润在 1973 年发表的陈氏定理（也被称为“1+2”）. 也就是说**到目前为止，还没有人能够证明出哥德巴赫猜想**. 数学家陈景润花人生的大半生来证明这个猜想，但未能成功. 目前只能证明出”1+2”. 陈氏定理”1+2” 可以表述为“**每一充分大的偶数是一个素数及一个不超过两个素数乘积之和**”. 比如 $62 = 43 + 19 = 7 + 5 \times 11$. 第四章给出了徐迟写的报告文学《哥德巴赫猜想》. 讲述了陈景润与哥德巴赫猜想的故事. 强烈建议阅读.

再者是费马大定理（亦名费马最后定理，Fermat’s Last Theorem）. 1637 年，法国学者费马在阅读丢番图《算术》拉丁文译本时，曾在第 11 卷第 8 命题旁写道：“将一个立方数分成两个立方数之和，或一个四次幂分成两个四次幂之和，或者一般地将一个高于二次的幂分成两个同次幂之和，这是不可能的。关于此，我确信我发现了一种美妙的证法，可

惜这里的空白处太小，写不下”．也即是费马大定理被写在丢番图《算术》中讨论方程式 $x^2+y^2=z^2$ 的有理数解部分大空白边上．费马试着去做把方程式的 2 次改为 3 次，4 次，5 次的情形．由于费马没有写下证明，而他的其它猜想对数学贡献良多，由此激发了许多数学家对这一猜想的兴趣．数学家们的有关工作丰富了数论的内容，涉及许多数学手段，推动了数论的发展．

那么这个费马大定理的内容到底是什么呢?

> **定理 1.1.2** **费马大定理**: 当整数 $n>2$ 时，关于 x,y,z 的不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解．

以上陈述由 17 世纪法国数学家费马提出，一直被称为“费马猜想”，直到英国数学家安德鲁・怀尔斯（Andrew John Wiles）及其学生理查・泰勒（Richard Taylor）于 1995 年将他们的证明出版后，才称为“费马最后定理”．这个猜想最初出现费马的《页边笔记》中．尽管费马表明他已找到一个精妙的证明而页边没有足够的空位写下，但仍然经过数学家们三个多世纪的努力，猜想才变成了定理．在冲击这个数论世纪难题的过程中，无论是不完全的还是最后完整的证明，都给数学界带来很大的影响；很多的数学结果、甚至数学分支在这个过程中诞生了，包括代数几何中的椭圆曲线和模形式，以及伽罗瓦理论和赫克代数等．这也令人怀疑当初费马是否真的找到了正确证明．而安德鲁・怀尔斯由于成功证明此定理，获得了包括邵逸夫奖在内的数十个奖项．可见完全证明这个费马大定理是多么困难!

■ **例 1.1.4** 若 $n=2$ 时，不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 有整数解．满足这个方程的整数解有: $3^2+4^2=5^2, 5^2+12^2=13^2, 8^2+15^2=17^2$ 等． ■

■ **例 1.1.5** 试着将方程 $r^4+s^4=t^4$ 整理为椭圆曲线 $y^2=x^3-x$ 的形式． ■

✎ **解.** $r^4+s^4=t^4$ 可整理为: $r^4=t^4-s^4$．与方程 $y^2=x^3-x$ 作对比，看出 x 只与 s,t 有关．故可以设 $y=r^as^bt^c, x=s^dt^e$．代入 $y^2=x^3-x$，得:$r^{2a}s^{2b}t^{2c}=s^{3d}t^{3e}-s^dt^e$．可整理为:

$$r^{2a}=s^{3d-2b}t^{3e-2c}-s^{d-2b}t^{e-2c}$$

与方程 $r^4=t^4-s^4$ 作对比，得：

$$2a=4, 3d-2b=0, 3e-2c=4, d-2b=4, e-2c=0$$

解得：$a=2, b=-3, c=1, d=-2, e=2$．即 $x=\frac{t^2}{s^2}$，$y=\frac{r^2t}{s^3}$．

故 $r^4+s^4=t^4$ 可整理为 $\left(\frac{r^2t}{s^3}\right)^2=\left(\frac{t^2}{s^2}\right)^3-\frac{t^2}{s^2}$． □

最后一个是孪生素数猜想．孪生素数猜想是数论中的著名未解决问题．这个猜想正式由数学家希尔伯特在 1900 年国际数学家大会的报告上第 8 个问题中提出．孪生素数是相差 2 的一对素数．例如 3 和 5 ，5 和 7，11 和 13，⋯，10016957 和 10016959 等等都是孪生素数．孪生素数猜想的内容为：

> **定理 1.1.3** **孪生素数猜想**: 存在无穷多个素数 p，使得 p + 2 是素数．

由于孪生素数猜想的高知名度以及它与哥德巴赫猜想的联系，因此不断有学术共同体外的数学爱好者试图证明它．有些人声称已经证明了孪生素数猜想．然而，尚未出现能够通过专业数学工作者审视的证明．2013 年 5 月 14 日，数学家张益唐的论文《素数间的有界距离》在《数学年刊》上发表，破解了困扰数学界长达一个半世纪的难题，证明了孪生素猜想的弱化形势，即发现存在无穷多差小于 7000 万的素数对．这是第一次有人证明存在无穷多组间距小于定值的素数对．到目前为止，还没有人给出该猜想的完整证明．

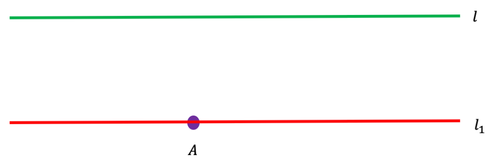


图 **1.1:** 平行线

图 **1.2:** 日常生活中具有弯曲表面的实物

1.2 欧几里得几何与非欧几何

首先从平行线说起. 中学阶段一般讲平面内两条直线的关系：相交或平行. 也就是说，一个平面上的直线外指定一个点，就能指定出一条与它平行的直线. 例如图1.1所示，指定直线 l 外一点 A，点 A 与直线 l 确定一个平面. 那么在这个平面内，过点 A 有多少条直线与 l 平行呢? 答案是有且只有一条，那就是直线 l_1. 那么事实上真的只有一条吗? 实际上在非欧几何里，过点 A 没有直线与 l 平行，或者有很多条直线与 l 平行. 那么是为什么呢? 下面先简单地介绍下欧几里得几何与非欧几何.

1.2.1 欧几里得几何

研究二维平面的几何称为欧几里得几何. 欧几里得几何指按照古希腊数学家欧几里得的《几何原本》构造的几何学. 欧几里得几何有时就指二维平面上的几何，即平面几何. 三维空间的欧几里得几何通常叫做立体几何. 例如在初中阶段研究三角形的性质、多边形的性质、图形的轴对称、平移和旋转这些都是属于平面几何. 七上的第 4 章学过立体图形，比如长方体、立方体. 这种属于立体几何的研究范围.

在欧几里得几何中，三角形的内角和为 180 度. 长方形或正方形的内角和为 360 度.

1.2.2 非欧几何中的测地线

欧几里得几何研究的对象平的. 日常生活中接触到的很多东西其实不是平的，而是曲的. 比如图1.2中，篮球、乒乓球、水桶、水杯、马鞍等.

与欧几里得几何研究的对象相反，非欧几何研究的对象是曲的. 一般中学阶段接触到的几何都是平面或立体几何，没有涉及到研究弯曲表面的几何. 但日常生活经验告诉我们，恰恰是非常多的物体的表面都不是平的. 这就说明非欧几何显得尤其重要.

在平面几何中，两点之间线段最短. 如图1.3，在一个平面内，点 A 和点 B 之间最短的距离是线段. 蚂蚁沿着这条线段从 A 爬到 B，距离最短. 这是很显然的事情. 但是如果不是在一个平面内呢? 比如说是在一个球面上或一个圆柱体上呢?

首先考虑圆柱体. 可以思考这个问题，如图1.4，如果一只蚂蚁想从圆柱体底端的 A 点沿着圆柱表面爬到顶端的 B 点，该走哪条线使得距离最短呢? 操作过程如图1.5，先沿着虚线将圆柱剪开，然后铺平. 铺平后得到一个平面. 在这个平面内，点 A 和点 B 之间的距离是线段. 然后将这个平面卷起来，复原成刚才的圆柱. 这样在圆柱表面得到一条曲线. 这个曲线就是圆柱表面上的“直线”. 蚂蚁沿着这条“直线”从 A 爬到 B，距离最短. 这条圆

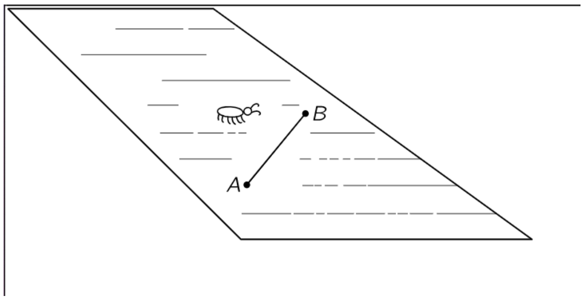


图 1.3: 蚂蚁沿着 A, B 两点之间线段爬距离最短.

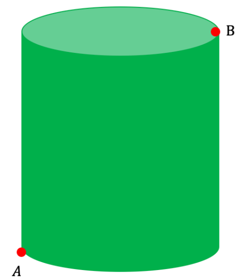


图 1.4: 圆柱面上两点之间最短的线是什么线?

柱表面上的“直线”称为**圆柱螺线**. 日常生活中，植物沿着茎干或者树枝往上生长，茎干或者树枝的表面为圆柱，所以植物沿着距离最短的“直线”攀爬，即圆柱螺线. 见图1.6.

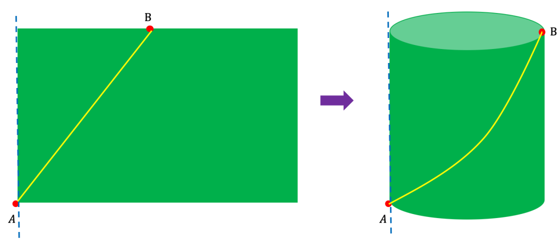


图 1.5: 先将圆柱沿虚线剪开铺平，然后连接 A，B 点，然后卷起来.

图 1.6: 生活中植物生长按照圆柱螺线攀爬.

再者考虑球体. 如图1.7，如果一只蚂蚁想从球体上的 A 点沿着球体的表面爬到 B 点，该走哪条线使得距离最短呢?

不像刚才那样能够将圆柱体剪开再铺平，对于球面我们无法这样做. 那么球面上是否也存在“直线”呢? 答案是存在的. 球面上的“直线”是大圆的一段弧. 大圆指的是圆心过球心的圆. 通俗地讲，若一个平面把一个球切成相等的两半，那么这个平面与球面相交的圆为大圆. 比如地球上的赤道和经线就是大圆. 见图1.8. 弧指的是圆上的某一段. 劣弧指的是长度小于半圆的一段弧. 与之对应的是长度大于半圆的一段弧为优弧. 因此，球面上的蚂蚁应该沿着劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 爬距离最短.

日常生活中，飞机飞行的航线正是球面上的“直线”：大圆，因为地球是个球体. 如图1.10，飞机从美国西雅图 (Seattle) 飞往英国伦敦 (London). 连接这两个城市的平面直线 Rhumb Line 并不是距离最短的. 距离最短的是球面上的“直线”大圆 (Great Circle Route). 因此飞机沿着这个大圆飞行距离最短.

如上面所介绍的，圆柱面上的“直线”为圆柱螺线，球面上的“直线”为大圆上的一段劣弧. 在曲面上的“直线”统称为测地线. 测地线又称大地线或短程线. 在有度规定义存在之时，测地线可以定义为空间中两点的局域最短路径. 平面上的测地线就是直线. 所以测地线在数学上可视作直线在弯曲空间中的推广.

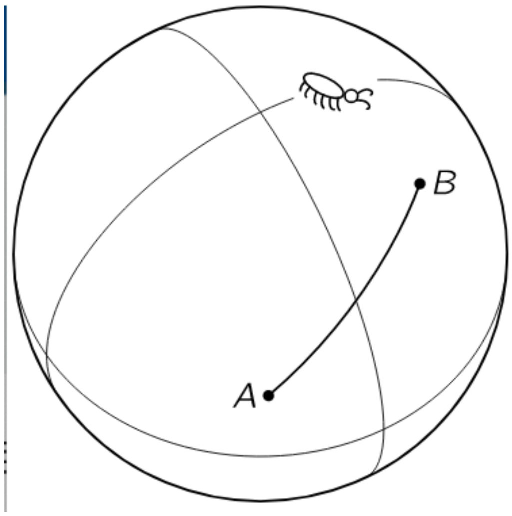


图 1.7: 球面上的蚂蚁从 A 爬到 B，沿哪条线爬最短呢?

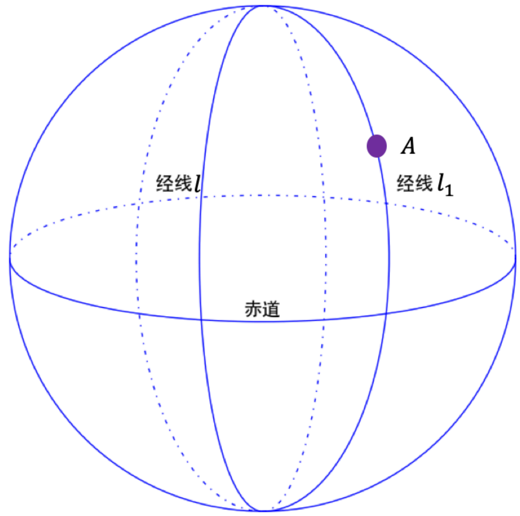


图 1.8: 赤道和经线为大圆.

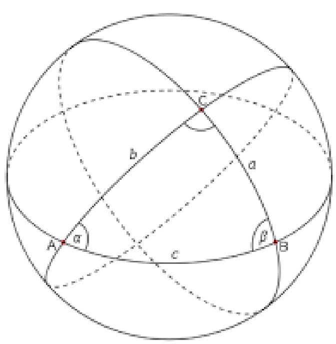


图 1.9: 经过 A 和 B 点的大圆上的劣弧 $\widehat{AB}$ 为球面上的“直线”.

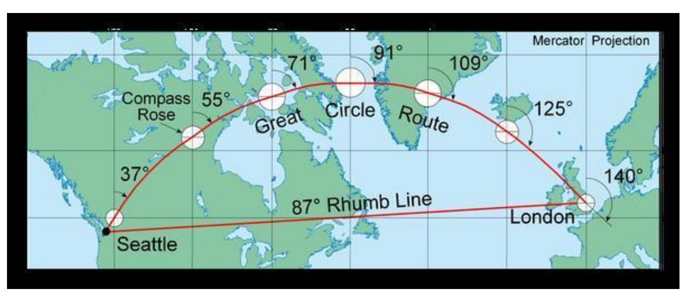


图 1.10: 飞机沿着大圆飞行时距离最短.

1.2.3 三角形的内角和真的是 180 度吗？

很明显，在平面内，三角形的内角和是 180 度. 那么在球面上呢?

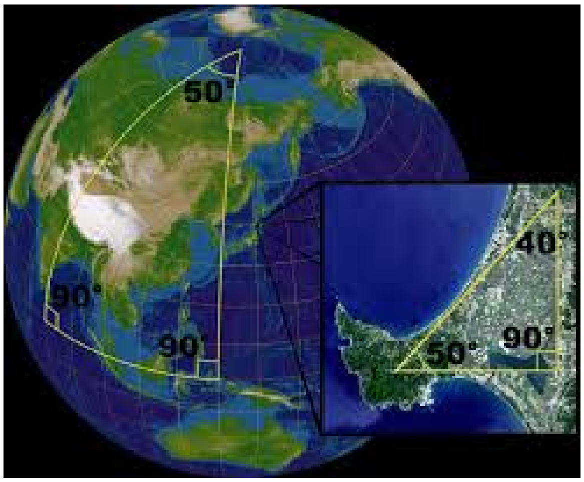


图 1.11: 地球北极和赤道上两点构成的三角形内角和为 230 度. 但考虑局部范围内的三角形时内角和为 180 度.

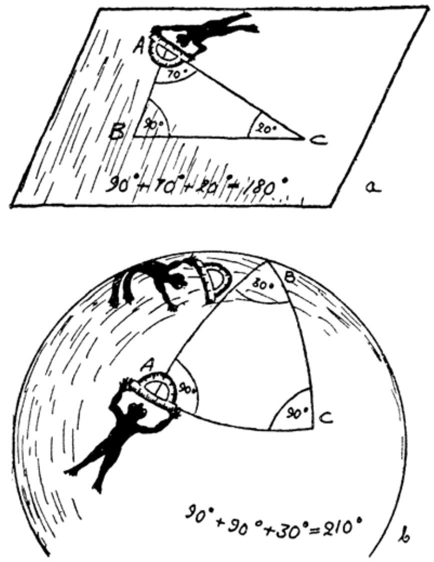
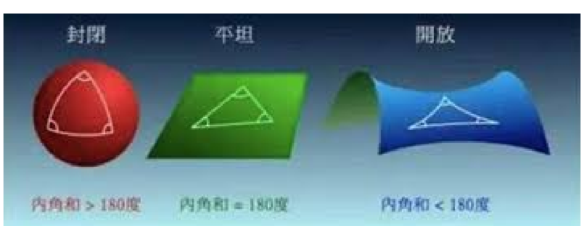


图 1.12: 平面上的三角形内角和为 180 度，但球面上的一个三角形内角和为 210 度，大于 180 度.

如图1.11，在地球表面上选取三个点构成一个三角形. 一点选在北极，另外两点选在赤道. 那么这个三角形的三个内角为 50 度，90 度，90 度. 所以这个三角形的内角和为 230 度. 但当考虑到一个范围很小的区域时，三角形的内角测量不精确，所以就粗略测量得到内角分别为 40 度、50 度、90 度. 这样内角和为 180 度. 如图1.12，在一个平面内，测得的三角形内角分别为 90 度，70 度，20 度. 所以内角和为 180 度. 在球面上的一个三角形的内角分别为 90 度、90 度和 30 度. 所以内角和为 210 度. 可以看到，在球面上，任意一个三角形的内角和都大于 180 度.

那么有没有一个曲面，在这个曲面上的三角形小于 180 度呢? 答案是有. 那这个曲面是什么曲面呢? 这个曲面有很多种，例如马鞍面就是其中一种. 如图1.2中白马背上的马鞍，这个马鞍面的形状就是类似马鞍的形状.



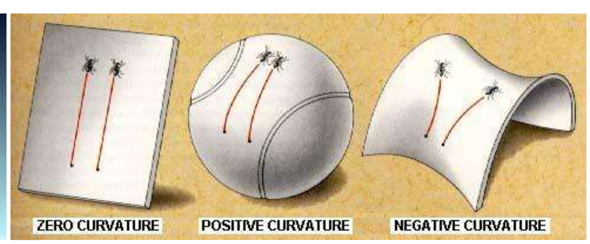


图 1.13: 三种曲面；对应的三角形的内角和分别为大于、等于、小于 180 度.

图 1.14: 沿着三种曲面上的测地线爬行的蚂蚁.

1.2.4 平行线的再认识

刚谈到图1.1中过点 A 没有直线与 l 平行，或者有很多条直线与 l 平行. 现在可以来解释了. 如图1.8, 球面上的“直线”经线 l 外有一点 A，那么过 A 点可以作一条“直线”与经线 l 平行 (不相交) 吗? 答案是不可以. 因为过 A 点的“直线”是经线 l_1. 而经线 l_1 与经线 l 相交于南北极两点. 所以在球面上过直线 l 外一点没有一条直线与 l 平行. 相反，在马鞍面上，过直线 l 外一点有无数条直线与 l 平行.

如图1.13，我们可以把这三种曲面进行分类. 那么按什么分类呢? 答案是按曲率来分类.

- 第一种是平面 (图中绿色)，其中三角形的内角和等于 180 度. 平面的曲率等于 0. 所以称平面是平坦的. 研究平面的几何称为欧几里得几何；
- 第二种是球面 (图中红色)，其中三角形的内角和大于 180 度. 球面的曲率大于 0. 所以称球面是封闭的. 研究曲率大于 0 的曲面的几何称为黎曼几何；
- 第三种是马鞍面 (图中蓝色)，其中三角形的内角和小于 180 度. 马鞍面的曲率小于 0. 所以称马鞍面是开放的. 研究曲率小于 0 的曲面的几何称为罗巴切夫斯基几何；也叫双曲几何.

黎曼几何与罗巴切夫斯基几何统称为非欧几何. 如图1.14，蚂蚁各自在这三种曲面上沿着测地线爬行. 在平面上，两只蚂蚁沿着平行线爬行，永远不会相交. 在球面上，两只蚂蚁沿着测地线爬行，最终会相交. 在马鞍面上，两只蚂蚁沿着测地线爬行，永远不会相交. 而且这种不会相交的测地线至少还有一条.

1.2.5 非欧几何的应用

中学阶段只会接触到欧几里得几何. 大学阶段会开始接触到非欧几何. 数学上研究非欧几何的一个分支叫作**微分几何**或黎曼几何. 现代物理学中广泛应用到了黎曼几何. 比如著名物理学家爱因斯坦利用黎曼几何建立起广义相对论. 在广义相对论中，引力被描述为时空的一种几何属性（曲率），而时空的曲率则通过爱因斯坦场方程和处于其中的物质及辐射的能量与动量联系在一起. 爱因斯坦的广义相对论理论在天体物理学中有着非常重要的应用. 比如它预言了某些大质量恒星终结后，会形成时空极度扭曲以至于所有物质（包括光）都无法逸出的区域: 黑洞. 黑洞（英语：black hole）是时空展现出引力的加速度极端强大，以至于没有粒子，甚至电磁辐射，像是光都无法逃逸的区域. 2019 年 4 月 10 日，人类首次得到黑洞的照片. 根据广义相对论预测，足够紧密的质量可以扭曲时空，形成黑洞光线在引力场中的偏折会形成引力透镜现象，这使得人们可能观察到处于遥远位置的同一个天体形成的多个像. 广义相对论还预言了引力波的存在。引力波已经由激光干涉引力波天文台在 2015 年 9 月直接观测到. 此外，广义相对论还是现代宇宙学中的膨胀宇宙模型的理论基础.

第四章附上数学家丘成桐的演讲稿《几何对现代科学的影响》. 建议阅读.

1.3 关于多元一次方程组的另外解法

相信大家已经熟知利用加减消元法来求解二元一次方程组和三元一次方程组. 那有没有通用的解法来求解二元一次、三元一次甚至多元一次方程组呢? 答案是有. 这个解法称为克莱姆法则. 克莱姆法则 (英语：Cramer's rule)，又称为克拉玛公式、克拉默法则，是用行列式来计算出线性方程组中的所有解 (二元一次、三元一次与多元一次方程组统称为线性方程组). 这个定理因加百列・克莱姆 (1704 年 - 1752 年) 的卓越使用而命名. 为了介绍这个克莱姆法则，首先需要知道什么是行列式.

1.3.1 二阶行列式与二元一次方程组的解法

行列式概念最早出现在解线性方程组的过程中. 十七世纪晚期，关孝和与莱布尼茨的著作中已经使用行列式来确定线性方程组解的个数以及形式. 十八世纪开始，行列式开始作为独立的数学概念被研究. 十九世纪以后，行列式理论进一步得到发展和完善. 那么行列式到底是个什么东西呢? 首先从二阶行列式说起.

定义 1.3.1 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为二阶行列式. 其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为行列式的元素. 元素 a_{ij} 的下标表示它所在的位置是第 i 行第 j 列.

例如元素 a_{11} 表示在第 1 行第 1 列，a_{22} 表示在第 2 行第 2 列. 二阶行列式第一行为 a_{11}, a_{12}，第二行为 a_{21}, a_{22}. 第一列为 a_{11}, a_{21}，第二列为 a_{12}, a_{22}.

二阶行列式的计算规则为左上角与右下角的元素之积减去右上角与左下角的元素之积. 即 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

■ **例 1.3.1** 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的值. ■

解. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. □

■ **例 1.3.2** 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的值. ■

解. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 4 \times 4 = -1$. □

现在明白了二阶行列式的计算方法. 下面举例来说明如何利用二阶行列式来计算二元一次方程组.

■ **例 1.3.3** 利用二阶行列式求解二元一次方程组 $\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ 4x + 5y = 3 \end{cases}$. ■

解. 首先将这个二元一次方程组的系数项写成二阶行列式的形式. 第一个方程 $3x + 4y = 2$ 的系数为 3，4. 那么把 3，4 放在行列式的第一行. 第二个方程 $4x + 5y = 3$ 的系数为 4，5. 那么把 4，5 放在行列式的第二行. 即写成：

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

然后计算这个行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 4 \times 4 = -1$.

接着第二步将行列式 D 的第一列换成常数项，第二列保持不变. 第一个方程 $3x + 4y = 2$ 的常

数为 2. 第二个方程 $4x+5y=3$ 的常数为 3. 所以将行列式 D 的第一列换成 2，3. 即写成：

$$D_x=\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}$$

然后计算这个行列式 $D_x=\begin{vmatrix}2&4\\3&5\end{vmatrix}=2\times5-3\times4=-2$.

最后一步是将行列式 D 的第二列换成常数项，第一列保持不变. 即写成：

$$D_y=\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}$$

然后计算这个行列式 $D_y=\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}=3\times3-2\times4=1$.

所以这个二元一次方程组的解为：

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{1}{-1}=-1$$

□

通过这个例子介绍了如何利用二阶行列式来计算二元一次方程组. 所以说，对于一般的二元一次方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$$

其解为：

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11}&b_1\\a_{21}&b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

值得注意的是，系数行列式 $D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\neq0$. 因为当 $D=0$ 时，解 $x=\frac{D_x}{D}$ 中分母为 0，故此时方程组无解或有无数解. 当 $\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}=\frac{b_1}{b_2}$ 时，方程组有无穷多个解. 当 $\frac{a_{11}}{a_{21}}=\frac{a_{12}}{a_{22}}\neq\frac{b_1}{b_2}$ 时，方程组无解.

■ **例 1.3.4** 求二元一次方程组：$\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=2\end{cases}$ 的解. ■

解. 行列式 $D=D_x=D_y=\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0$，故 $x=\frac{D_x}{D}=\frac{0}{0}$，$y=\frac{D_y}{D}=\frac{0}{0}$. 从而此方程组有无穷多个解. □

■ **例 1.3.5** 求二元一次方程组：$\begin{cases}x+y=1\\2x+2y=4\end{cases}$ 的解. ■

解. 系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1\\2&2\end{vmatrix}=0$，$D_x=\begin{vmatrix}1&1\\4&2\end{vmatrix}=-2$，$D_y=\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}=2$，故 $x=\frac{D_x}{D}=-\frac{2}{0}$，$y=\frac{D_y}{D}=\frac{2}{0}$. 从而此方程组无解. □

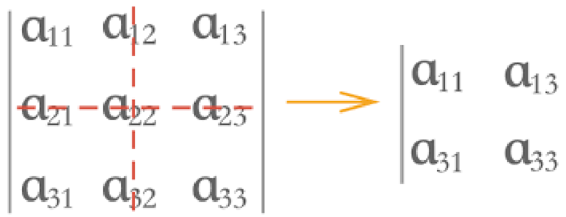


图 1.15: 划掉元素 a_{22} 所在的第 2 行与第 2 列的所有元素后，剩余的元素组成的二阶行列式称为 a_{22} 的余子式 M_{22}.

上面已经介绍了如何利用二阶行列式来求解二元一次方程组. 这个方法就叫做克莱姆法则. 虽然可以用加减消元法来求解二元一次方程组，那为什么还要介绍克莱姆法则呢? 因为克莱姆法则求解更方便快捷. 比如当考试时遇到求解二元一次方程组的填空题时，利用克莱姆法则可以快速地计算出来，从而节省时间. 另一个原因是克莱姆法则可以推广到求解三元一次甚至是多元一次方程组. 下面来介绍如何应用该法则求解三元一次方程组 (如果你感兴趣可以接着往下学习).

1.3.2 三阶行列式与三元一次方程组的解法 *

二阶行列式的计算相对简单，但三阶行列式稍许复杂. 首先介绍什么是三阶行列式.

定义 1.3.2 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为三阶行列式. 其中元素 a_{ij} 的下标表示它所在的位置是第 i 行第 j 列.

比如元素 a_{23} 在第 2 行第 3 列. 那三阶行列式怎么计算呢? 首先要介绍行列式的余子式和代数余子式.

所谓元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 就是指划掉 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的所有元素后，剩余的元素组成的行列式. 比如，见图1.15，元素 a_{22} 在第 2 行第 2 列，那么将第 2 行第 2 列所有的元素划掉 (图中虚线表示划掉)，剩下的元素组成一个二阶行列式，这个行列式称为元素 a_{22} 的余子式 M_{22}，且 $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$.

■ **例 1.3.6** 求三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 元素 a_{23} 的余子式 M_{23}. ■

✎ **解.** 元素 a_{23} 在第 2 行第 3 列，划掉第 2 行第 3 列所有的元素后，剩余的是 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. 故 $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. □

所谓元素 a_{ij} 的代数余子式指的是在余子式前添加正负号即可. 即元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. 比如三阶行列式的元素 a_{22} 的代数余子式为 $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$，元素 a_{23} 的代数余子式为 $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$.

了解了行列式的余子式和代数余子式的概念，现在就可以来计算三阶行列式了. 三阶行列式的计算可以按照某一行或某一列展开成元素与其对应的代数余子式的乘积之和. 什么意思呢? 下面通过举例来说明.

■ 例 **1.3.7** 将三阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$：

1. 按照第一行展开计算;
2. 按照第二列展开计算.

■

✎ **解.**

1. 第一行为 $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{13} = 1$. a_{11} 的代数余子式 $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$.
   同理，a_{12} 的代数余子式为 $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$，$a_{13}$ 的代数余子式为 $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$.
   所以该行列式按第一行展开为：
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$
$$= 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \times [(-1) \times (-1) - 1 \times 5] + (-1) \times [2 \times (-1) - 1 \times 4] + 1 \times [2 \times 5 - (-1) \times 4]$$
$$= -4 + 6 + 14 = 16.$$
2. 同样，第二列 $a_{12} = 1, a_{22} = -1, a_{32} = 5$. $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$，$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$，
   $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.
   故该行列式按第二列展开为：
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$
$$= 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 5 \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= (-1) \times [2 \times (-1) - 1 \times 4] + (-1)[1 \times (-1) - 1 \times 4] + (-5)[1 \times 1 - 1 \times 2]$$
$$= 6 + 5 + 5 = 16.$$

所以，该行列式无论是按照第一行展开，还是按照第二列展开，计算结果都一样. □

现在已经学会了如何计算三阶行列式. 接下来举例说明如何利用三阶行列式来求解三元一次方程组.

■ 例 **1.3.8** 解三元一次方程组：$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 6 \\ 4x + 5y - z = 1 \end{cases}$ ■

✎ **解.** 与求解二元一次方程组类似，先写出系数行列式：$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$. 刚才已经求解出该行列式的值 $D = 16$.

然后把系数行列式 D 的第一列换成常数项：$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$. 按照第一行展开计算：$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \times (-4) + (-1) \times (-7) + 1 \times 31 = 38.$

这样可以求解 x 的值，所以 $x = \frac{D_x}{D} = \frac{38}{16} = \frac{19}{8}$.

再者把系数行列式 D 的第二列换成常数项：$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. 同样按照第一行展开计算：$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-7) + 0 \times (-6) + 1 \times (-22) = -29.$

这样可以求解 y 的值，所以 $y = \frac{D_y}{D} = -\frac{29}{16}$.

最后把系数行列式 D 的第三列换成常数项并按照第一行展开：$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times (-31) + (-1) \times (-22) + 0 \times 14 = -9.$

这样可以求解 z 的值，所以 $z = \frac{D_z}{D} = -\frac{9}{16}$.

故该三元一次方程组的解为 $x = \frac{19}{8}, y = -\frac{29}{16}, z = -\frac{9}{16}$.

□

初次接触三阶行列式时计算较慢，但熟练训练后，这种方法求解三元一次方程组速度很快.

同样，这个系数行列式 $D \neq 0$ 时，三元一次方程组有唯一的解. 但当 $D = 0$ 时，三元一次方程组没有解或者有无数多个解.

1.3.3 克莱姆法则 *

上面已经介绍利用行列式求解二元一次、三元一次方程组. 那是否可以推广到用行列式求解多元一次方程组呢? 答案是可以推广. 这就是克莱姆法则.

定义 1.3.3 克莱姆法则: 未知量的个数和所含方程的个数相等的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

如果其系数行列式

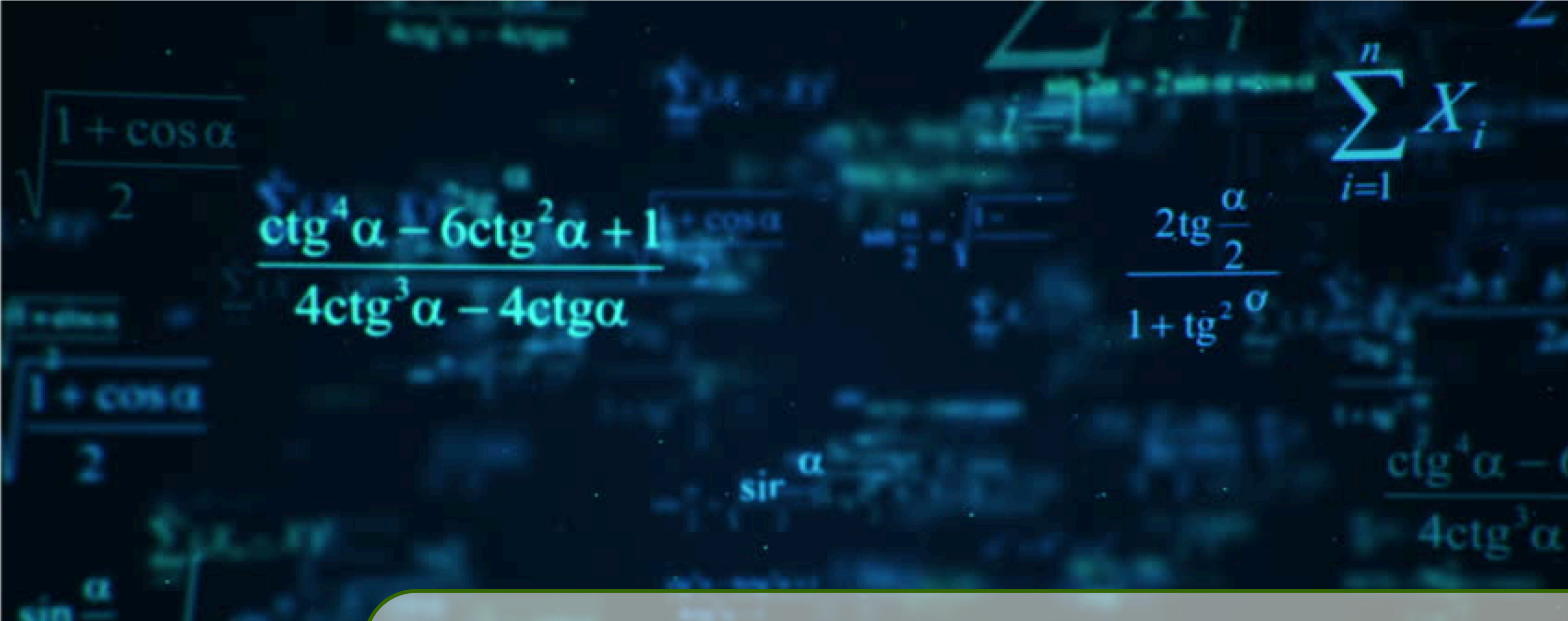
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & .... & .... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

则该方程组有解且解唯一. 其解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D}, x_2=\frac{D_2}{D}, ..., x_n=\frac{D_n}{D}$$

其中 $D_j(j=1,2,...,n)$ 是将 D 中的第 j 列的元素用方程组右端的常数项替换后而得到的 n 阶行列式.

数学上研究线性方程组的一个分支叫作**线性代数**. 线性代数有很广的应用. 比如在人工智能、机器学习等领域应用非常广泛. 本节简单地介绍线性方程组的解法. 但中学阶段并不会涉及很复杂的线性方程组. 目前只是作为二元一次方程组解法相关知识面的推广.



2. 八年级数学知识

2.1 数的开方计算

初中阶段涉及到一个正有理数的开方计算，比如对某个正有理数开平方和开立方运算. 下面简单地介绍关于开方计算的一些扩展知识.

2.1.1 负数可以开方计算吗？

课本上已经介绍到了对一个数的开方计算，比如 $\pm\sqrt{4}=\pm2$，$\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{-27}=-3$ 等. 那为什么一个正数的平方根有两个，而一个正数或一个负数的立方根只有一个呢? 实际上这里涉及到数系的扩充问题. 还记得第一章介绍数系扩充的问题吗? 因为初中阶段只接触到实数范围，在实数范围内正数平方根有两个，立方根只有一个. 而且负数没有平方根. 事实上，在实数范围内，一个正数开偶次方根会得到两个根，一个正数或负数开奇次方根会得到一个根. 比如 $\pm\sqrt[4]{16}=\pm2$，$\sqrt[5]{243}=3$，$\sqrt[7]{-78125}=-5$. 但是如果将数系扩充到虚数后，答案就不一样了. 扩充到虚数后，实数和虚数统称为复数. 那么在复数范围内，任何一个数开 n 次方根会得到 n 个解 $(n=1,2,3,...)$. 比如说 $\sqrt{-1}$，$\sqrt{-1}$ 在实数范围内不能计算. 但在复数范围内可以计算，$\sqrt{-1}$ 会有两个解，分别为 i 和 $-i$. 这里 i 是虚数单位. 且 $i^2=-1$. 复数可以写成 $z=a+bi$，a,b 是实数. a 称为复数 z 的实部，b 称为复数 z 的虚部. 如果 $b=0$，那么 $z=a+bi=a+0i=a$ 就是实数了. 再比如 $\sqrt{-4}$，也是有两个根. $\sqrt{-4}=\sqrt{(-1)\times4}=\sqrt{-1}\times\sqrt{4}=\pm2i$. 在复数范围内，对于 ±1 的开方运算，有：

> **定义 2.1.1** $\pm\sqrt{1}=\pm1$；$\sqrt{-1}=\pm i$；$\sqrt[3]{1}=1,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$；$\sqrt[3]{-1}=-1,\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$；$\pm\sqrt[4]{1}=\pm1,\pm i$；$\sqrt[4]{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i),-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$.

■ **例 2.1.1** 在复数范围内计算 $\sqrt{-9}$，$\sqrt[3]{8}$，$\sqrt[3]{-27}$，$\sqrt[4]{16}$，$\sqrt[4]{-16}$. ■

✎ **解.**

(1) 对 -9 开平方，所以有两个解: $\sqrt{-9}=\sqrt{(-1)\times9}=\sqrt{-1}\times\sqrt{9}=\pm3i$; 这两个解都是虚数，所以在实数范围内 $\sqrt{-9}$ 无解；

(2) 对 8 开立方，所以有三个解：$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{1}\times\sqrt[3]{8}=2\times\sqrt[3]{1}=2,-1\pm\sqrt{3}i$; 这三个解有一个实数 2，两个复数 $1\pm\sqrt{3}i$. 所以在实数范围内 $\sqrt[3]{8}$ 只有一个解 2;

(3) 对 -27 开立方，所以有三个解：$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{-1}\times\sqrt[3]{27}=3\times\sqrt[3]{-1}=-3,\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i$; 这三个解有一个实数解 -3，两个复数解 $\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i$. 所以在实数范围内 $\sqrt[3]{-27}$ 只有一个实数解 -3;

(4) 对 16 开四次方，所以有四个解：$\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{1}\times\sqrt[4]{16}=2\times\sqrt[4]{1}=\pm2,\pm2i$; 这四个解有两个实数解 ±2，两个虚数解 $\pm2i$；所以在实数范围内 $\sqrt[4]{16}$ 有两个解 ±2；

(5) 对 -16 开四次方，所以有四个解：$\sqrt[4]{-16}=\sqrt[4]{-1}\times\sqrt[4]{16}=2\times\sqrt[4]{-1}=\sqrt{2}(1\pm i),-\sqrt{2}(1\pm i)$；这四个解都是复数，所以在实数范围内 $\sqrt[4]{-16}$ 无解.

□

根据上面的例子可以看到，在实数范围内，负数不能开平方或四次方. 但在复数范围内，负数却可以开平方或四次方. 由于在初中阶段，只涉及到实数，没有接触到复数. 所以在初中阶段，负数不能开平方或四次方.

2.1.2 笔算开方

教材上只讲到对一个简单的完全平方数开平方，而没有讲如何对任意一个正数怎么计算平方根. 比如大家都知道计算简单的开平方计算：$\sqrt{81}=9,\sqrt{16}=4$ 等，但涉及到非完全平方数开根号，却只介绍了利用计算器来计算. 但考试时禁止使用计算器，那怎么办? 比如当考试时遇到 $\sqrt{26}=?$，$\sqrt{88}=?$ 时，手头上没有计算器，那能不能手算呢? 答案是能. 下面先介绍如何笔算开根号.

1. 正整数开平方 (以 22146436 开平方为例)：

(1) 把被开平方数从右向左每隔两位用撇号分开，若最后剩下一位时添加 0 构成两位；(如 22146436 写成 $22'14'64'36$，2146436 写成 $02'14'64'36$.)

(2) 从左边第一段 (如 $22'14'64'36$ 左边第一段的 22) 求得算术平方根的第一位数字 (如 4，不能算 5，因为写 5 的话，$5^2=25>22$，而 $4^2=16<22$. 类似笔算短除法试商.)

(3) 从第一段减去这第一位数字的平方 (如 $22-4^2=22-16=6$)，再把被开平方数的第二段写下来，作为第一个余数 (如 614)；

(4) 把所得的第一位数字 (如 4) 乘以 20，去除第一个余数所得的商的整数部分 (如 $614\div(4\times20)=7.675$ 的整数部分 7) 作为试商 (注：如果这个整数部分大于或者等于 10，就改用 9 作试商，如果第一个余数小于第一位数字乘以 20 的积，则得试商 0)；

(5) 把第一位数字的 20 倍加上试商的和，乘以这个试商后所得的值不大于第一个余数时 (如 $(4\times20+7)\times7=609\le614$)，这个试商就是算术平方根的第二位数字 (注：如果所得的积大于余数时，就要把试商减去 1 再试，直到积小于或者等于余数为止)；

(6) 用第一个余数减去第一位数字的 20 倍加上试商的和乘以该试商所得的值 (如 $614-609=5$). 往后用相同的方法，继续求算术平方根的其他各位数字.

图2.1详细给出了对 22146436 开平方的计算过程. 计算结果为 $\sqrt{22146436}=4706$. 上面介绍了对正整数的开平方笔算方法. 对小数也同样适用. 区别在于用撇号分段时要从小数点起向右每隔两位用撇号分开，向左也是每隔两位用撇号隔开. 如果隔开后最后一段或第一段只有一位数，就添加 0 补充成两位. 如对 0.05388 分段成 $00.05'38'80$，对 175.2976 分段成 $01'75.29'76$. 具体的的计算步骤如图2.2. 所以 $\sqrt{0.05388}=0.232....$，$\sqrt{175.2976}=13.24$.

习题 1 笔算 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$. ■

笔算开平方运算较繁，但用该方法可求出任意一个正数的平方根的具有任意精确度的近似值.

上面介绍了笔算开平方的方法. 那这个方法可不可以推广到开立方呢? 答案是可以推广. 具体步骤如下：

(1) 将被开立方数的整数部分从个位起向左每隔三位用撇号分开；

(2) 根据最左边一组，求得立方根的最高位；

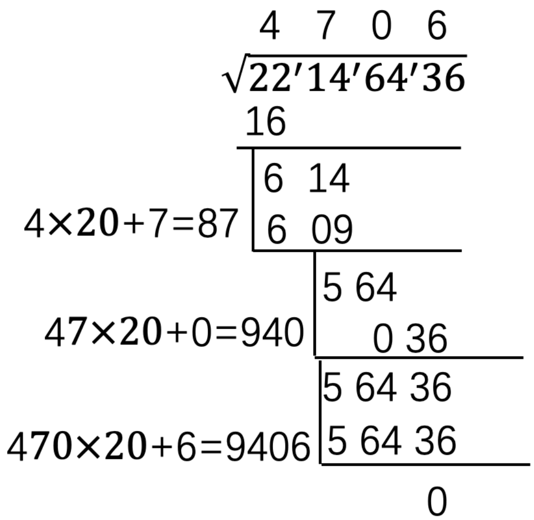


图 2.1: 对 22146436 笔算开平方的具体步骤.

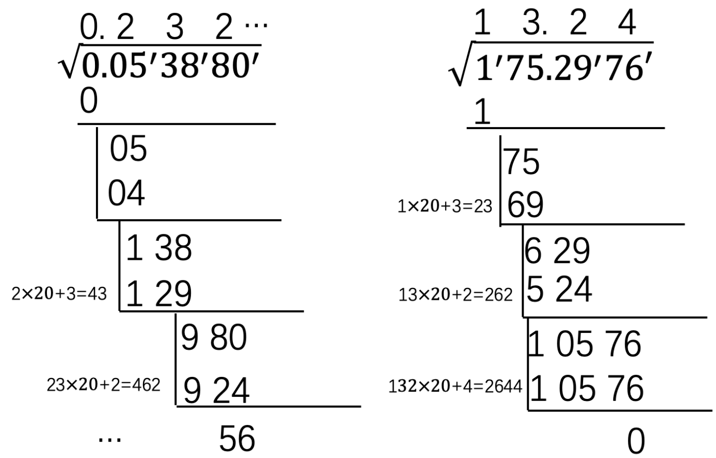


图 2.2: 对 0.05388 和 175.2976 笔算开平方的具体步骤.

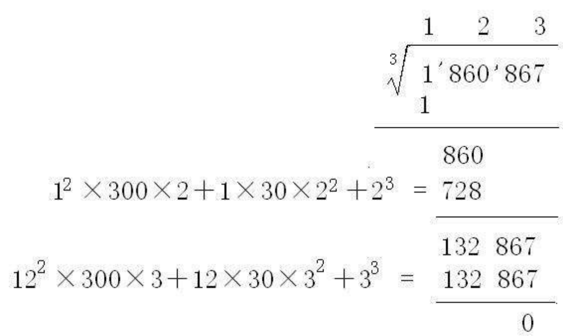


图 2.3: 对 1860867 笔算开立方的具体计算步骤.

(3) 用第一组数减去立方根最高位数的立方，在其右边写上第二组数；
(4) 用求得的最高位数的平方的 300 倍试除上述余数，得出试商；并把求得得最高位数的平方的 300 倍与试商的积、求得的最高位数的 30 倍与试商的平方的积和试商的立方写在竖式左边，观察其和是否大于余数，若大于，就减少试商再试；若不大于，试商就是立方根的第二位数；
(5) 用同样的方法继续进行下去.

图2.3给出对 1860867 笔算开立方的具体计算步骤. 且结果为 $\sqrt[3]{1860867} = 123$.

习题 2 笔算 $\sqrt[3]{10}$，$\sqrt[3]{28}$. ■

上面介绍了利用竖式来笔算开根号. 这个方法与小学学的长除法很类似. 那这个方法是否可以推广到开四次方，甚至开多次方呢? 答案是能，但运算却非常繁杂. 下面再介绍另外一个方法笔算开根号. 但这个方法求出来的数值精确度不如上面的竖式笔算.

为了介绍这个方法，先给出一个约等式：

定理 2.1.1 若 $|x| \ll 1$，则 $(1+x)^n \approx 1+nx$.

一定注意 $|x| \ll 1$. 否则该约等式不成立. 比如当 $n=2, x=2$ 时，此时 $|x| \gg 1$，则 $(1+x)^n = (1+2)^2 = 9 \neq 1+2\times 2 = 5$.

利用这个约等式可以近似开根号. 若 $n=\frac{1}{2}$，且 $|x| \ll 1$ 时，有：$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$，$\sqrt{1-x} \approx 1-\frac{1}{2}x$.

■ **例 2.1.2** 利用上述约等式计算 $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{10}$. ■

解.

(1) $\sqrt{2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{4\times\left(1-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{1-\frac{1}{2}} \approx 2\times\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = 1.5$；实际上 $\sqrt{2} = 1.414...$，这个方法计算出来 $\sqrt{2} \approx 1.5$，可见精确度不高；但 1.5 与 1.414 很接近;

(2) $\sqrt{3} = \sqrt{4-1} = \sqrt{4\times\left(1-\frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{1-\frac{1}{4}} \approx 2\times\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right) = 1.75$. 实际上 $\sqrt{3} = 1.732...$，但 1.75 与 1.732 相比，精确度精确到小数点后一位;

(3) $\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \sqrt{4\times\left(1+\frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{1+\frac{1}{4}} \approx 2\times\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\right) = 2.25$. 实际上 $\sqrt{5} = 2.236...$，但 2.25 与 2.236 相比，精确度精确到小数点后一位;

(4) $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{9\times\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}} \approx 3\times\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\right) = 3.16666....$ 实际上 $\sqrt{10} = 3.1622...$，可见 $3.16666...$ 与 3.1622 非常接近; 且精确度精确到小数点后两位.

□

根据上面这个例子可以看到，当 $|x|$ 越小时，利用这个方法计算的精度越准确. 比如当 $|x| = |\frac{1}{2}| = 0.5$ 时，在计算 $\sqrt{2}$ 值精度不够. 但当 $|x| = |\frac{1}{9}| = 0.111...$ 时，计算 $\sqrt{10}$ 能精确到小数点后两位.

习题 3 利用该方法计算 $\sqrt{26}, \sqrt{88}$，并与用计算器计算的值相比. ■

习题 4 利用该方法计算 $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{9}$，并与用计算器计算的值相比.
提示：$|x| \ll 1$ 时，有：$\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x$，$\sqrt[3]{1-x} \approx 1-\frac{1}{3}x$. ■

2.2 再谈因式分解

因式分解在数学中一般理解为把一个多项式分解为两个或多个的因式（因式亦为多项式）的过程. 在做因式分解时会遇到很有意思的一些等式. 比如会遇到完全平方公式、完全立方公式等. 下面对这方面的知识进行扩展，叙述其来龙去脉.

2.2.1 二项式定理简介

完全平方公式指的是 $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. 完全立方公式为 $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$. 这两个公式可以按照括号展开来得到. 当然也可以利用图形来说明.

如图2.4，对于正值 a 和 b，$(a+b)^2$ 是边为 $a+b$ 的正方形的面积，这个正方形可以切割成 1 个边为 a 的正方形 (面积为 a^2)，1 个边为 b 的正方形 (面积为 b^2)，和 2 个边分别为 a, b 的长方形 (面积为 ab). 所以边为 $a+b$ 的正方形的面积 $(a+b)^2$ 等于这两个小正方形的面积与两个长方形的面积之和. 即 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$. 同理，$(a+b)^3$ 是边为 $a+b$ 的正方体的体积，这个正方体可以切割成 1 个边为 a 的立方体，1 个边为 b 的立方体，3 个 $a\times a\times b$ 的长方体，和 3 个 $a\times b\times b$ 的长方体. 故大正方体的体积 $(a+b)^3$ 为这两个小正方体的体积与 6 个长方体的体积之和. 即 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

但 $(a+b)^4$ 表示什么呢? 同样地，$(a+b)^4$ 表示边长为 $a+b$ 的超立方体的体积. 这个超立方体的图形见图2.4最后一行. 其已经对 $(a+b)^4$ 进行展开. 超立方体位于 4 维空间. 由

于我们生活在 3 维空间里，难以对 4 维空间进行想象. 更不用说 5 维、6 维甚至更高维的空间了. 那 $(a+b)^5$、$(a+b)^6$ 这些该怎么展开呢?

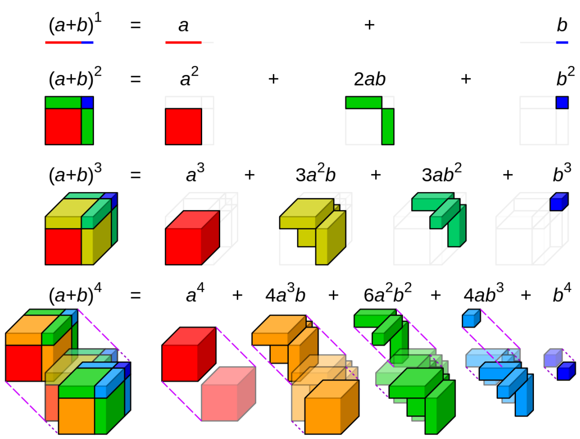


图 **2.4:** 对直到 4 次幂的二项式的可视化.

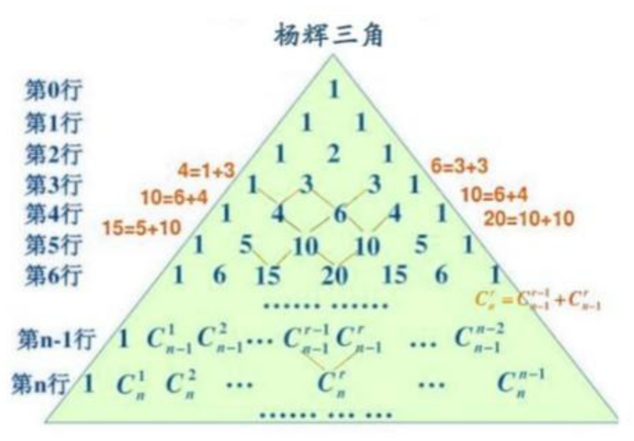


图 **2.5:** 杨辉三角形.

一个方法是杨辉三角形. 杨辉三角形，又称帕斯卡三角形、贾宪三角形、海亚姆三角形、巴斯卡三角形，是二项式系数的一种写法，形似三角形，在中国首现于南宋杨辉的《详解九章算法》得名，书中杨辉说明是引自贾宪的《释锁算书》，故又名贾宪三角形. 杨辉三角形第 n 行 (此处 n 为包含 0 在内的自然数) 正好对应于 $(a+b)^n$ 展开的系数 ($(a+b)^n$ 称为二项式). 比如第二行的 1 2 1 是幂指数为 2 的二项式 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ 的系数. 在杨辉三角形中，除每行最左侧与最右侧的数字以外，每个数字等于它的左上方与右上方两个数字之和 (也就是说，第 n 行第 k 个数字等于第 $n-1$ 行的第 $k-1$ 个数字与第 k 个数字的和，这里 k 也为包含 0 在内的自然数). 比如图2.5中的杨辉三角形，第 4 行第 1 个数字 (这个数字为 4) 等于第 3 行的第 0 个数字 (这个数字为 1) 与第 1 个数字 (这个数字为 3) 之和.

有了杨辉三角形，那么就能对二项式进行展开 $(a+b)^n$. 下面通过举例来说明如何展开.

■ **例 2.2.1** 利用杨辉三角形对二项式 $(a+b)^3$ 进行展开. ■

解. 二项式 $(a+b)^3$ 的阶数为 3，所以展开的系数对应于杨辉三角形的第 3 行：1 3 3 1. 确定系数后，再确定每个单项式. 第 k 个系数对应的单项式为 $a^{3-k}b^k$. 比如第 0 个系数为 1，对应的单

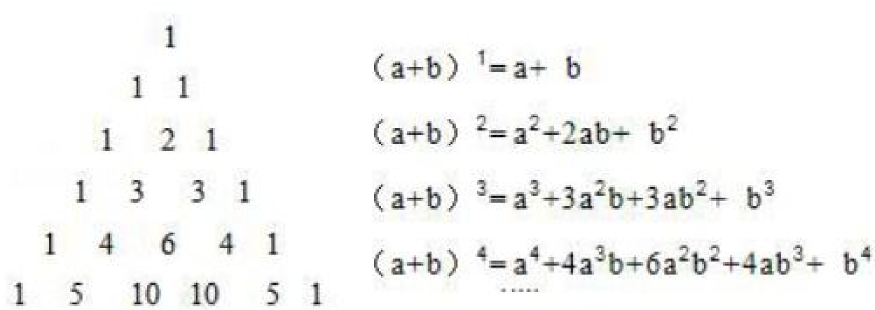


图 **2.6:** 杨辉三角形与二项式的展开.

项式为 $a^{3-0}b^0=a^3$. 第 1 个系数为 3，对应的单项式为 $a^{3-1}b^1=a^2b$. 依次类推. 所以 $(a+b)^3$ 可以展开为 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. 见图2.6. □

习题 5 利用杨辉三角形对二项式 $(a+b)^5$ 进行展开. ■

上述已介绍如何利用杨辉三角形来对二项式进行展开. 下面介绍对这种展开方法进行统一和一般化.

在对二项式 $(a+b)^n$ 进行展开时，首先要确定杨辉三角形的第 n 行的系数，第 n 行、第 k 个系数对应的单项式为 $a^{n-k}b^k$. 我们可以将这第 n 行、第 k 个系数记作 C_n^k. 所以 $(a+b)^n$ 展开的第 k 项可以记作 $C_n^k a^{n-k}b^k$. 比如 $(a+b)^3$ 展开的第 2 项可以记作 $C_3^2 ab^2$，且 $C_3^2=3$. 第 n 行、第 k 个系数记作 C_n^k 称为**二项式系数**.

二项式定理描述了二项式的幂的代数展开. 根据该定理，可以将两个数之和的整数次幂诸如 $(x+y)^n$ 展开为类似 ax^by^c 项之和的恒等式，其中 b,c 均为非负整数且 $b+c=n$. 系数 a 是依赖于 n 和 b 的正整数. 当某项的指数为 1 时，通常略去不写.

刚提到杨辉三角形中，第 n 行第 k 个数字等于第 $n-1$ 行的第 $k-1$ 个数字与第 k 个数字的和. 用数学语言描述，就是：

$$C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k \tag{2.2.1}$$

且关于 C_n^k 的计算公式为：

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.2.2}$$

其中！称为阶乘符号. $n!=n(n-1)(n-2)...1$ 称为 n 的阶乘. 且规定 $0!=1$.

比如 $C_3^2=\frac{3!}{2!(3-2)!}=\frac{3\times2\times1}{2\times1\times1}=3$.

习题 6 (2018 衡南县五科联考 T_1-8) 若 "!" 是一种数学运算符号，并且 $1!=1, 2!=2\times1=2, 3!=3\times2\times1=6, 4!=4\times3\times2\times1=24, ..$ 且公式 $C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!}$，则 $C_{12}^5+C_{12}^6=($ $)$

$A.C_{13}^5$ $B.C_{13}^6$ $C.C_{13}^{11}$ $D.C_{12}^7$ ■

现在可以对二项式 $(a+b)^n$ 进行统一化的处理了.

定理 2.2.1 将 $a+b$ 的任意次幂展开成和的形式：

$$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^na^0b^n.$$

这个公式也称为**二项式公式**或**二项恒等式**. 若使用求和符号 Σ，这个公式可写为：

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^kb^{n-k} \tag{2.2.3}$$

二项式公式有很广的应用. 比如若令 $a=1, b=x$, 则有：

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kx^k \tag{2.2.4}$$

展开写就是：$(1+x)^n=C_n^0x^0+C_n^1x^1+...+C_n^kx^k+...+C_n^nx^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+...+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-1}+x^n$. 若 $|x|\ll1$，则 $x^2,x^3,...,x^n$ 相比于 x 非常非常小，可以忽略不计. 此时就有 $(1+x)^n\approx1+nx$. 这就是上节讲到的用这个公式来笔算开根号.

2.2.2 多项式的竖式除法

当涉及到多项式除以多项式时，综合除法起到方便计算的作用. 竖式除法是一种简便的多项式除法，只需加、乘两种运算. 一般的综合除法可计算除式为一次多项式时的多项式除法. 这个方法与小学时学的长除法类似. 下面通过举例来说明如何应用.

■ **例 2.2.2** 当 $a \neq b$ 时，求 $\frac{a^2-b^2}{a-b}$，$\frac{a^3-b^3}{a-b}$. ■

✎ **解.** 如图2.7, 与长除法类似，被除数为 a^2-b^2，除数为 $a-b$. 先商 a，得到 a^2-ab..... 所以最后的商为 $a+b$，余数为 0. 同理，对于 a^3-b^3 也类似，商为 a^2+ab+b^2，余数为 0. 所以 $\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$，$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$. □

$$
\begin{array}{r}
a+b \\
a-b \overline{\big) a^2-b^2} \\
a^2-ab \\
\hline
ab-b^2 \\
ab-b^2 \\
\hline
0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
a^2+ab+b^2 \\
a-b \overline{\big) a^3-b^3} \\
a^3-a^2b \\
\hline
a^2b-b^3 \\
a^2b-ab^2 \\
\hline
ab^2-b^3 \\
ab^2-b^3 \\
\hline
0
\end{array}
$$

图 **2.7:** 竖式除法的计算过程.

$$
\begin{array}{r}
x-13 \\
x^2+x-3 \overline{\big) x^3-12x^2-42} \\
x^3+x^2-3x \\
\hline
-13x^2+3x-42 \\
-13x^2-13x+39 \\
\hline
16x-81
\end{array}
$$

图 **2.8:** 竖式除法的计算过程.

■ **例 2.2.3** 利用竖式除法计算 $\frac{x^3-12x^2-42}{x^2+x-3}$. ■

✎ **解.** 如图2.8，商为 $x-13$，余数为 $16x-81$. 故 $x^3-12x^2-42=(x-13)(x^2+x-3)+(16x-81)$. □

习题 7 利用竖式除法计算 $\frac{2x^2+5x+3}{2x-3}$. ■

类似地，通过竖式除法可计算得到如下等式：$(a \neq b)$

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+....+b^{n-1} \tag{2.2.5}$$

若令 $a=1$，则有：$(b \neq 1)$

$$1+b+b^2+b^3+....+b^{n-1}=\frac{1-b^n}{1-b} \tag{2.2.6}$$

习题 8 计算 $2+2^2+2^3+....+2^{n-1}$. ■

习题 9 计算 $2+2^3+2^5+....+2^{2n-1}$. ■

2.2.3 自然数的幂和

我们知道 $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$. 那么 $1^2+2^2+3^2+...+n^2$ 呢? $1^3+2^3+3^3+...+n^3$ 呢? 现在我们可以来考虑这个问题.

上节我们得到了 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$. 现在令 $a=k+1$，$b=k$，$k=0,1,2,3,...,n$. 这样就有：

$$(k+1)^2-k^2=(k+1-k)(k+1+k)=2k+1 \tag{2.2.7}$$

将 $k=0,1,2,3,...,n$ 依次代入上述等式，得：

$$\begin{gathered}1^2-0^2=2\times 0+1\\2^2-1^2=2\times 1+1\\3^2-2^2=2\times 2+1\\...\\(n-1)^2-(n-2)^2=2\times(n-2)+1\\n^2-(n-1)^2=2\times(n-1)+1\\(n+1)^2-n^2=2\times n+1\end{gathered}$$

然后把这 $n+1$ 个等式相加，左边加左边，右边加右边. 左边相加各个项相互抵消，最后得 $(n+1)^2$. 右边相加得 $2\times(0+1+2+3+...+n-2+n-1+n)+1\times(n+1)$. 所以最后有：

$$(n+1)^2=2\times(0+1+2+3+...+n-2+n-1+n)+n+1$$

整理，得：

$$1+2+3+...+n=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2} \tag{2.2.8}$$

这就证明了 n 个自然数相加的通用表达公式. 同样地，利用完全立差公式可以推导出自然数平方和公式. 将 $a=k+1$，$b=k(k=0,1,2,3,...,n)$ 代入完全立方差公式，得：

$$(k+1)^3-k^3=(k+1-k)\left[(k+1)^2+k(k+1)+k^2\right]=(k+1)^2+2k^2+k \tag{2.2.9}$$

将 $k=0,1,2,3,...,n$ 依次代入上述等式，得：

$$\begin{gathered}1^3-0^3=1^2+2\times 0+0\\2^3-1^3=2^2+2\times 1^2+1\\3^3-2^3=3^2+2\times 2^2+2\\...\\n^3-(n-1)^3=n^2+2(n-1)^2+n-1\\(n+1)^3-n^3=(n+1)^2+2n^2+n\end{gathered}$$

将上述等式相加，得：

$$(n+1)^3=1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2+2(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+1+2+3+...+n$$

整理等式，得：

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{3}\left[(n+1)^3-(n+1)^2-\frac{n(n+1)}{2}\right]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2.2.10}$$

习题 10 证明 $1^3+2^3+3^3+....+n^3=\frac{[n(n+1)]^2}{2^2}$.
提示：利用 $a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$ 计算.

上面介绍了自然数、自然数的平方、自然数的立方之和公式. 那能不能推广呢？比如当 m 是正整数时，$1^m+2^m+3^m+..+n^m$ 是多少？有没有统一的公式？答案是有. 为了方便，我们将 $1^m+2^m+3^m+..+n^m$ 表示成 $S_m(n)$. 那么就有：

定义 2.2.1 $S_m(n)=1^m+2^m+....+n^m$

比如 $S_1(n)=1+2+3+...+n$，$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+..+n^2$.
这样我们可以有如下的统一公式：

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}C_{m+1}^{k}B_kn^{m+1-k} \tag{2.2.11}$$

其中 B_k 称为伯努利数，$B_0=1,B_1=\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},B_3=0,B_4=-\frac{1}{30},B_5=0,B_6=\frac{1}{42},B_7=0,B_8=-\frac{1}{30}$. 一般地有：

$$\sum_{j=0}^{m}C_{m+1}^{j}B_j=0 \tag{2.2.12}$$

利用公式 (2.2.11) 可以对自然数的任意次整数幂之和进行展开. 比如:
当 $m=1$ 时，有：

$$S_1(n)=1+2+3+4+..+n=\frac{1}{2}(C_2^0B_0n^2+C_2^1B_1n^1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$$

当 $m=2$ 时，有：

$$S_2(n)=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{1}{3}(C_3^0B_0n^3+C_3^1B_1n^2+C_3^2B_2n^1)=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$$

当 $m=3$ 时，有：

$$S_3(n)=1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}(C_4^0B_0n^4+C_4^1B_1n^3+C_4^2B_2n^2+C_4^3B_3n^1)=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2$$

当 $m=4$ 时，有：

$$\begin{aligned}S_4(n)=1^4+2^4+3^4+...+n^4&=\frac{1}{5}(C_5^0B_0n^5+C_5^1B_1n^4+C_5^2B_2n^3+C_5^3B_3n^2+C_5^4B_4n^1)\\&=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\end{aligned}$$

习题 11 证明：$1^m+3^m+5^m+7^m+....+(2n-1)^m=S_m(2n)-2^mS_m(n)$.

2.2.4 自然数倒数的幂和 *

上面介绍了利用伯努利数来表达自然数幂和的一般公式. 那你有没有想过自然数的倒数幂之和有没有一般公式呢? 比如 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+....+\frac{1}{n}$、$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}$、.... 答案是没有. 但是如果加到无穷多项时就不一样了. 比如 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\frac{\pi^2}{6}$. 下面简介这个一般规律.

为了表示方便，我们有如下定义：

定义 2.2.2 $\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+...+\frac{1}{n^s}+.....$ 称为黎曼函数.

比如 $\zeta(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+....+\frac{1}{n}+...$; $\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$; $\zeta(-1)=1+2+3+4+....+n+.....$

一般地，当 $k=1,2,3...$ 时，我们有：

$$\zeta(2k)=\frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}B_{2k}}{(2k)!}\pi^{2k} \tag{2.2.13}$$

比如 $k=1$ 时：

$$\zeta(2)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+...=\frac{2B_2}{2!}\pi^2=\frac{\pi^2}{6}$$

$k=2$ 时：

$$\zeta(4)=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+...+\frac{1}{n^4}+...=-\frac{2^3B_4}{4!}\pi^4=\frac{\pi^4}{90}$$

习题 12 证明：$1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{7^s}+...+\frac{1}{(2n-1)^s}+.....=\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)$ ■

2.2.5 完全平方差公式与拉马努金恒等式

首先来计算这个式子：

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+...}}}}}}=?$$

咋一看这个式子可以永远写下去，似乎无法计算出来. 实际上要计算这个式子并不是很难. 利用完全平方差公式就可以解决.

完全平方差公式为 $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. 令 $b=1$，得 $a^2-1=(a-1)(a+1)$，移项开根号得 $a=\sqrt{1+(a-1)(a+1)}$. 下面开始魔幻般地迭代：

将 a 用 $a+1$ 替换，得：

$$a+1=\sqrt{1+a(a+2)}$$

然后将这个公式代入 $a=\sqrt{1+(a-1)(a+1)}$，得

$$a=\sqrt{1+(a-1)\sqrt{1+a(a+2)}}$$

然后将 a 用 $a+2$ 替换，得：

$$a+2=\sqrt{1+(a+1)(a+3)}$$

然后将这个公式代入 $a=\sqrt{1+(a-1)\sqrt{1+a(a+2)}}$，得

$$a=\sqrt{1+(a-1)\sqrt{1+a\sqrt{1+(a+1)(a+3)}}}$$

然后将 a 用 $a+3$ 替换，得：

$$a+3=\sqrt{1+(a+2)(a+4)}$$

然后将这个公式代入 $a=\sqrt{1+(a-1)\sqrt{1+a\sqrt{1+(a+1)(a+3)}}}$，得

$$a=\sqrt{1+(a-1)\sqrt{1+a\sqrt{1+(a+1)\sqrt{1+(a+2)(a+4)}}}}$$

依次往下做下去，就得到：

$$a=\sqrt{1+(a-1)\sqrt{1+a\sqrt{1+(a+1)\sqrt{1+(a+2)\sqrt{1+\ldots}}}}} \tag{2.2.14}$$

令 $a=2$，得：

$$2=\sqrt{1+\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}} \tag{2.2.15}$$

令 $a=3$，得：

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\ldots}}}}} \tag{2.2.16}$$

这个公式就是刚才所要求的式子. 这个式子 eq(2.2.16) 称为拉马努金恒等式.

同样地，若令 $a=4$，得到：

$$4=\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\ldots}}}}} \tag{2.2.17}$$

拉马努金出生在印度，是亚洲史上最著名的数学家之一. 尽管他从未受过正规的高等数学教育，却沉迷数论，尤爱牵涉 π、质数等数学常数的求和公式，以及整数分拆. 惯以直觉（或跳步或称之为数感）导出公式，不喜作证明，而他的理论在事后往往被证明是对的. 他所留下的尚未被证明之公式，引发了后来的大量研究. 拉马努金自学成才并负笈剑桥的传奇故事曾数次被拍成电影，包括了 2015 年的电影《知无涯者》. 拉马努金是印度在过去一千年中所出的非常伟大的数学家. 他的直觉的跳跃甚至令今天的数学家感到迷惑. 在他死后 70 多年，他的论文中埋藏的秘密依然被挖掘出来. 他的定理被应用到他活着的时候很难想象到的领域.

习题 13 证明：$3=\sqrt{4+\sqrt{4+3\sqrt{4+5\sqrt{4+7\sqrt{4+9\sqrt{4+\ldots..}}}}}}$

提示：$a^2-n^2=(a-n)(a+n)$. 再令 $n=2$. ■

2.3 勾股定理的应用

勾股定理，又称毕达哥拉斯定理（Pythagoras theorem）、勾股定理、毕氏定理、商高定理、新娘座椅定理、百牛定理，是平面几何中一个基本而重要的定理. 勾股定理说明，平面上的直角三角形的两条直角边的长度（古称勾长、股长）的平方和等于斜边长（古称弦长）的平方. 反之，若平面上三角形中两边长的平方和等于第三边边长的平方，则它是直角三角形(直角所对的边是第三边). 勾股定理是人类早期发现并证明的重要数学定理之一. 这一章主要讲勾股定理的应用方面.

2.3.1 勾股数组与费马大定理

勾股数组是满足勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 的正整数组 (a,b,c)，其中 a,b,c 称为**勾股数** (也称毕氏三元数). 例如 $(3,4,5),(5,12,13)$ 就是勾股数组.

那么存在无穷多个勾股数组吗? 答案是肯定的. 因为若 (a,b,c) 是勾股数组，则 $(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$ 也是勾股数组，因为 $(\lambda a)^2+(\lambda b)^2=\lambda^2(a^2+b^2)=(\lambda c)^2$. 显然，这些新的勾股数组 $(\lambda a,\lambda b,\lambda c)$ 并不令人感兴趣. 所以我们转而关注那些没有公因数的三元数组: **本原勾股数组**. 本原勾股数组 (a,b,c) 的 a,b,c 没有公因数. 例如 $(3,4,5)$ 是本原勾股数组，而 $(6,8,10)$ 不是，因为 $6,8,10$ 有公因数 2.

考虑到本原勾股数组 (a,b,c) 没有公因数，可以将勾股公式 $a^2+b^2=c^2$ 整理为 $b^2=c^2-a^2=(c-a)(c+a)$. 考虑到 a,c 没有公因数，所以 $c-a$ 和 $c+a$ 也没有公因数. 而 $(c-a)(c+a)$ 为平方数，故 $c-a$ 和 $c+a$ 比为平方数. 设：

$$c-a=n^2,c+a=m^2$$

其中 $m>n\geq 1$ 是没有公因数的奇数.

则：

$$a=\frac{m^2-n^2}{2},c=\frac{m^2+n^2}{2},b=mn$$

更一般地，任意一组勾股数 (a,b,c) 可以表示为如下形式：

$$a=k(m^2-n^2),b=2kmn,c=k(m^2+n^2)$$

其中 k,m,n 都是正整数，$m>n$.

■ **例 2.3.1** 证明勾股数组 (a,b,c) 都是方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解. ■

☞ **证明.** 勾股数组 (a,b,c) 为 $a=k(m^2-n^2),b=2kmn,c=k(m^2+n^2)$，则：

$$a^2+b^2=k^2\left(m^2-n^2\right)^2+4k^2m^2n^2=k^2\left(m^2+n^2\right)^2=c^2$$

□

由上可知，方程 $x^2+y^2=z^2$ 有整数解. 但如果把指数 2 推广呢? 比如当 $n>2$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 有没有正整数解呢? 答案是没有. 而这正是第一章提到的费马大定理. 而费马大定理的证明与椭圆曲线有关.

2.3.2 勾股定理与海伦-秦九韶公式

大家都知道一个三角形的面积为底乘以高再除以二. 这个前提是必须知道三角形的高是多长，才能求出面积. 那如果只知道三角形的三条边长，是否可以求出面积呢? 答案是可以求. 这个方法就是海伦-秦九韶公式. 海伦-秦九韶公式（Heron's formula 或 Hero's formula），又译希罗公式、希伦公式、海龙公式.

定理 2.3.1 海伦-秦九韶公式: 若一个三角形的三个边长分别为 a, b, c，则三角形的面积 S 为：

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

其中 $p = \frac{a+b+c}{2}$.

这个公式可以利用勾股定理得到. 下面给出如何利用勾股定理得到海伦-秦九韶公式.

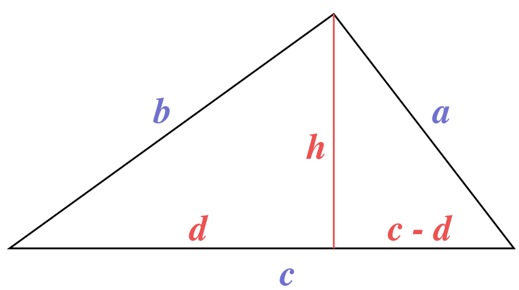


图 2.9: 证明海伦-秦九韶公式.

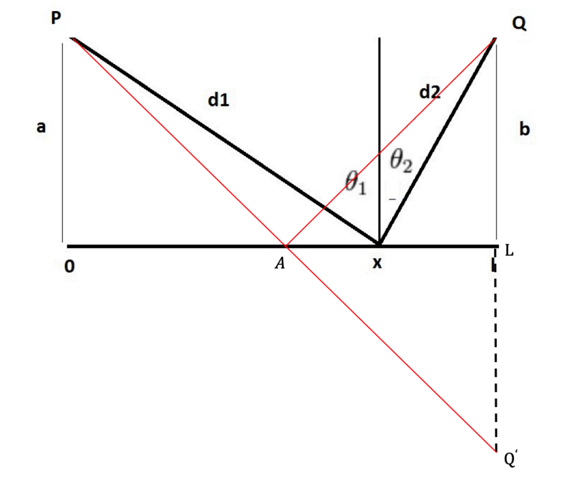


图 2.10: 光的反射问题.

如图2.9所示，大三角形两条边为 a, b. 另一边长为 c，且该边上的高为 h. 由勾股定理，得：

$$b^2 = h^2 + d^2 \tag{2.3.1}$$

$$a^2 = h^2 + (c-d)^2 \tag{2.3.2}$$

eq(2.3.2) 减去 eq(2.3.1) 得：

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cd$$

整理该式，可得：

$$d = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c} \tag{2.3.3}$$

将 eq(2.3.3) 代入 eq(2.3.1)，得：

$$h^2 = b^2 - d^2 = b^2 - \left(\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}\right)^2$$

$$= \frac{(2bc - a^2 + b^2 + c^2)(2bc + a^2 - b^2 - c^2)}{4c^2}$$
$$= \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4c^2}$$
$$= \frac{(b+c-a)(b+c+a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}$$
$$= \frac{2(p-a)\cdot(2p)\cdot 2(p-c)\cdot 2(p-b)}{4c^2}$$
$$= \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{4c^2}$$

三角形面积 $S = \frac{ch}{2}$，代入上面 h 的表达式，得：

$$S = \frac{ch}{2} = \sqrt{\frac{c^2}{4} \cdot \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{2.3.4}$$

以上为海伦-秦九韶公式的推导过程. 海伦-秦九韶公式有很强的应用. 因为只要知道三角形的三条边长即可求出面积. 此外，该公式还可以快速求任意多边形的面积，因为任何 n 边的多边形都可以分割成 $n-2$ 个三角形. 比如说测量多边形土地的面积的时候，不用测三角形的高，只需测两点间的距离，就可以方便地计算出土地面积.

2.3.3 勾股数与任意三角形三边长的关系

大家知道一个三角形的两边长之和大于第三边，两边之差小于第三边. 那么为什么呢? 怎么证明? 事实上，在图2.9的锐角三角形中，我们已经得到了：

$$h^2 = \frac{((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2)}{4c^2}$$

而 $h^2 > 0$，故有:

$$((b+c)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) = 4c^2h^2 > 0$$

此时：

$$\begin{cases} (b+c)^2 - a^2 > 0 \\ a^2 - (b-c)^2 > 0 \end{cases} \quad or \begin{cases} (b+c)^2 - a^2 < 0 \\ a^2 - (b-c)^2 < 0 \end{cases}$$

而当 $a, b, c > 0$ 时, $\begin{cases} (b+c)^2 - a^2 < 0 \\ a^2 - (b-c)^2 < 0 \end{cases}$ 无解. 因为该不等式组可整理为 $(b+c)^2 < a^2 < (b-c)^2$，这样就得到 $(b+c)^2 < (b-c)^2$，而当 $b, c > 0$ 时，该不等式不成立.

所以我们有：

$$\begin{cases} (b+c)^2 > a^2 \\ a^2 > (b-c)^2 \end{cases}$$

$(b+c)^2 > a^2$ 的解为 $a < b + c$，$a^2 > (b-c)^2$ 的解为 $-a < b - c < a$. 这样该不等式组的解为：

$$\begin{cases} b + c > a \\ a + c > b \\ a + b > c \end{cases}$$

且该不等式可整理为：

$$\begin{cases} a-c<b \\ a-b<c \\ b-c<a \\ b-a<c \\ c-a<b \\ c-b<a \end{cases}$$

这样就证明了在锐角三角形中，两边长之和大于第三边，两边之差小于第三边.

对于直角三角形，设两直角边为 a,b，斜边为 c. 则有 $a^2+b^2=c^2$. 故有 $c^2=a^2+b^2+2ab-2ab=(a+b)^2-2ab>(a+b)^2$. 则有 $c<a+b$.

而 $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab<a^2+b^2=c^2$. 解得 $-c<a-b<c$. 从而我们有：

$$\begin{cases} b+c>a \\ a+c>b \\ a+b>c \end{cases}$$

习题 14 证明在一个钝角三角形中两边长之和大于第三边，两边之差小于第三边. ■

2.3.4 勾股定理与光的平面反射

勾股数还可以结合图形用来求某个函数的最小值. 比如当 x 为多少时，$\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{b^2+(l-x)^2}(a,b,l>0)$ 可以取到最小的值.

如图2.10，线段 OP 的长度为 a，线段 OL 的长度为 l，线段 QL 的长度为 b，OX 的长度为 x，XL 的长度为 $l-x$. 在 $Rt\Delta POX$ 中，由勾股定理，得 $d_1=\sqrt{x^2+a^2}$，在 $Rt\Delta QLX$ 中，$d_2=\sqrt{b^2+(l-x)^2}$. $d_1+d_2=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{b^2+(l-x)^2}$. 于是刚才的问题可以转换为当点 X 位于线段 OL 何处时，d_1+d_2 最小. 这个问题叫作将军饮马问题.

为了确定点 X 的位置，首先我们选取 Q 关于线段 OL 的对称点 Q'. 这样线段 XQ' 的长度等于 XQ 的长度. 为了使得 d_1+d_2 最小，连接 P 和 Q'，与线段 OL 交于点 A. 也就是说当 X 位于 A 点时，d_1+d_2 有最小值. 因为 P 和 Q' 之间，线段最短.

此时 $Rt\Delta POA\sim Rt\Delta Q'LA$. 故有 $\frac{OP}{LQ'}=\frac{OA}{LA}$. 即 $\frac{a}{b}=\frac{|OA|}{l-|OA|}$. 解得 $|OA|=\frac{a}{a+b}l$. 也即当 $x=\frac{a}{a+b}l$ 时，$d_1+d_2=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{b^2+(l-x)^2}$ 有最小值.

实际上这个问题是属于光的平面反射问题. 关于光的传播，有个叫作费马原理. 费马原理（Fermat principle）最早由法国科学家皮埃尔·德·费马在 1662 年提出：光传播的路径是光程取极值的路径. 最初提出时，又名“最短时间原理”：光线传播的路径是需时最少的路径. 图2.10中，光从 P 点出发，经过平面镜 OL 然后反射到 Q 点，那么反射点 X 应该位于什么位置时，光走过的总路径 $d=d_1+d_2$ 最小. 上面已经求出，当反射点 X 位于 A 点时，$d=d_1+d_2$ 最小. 且此时角 θ_1 与角 θ_2 相等. 角 θ_1 称为入射角，角 θ_2 称为出射角. 实际上这个就是**光的反射定律**：光线在界面上的反射，入射角必须等于出射角.

2.4 坐标系与函数

初中阶段已接触一次函数、反比例函数、二次函数. 函数图像一般需要在坐标系展示. 坐标系将代数方程与几何联系起来. 研究代数方程与平面几何的关系称为解析几何. 解析几何（英语：Analytic geometry），又称为坐标几何（英语：Coordinate geometry）或卡氏几何（英语：Cartesian geometry），早先被叫作笛卡尔几何，是一种借助于解析式进行图形研究的几何学分支.

2.4.1 坐标系

坐标系是数学或物理学用语，坐标系可以用一个有序多元组表示一个点的位置. 一般常用的坐标系，各维坐标的数字均为实数，但在高等数学中坐标的数字可能是复数，甚至是或是其他抽象代数中的元素 (如交换环). 坐标系可以使几何学的问题转换为数字的问题，反之亦然，是解析几何学的基础. 在地理学中，描述地理位置时所用的经度及纬度构成了一种地理坐标系. 在天文学中，描绘天体在天球上位置的多种坐标系统是天球坐标系. 在物理学中，描述一系统在空间中运动的参考坐标系统则称作参考系.

一维空间的坐标系称为数轴. 数轴是最简单的坐标系，用一个实数标示一个点在线上的位置. 二维平面所用到的坐标系包括笛卡尔坐标系、极坐标系. 笛卡尔坐标系也称为**直角坐标系**，是最常用到的一种坐标系. 是法国数学家勒内·笛卡尔在 1637 年发表的《方法论》附录中提到的. 在平面上，选定二条互相垂直的线为坐标轴，任一点距坐标轴的有号距离为另一轴的坐标，这就是二维的笛卡尔坐标系，一般会选一条指向右方水平线称为 x 轴，再选一条指向上方的垂直线称为 y 轴，此两坐标轴设定方式称为“右手坐标系”. 在解析几何中，三维空间用的坐标系包括三维直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系. 当然初中阶段只会涉及到一维的数轴和二维平面的直角坐标系.

2.4.2 平面直角坐标系中两点的距离以及三角形的面积

对于空间中，任意两点的最短距离为连接这两点的测地线的长度. 在一个平面中，这个测地线是直线. 因此，在平面中任意两点的最短距离为连接这两点的线段的长度. 对于一维空间中，两点的距离用绝对值表示. 如在数轴 Ox 中，$|x-a|$ 表示点 x 到点 a 的距离. 对于二维平面，我们可以用平面直角坐标系来定量地表示这个长度.

如图2.11，在平面坐标系中，点 A 的坐标是 (x_A, y_A). 点 B 的坐标是 (x_B, y_B). 过点 A 作平行 y 轴的直线，过点 B 作平行 x 轴的直线. 两直线相交于点 $C(x_C, y_C)$. 且有 $x_C = x_A$，$y_C = y_B$. 在 $Rt\Delta ACB$ 中，由勾股定理，$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2$. 而易知 $|AC| = |y_A - y_C| = |y_A - y_B|$，$|CB| = |x_B - x_C| = |x_B - x_A|$. 从而点 A 和点 B 的距离为 $|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

定理 2.4.1 在平面直角坐标系 Oxy 中，$A(x_A, y_A)$ 与 $B(x_B, y_B)$ 的距离为：

$$d = |AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

知道了如何在平面直角坐标系表示两点的距离后，我们可以处理很多几何问题. 比如三角形的面积问题. 比如在图2.12中，只知道三角形的三个顶点的坐标，怎么求面积?

如图2.12，已知三角形 ABC 的三个顶点的坐标为 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$，怎么求三角形的面积 $S_{\Delta ABC}$?

我们可以先作一个矩形 $CDEF$. 再求该矩形的面积 S_{CDEF}，然后就有 $S_{\Delta ABC} = S_{CDEF} - S_{\Delta CAD} - S_{\Delta AEB} - S_{\Delta CBF}$.

矩形的面积 $S_{CDEF} = |CF| \cdot |CD| = |x_C - x_B| \cdot |y_A - y_C|$; $S_{\Delta CAD} = \frac{1}{2}|AD| \cdot |CD| =$

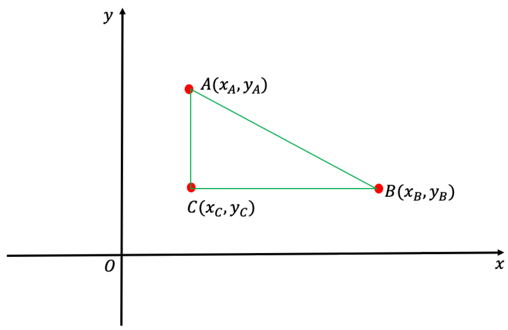


图 2.11: 平面直角坐标系中两点距离.

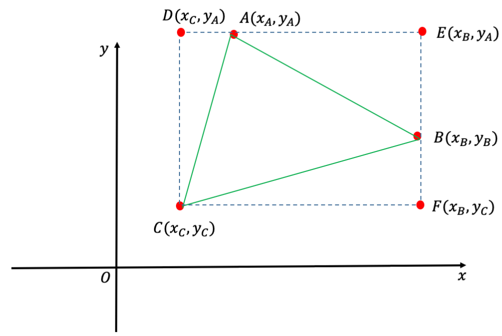


图 2.12: 平面直角系中三角形的面积.

$\frac{1}{2}|x_A - x_C| \cdot |y_A - y_C|$, $S_{\Delta AEB} = \frac{1}{2}|AE| \cdot |BE| = \frac{1}{2}|x_A - x_B| \cdot |y_A - y_B|$, $S_{\Delta CBF} = \frac{1}{2}|CF| \cdot |BF| = \frac{1}{2}|x_C - x_B| \cdot |y_C - y_B|$.

从而

$$S_{\Delta ABC} = S_{CDEF} - S_{\Delta CAD} - S_{\Delta AEB} - S_{\Delta CBF} = |x_C - x_B| \cdot |y_A - y_C| - \frac{1}{2}|x_A - x_C| \cdot |y_A - y_C|$$

$$-\frac{1}{2}|x_A - x_B| \cdot |y_A - y_B| - \frac{1}{2}|x_C - x_B| \cdot |y_C - y_B|$$

考虑到 $|DE| = |DA| + |AE|$，$|EF| = |EB| + |BF|$，即:

$$|x_B - x_C| = |x_A - x_C| + |x_A - x_B|, |y_A - y_C| = |y_A - y_B| + |y_B - y_C|$$

将此式代入上式，得：

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|(x_A - x_B)(y_A - y_C) - (x_A - x_C)(y_A - y_B)| = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}\right| \tag{2.4.1}$$

可见，三角形的面积可以用一个三阶行列式表示.

定义 2.4.1 已知三角形 ABC 的三个顶点的坐标为 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$，则三角形的面积 $S_{\Delta ABC} = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix}\right|$.

习题 15 已知三角形 ABC 的三个顶点的坐标为 $A(2, -1), B(3, 3), C(-2, 2)$，则三角形的面积 $S_{\Delta ABC} =$ ____. ■

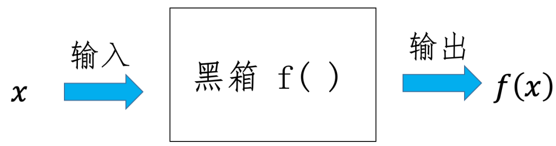


图 **2.13:** 函数就像一个黑箱，但输入 x 时，输出 $f(x)$.

2.4.3 何为线性函数?

要搞清楚什么是线性函数 (英语：linear function). 首先要明白什么函数(英语：function). 函数这个数学名词是数学家莱布尼兹在 1694 年开始使用的，用来描述跟曲线相关的一个量. 1775 年，数学家欧拉在《微分学原理》一书中又提出了函数的一个定义："如果某些量以如下方式依赖于另一些量，即当后者变化时，前者本身也发生变化，则称前一些量是后一些量的函数." 比如变量 y 与 x 的依赖关系是 $y=2x+1$，当 x 变化时，y 也变化，故称 y 是 x 的函数. 一般我们把函数写成 $f(x)$. 字母 f 取函数英文 function 的第一个字母. 所以上面 x 和 y 的函数关系可以写成 $f(x)=2x+1$. 这样写有个好处，因为从 $f(x)$ 可以直接看出这是关于自变量 x 的函数. 但初中阶段仅简单地涉及函数的定义，所以一般写成 $y=2x+1$.

函数可以看作机器或黑箱. 如图2.13，黑箱的作用是 $f(\quad)$，当左边输入 x 时，右边输出 $f(x)$. 当左边输入"狗"时，右边输出"f(狗)". 比如如果这个黑箱的作用是 $f(\square)=2\times\square+1$ 时，当输入 x，输出为 $f(x)=2x+1$. 当左边输入"狗"时，右边输出"f(狗)=2× 狗 +1". 通常最常见的函数的参数和函数值都是数字，其对应关系用函数式表示，函数值可以通过直接将参数值代入函数式得到.

上面已经介绍了何为函数. 那么什么是线性函数呢? 是不是像一根线一样? 线性函数准确的定义如下：

> **定义 2.4.2** 若函数 $f(x)$ 满足如下关系：
> 1. $f(c_1x_1+c_2x_2)=c_1f(x_1)+c_2f(x_2)$
> 2. $f(cx)=cf(x)$
>
> 则函数 $f(x)$ 称为线性函数. 其中 c,c_1,c_2 为任意的常数.

■ **例 2.4.1** 证明一次函数 $f(x)=kx+b$ 当 $b=0$ 时满足上述线性函数的定义，当 $b\neq 0$ 时不满足. ■

☞ **证明.** 当 $b=0$ 时，$f(c_1x_1+c_2x_2)=k(c_1x_1+c_2x_2)=c_1f(x_1)+c_2f(x_2)$，$f(cx)=kcx=ckx=c(kx)=cf(x)$；

当 $b\neq 0$ 时，$f(c_1x_1+c_2x_2)=k(c_1x_1+c_2x_2)+b\neq k(c_1x_1+c_2x_2)+(c_1+c_2)b=c_1f(x_1)+c_2f(x_2)$，$f(cx)=kcx+b\neq ckx+cb=cf(x)$. □

实际上，当 $b=0$ 时，一次函数 $f(x)=kx+b$ 为正比例函数 $f(x)=kx$. 所以由上面的严格定义可知，正比例函数是线性函数，而一次函数不一定是线性函数. 但中学阶段，在初等代数与解析几何，线性函数定义为只拥有一个变数的一阶多项式函数或者是只有常数的函数，因为在直角坐标系中这些函数的图形是直线. 所以不严格区分的话，一次函数称为线性函数.

> **习题 16** 证明反比例函数 $f(x)=\frac{k}{x}$ 不是线性函数. ■

2.4.4 一次函数与二元一次方程组

我们知道一次函数 $y = kx + b$ 在平面直角坐标系中表示一根斜率为 k，截距为 b 的直线. 那么是否跟二元一次方程组有什么关系呢? 二元一次方程组由两个线性方程组成，即：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

第一个方程可以整理为：$y = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x + \frac{b_1}{a_{12}}$. 在平面直角坐标系中，这是一条斜率为 $-\frac{a_{11}}{a_{12}}$、截距为 $\frac{b_1}{a_{12}}$ 的直线. 同理，第二个方程可以整理为：$y = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x + \frac{b_2}{a_{22}}$. 在平面直角坐标系中，这是一条斜率为 $-\frac{a_{21}}{a_{22}}$、截距为 $\frac{b_2}{a_{22}}$ 的直线. 我们知道两条直线在一个平面内要么相交，要么平行. 那么在平面直角坐标系中，当两条直线的斜率不同时，两直线必定相交. 当两条直线的斜率相同、截距不同时，两直线必定平行. 当两条直线的斜率相同、截距相同时，两直线重合. 那当两条直线的斜率不同时，两直线相交哪一点呢? 如图2.14，两条直线 l_1, l_2 的

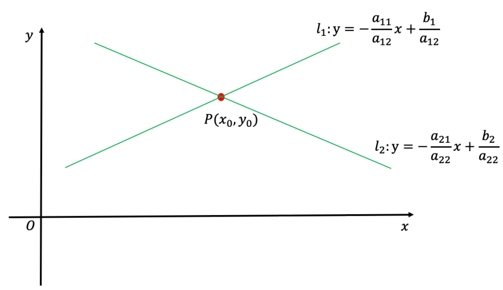


图 2.14: 平面直角坐标系中两直线相交于点 $P(x_0, y_0)$.

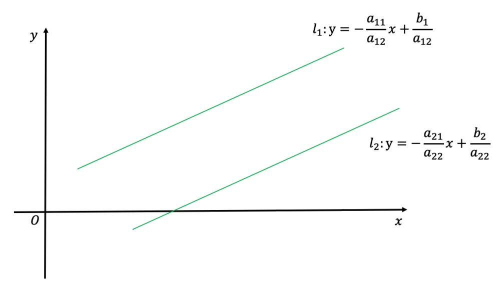


图 2.15: 平面直角坐标系中两直线斜率相同，所以平行.

斜率不同时，即 $-\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq -\frac{a_{21}}{a_{22}}$. 两直线相交于点 $P(x_0, y_0)$. 那么 x_0, y_0 就是这个二元一次方程组的解. 通过求解这个二元一次方程组，可以知道：

$$\begin{cases} x_0 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ y_0 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

如图2.15，当两条直线 l_1, l_2 的斜率相同、截距不同时，即：$-\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$，$\frac{b_1}{a_{12}} \neq \frac{b_2}{a_{22}}$. 此时两条直线平行，故此时二元一次方程组无解.

然而当两条直线 l_1, l_2 的斜率相同、截距相同时，即：$-\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$，$\frac{b_1}{a_{12}} = \frac{b_2}{a_{22}}$. 此时两条直线重合，故此时二元一次方程组有无穷多个解.

由上可见，二元一次方程组可以转换为平面直角坐标系中两直线相交和平行的情形. 再次见证了直角坐标系方便将代数问题转化为几何关系来研究这一事实.

习题 17 结合平面直角坐标系，讨论二元一次方程组 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$ 解的情况. ■

3. 九年级数学知识

3.1 一元二次方程与二次函数

一元二次方程是非常重要的. 一元二次方程可定义为只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的多项式方程. 通过平面直角坐标系我们可以将一元二次方程这一代数式可以转化为平面上的二次曲线. 相信大家已经知道如何利用因式分解法和公式解法来求解一元二次方程了. 下面首先介绍一元二次方程解的情况和韦达定理，然后再推广到一元三次方程、四次方程的解法. 最后将简单介绍二次函数.

3.1.1 一元二次方程解的情况和韦达定理

当 $a \neq 0$ 时，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解法如下：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

其中根据判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 来判断根的个数：

1. $\Delta>0$，方程有两个不同的实数解：x_1 和 x_2;
2. $\Delta=0$，方程有两个相同的实数解：$x=x_1=x_2$;
3. $\Delta<0$，方程无实数解.

当 $\Delta<0$ 时，在实数范围内，无法计算 $\sqrt{\Delta}$. 在第二章我们介绍了在复数范围内，负数可以开根号. 所以当 $\Delta<0$ 时，$\sqrt{\Delta}=\sqrt{-\Delta}i$. 其中 $i^2=-1$. 这样方程有两个不同的复数根，且为共轭复根. 两个复数根如下：

$$x_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

$$x_2=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

■ **例 3.1.1** 在复数范围内求解方程 $x^2+2x+3=0$. ■

✎ **解.** 判别式 $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times3=4-4\times3=-8<0$. 所以 $\sqrt{\Delta}=\sqrt{-8}=2\sqrt{2}i$. 所以：

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2+2\sqrt{2}i}{2}=-1+\sqrt{2}i;\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2-2\sqrt{2}i}{2}=-1-\sqrt{2}i$$

□

习题 18 在复数范围内求解 $x^2+6x+12=0$. ■

若 x_1,x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，那么我们可以将该方程写为 $a(x-x_1)(x-x_2)=0$. 展开即得 $ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=0$. 所以我们得到：

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$$

这个就是一元二次方程的韦达定理.

3.1.2 一元高次方程解的情况和韦达定理

上面介绍了一元二次方程的解的表达式，那对于一元三次方程、一元四次方程等有没有通用的解的表达式呢？事实上一元三次、四次方程有解的通用公式，但一般形式的五次及以上方程没有解的通用公式了. 下面简介一下一元三次方程解的通用公式.

对于一般形式的一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq0)$，其求根公式法如下：

$$x_1=-\frac{b}{3a}+\sqrt[3]{A+\sqrt{\Delta}}+\sqrt[3]{A-\sqrt{\Delta}}$$

$$x_2=-\frac{b}{3a}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A-\sqrt{\Delta}}$$

$$x_3=-\frac{b}{3a}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A+\sqrt{\Delta}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{A-\sqrt{\Delta}}$$

其中 $A=\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}$，判别式 $\Delta=\left(\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3$.

1. 当 $\Delta>0$ 时，方程有一个实根和两个共轭复根；
2. 当 $\Delta=0$ 时，方程有三个实根：
   当 $\left(\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}\right)^2=-\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3=0$ 时，方程有一个三重实根；
   当 $\left(\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}\right)^2=-\left(\frac{c}{3a}-\frac{b^2}{9a^2}\right)^3\neq0$ 时，方程的三个实根中有两个相等；
3. 当 $\Delta<0$ 时，方程有三个不等的实根.

■ **例 3.1.2** 求解方程 $x^3+3x^2+6x+5=0$. ■

✎ **解.** 此时 $a=1,b=3,c=6,d=5$. 则 $A=\frac{bc}{6a^2}-\frac{b^3}{27a^3}-\frac{d}{2a}=-\frac{1}{2}$. $\Delta=\frac{5}{4}>0$. 所以解为：

$$x_1=-1+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$x_2=-1+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

$$x_3=-1+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

□

当然上面给出了一般形式的一元三次方程解的通用表达式. 但对于特殊形式的一元三次方程，我们可以用因式分解来求出.

■ **例 3.1.3** 解方程: $x^3+1=0$. ■

解. 这种属于简单形式的一元三次方程，先对其进行因式分解. 易知它有一个解 $x=-1$. 所以利用多项式的竖式除法得到 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$. 所以 $x^3+1=0$ 等价于 $x+1=0, x^2-x+1=0$. 而 $x^2-x+1=0$ 的两个解为 $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. 所以 $x^3+1=0$ 有三个解：$x_1=-1, x_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, x_3=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

实际上这个方程的解可以写成 $x=\sqrt[3]{-1}$. 所以我们得到 $x=\sqrt[3]{-1}=-1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$. □

习题 19 解方程: $x^3-1=0$. 并试求 $\sqrt[3]{1}$. ■

若 x_1,x_2,x_3 是一元三次方程 $ax^3+bx^2+cx+d=0(a\neq 0)$ 的解，那么我们有 $ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$. 展开得：

$$ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)x-ax_1x_2x_3=0$$

对比各项的系数，得：

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

这个就是一元三次方程的韦达定理.

对于一元四次方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0(a\neq 0)$，其解的通用公式如下：

$$x_1=-\frac{b}{4a}+\frac{C_1+C_2}{2};\quad x_2=-\frac{b}{4a}+\frac{C_1-C_2}{2}$$

$$x_3=-\frac{b}{4a}-\frac{C_1+C_2}{2};\quad x_4=-\frac{b}{4a}-\frac{C_1-C_2}{2}$$

其中：

$$C_1=\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{2c}{3a}+B};\quad C_2=\sqrt{\frac{b^2}{2a^2}-\frac{4c}{3a}-B+\frac{-b^3+4abc-8a^2d}{4a^3\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{2c}{3a}+B}}}$$

$$B=\frac{\sqrt[3]{2}(c^2-3bd+12ae)}{3a\sqrt[3]{A}}+\frac{\sqrt[3]{A}}{3\sqrt[3]{2}a}$$

$$A=2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace+\sqrt{(2c^3-9bcd+27ad^2+27b^2e-72ace)^2-4\left(c^2-3bd+12ae\right)^3}$$

可见一元四次方程根的表达式是多么复杂!

但对于特殊形式的一元四次方程，求解很简便. 比如四次方程中若 $b,d=0$，则方程变为 $ax^4+cx^2+e=0$. 这是一个双二次方程. 令 $z=x^2$. 则有 $az^2+cz+e=0$. 求得 $z_1=\frac{-c+\sqrt{c^2-4ae}}{2a}, z_2=\frac{-c-\sqrt{c^2-4ae}}{2a}$. 从而该四次方程的解为：$x_1=\sqrt{z_1}, x_2=-\sqrt{z_1}, x_3=\sqrt{z_2}, x_4=-\sqrt{z_2}$.

■ **例 3.1.4** 解方程 $x^4-1=0$. ■

✎ **解.** 对 x^4-1 进行因式分解：$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)$，故 $x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=0$. $x^2-1=0$ 有两个解 $x_{1,2}=\pm1$. $x^2+1=0$ 也有两个解 $x_{3,4}=\pm i$. 所以 $x^4-1=0$ 有四个解 $x_{1,2}=\pm1,x_{3,4}=\pm i$. 实际上 $x^4-1=0$ 的解可以表示为 $\sqrt[4]{1}$. 所以我们有 $\sqrt[4]{1}=\pm1,\pm i$. □

习题 20 解方程 $x^4+1=0$，并试求 $\sqrt[4]{-1}$. ■

若 x_1,x_2,x_3,x_4 是四次方程 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0(a\neq0)$ 的解，则有 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)=0$. 展开，得到：

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$$

$$=ax^4-a(x_1+x_2+x_3+x_4)x^3+a(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)x^2$$
$$-a(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4)x+ax_1x_2x_3x_4=0$$

对比各项系数，得：

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=\frac{c}{a}$$
$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-\frac{d}{a}$$
$$x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}$$

这就是一元四次方程的韦达定理.

对于一元五次方程以及更高次的方程没有通解公式. 但韦达定理可以类似以上写出来. 对于一元 n 次方程：

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0(a_n\neq0)$$

其有 n 个根 $x_1,x_2,x_3,....,x_n$. 这 n 个根成立如下关系：

$$x_1+x_2+x_3+...+x_{n-1}+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+....+x_1x_n)+(x_2x_3+x_2x_4+x_2x_5+....+x_2x_n)+...+x_{n-1}x_n=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$
$$...$$
$$x_1x_2...x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

等价的说，对于任何的 $k=1,2,3,...,n$，系数比 $\frac{a_{n-k}}{a_n}$ 是所有任取 k 个根的乘积的和的 $(-1)^k$ 倍，即：

$$\sum_{1\leq i_1<i_2<...<i_k\leq n}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_k}=(-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}$$

其中 $i_1<i_2<...<i_k$ 是要让所有的根的组合都恰好出现一次. 实际上，该等式左边称为初等对称多项式.

以上就是一元 n 次方程的韦达定理.

习题 21 若一元 n 次方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0(a_n\neq 0)$ 有 n 个不为 0 的根 $x_1,x_2,...,x_n$，证明：

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+...+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}=-\frac{a_1}{a_0}$$

特别地，$n=2$ 时，一元二次方程 $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ 两个不为零的解 x_1,x_2 满足：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=-\frac{a_1}{a_0}$. ■

3.1.3 二次函数

在数学中，二次函数 (英语：quadratic function) 表示形为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，且 a,b,c 是常数) 的多项式函数，其中，x 为自变量，a,b,c 分别是函数解析式的二次项系数、一次项系数和常数项. 二次函数的图像是一条主轴平行于 y 轴的抛物线.

习题 22 证明二次函数不是线性函数. ■

若令二次函数的值等于零，则可得一个一元二次方程. 该方程的解称为方程的根或函数的零点. 因此通过平面直角坐标系可以将一元二次方程的代数式转化为二次函数的图像来研究.

二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根为：

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

则点 $(x_1,0)$ 和 $(x_2,0)$ 就是二次函数与 x 轴的交点. 判别式 $\Delta=b^2-4ac$. 则根与二次函数与 x 轴的交点关系为：

1. 当 $\Delta>0$ 时，则方程有两个不相等的根，也即与 x 轴有两个不重叠的交点;
2. 当 $\Delta=0$ 时，则方程有两个相等的根，也即与 x 轴有一个切点；
3. 当 $\Delta<0$ 时，则方程没有实数根，也即与 x 轴没有交点.

二次函数可以表示成如下三种形式：

1. $f(x)=ax^2+bx+c$ 称为**一般形式或多项式形式**；
2. $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ 称为**因子形式或交点式**. 其中 x_1,x_2 是二次方程的两个根，$(x_1,0)$,$(x_2,0)$ 是抛物线与 x 轴的两个交点；
3. $f(x)=a(x-h)^2+k$ 称为**标准形式或顶点形式**，(h,k) 即为此二次函数的顶点.

h 代表两二次函数的对称轴，因此两根的平均数即为 h. 且 $h=-\frac{b}{2a}$，$k=-\frac{b^2-4ac}{4a}$. 而在三种形式中皆出现的 a 为此二次函数的领导系数，决定二次函数图像开口的大小和方向.

当函数与 x 轴有两个交点时，设这两个交分别为 $A(x_1,0),B(x_2,0)$. 由韦达定理得到 $|AB|=|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$.

3.2 函数的平移

课本上讲过图形在坐标系的平移. 现在稍微讲点函数在平面直角坐标系的平移规律.

与图形平移类似，函数 $f(x)$ 的平移规律为:

1. 当函数向左移动 a 个单位时，函数解析式变为 $f(x+a)$;
2. 当函数向右移动 a 个单位时，函数解析式变为 $f(x-a)$;
3. 当函数向上移动 b 个单位时，函数解析式变为 $f(x)+b$;
4. 当函数向下移动 b 个单位时，函数解析式变为 $f(x)-b$.

函数向上和向下移动好理解，相应的函数解析式作对应的加减，即“上加下减”. 但左右移动“左加右减”似乎不好理解. 下面以二次函数的平移来说明.

3.2.1 二次函数的平移

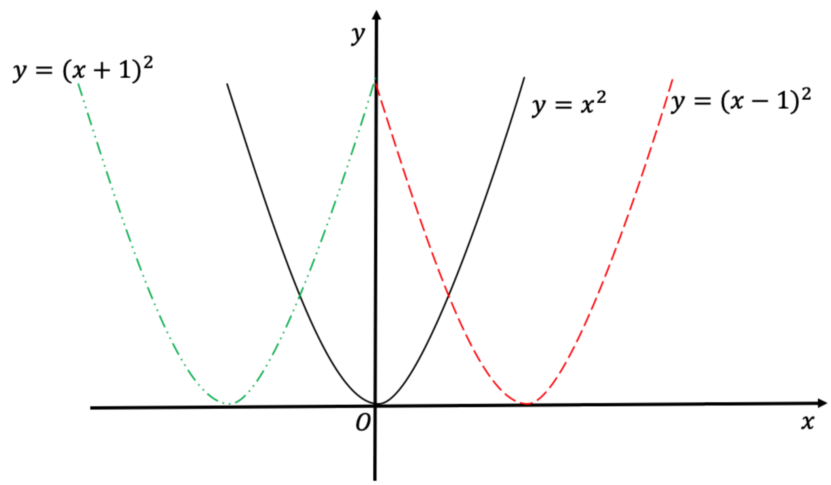


图 3.1: 二次函数的左右平移.

如图3.1，函数 $y=x^2$ 向左平移一个单位，变成 $y=(x+1)^2$. 那为什么向左平移不是变成 $y=(x-1)^2$ 呢?

首先我们明白这个二次函数可以表达为 $f(\square)=\square^2$. 这个 $\square$ 可以填任何东西. 比如填“狗”, 则 f(狗)= 狗 ^{2}. 那么函数向左平移一个单位, x 变成了 $x'=x-1$. 所以 $x^2=(x'+1)^2$，那么函数解析式 $f(x)=x^2$ 的右边输出项由原来的 x^2 变为 $(x'+1)^2$，而这个输出项的唯一变量为 x'，所以我们有 $f(x')=(x'+1)^2$. 即 $f(\square)=(\square+1)^2$. 现在我们把 x 填入这个 $\square$ 中，这样就有 $f(x)=(x+1)^2$.

同理，当 x 向右移动一个单位时，函数解析式变成 $f(x)=(x-1)^2$.

如图3.2，一般的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可以写成 $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$. 所以一般形式的函数图像可以看成将函数 $y=ax^2$ 的图像先水平位移 $|-\frac{b}{2a}|$ 个单位，再垂直位移 $|\frac{4ac-b^2}{4a}|$ 个单位得到.

习题 23 函数 $y=2x^2-16x+35$ 是由 $y=2x^2$ 怎么平移到的? ■

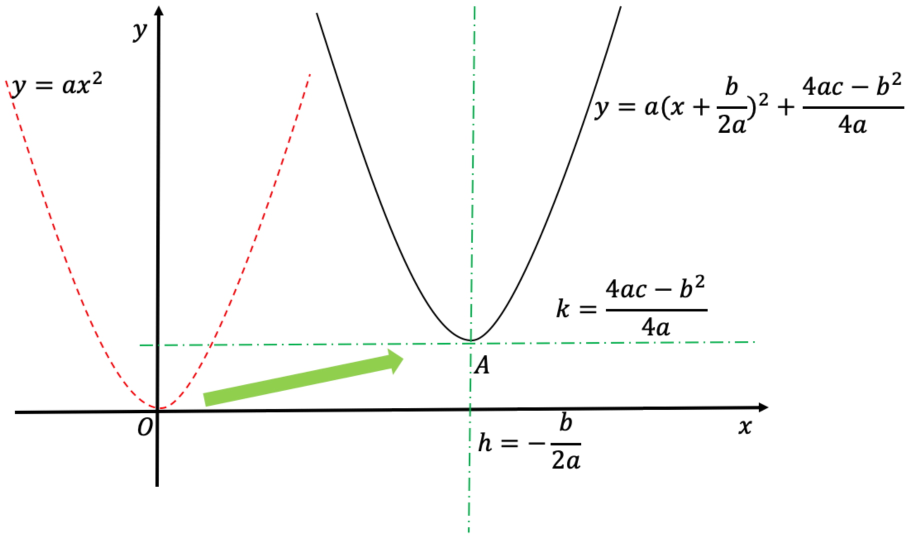


图 **3.2:** 一般的二次函数平移.

3.2.2 反比例函数的平移

上面讲了二次函数的平移，下面讲一般形式的反比例函数 $y = \frac{a}{kx+b} + c$ 的平移. 同理，如图3.3，反比例函数 $y = \frac{a}{kx+b}$ 可以写成 $y = \frac{\frac{a}{k}}{x+\frac{b}{k}} + c$. 所以一般形式的反比例函数 $y = \frac{a}{kx+b} + c$ 的平移可以看成函数 $y = \frac{a}{kx}$ 水平方向移动 $|-\frac{b}{k}|$ 个单位，然后向垂直方向移动 $|c|$ 个单位. 图3.3中，原点 O 平移到点 $\mathrm{A}(-\frac{b}{k}, c)$.

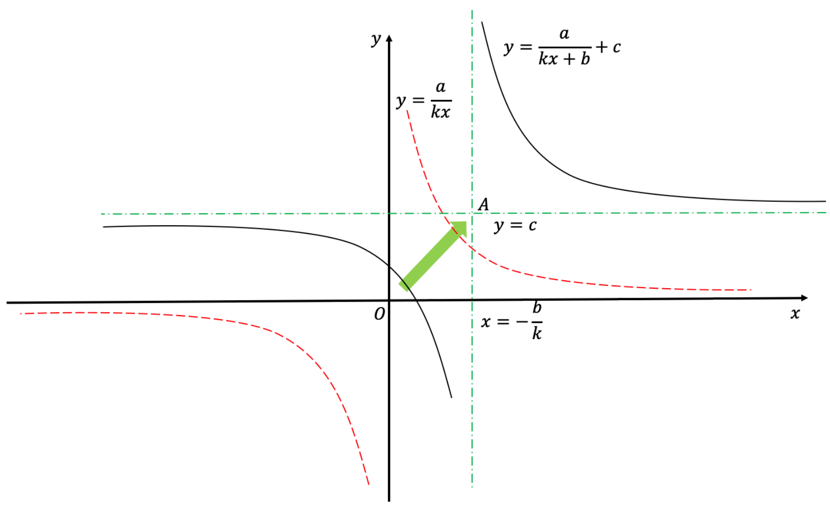


图 **3.3:** 一般形式的反函数的平移.

习题 24 试作出 $y = \frac{5}{2x+3} + 2$ 的图像. ■

3.3 函数的蛛网模型

在中考或者五科联考中会出现关于一次、二次函数和反比例函数图像的递推规律的题. 而这种题实际是高中阶段求递推数列的不动点法. 若数列 a_n 有如下递推关系式 $a_n = f(a_{n-1})$，则数列的变化规律可以用蛛网法在函数 $f(x)$ 与 $y = x$ 的图像上体现出来. 下面以中考真题为例来详细说明.

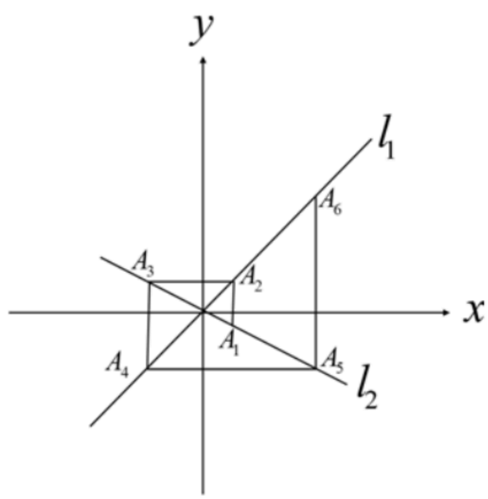


图 3.4: 两个一次函数的递推关系.

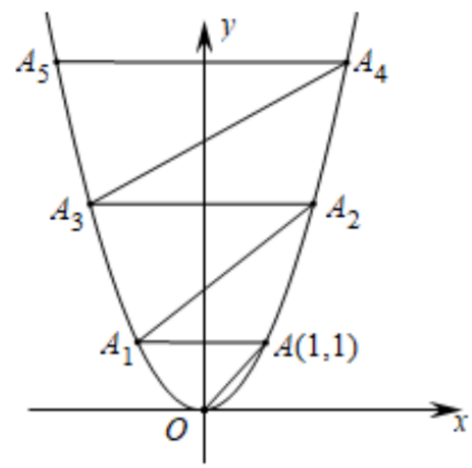


图 3.5: 二次函数的递推关系.

3.3.1 蛛网模型在中考题中的应用

■ **例 3.3.1** (2018 衡阳中考 T_{18}) 如图3.4，在平面直角坐标系中，函数 $y = x$ 和 $y = -\frac{1}{2}x$ 的图像分别为直线 l_1, l_2，过点 $A_1(1, -\frac{1}{2})$ 作 x 轴的垂线交 l_1 于点 A_2，过点 A_2 作 y 轴的垂线交 l_2 于点 A_3，过点 A_3 作 x 轴的垂线交 l_1 于点 A_4，过点 A_4 作 y 轴的垂线交 l_2 于点 A_5，... 依次进行下去，则点 A_{2018} 的横坐标为 ______. ■

✎ **解.** 设点 A_n 的坐标为 (x_n, y_n). 当 $k = 1, 2, 3, ...$ 时，从图中我们可以看到点 A_{2k} 位于 $y = x$ 线上，所以我们有 $y_{2k} = x_{2k}$. 点 A_{2k-1} 位于 $y = -\frac{1}{2}x$ 上，所以我们有 $y_{2k-1} = -\frac{1}{2}x_{2k-1}$. 点 A_1 的坐标为 $(x_1, y_1) = (1, -\frac{1}{2})$. 点 A_{2k} 与点 A_{2k-1} 的横坐标相等，所以我们有：

$$x_{2k} = x_{2k-1}$$

点 A_{2k} 与点 A_{2k+1} 的纵坐标相等，所以我们有：

$$y_{2k+1} = y_{2k}$$

考虑到 $y_{2k} = x_{2k}, y_{2k-1} = -\frac{1}{2}x_{2k-1}$，所以我们有：

$$x_{2k+1} = -2y_{2k+1} = -2y_{2k} = -2x_{2k} = -2x_{2k-1}$$

此为等比数列，由该递推关系式可以得到：

$$x_3 = -2x_1, x_5 = -2x_3 = (-2)^2x_1, x_7 = -2x_5 = (-2)^3x_1, ..., x_{2k-1} = (-2)^{k-1}x_1$$

所以

$$y_{2k-1} = -\frac{1}{2}x_{2k-1} = (-2)^{k-2}x_1$$

$$x_{2k}=x_{2k-1}=(-2)^{k-1}x_1$$
$$y_{2k}=x_{2k}=(-2)^{k-1}x_1$$

而 $x_1=1$，从而点 A_{2k-1} 的坐标为 $((-2)^{k-1},(-2)^{k-2})$，点 A_{2k} 的坐标为 $((-2)^{k-1},(-2)^{k-1})$. 因为 $2018=2\times1009$，所以 $k=1009$，从而点 A_{2018} 的横坐标为 $x_{2018}=(-2)^{1009-1}=2^{1008}$.

□

通过这个例子可以看到，点 A_n 在两个函数图像之间不停地跳换，其路径类似于蜘蛛网，所以这种方法叫作蛛网法，对应的模型叫作**蛛网模型**.

上面的例子我们可以推广一下，若把 l_2 的表达式改为 $y=ax+b$，其中 $a\neq 0,1$. l_1 不变. 则点 A_{2k-1} 的坐标为:

$$x_{2k-1}=\frac{x_1}{a^{k-1}}-b\frac{a^{k-1}-1}{a^k-a^{k-1}},\quad y_{2k-1}=\frac{x_1}{a^{k-2}}-b\frac{a^{k-1}-1}{a^{k-1}-a^{k-2}}$$

点 A_{2k} 的坐标为:

$$x_{2k}=\frac{x_1}{a^{k-1}}-b\frac{a^{k-1}-1}{a^k-a^{k-1}},\quad y_{2k}=\frac{x_1}{a^{k-1}}-b\frac{a^{k-1}-1}{a^k-a^{k-1}}$$

当 $a=-\frac{1}{2},b=0$ 时，就是上述例子的情形.

习题 25 (2019 衡阳中考 T_{18}) 如图3.5，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=x^2$ 点 A 坐标为 $(1,1)$，过点 A 作 $AA_1//x$ 轴交抛物线于点 A_1，过点 A_1 作 $A_1A_2//OA$ 交抛物线于点 A_2，过点 A_2 作 $A_2A_3//OA$ 交抛物线于点 A_3，过点 A_3 作 $A_3A_4//OA$ 交抛物线于点 A_4...., 依次进行下去，则点 A_{2019} 的坐标为 ____，点 A_n 的坐标为 ____. ■

3.3.2 蛛网模型在光学透镜成像中的应用

物理中透镜成像的公式为

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$$

其中 u 为物距，v 为像距，f 为焦距. 如图3.6, 物距 u 一直都是大于 0. 当成像在透镜另一侧成实像时像距 $v>0$，当成像与物体在透镜同一侧成虚像时像距 $v<0$. 对于凸透镜，焦距 $f>0$. 对于凹透镜，焦距 $f<0$.

一般物理教科书上把凸透镜成像的规律整理为下列表格：

Table 3.1: 凸透镜成像的规律.

物距 (u)	像距 (v)	成像性质	凸透镜对应应用
$u>2f$	$f<v<2f$	倒立缩小实像	照相机、人眼
$u=2f$	$v=2f$	倒立等大实像	等大像法测焦距、影印机
$f<u<2f$	$v>2f$	倒立放大实像	幻灯机、投影仪、放映机
$u=f$	$v=\infty$	不成像	灯塔、探照灯
$u<f$	$\lvert v\rvert>u$	正立放大的虚像	放大镜

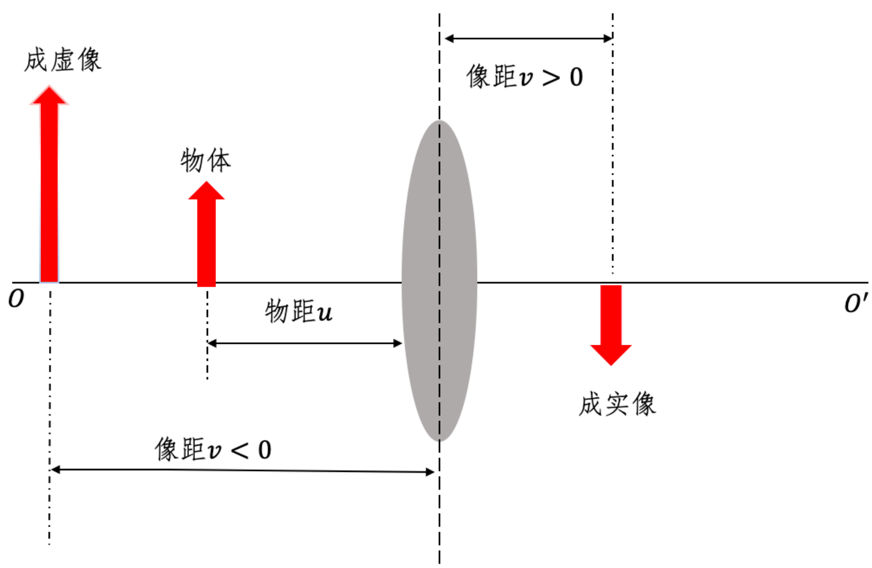


图 3.6: 凸透镜成像原理，成实像时像距 $v>0$，成虚像时像距 $v<0$.

但这表格显得稍许复杂，虽然有记忆口诀，但始终无法理解其背后的原理. 现通过数学图像来理解.

成像公式为 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$，所以我们可以作出 $u-v$ 图像. 将成像公式按下面的步骤整理:

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{f}-\frac{1}{u}=\frac{u-f}{fu}$$

所以我们有：

$$v = \frac{uf}{u-f} = f\frac{u-f+f}{u-f} = f\left(1+\frac{f}{u-f}\right) = \frac{f^2}{u-f}+f$$

这是一个 v 关于 u 的一般形式的反比例函数，它的图像是通过反比例函数 $v=\frac{f^2}{u}$ 的图像向右平移 f、再向上平移 f 得到. 注意 $u, f>0$，v 可以大于 0，也可以小于 0.

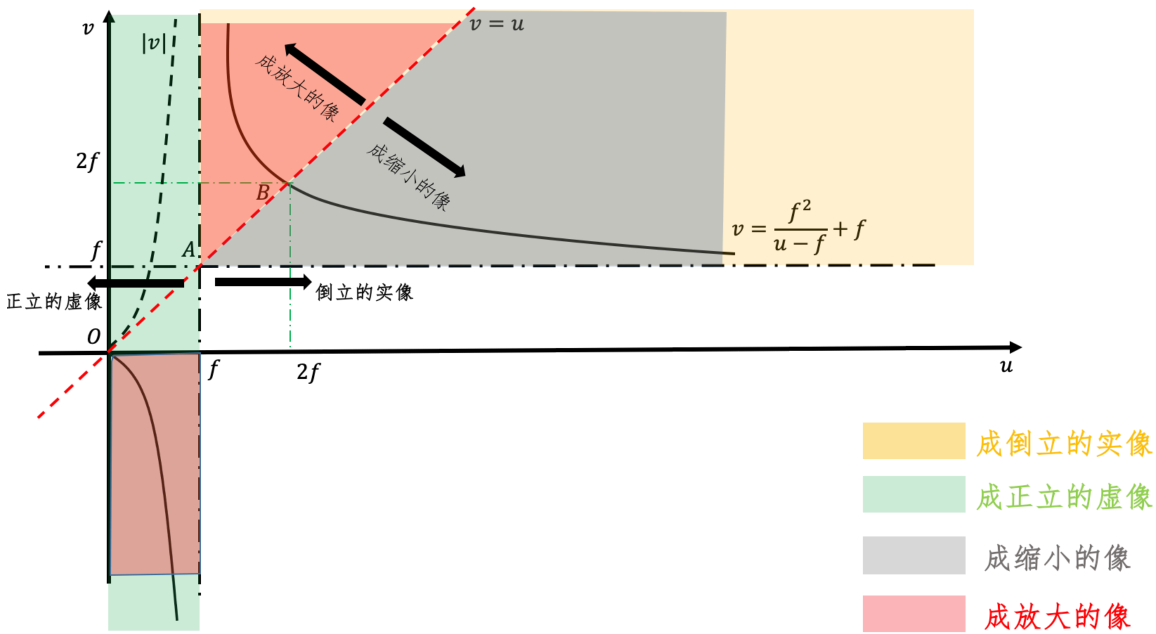


图 3.7: $u-v$ 图像. $u>f$ 的区域为倒立的实像，$0<u<f$ 的区域为正立的虚像; $0<v<u$ 的区域为缩小的像，$|v|>u$ 的区域为放大的像.

如图3.7, v 关于 u 的图像是一对双曲线，由于 $u>0$，所以我们只考虑 v 轴右边部分的区域. 点 A 的坐标是 (f,f). 它是通过原点 O 先向右移动 f，然后再向上移动 f. 函数图像双曲线的一支经过点 $B(2f,2f)$. 从图中我们可以看到，平行 v 轴的直线 $u=f$ 将 $u>0$ 的区域分成两部分：

第一部分：$u>f$ 的区域，双曲线位于平行 u 轴的直线 $v=f$ 的上方，所以在此区域，$v>f>0$；即成倒立的实像；

第二部分：$0<u<f$ 的区域，双曲线位于 u 轴的下方，所以 $v<0$. 此时成正立的虚像.

我们可以用 $m=\frac{|v|}{u}$ 表示放大率.

直线 $v=u$ 也将 $u>0$ 的区域分成两部分：

第一部分，$v<u$ 的区域，这个区域位于直线 $v=u$ 的下方，此时放大率 $m=\frac{|v|}{u}<1$，所以成缩小的像；

第二部分，$v>u$ 的区域，这个区域位于直线 $v=u$ 的上方，此时放大率 $m=\frac{|v|}{u}>1$，所以成放大的像;

当然，在 B 点时，$u=v=2f$，此时放大率 $m=\frac{|v|}{u}=1$，所以成等大的像.

将上面进行综合，就得到：

(i) 当 $u>2f$ 时，$u-v$ 函数图像位于直线 $v=u$ 的下方，此时 $0<f<v<2f$，$m=\frac{|v|}{u}<1$，所以成倒立的缩小的实像；

(ii) 当 $u=2f$ 时，$v=2f$，也就是图中的点 B，此时 $v=2f>0$，$m=\frac{|v|}{u}=1$，所以成倒立等大的实像；
(iii) 当 $f<u<2f$ 时，$u-v$ 函数图像位于直线 $v=u$ 的上方，此时 $v>2f$，$m=\frac{|v|}{u}>1$，所以成倒立放大的实像；
(iv) 当 $0<u<f$ 时，$u-v$ 函数图像位于 u 轴的下方，此时 $v<0$. 为了比较 $|v|$ 和 u 的大小，我们可以将位于 u 轴下方的函数图像沿着 u 轴往上翻折，此时函数图像如图3.7虚线所示. 可见此时 $m=\frac{|v|}{u}>1$，所以成正立放大的虚像.

这样我们就通过 $u-v$ 的函数图像对凸透镜成像的规律进行分类. 这比直接记口诀更好理解. 下面通过例题来说明如何利用函数图像来求解透镜成像的问题.

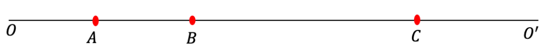


图 3.8: 2015 届向阳中学五科联考透镜成像题示意图.

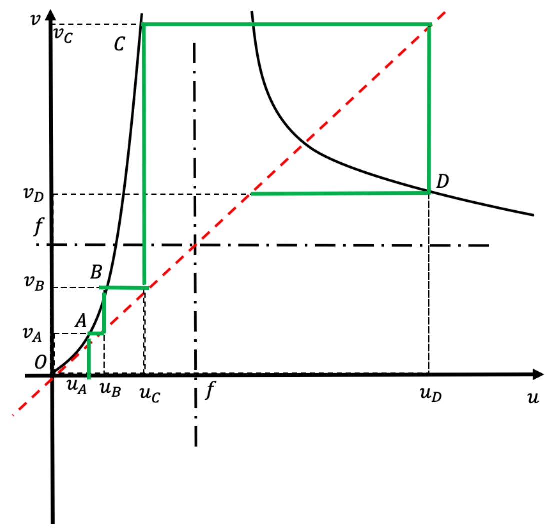


图 3.9: 蛛网模型在透镜成像中的应用.

■ **例 3.3.2** (2015 届向阳中学五科联考 T_1-2) 如图3.8所示，OO' 为凸透镜的主光轴，将点光源放在 A 点时，像在 B 点；将点光源放在 B 点时，像在 C 点. 当将点光源放在 C 点，则 ( )

A. 一定在 B 点成一个实像；
B. 一定在 A 点的左侧成一个虚像；
C. 可能在 B,C 之间成一个实像；
D. 可能在 C 点的右侧成一个虚像. ■

✎ **解.** 如图3.8，点光源放在 A 点时，像在透镜同侧的 B 点，说明 $v_A<0$. 所以 $0<u_A<f$ 且 $|v_A|>u_A$. 所以透镜位于 O 点. 当光源放在 B 点时，此时 $u_B=|v_A|$，所以我们在 $u-|v|$ 的函数图像上来分析接下来的成像规律. 如图3.9，先在函数图像上找出 A 点，然后过 A 点作平行 u 轴的平行线，与 $v=u$ 交于一点，然后过该点作 v 轴的平行线，与函数图像交于 B 点. 光源放在 B 点时，像在 C 点. 类似同样的方法，在函数图像上找出 C 点. 若将点光源放在 C 点，那在哪里成像呢? 还是类似作图的方法，可以看出下一个点与函数图像交于 D 点，此时 D 点位于 $u>f$ 的函数图像上，此时 $u_D>f, v_D>f$. 所以 D 点与 C 点位于透镜异侧. 此时光源放在 C 点时，在透镜的异侧的 D 点成倒立缩小的实像. 即此时可能在图3.8的 A 点的左侧成倒立缩小的实像.

还有一个可能，过 C 点作平行 u 轴的平行线，与 $v=u$ 交于一点，然后过该点作 v 轴的平行线，与 $u<f$ 区域的函数图像交于 D' 点, 此时 $0<u_C<u_{D'}=|v_C|<|v_{D'}|<f$. 所以 D' 位于图3.8的 C 点的右侧，且成正立放大的虚像.

综上，当将点光源放在 C 点，则可能在 C 点的右侧成正立放大的虚像，或者在 A 点的的左侧成倒立缩小的实像. 所以选 D 选项. □

从刚才的例题可以看到，在图3.9依次作 A,B,C,D 点时留下的路径 (图中的绿线)，非常类似蛛网. 所以利用这种方法可以很清晰地掌握凸透镜的成像规律.

习题 26 将点光源放在凸透镜左侧且大于凸透镜两倍焦距的点 A，成像在透镜右侧的 B 点. 然后将点光源放在 B 点，成像在透镜左侧 C 点. 然后把点光源放在 C 点，成像在透镜右侧 D 点. 依次按这种方法做下去，最终在距离透镜多远的地方成像? ■

习题 27 凹透镜的焦距 $f<0$，试根据成像公式 $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{f}$ 作出凹透镜的 $u-v$ 函数图像. 并总结凹透镜的成像规律. ■

3.4 三角函数

三角函数（英语：Trigonometric functions）是数学中常见的一类关于角度的函数. 三角函数将直角三角形的内角和它的两个边的比值相关联，也可以等价地用与单位圆有关的各种线段的长度来定义. 三角函数在研究三角形和圆等几何形状的性质时有重要作用，也是研究振动、波、天体运动以及各种周期性现象的基础数学工具.

常见的三角函数包括正弦函数 (sin)、余弦函数 (cos)、和正切函数 (tan)；在航海学、测绘学、工程学等其他学科中，还会用到如余切函数 (cot) 或者正割函数 (sec) 余割函数 (csc)、正矢函数、半正矢函数等其他的三角函数. 不同的三角函数之间的关系可以通过几何直观或者计算得出，称为三角恒等式.

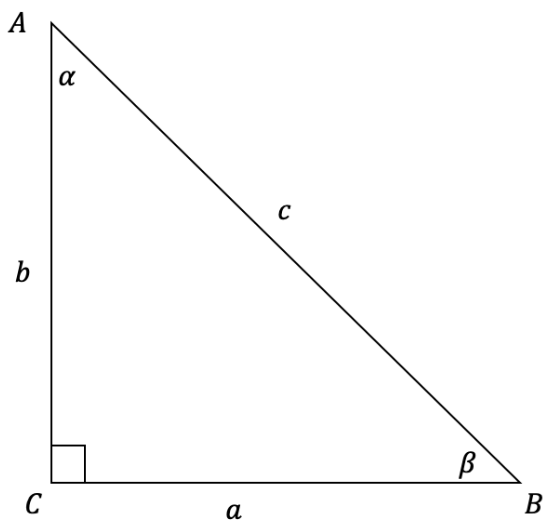


图 3.10: 三角形中的三角函数.

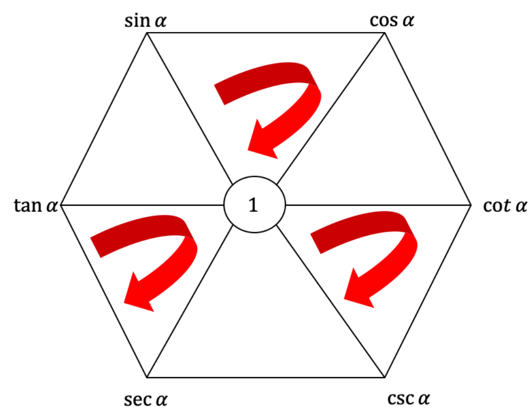


图 3.11: 三角函数的六边形记忆法.

3.4.1 三角函数的定义

如图3.10，$Rt\Delta ACB$ 中，$\alpha = \angle BAC$，$\beta = \angle ABC$. 三角函数的定义如下：

1. α 的正弦为对边与斜边的比值：$\sin\alpha = \frac{a}{c}$；
2. α 的余弦为邻边与斜边的比值：$\cos\alpha = \frac{b}{c}$；
3. α 的正切为对边与邻边的比值：$\tan\alpha = \frac{a}{b}$；
4. α 的余切为邻边与对边的比值：$\cot\alpha = \frac{b}{a}$；
5. α 的正割为斜边与邻边的比值：$\sec\alpha = \frac{c}{b}$；
6. α 的余割为斜边与对边的比值：$\csc\alpha = \frac{c}{a}$.

这就是三角函数在直角三角形的定义.

由上看出，我们可以得到：

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\csc\alpha}{\sec\alpha}$$

再由勾股定理 $a^2 + b^2 = c^2$，得：

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad \csc^2\alpha + \sec^2\alpha = 1; \quad 1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha, \quad 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

这正是比较常用的三角恒等式.

以上是三角函数的定义. 但略显复杂，不好记. 下面介绍一下三角函数的六边形记忆法.

如图3.11，六个三角函数位于六边形的各个顶点，且遵循“上弦中切下割，左正右余 1 中间”的法则. 其规律如下：

1. 位于六边形对角线的三角函数互为倒数，即对角线上两个函数的积为 1：

$$\sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha},\quad \cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha},\quad \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}$$

2. 三角形最高两端的平方和等于底端的平方 (为图中标箭头的三个三角形)：

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\quad \tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha,\quad 1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$$

3. 任意一点的值等于这一点顺时针的第一个值与第二个值的比值：

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \sin\alpha=\frac{\cos\alpha}{\cot\alpha},\quad \cos\alpha=\frac{\cot\alpha}{\csc\alpha}$$

$$\cot\alpha=\frac{\csc\alpha}{\sec\alpha},\quad \csc\alpha=\frac{\sec\alpha}{\tan\alpha},\quad \sec\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}$$

4. 任意一点的值等于紧挨着这一点的两个端点的值的积：

$$\tan\alpha=\sin\alpha\cdot\sec\alpha,\quad \sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha,\quad \cos\alpha=\sin\alpha\cdot\cot\alpha$$

$$\cot\alpha=\cos\alpha\cdot\csc\alpha,\quad \csc\alpha=\cot\alpha\cdot\sec\alpha,\quad \sec\alpha=\csc\alpha\cdot\tan\alpha$$

在图3.10的 $Rt\Delta ACB$ 中，易知 $\alpha+\beta=90^\circ$. 从而我们有：

$$\sin\beta=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha,\cos\beta=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,\tan\beta=\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$$

当然有几个特殊的值：

$$\sin 0^\circ=0,\cos 0^\circ=1,\tan 0^\circ=0,\sin 90^\circ=1,\cos 90^\circ=0$$

$$\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\tan 45^\circ=1$$

$$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2},\cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3},\tan 60^\circ=\sqrt{3}$$

$$\sin 37^\circ=\cos 53^\circ=\frac{3}{5},\cos 37^\circ=\sin 53^\circ=\frac{4}{5},\tan 37^\circ=\frac{3}{4},\tan 53^\circ=\frac{4}{3}$$

■ **例 3.4.1** 计算 $\sin^2 1^\circ+\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ...+\sin^2 90^\circ$. ■

✎ **解.** 由三角恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 以及 $\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$ 得：

$$\sin^2\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)=1$$

令 $\alpha=0^\circ,1^\circ,2^\circ...,90^\circ$，则有：

$$\sin^2 0^\circ+\sin^2 90^\circ=1$$

$$\sin^2 1^\circ+\sin^2 89^\circ=1$$

$$\sin^2 2^\circ+\sin^2 88^\circ=1$$

$$\dots$$
$$\sin^2 90^\circ + \sin^2 0^\circ = 1$$

把这 91 个等式竖着相加，那么就有：

$$2(\sin^2 0^\circ + \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ \dots + \sin^2 90^\circ) = 1 \times 91$$

由于 $\sin^2 0^\circ = 0$，所以我们有：

$$\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ \dots + \sin^2 90^\circ = \frac{91}{2}$$

□

习题 28 计算 $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ \dots + \cos^2 90^\circ$. ■

3.4.2 三角函数的和差公式 *

关于三角函数，另一组关键的公式是和差公式:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

这组公式初中阶段尚未接触到，但很有用途. 比如当令 $x = y$ 时，我们有：

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

这是三角函数的**二倍角公式**.

■ **例 3.4.2** 求 $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \tan 15^\circ$. ■

✎ **解.** 由二倍角公式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$，得：

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}; \quad \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

□

习题 29 证明：$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4\sin^3 \theta$, $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3 \cos \theta$. ■

习题 30 试求 $7.5^\circ, 10^\circ, 20^\circ$ 的三角函数值. ■

根据和差公式，我们还可以得到如下的一组公式:

$$2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y),\cos x-\cos y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$$

$$2\sin x\cos y=\sin(x+y)+\sin(x-y),\sin x-\sin y=2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

令 $x=\frac{\theta}{2},y=k\theta$，然后代入 $2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$，得：

$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta=\cos\frac{(2k-1)\theta}{2}-\cos\frac{(2k+1)\theta}{2}$$

令 $k=1,2,3,...n$ 时，我们有：

$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta=\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}$$
$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin 2\theta=\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2}$$
$$...$$
$$2\sin\frac{\theta}{2}\sin n\theta=\cos\frac{(2n-1)\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}$$

将这 n 个等式竖着相加，得到：

$$2\sin\frac{\theta}{2}(\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+...+\sin n\theta)=\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}$$

由 $\cos x-\cos y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)$ 得：

$$\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{(2n+1)\theta}{2}=2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{n\theta}{2}$$

所以，我们有：

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+...+\sin n\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

习题 31 证明 $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+...+\cos n\theta=\frac{\sin\frac{n\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$. ■

习题 32 证明 $\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\sin 3^\circ+...+\sin 90^\circ=\frac{\sin 1^\circ-\cos 1^\circ+1}{2-2\cos 1^\circ}$. ■

习题 33 证明 $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+...+\cos 90^\circ=\frac{\sin 1^\circ+\cos 1^\circ-1}{2-2\cos 1^\circ}$. ■

3.5 黄金分割

3.5.1 黄金比例

首先我们来计算一个式子：

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+...}}}}=?$$

刚一看是根号套着根号，似乎无法计算. 实际上这个式子的值就是黄金比例数.

黄金比例是属于数学领域的一个专有名词，但是它最后涵盖的内容不只是有关数学领域的研究，根据目前的文献探讨，我们可以说，黄金比例的发现和如何演进至今仍然是一个谜. 但有研究指出公元前 6 世纪古希腊的毕达哥拉斯学派研究过正 5 边形和正 10 边形的作图，因此现代数学家们推断当时毕达哥拉斯学派已经触及甚至掌握了黄金分割的一些规则，也发现无理数.

一般教科书上是通过线段之比来引进黄金比例数的：

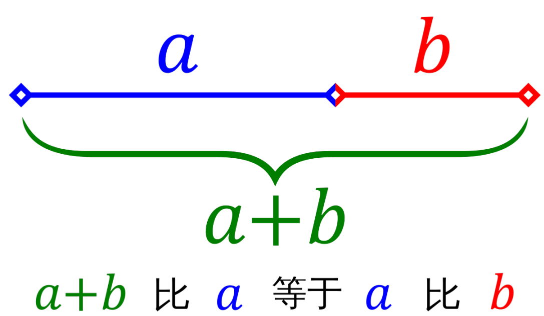


图 **3.12:** 黄金比例的线段.

如图3.12，线段分成 a,b 两段，那么就有 $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}(a>b>0)$.

那么黄金比例的定义为：

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\varphi$$

其中我们把 φ 表示黄金比例.

上面的式子可以整理为：

$$\varphi=1+\frac{1}{\varphi}$$

即 $\varphi^2-\varphi-1=0$. 这个二次方程的正解为：

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887...$$

$\varphi=1.6180339887...$ 是无限不循环小数，所以是无理数. 黄金比例数的倒数为其自身减 1. 即：

$$\Phi=\frac{1}{\varphi}=\varphi-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.6180339887....$$

Φ 称为黄金比例共轭.

φ 满足二次方程 $\varphi^2-\varphi-1=0$，将该式进行改写：

$$\varphi=\sqrt{1+\varphi}$$

然后将根号下的 φ 用 $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$ 替换：

$$\varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}$$

同样地，根号下的 φ 用 $\varphi=\sqrt{1+\varphi}$ 替换：

$$\varphi=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\varphi}}}$$

一次进行下去，我们就得到：

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

当然，φ 还可以用三角函数表示：$\varphi=1+2\sin 18°$.

习题 34 试求 $9°, 36°, 54°$ 的三角函数值. ■

3.5.2 黄金比例与斐波那契数列

先观察如下的数列：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,.....$$

你发现了什么规律了吗？是的，这一列数的规律就是某一项等于其前两项之和.

为了表示方便，我们令第 n 项为 $a_n(n=1,2,3,..)$. 比如 $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=2$. 那么这个规律我们可以写成：

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$$

这个数列有个名称，叫作斐波那契数列. 斐波那契数列（意大利语：Successione di Fibonacci），又译为菲波拿契数列、菲波那西数列、斐氏数列、黄金分割数列.

那么 a_n 有没有什么通用的表达式呢？答案是有.

事实上，如果 x_1, x_2 是方程 $x^2=x+1$ 的解，那么就有：

$$a_n=c_1{x_1}^n+c_2{x_2}^n$$

c_1, c_2 为常系数.

而方程 $x^2=x+1$ 的解为：$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. 所以我们看到 x_1 就是黄金比例数 φ. 所以：

$$a_n=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

那么 c_1, c_2 是多少呢？我们知道 $a_1=1, a_2=1$. 所以我们有：

$$a_1=1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}c_1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}c_2$$

$$a_2=1=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2c_1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2c_2$$

联立这两个方程，构成一个二元一次方程组，解得 $c_1=\frac{\sqrt{5}}{5}, c_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. 所以：

$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

这正是斐波那契数列的通项公式.

■ **例 3.5.1** 如图3.13，在平面直角坐标系中，直线 $l_1: y = x$ 与函数 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 相交于点 $P(\varphi, \varphi)$. 先过直线 l_1 的点 $A_1(1,1)$ 作平行于 y 轴的线，与函数图像 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 交于点 B_1，然后过 B_1 作平行于 x 轴的线，与直线 l_1 交于点 A_2，然后过点 A_2 作平行于 y 轴的线，与函数图像 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 交于点 B_2... 依次作下去，试求 A_n, B_n 的坐标. ■

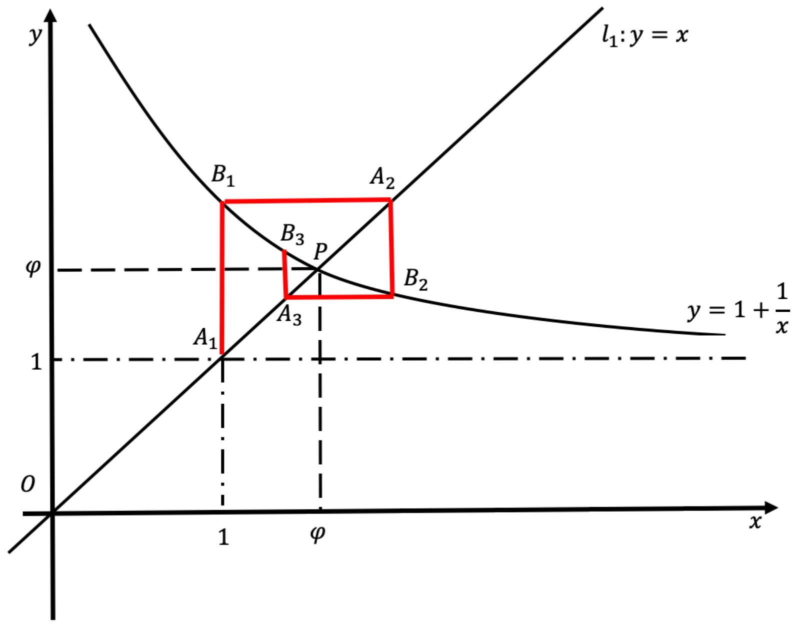


图 3.13: 关于黄金比例的函数蛛网模型.

✎ **解.** 不妨设点 A_n 的坐标为 (r_n, s_n). 点 B_n 的坐标为 (x_n, y_n). 点 A_n 位于直线 $y = x$ 上，所以 $r_n = s_n$. 点 B_n 位于函数 $y = 1 + \frac{1}{x}$ 上，所以 $y_n = 1 + \frac{1}{x_n}$. 已知 A_1 的坐标为 $(1,1)$，所以 $r_1 = 1, s_1 = 1$. B_1 的横坐标与 A_1 的横坐标相等，所以 $x_1 = r_1 = 1$. A_2 的纵坐标与 B_1 的纵坐标相等，所以 $s_2 = y_1 = 1 + \frac{1}{x_1}$. 依次下去，我们发现 B_{n-1} 与 A_{n-1} 的横坐标相等，即 $x_{n-1} = r_{n-1}$. B_{n-1} 与 A_n 的纵坐标相等，即 $y_{n-1} = s_n$. A_n 与 B_n 的横坐标相等，即 $x_n = r_n$. 所以：

$$x_n = r_n = s_n = y_{n-1} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$$

这样我们就得到关于 x_n 的递推关系式. 已知 $x_1 = 1$，则：

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_1} = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$
$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$
$$x_4 = 1 + \frac{1}{x_3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$
$$\cdots$$

可见 x_n 的分子分母依次为斐波那契数列. 所以：

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$y_n = 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}$$

$$r_n = s_n = x_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

所以点 A_n 的坐标为 $\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}, \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right)$，

点 B_n 的坐标为 $\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}, \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right)$. □

由上面的例子，我们可以看到数列 x_n 的递推关系式为 $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$，且 $x_1 = 1$. 因此我们可以得到：

$$x_1 = \frac{1}{1}, x_2 = \frac{2}{1} = 1+\frac{1}{1}, x_3 = \frac{3}{2} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}, x_4 = \frac{5}{3} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}, x_5 = \frac{8}{5} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}$$

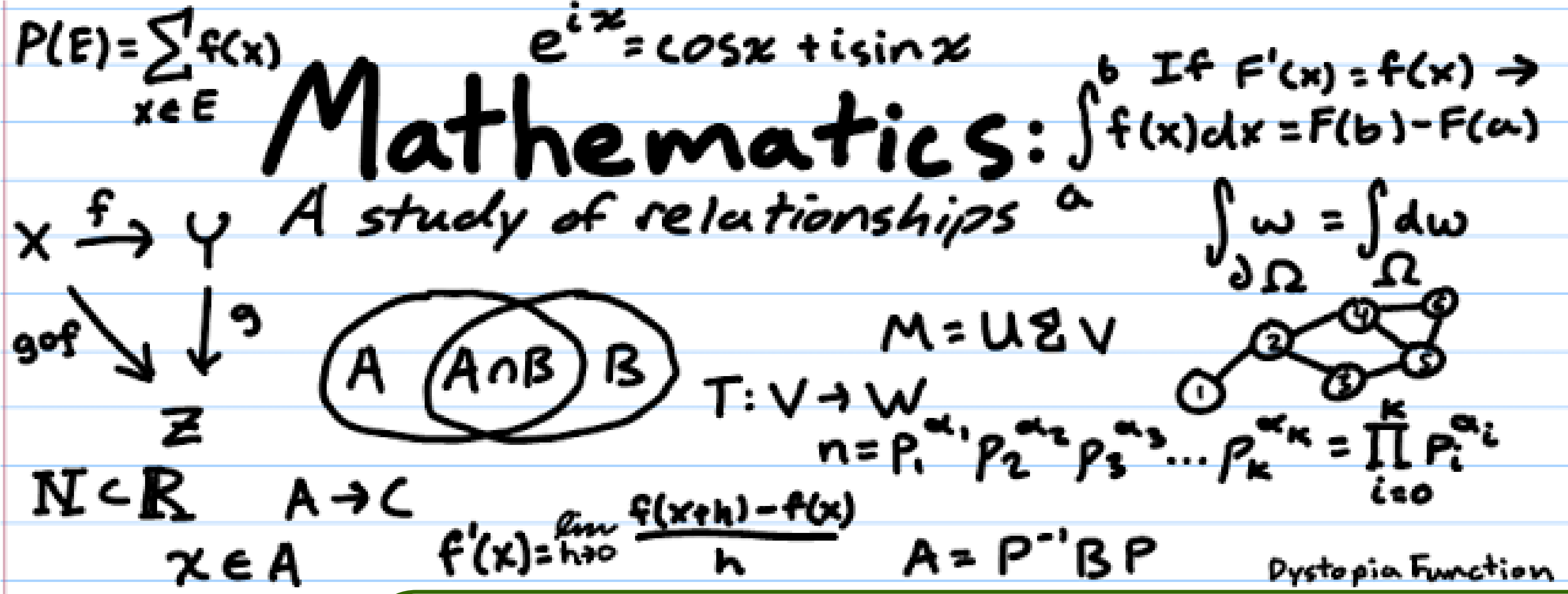
所以斐波那契数可以用连分数表示. 如果这个连分数无限下去，那么就得到黄金比例数：

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}}}$$

所以黄金比例数亦可以用无限连分数表示.

许多的生物构成都和斐波那契数列有正相关. 例如人体从脚底至头顶之距离和从肚脐至脚底之距趋近于黄金比例数. 向日葵的种子螺旋排列有 99% 是斐波那契数列.

习题 35 已知 a_n 是斐波那契数列，求证 $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = a_{n+2} - 1$. ■



4. 课外读物

4.1 《哥德巴赫猜想》—徐迟

哥德巴赫猜想

徐迟

c “……为革命钻研技术，分明是又红又专，被他们攻击为白专道路”.

—— 一九七八年两报一刊元旦社论《光明的中国》

一

命 $P_x(1,2)$ 为适合下列条件的素数 p 的个数：$x-p=p_1$ 或 $x-p=p_2p_3$；其中 p_1,p_2,p_3 都是素数. (这是不好懂的; 读不懂时可以跳过这几行). 用 x 表一充分大的偶数, 令：

$$C_x=\prod_{p\backslash x,p>2}\frac{p-1}{p-2}\prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$$

对于任意给定的偶数 h 及充分大的 x，用 $x_h(1,2)$ 表示满足下面条件的素数 p 的个数：$p\leq x, p+h=p_1$ 或 $h+p=p_2p_3$ 其中 p_1,p_2,p_3 都是素数. 本文的目的在于证明并改进作者在文献 (10) 内所提及的全部结果，现在详述如下.

二

以上引自一篇解析数论的论文. 这一段引自它的“(一) 引言”，提出了这道题. 它后面是“(二) 几个引理”，充满了各种公式和计算. 最后是“(三) 结果”，证明了一条定理. 这篇论文，极不好懂. 即使是著名数学家，如果不是专门研究这一个数学的分枝的，也不一定能读懂. 但是这篇论文已经得到了国际数学界的公认，誉满天下. 它所证明的那条定理，现在世界各国一致地把它命名为“陈氏定理”，因为它的作者姓陈，名景润. 他现在是中国科学院数学研究所的研究员.

陈景润是福建人，生于一九三三年. 当他降生到这个现实人间时，他的家庭和社会生活并没有对他呈现出玫瑰花朵一般的艳丽色彩. 他父亲是邮政局职员，老是跑来跑去的. 当年

如果参加了国民党，就可以飞黄腾达，但是他父亲不肯参加. 有的同事说他真是不识时务. 他母亲是一个善良的操劳过甚的妇女，一共生了十二个孩子. 只活了六个、其中陈景润排行老三. 上有哥哥和姐姐；下有弟弟和妹妹. 孩子生得多了，就不是双亲所疼爱的儿女了. 他们越来越成为父母的累赘——多余的孩子，多余的人. 从生下的那一天起，他就像一个被宣布为不受欢迎的人似的，来到了这人世间.

他甚至没有享受过多少童年的快乐. 母亲劳苦终日，顾不上爱他. 当他记事的时候，酷烈的战争爆发. 日本鬼子打进福建省. 他还这么小，就提心吊胆过生活. 父亲到三元县的三明市一个邮政分局当局长. 小小邮局，设在山区一座古寺庙里. 这地方曾经是一个革命根据地. 但那时候，茂郁山林已成为悲惨世界. 所有男子汉都被国民党匪军疯狂屠杀，无一幸存者. 连老年的男人也一个都不剩了. 剩下的只有妇女. 她们的生活特别凄凉. 花纱布价钱又太贵了；穿不起衣服，大姑娘都还裸着上体. 福州被敌人占领后，逃难进山来的人多起来. 这里飞机不来轰炸，山区渐渐有点儿兴旺. 却又迁来了一个集中营. 深夜里，常有鞭声惨痛地回荡；不时还有杀害烈士的枪声. 第二天，那些戴着镣铐出来劳动的人，神色就更阴森了.

陈景润的幼小心灵受到了极大的创伤. 他时常被惊慌和迷惘所征服. 在家里并没有得到乐趣，在小学里他总是受人欺侮. 他觉得自己是一只丑小鸭. 不，是人，他还是觉得自己也是一个人. 只是他瘦削、弱小. 光是这付窝囊样子就不能讨人喜欢. 习惯于挨打，从来不讨饶. 这更使对方狠狠揍他，而他则更坚韧而有耐力了. 他过分敏感，过早地感觉到了旧社会那些人吃人的现象. 他被造成了一个内向的人，内向的性格. 他独独爱上了数学. 不是因为被压，他只是因为爱好数学，演算数学习题占去了他大部分的时间.

当他升入初中的时候，江苏学院从远方的沦陷区搬迁到这个山区来了. 那学院里的教授和讲师也到本地初中里来兼点课，多少也能给他们流亡在异地的生活改善一些. 这些老师很有学问. 有个语文老师水平最高. 大家都崇拜他. 但陈景润不喜欢语文. 他喜欢两个外地的数理老师. 外地老师倒也喜欢他. 这些老师经常吹什么科学救国一类的话. 他不相信科学能救国. 但是救国却不可以没有科学，尤其不可以没有数学. 而且数学是什么事儿也少不了它的. 人们对他歧视，拳打脚踢，只能使他更加更加爱上数学. 枯燥无味的代数方程式却使他充满了幸福，成为唯一的乐趣.

十三岁那年，他母亲去世了. 是死于肺结核的；从此，儿想亲娘在梦中，而父亲又结了婚，后娘对他就更不如亲娘了. 抗战胜利了，他们回到福州. 陈景润进了三一中学. 毕业后又到英华书院去念高中. 那里有个数学老师，曾经是国立清华大学的航空系主任.

三

老师知识渊博，又诲人不倦. 他在数学课上，给同学们讲了许多有趣的数学知识. 不爱数学的同学都能被他吸引住，爱数学的同学就更不用说了.

数学分两大部分：纯数学和应用数学. 纯数学处理数的关系与空间形式. 在处理数的关系这部分里，论讨整数性质的一个重要分枝，名叫“数论”. 十七世纪法国大数学家费马是西方数论的创始人. 但是中国古代老早已对数论作出了特殊贡献. 《周髀》是最古老的古典数学著作. 较早的还有一部《孙子算经》. 其中有一条余数定理是中国首. 后来被传到了西方，名为孙子定理，是数论中的一条著名定理. 直到明代以前，中国在数论方面是对人类有过较大的贡献的. 五世纪的祖冲之算出来的圆周率，比德国人的奥托的，早出一千年多. 约瑟夫（指斯大林）领导的科学家把月球的一个山谷命名为“祖冲之”. 十三世纪下半纪更是中国古代数学的高潮了. 南宋大数学家秦九韶著有《数书九章》. 他的联立一次方程式的解法比意大利大数学家欧拉的解法早出了五百多年. 元代大数学家朱世杰，著有《四元玉鉴》. 他的多元高次方程的解法，比法国大数学家毕朱，也早出了四百多年. 明清以后，中国落后了. 然而中国人对于数学好像是特具禀赋的. 中国应当出大数学家. 中国是数学的好温床.

有一次，老师给这些高中生讲了数论之中一道著名的难题. 他说，当初，俄罗斯的彼得大帝建设彼得堡，聘请了一大批欧洲的大科学家. 其中，有瑞士大数学家欧拉（他的著作共

有八百余种)；还有德国的一位中学教师，名叫哥德巴赫，也是数学家.

一七四二年，哥德巴赫发现，每一个大偶数都可以写成两个素数的和. 他对许多偶数进行了检验，都说明这是确实的. 但是这需要给予证明. 因为尚未经过证明，只能称之为猜想. 他自己却不能够证明它，就写信请教那赫赫有名的大数学家欧拉，请他来帮忙作出证明. 一直到死，欧拉也不能证明它. 从此这成了一道难题，吸引了成千上万数学家的注意. 两百多年来，多少数学家企图给这个猜想作出证明，都没有成功.

说到这里，教室里成了开了锅的水. 那些像初放的花朵一样的青年学生叽叽喳喳地议论起来了.

老师又说，自然科学的皇后是数学. 数学的皇冠是数论. 哥德巴赫猜想，则是皇冠上的明珠.

同学们都惊讶地瞪大了眼睛.

老师说，你们都知道偶数和奇数. 也都知道素数和合数. 我们小学三年级就教这些了. 这不是最容易的吗？不，这道难题是最难的呢. 这道题很难很难. 要有谁能够做了出来，不得了，那可不得了呵！

青年人又吵起来了. 这有什么不得了. 我们来做. 我们做得出来. 他们夸下了海口.

老师也笑了. 他说，“真的，昨天晚上我还作了一个梦呢. 我梦见你们中间的有一位同学，他不得了，他证明了哥德巴赫猜想.”

高中生们轰的一声大笑了.

但是陈景润没有笑. 他也被老师的话震动了，但是他不能笑. 如果他笑了，还会有同学用白眼瞪他的. 自从升入高中以后，他越发孤独了. 同学们嫌他古怪，嫌他脏，嫌他多病的样子，都不理睬他. 他们用蔑视的和讥讽的眼神瞅着他. 他成了一个踽踽独行，形单影只，自言自语，孤苦伶仃的畸零人. 长空里，一只孤雁.

第二天，又上课了. 几个相当用功的学生兴冲冲地给老师送上了几个答题的卷子. 他们说，他们已经做出来了，能够证明那个德国人的猜想了. 可以多方面地证明它呢. 没有什么了不起的. 哈！哈！

“你们算了！”老师笑着说，“算了！算了！”

“我们算了，算了。我们算出来了！”

“你们算啦！好啦好啦，我是说，你们算了吧，白费这个力气做什么？你们这些卷子我是看也不会看的，用不着看的, 那么容易吗？你们是想骑着自行车到月球上去.”

教室里又爆发出一阵哄堂大笑. 那些没有交卷的同学都笑话那几个交了卷的. 他们自己也笑了起来，都笑得跺脚，笑破肚子了. 唯独陈景润没有笑. 他紧结着眉头. 他被排除在这一切欢乐之外.

第二年，老师又回清华去了. 他现在是北京航空学院副院长，全国航空学会理事长沈元. 他早该忘记这两堂数学课了. 他怎能知道他被多么深刻地铭刻在学生陈景润的记忆中. 老师因为同学多，容易忘记，学生却常常记着自己青年时代的老师.

四

福州解放！那年他高中三年级. 因为交不起学费，一九五零年上半年，他没有上学，在家自学了一个学期. 高中没有毕业，但以同等学历报考，他考进了厦门大学. 那年，大学里只有数学物理系. 读大学二年级时，才有了一个数学组，但只四个学生. 到三年级时，有数学系了，系里还是这四个人. 因为成绩特别优异，国家又急需培养人才，四个人提前毕了业；而且，立即分配了工作，得到的优待，羡慕煞人. 一九五三年秋季，陈景润被分配到了北京！在第 X 中学当数学老师. 这该是多么的幸福了呵！

然而，不然！在厦门大学的时候，他的日子是好过的. 同组同系就只四个大学生，倒有四个教授和一个助教指导学习. 他是多么饥渴而且贪馋地吸饮于百花丛中，以酿制芬芳馥郁的数学蜜糖呵！学习的成效非常之高. 他在抽象的领域里驰骋得多么自由自在！大家有共

同的 dx 和 dy 等等之类的数学语言. 心心相印，息息相通. 三年中间，没有人歧视他，也不受骂挨打了. 他很少和人来往，过的是黄金岁月；全身心沉浸在数学的海洋里面. 真想不到，那么快，他就毕业了. 一想到他将要当老师，在讲台上站立，被几十对锐利而机灵，有时难免要恶作剧的眼睛盯视，他禁不住吓得打颤！

他的猜想立刻就得到了证明. 他是完全不适合于当老师的. 他那么瘦小和病弱，他的学生却都是高大而且健壮的. 他最不善于说话，说多几句就嗓子发痛了. 他多么羡慕那些循循善诱的好老师. 下了课回到房间里，他叫自己笨蛋. 辱骂自己比别人的还厉害得多. 他一向不会照顾自己，又不注意营养. 积忧成疾，发烧到摄氏三十八度. 送进医院一检查，他患有肺结核和腹膜结核症.

这一年内，他住医院六次，做了三次手术. 当然他没有能够好好的教书. 但他并没有放弃了他的专业. 中国科学院不久前出版了华罗庚的名著《堆垒素数论》. 刚摆上书店的书架，陈景润就买到了. 他一头扎进去了. 非常深刻的著作，非常之艰难！可是他钻研了它. 住进医院，他还偷偷地避开了医生和护士的耳目，研究它. 他那时也认为，这样下去，学校没有理由欢迎他.

他想他也许会失业? 又有什么办法呢? 好在他节衣缩食，一只牙刷也不买. 他从来不随便花一分钱，他积蓄了几乎他的全部收入. 他横下心来，失业就回家，还继续搞他的数学研究. 积蓄这几个钱是他搞数学的保证. 这保证他失了业也还能研究数学的几个钱，就是他的生命：他的生命就是数学. 至于积蓄一旦用光了，以后呢? 他不知道，那时又该怎么办? 这也是难题；也是尚未得到解答的猜想. 而这个猜想后来也证明是猜对了的. 他的病好不了，中学里后来无法续聘他了.

厦门大学校长来到了北京，在教育部开会. 那中学的一位领导遇见了他，谈起来，很不满意，提出了一大堆的意见：你们怎么培养了这样的高材生?

王亚南，厦门大学校长，就是马克思的《资本论》的翻译者，听到意见之后，非常吃惊. 他一直认为陈景润是他们学校里最好的学生. 他不同意他所听到的意见. 他认为这是分配学生的工作时，分配不得当. 他同意让陈景润回到厦门大学.

听说他可以回厦门大学数学系了，说也奇怪，陈景润的病也就好转了. 而王亚南却安排他在厦大图书馆当管理员. 又不让管理图书，只让他专心致意的研究数学. 王亚南不愧为政治经济学的批判家，他懂得价值论，懂得人的价值. 陈景润也没有辜负了老校长的培养. 他果然精深地钻研了华罗庚的《堆垒素数论》和大厚本儿的《数论导引》. 陈景润都把它们吃透了. 他的这种经历却也并不是没有先例的.

当初，我国老一辈的大数学家、大教育家熊庆来，我国现代数学的引进者，在北京的清华大学执教. 三十年代之初，有一个在初中毕业以后就失了学，失了学就完全自学的青年人，寄出了一篇代数方程解法的文章，给了熊庆来. 熊庆来一看，就看出了这篇文章中的英姿勃发和奇光异采. 他立刻把它的作者，姓华名罗庚的，请进了清华园来. 他安排华罗庚在清华数学系当文书，可以一面自学，一面大量地听课. 尔后，派遣华罗庚出国，留学英国剑桥. 学成回国，已担任在昆明的云南大学校长的熊庆来又介绍他当联大教授. 华罗庚后来再次出国，在美国普林斯顿和依利诺的大学教书. 中华人民共和国成立以后，华罗庚马上回国来了，他主持了中国科学院数学研究所的工作.

陈景润在厦门大学图书馆中也很快写出了数论方面的专题文章，文章寄给了中国科学院数学研究所. 华罗庚一看文章，就看出了文章中的英姿勃发和奇光异采，也提出了建议，把陈景润选调到数学研究所来当实习研究员. 正是：熊庆来慧眼认罗庚，华罗庚睿目识景润.

一九五六年年底，陈景润再次从南方海滨来到了首都北京.

一九五七年夏天，数学大师熊庆来也从国外重返祖国首都.

这时少长咸集，群贤毕至. 当时著名的数学家有熊庆来、华罗庚、张宗燧、闵嗣鹤、吴文俊等等许多明星灿灿；还有新起的一代俊彦，陆启铿、万哲先、王元、越民义、吴方等等，如朝霞烂熳；还有后起之秀，陆汝钤、杨乐、张广厚等等已入北京大学求学. 在解析数

论、代数数论、涵数论、泛涵分析、几何拓扑学等等的学科之中，已是人才济济，又加上了一个陈景润. 人人握灵蛇之珠，家家抱荆山之玉. 风靡云蒸，阵容齐整。条件具备了，华罗庚作出了部署. 侧重于应用数学，但也要向那皇冠上的明珠，哥德巴赫猜想挺进！

五

要懂得哥德巴赫猜想是怎么一回事? 只需把早先在小学三年级里就学到过的数学再来温习一下. 那些 $1,2,3,4,5$，个十百千万的数字，叫做正整数. 那些可以被 2 整除的数，叫做偶数. 剩下的那些数，叫做奇数. 还有一种数，如 $2,3,5,7,11,13$ 等等，只能被 1 和它本数，而不能被别的整数整除的，叫做素数, 除了 1 和它本数以外，还能被别的整数整除的，这种数如 $4,6,8,9,10,12$ 等等就叫做合数. 一个整数，如能被一个素数所整除，这个素数就叫做这个整数的素因子. 如 6, 就有 2 和 3 两个素因子. 如 30，就有 2，3 和 5 三个素因子. 好了，这暂时也就够用了.

一七四二年，哥德巴赫写信给欧拉时，提出了：每个不小于 6 的偶数都是二个素数之和. 例如，$6 = 3 + 3$. 又如，$24 = 11 + 13$ 等等. 有人对一个一个的偶数都进行了这样的验算，一直验算到了三亿三千万之数，都表明这是对的. 但是更大的数目，更大更大的数目呢? 猜想起来也该是对的. 猜想应当证明. 要证明它却很难很难.

整个十八世纪没有人能证明它.

整个十九世纪也没有能证明它.

到了二十世纪的二十年代，问题才开始有了点儿进展.

很早以前，人们就想证明，每一个大偶数是二个“素因子不太多的”数之和. 他们想这样子来设置包围圈，想由此来逐步、逐步证明哥德巴赫这个命题一个素数加一个素数（1 + 1）是正确的.

一九二零年，挪威数学家布朗，用一种古老的筛法（这是研究数论的一种方法）证明了：每一个大偶数是二个“素因子都不超九个的”数之和. 布朗证明了：九个素因子之积加九个素因子之积，（9 + 9），是正确的. 这是用了筛法取得的成果. 但这样的包围圈还很大，要逐步缩小之. 果然，包围圈逐步地缩小了.

一九二四年，数学家拉德马哈尔证明了（7 + 7）；一九三二年，数学家爱斯斯尔曼证明了（6 + 6）；一九三八年，数学家布赫斯塔勃证明了（5 + 5）；一九四 年，他又证明了（4 + 4）. 一九五六年，数学家维诺格拉多夫证明了（3 + 3）. 一九五八年，我国数学家王元又证明了（2 + 3）. 包围圈越来越小，越接近于（1 + 1）了. 但是，以上所有证明都有一个弱点，就是其中的二个数没有一个是可以肯定为素数的.

早在一九四八年，匈牙利数学家兰恩易另外设置了一个包围圈. 开辟了另一战场，想来证明：每个大偶数都是一个素数和一个“素因子都不超过六个的”数之和. 他果然证明了（1 + 6）.

但是，以后又是十年没有进展.

一九六二年，我国数学家、山东大学讲师潘承洞证明了（1 + 5），前进了一步；同年，王元、潘承洞又证明了（1 + 4）. 一九六五年，布赫斯塔勃、维诺格拉多夫和数学家庞皮艾黎都证明了（1 + 3）.

一九六六年五月，一颗璀璨的讯号弹升上了数学的天空，陈景润在中国科学院的刊物《科学通报》第十七期上宣布他已经证明了（1 + 2）.

自从陈景润被选调到数学研究所以来，他的才智的蓓蕾一朵朵地烂熳开放了. 在圆内整点问题，球内整点问题，华林问题，三维除数问题等等之上，他都改进了中外数学家的结果. 单是这一些成果，他那贡献就已经很大了.

但当他已具备了充分依据，他就以惊人的顽强毅力，来向哥德巴赫猜想挺进了. 他废寝忘食，昼夜不舍，潜心思考，探测精蕴，进行了大量的运算. 一心一意地搞数学，搞得他发呆了. 有一次，自己撞在树上，还问是谁撞了他? 他把全部心智和理性统通奉献给这道难题

的解题上了，他为此而付出了很高的代价. 他的两眼深深凹陷了. 他的面颊带上了肺结核的红晕. 喉头炎严重，他咳嗽不停. 腹胀、腹痛，难以忍受. 有时已人事不知了，却还记挂着数字和符号. 他跋涉在数学的崎岖山路，吃力地迈动步伐. 在抽象思维的高原，他向陡峭的岩升登，降下又升登！善意的误会飞入了他的眼帘. 无知的嘲讽钻进了他的耳道. 他不屑一顾；他未予理睬. 他没有时间来分辩；他宁可含垢忍辱. 餐霜饮雪，走上去一步就是一步！他气喘不已；汗如雨下. 时常感到他支持不下去了. 但他还是攀登. 用四肢，用指爪. 真是艰苦卓绝！多少次上去了摔下来. 就是铁鞋，也早该踏破了. 人们嘲笑他穿的鞋是破了的：硬是通风透气不会得脚气病的一双鞋子. 不知多少次发生了可怕的滑坠！几乎粉身碎骨. 他无法统计他失败了多少次. 他毫不气馁. 他总结失败的教训，把失败接起来，焊上去，作登山用的尼龙绳子和金属梯子. 吃一堑，长一智. 失败一次，前进一步. 失败是成功之母；功由失败堆垒而成. 他越过了雪线，到达雪峰和现代冰川，更感缺氧的严重了. 多少次坚冰封山，多少次雪崩掩埋！他就像那些征服珠穆朗玛峰的英雄登山运动员，爬呵，爬呵，爬呵！而恶毒的诽谤，恶意的污蔑像变天的乌云和九级狂风. 然而热情的支持为他拨开云雾；爱护的阳光又温暖了他. 他向着目标，不屈不挠；继续前进，继续攀登. 战胜了第一台阶的难以登上的峻峭；出现在难上加难的第二台阶绝壁之前. 他只知攀登，在千仞深渊之上；他只管攀登，在无限风光之间. 一张又一张的运算稿纸，像漫天大雪似的飞舞，铺满了大地. 数字、符号、引理、公式、逻辑、推理，积在楼板上，有三尺深. 忽然化为膝下群山，雪莲万千. 他终于登上了攀登顶峰的必由之路，登上了（$1+2$）的台阶.

他证明了这个命题，写出了厚达二百多页的长篇论文.

闵嗣鹤老师给他细心地阅读了论文原稿. 检查了又检查，核对了又核对. 肯定了，他的证明是正确的，靠得住的. 他给陈景润说，去年人家证明（$1+3$）是用了大型的，高速的电子计算机. 而你证明（$1+2$）却完全靠你自己运算. 难怪论文写得长了。太长了，建议他加以简化.

本文第一段最后一句说到的“文献 (10)”就是这时他以简报形式，在《科学通报》上宣布的，但只提到了结果，尚未公布他的证明. 他当时正修改他的长篇论文. 就是在这个当口，突然陈景润被卷入了政治革命的万丈波澜.

六

“文化大革命”开始了. 中国发生了一场内战，到处是有组织的激动，有领导的对战，有秩序的混乱，只见一个一个的场景，闪来闪去，风驰电掣，惊天动地. 一台一台的戏剧，排演出来，喜怒哀乐，淋漓尽致；悲欢离合，动人心扉. 一个一个的人物，登上场了. 有的折戟沉沙，死有余辜；四大家族，红楼一梦；有的昙花一现，萎谢得好快呵. 乃有青松翠柏，虽死犹生，重于泰山，浩气长存！有的是国杰豪英，人杰地灵；干将莫邪，斤锤百炼；拂钟无声，削铁如泥. 一页一页的历史写出来了，大是大非，终于有了无私的公论. 肯定——否定——否定之否定. 化妆不经久要剥落；被诬的终究要昭雪. 种子播下去，就有收获的一天. 播什么，收什么. 天文地理要审查；物理化学要审查. 生物要审查；数学也要审查. 陈景润在“无产阶级文化大革命”中受到了最严峻的考验. 老一辈的数学家受到了冲击，连中年和年轻的也跑不了. 庄严的科学院被骚扰了；热腾腾的实验室冷清清了. 日夜的辩论；剧烈的争吵. 行动胜于语言；拳头代替舌头. “无产阶级文化大革命”像一个筛子. 什么都要在这筛子上过滤一下. 它用的也是筛法. 该筛掉的最后都要筛掉；不该筛掉的怎么也筛不掉.

曾经有人强调了科学工作者要安心工作，钻研学问，迷于专业. 陈景润又被认为是这种所谓资产阶级科研路线的“安钻迷”典型. 确实他成天钻研学问. 不关心政治，是的，但也参加了历次的政治运动. 共产党好，国民党坏，这个朴素的道理他非常之分明. 数学家的逻辑像钢铁一样坚硬；他的立场站得稳. 他没有犯过什么错误. 在政治历史上，陈景润一身清白. 他白得像一只仙鹤. 鹤羽上，污点沾不上去. 而鹤顶鲜红；两眼也是鲜红的，这大约是他熬夜熬出来的. 他曾下厂劳动，也曾用数学来为生产服务，尽管他是从事于数论这一基

础理论科学的. 但不关心政治，最后政治要来关心他. 但是，能不能一推就把他推过敌我界线? 能不能将他推进“专政队”里去? 尽量摆脱外界的干扰，以专心搞科研又有何罪?

善意的误会，是容易纠正的. 无知的嘲讽，也可以谅解的. 批判一个数学家，多少总应该知道一些数学的特点. 否则，说出了糊涂话来自己还不知道. 陈景润被批判了. 他被帽子工厂看中了：修正主义苗子，安钻迷，白专道路典型，白痴，寄生虫，剥削者. 就有这样的糊涂话：这个人，研究（$1+2$）的问题. 他搞的是一套人们莫名其妙的数学. 让哥德巴赫猜想见鬼去吧！（$1+2$）有什么了不起！$1+2$ 不等于 3 吗? 此人混进数学研究所，领了国家的工资，吃了人民的小米，研究什么 $1+2=3$，什么玩艺儿?! 伪科学！

说这话的人才像白痴呢！

并不懂得数学的人说出这样的话，那是可以理解的，可是说这些话的人中间，有的明明是懂得数学，而且是知道哥德巴赫猜想这道世界名题的. 那么，这就是恶意的诽谤了. 权力使人昏迷了；派性叫人发狂了.

理解一个人是很难的. 理解一个数学家也不容易. 至于理解一个恶意的诽谤者却很容易，并不困难. 只是陈景润发病了，他病重了. 钢铁工厂也来光顾了. 陈景润听着那些厌恶与侮辱他的，唾沫横飞的，听不清楚的言语. 他茫然直视. 他两眼发黑，看不到什么了. 他像发寒热一样颤抖. 一阵阵刺痛的怀疑在他脑中旋转. 血痕印上他惨白的面颊. 一块青一块黑，一种猝发的疾病临到他的身上. 他眩晕，他休克，一个倒栽葱，从上空摔到地上. “资产阶级认为最革命的事件，实际上却是最反革命的事件. 果实落到了资产阶级脚下，但它不是从生命树上落下来，而是从知善恶树上落下来的. ”（马克思：《雾月十八日》——二）

七

台风的中心是安静的.

过了一段时间，不知是多少天多少月?“专政队”的生活反倒平静无事了. 而旋卷在台风里面的人却焦灼着、奔忙着、谋划着、叫嚷着、战斗着，不吃不睡，狂热地保护自己的派性，疯狂地攻击对方的派性. 他们忙着打派仗，竟没有时间来顾及他们的那些“专政”对象了. 这时有一个老红军，主动出来担当了看守他们的任务. 实际是一个热情的支持者，他保护了科学家们，还允许他们偷偷地看书.

待到工人宣传队进驻科学院各所以后，陈景润被释放了，可以回到他自己的小房间里去住了. 不但可以读书，也可以运算了. 但是总有一些人不肯放过了他. 每天，他们来敲敲门，来查查户口，弄得他心惊肉跳，不得安身. 有一次，带来了克丝钳子；存心不让他看书，把他房间里的电灯铰了下来，拿走了. 还不够，把开关拉线也剪断了.

于是黑暗降临他的心房.

但是他还得在黑暗中活下去呵，他买了一只煤油灯. 又深怕煤油灯光外露，就在窗子上糊了报纸. 他挣扎着生活，简直不成样子. 对搞工作的，扣他们工资；搞打砸抢的，反而有补贴. 过了这样久心惊肉跳的生活，动辄得咎，他的神经极度衰弱了. 工作不能做，书又不敢读. 工宣队来问：为什么要搞 $1+1=2$ 以及 $1+2=3$ 呢? 他哭笑不得，张皇失措了. 他语无伦次，不知道怎样对师傅们解说才能解释清楚. 工人同志觉得这个人奇怪. 但是他还是给他们解释清楚了. 这（$1+1$）（$1+2$）只是一个通俗化的说法，并不是日常所说的 $1+1$ 和 $1+2$. 好像我们说一个人是纸老虎，并不就是老虎了. 弄清楚了之后，工人师傅也生气地说：那些人为什么要胡说? 他们也热情支持他，并保护他了.

“九一三”事件之后，大野心家已经演完了他的角色，下场遗臭万年去了. 陈景润听到这个传达之后，吃惊得说不出话来. 这时，情况渐渐地好转. 可是他却越加成了惊弓之鸟. 激烈的阶级斗争使他无所适从. 唯一的心灵安慰从来就是数学. 他只好到数论的大高原上去隐居起来. 现在也允许他这样做，继续向数学求爱了. 图书馆的研究员出身的管理员也是他的热情支持者. 事实证明，热情的支持者，人数众多. 他们对他好，保护他. 他被藏在一个小书库的深深的角落里看书. 由于这些研究员的坚持，数学研究所继续订购世界各国的文献

资料. 这样几年，也没有中断过；这是有功劳的. 他阅读，他演算，他思考. 情绪逐步地振作起来. 但是健康状况却越加严重了. 他从不说；他也不顾. 他又投身于工作. 白天在图书馆的小书库一角，夜晚在煤油灯底下，他又在攀登，攀登，攀登了，他要找寻一条一步也不错的最近的登山之途，又是最好走的路程.

敬爱的周总理，一直关心着科学院的工作，腾出手来排除帮派的干扰. 半个月之前，有一位周大姐被任命为数学研究所的政治部主任. 由解析数论、化数数论等学科组成的五学科室恢复了上下班的制度. 还任命了支部书记，是个工农出身的基层老干部，当过第二野战军政治部的政治干事.

到职以后，书记就到处找陈景润. 周大姐已经把她所了解的情况告诉了他. 但他找不到陈景润. 他不在办公室里，办公室里还没有他的办公桌. 他已经被人忘记掉了. 可是他们会了面，会面在图书馆小书库的一个安静的角上.

刚过国庆，十月的阳光普照. 书记还只穿一件衬衣，衰弱的陈景润已经穿上棉袄.

“李书记，谢谢你，”陈景润说，他见人就谢. “很高兴，”他说了一连串的很高兴. 他一见面就感到李书记可亲. “很高兴，李书记，我很高兴，李书记，很高兴.”

李书记问他，“下班以后，下午五点半好不好? 我到你屋去看看你.”

陈景润想了一想就答应了，“好，那好，那我下午就在楼门口等你，要不你会找不到的.”

“不，你不要等我，”李书记说. “怎么会找不到呢? 找得到的. 完全用不到等的.”

但是陈景润固执地说，“我要等你，我在宿舍大楼门口等你. 不然你找不到. 你找不到我就不好了.”

果然下午他是在宿舍大楼门口等着的. 他把李书记等到了，带着他上了三楼，请进了一个小房间. 小小房间，只有六平方米大小. 这房间还缺了一只角. 原来下面二楼是个锅炉房. 长方形的大烟囱从他的三楼房间中通过，切去了房间的六分之一. 房间是刀把形的. 显然它的主人刚刚打扫过清理过这间房了. 但还是不太整洁. 窗子三 ，糊了报纸，糊得很严实. 尽管秋天的阳光非常明丽，屋内光线暗淡得很. 纱窗之上，是羊尾巴似的卷起来的窗纱. 窗上缠着绳子，关不严. 虫子可以飞出飞进. 李书记没有想到他住处这样不好. 他坐到床上，说：“你床上还挺干净!”

“新买了床单. 刚买来的床单，”陈景润说. “你要来看看我. 我特地去买了床单，”指着光亮雪白的兰格子花纹的床单. “谢谢你，李书记，我很高兴，很久很久了，没有人来看望……看望过我了. ”他说，声音颤抖起来. 这里面带着泪音. 霎时间李书记感到他被这声音震撼起来. 满腔怒火燃烧. 这个党的工作者从来没有这样激动过. 不象话；太不象话了！这房间里还没有桌子. 六平方米的小屋，竟然空如旷野. 一捆捆的稿纸从屋角两只麻袋中探头探脑地露出脸来. 只有四叶暖气片的暖气上放着一只饭盒. 一堆药瓶，两只暖瓶. 连一只矮凳子也没有. 怎么还有一只煤油灯? 他发现了，原来房间里没有电灯. “怎么?”他问，“没有电灯?”

“不要灯，”他回答，“要灯不好. 要灯麻烦. 这栋大楼里，用电炉的人家很多. 电线负荷太重，常常要检查线路，一家家的都要查到. 但是他们从来不查我. 我没有灯，也没有电线. 要灯不好，要灯添麻烦了，”说着他凄然一笑.

“可是你要做工作. 没有灯，你怎么做工作? 说是你工作得很好.”

“哪里哪里. 我就在煤油灯下工作；那，一样工作.”

“桌子呢? 你怎么没有桌子?”

陈景润随手把新床单连同褥子一起翻了起来，露出了床板，指着说，“这不是? 这样也就可以工作了.”

李书记皱起了眉头，咬牙切齿了. 他心中想着：“唔，竟有这样的事！在中关村，在科学院呢. 糟蹋人呵，糟蹋科学！被糟蹋成了这个状态. ”一边这样想，一边又指着羊尾巴似的窗纱问道，“你不用蚊帐? 不怕蚊虫咬?”

“晚上不开灯，蚊子不会进来. 夏天我尽量不在房间里耽着. 现在蚊子少了.”

“给你灯，”李书记加重了语气说，“接上线，再给你桌子，书架，好不好?”

“不好不好，不要不要，那不好，我不要，不……不……”

李书记回到机关. 他找到了比他自己早到了才一个星期的办公室老张主任. 主任听他说话后，认为这一切不可能，“瞎说! 怎么会没有灯呢?”李书记给他描绘了小房间的寂寞风光. 那些身上长刺头上长角的人把科学院搅得这样! 立刻找来了电工. 电工马上去装灯. 灯装上了，开关线也接上了，一拉，灯亮了. 陈景润已经俯伏在一张桌子之上，写起来了.

光明回到陈景润的心房.

八

（他写着，写着）……

由（22）式及上式，当 X 很大时，有

$$M_1 \leq (8+24\varepsilon)C_x(logx)^{-1}$$

$$\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1\leq x^{\frac{1}{3}}<p_2\leq\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}},n\leq\frac{x}{p_1p_2}} \left[\frac{\Lambda(n)}{log\frac{x}{p_1p_2}}\right]\Phi\left(\frac{x}{p_1p_{2n}}\right)$$

由引理 1，本引理得证引理 8.1，设 x 是大偶数，则有

$$\Omega \leq \frac{3.9404xC_x}{(logx)^2}$$

(引理 8 的一句话，读作“设 x. 是一个大偶数，则有 Ω 小于或等于 $3.9404xC_x$，除以括弧中的 $logx$ 的平方!”请注意，这一公式是解决哥德巴赫猜想的（1 + 2）证明的主要关键.)

证：当 x 很大时，由引理 5 到引理 7，我们有

$$\Omega \leq \left\{\frac{8\left(1+5\varepsilon\right)xC_x}{logx}\right\}\left\{\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1\leq x^{\frac{1}{3}}<p_2\leq\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{p_1p_2log\frac{x}{p_1p_2}}\right\}$$

又有：

$$\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1\leq x^{\frac{1}{3}}<p_2\leq\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{p_1p_2log\frac{x}{p_1p_2}} \leq (1+\varepsilon)\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1\leq x^{\frac{1}{3}}}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{dt}{p_1t(logt)log\frac{x}{p_1t}}$$

何等动人的一页又一页篇页! 这些是人类思维的花朵. 这些是空谷幽兰、高寒杜鹃、老林中的人参、冰山上的雪莲、绝顶上的灵芝、抽象思维的牡丹. 这些数学的公式也是一种世界语言. 学会这种语言就懂得它了. 这里面贯穿着最严密的逻辑和自然辩证法. 它是在探索太阳系、银河系、河外系和宇宙的秘密，原子、电子、粒子、层子的奥妙中产生的. 但是能升登到这样高深的数学领域去的人，一般地说，并不很多.

且让我们这样稍稍窥视一下彼岸彼土. 那里似有美丽多姿的白鹤在飞翔舞蹈. 你看那玉羽雪白，雪白得不沾一点尘土；而鹤顶鲜红，而且鹤眼也是鲜红的. 它踯躅徘徊，一飞千里. 还有乐园鸟飞翔，有鸾凤和鸣，姣妙、娟丽，变态无穷. 在深邃的数学领域里，既散魂而荡目，迷不知其所之.

闵嗣鹤老师却能够品味它，欣赏它，观察它的崇高瑰丽. 他当时说过，“陈景润的工作，最近好极了. 他已经把哥德巴赫猜想的那篇论文写出来了. 我已经看到了，写得极好.”

“你的论文写出了，”一位军代表问陈景润，“为什么不拿出来?”陈景润回答他：“正做正做，没有做完. ”军代表说，“希望你早日完成.”

室里的领导老田对李书记说，“可以动员动员他，让他拿出来. 但也不急. 他不拿出来，自然有他的道理的.”

李书记问了问他，陈景润说，“有人还在骂我，说我不交论文是因为现在没有稿费了. 说是恢复了稿费我就会交了. ”李书记追了他一句，“谁这样说你?”他回答，“你不要问了. 谢谢你，你可别去问呵！问了我更麻烦了. 没有稿费，谢天谢地. 我不要稿费. 我压根儿也没有想到它. 那个稿子我还在做. 我确实没有做完.”

九

“我确实还没有做完. 我的论文是做完了，又是没有做完的. 自从我到数学研究所以来，在严师、名家和组织的培养、教育、熏陶下，我是一个劲儿钻研. 怎么还能干别的事? 不这样怎么对得起党? 在世界数学的数论方面三十多道难题中，我攻了了六七道难题，推进了它们的解决. 这是我的必不可少的锻炼和必不可少的准备. 然后我才能向哥德巴赫猜想挺进. 为此，我已经耗尽了我的心血.

“一九六五年，我初步达到了（$1+2$）. 但是我的解答太复杂了，写了两百多页的稿子. 数学论文的要求是（一）正确性，（二）简洁性. 譬如从北京城里走到颐和园那样，可有许多条路，要选择一条最准确无错误，又最短最好的道路. 我那个长篇论文是没有错误，但走了远路，绕了点儿道，长达两百多页，也还没有发表. 国外没有承认它，也没有否认它，因为它没有发表. 从那年到今天已经过去了七年.

“这个事是比较困难的，也是难于被人理解的. 从学习外语来说，我是在中学里就学了英语，在大学里学的俄语；在所里又自学了德语和法语. 我勉强可以阅读而且写写了. 又自学了日语、意大利语和西班牙语，到了勉强可以阅读外国资料和文献的程度. 因而在借鉴国外的经验和成就时，可以从原文阅读，用不到等人翻译出来了再读. 这是必不可少的一个条件. 我必须检阅外国资料的尽可能的全部总和，消化前人智慧的尽可能不缺的全部的果实. 而后我才能在这样的基础上解答（$1+2$）这样的命题.

“我的成果又必须表现在这样的一篇论文中，虽然是专业性质的论文，文字是比较简单的；尽管是相对地严密的，又必须是绝对地精确的. 若干地方就是属于哲学领域的了. 所以我考虑了又考虑，计算了又计算，核对了又核对，改了又改，改个没完. 我不记得我究竟改了多少遍? 科学的态度应当是最严格的，必须是最严格的.

“我知道我的病早已严重起来. 我是病入膏肓了. 细菌在吞噬我的肺腑内脏. 我的心力已到了衰竭的地步. 我的身体确实是支持不了啦！唯独我的脑细胞是异常的活跃，所以我的工作停不下来. 我不能停止.……”

十

一九七三年二月，春节来临.

早一天，数学研究所的周大姐说，佳节前后，要特别关心一下病号. 她说：“那些老八路的作风，那些过去部队里形成的作风，我们千万不能丢掉了. 尤其像陈景润那样的同志，要关心他，他很顽强. 他病得起不来了，但又没有起不来的时候. 在任何情况下挣扎起来，他坚持工作. 他为什么? 他为谁? 为他自己吗? 为他自己，早就不干了. 不是，他是为人民，为党工作. 我们要去慰问他. 也要慰问单位里所有的病人.”

其实，外表看来魁梧，说话声音洪亮的周大姐自己也是一个力疾从公，患有心脏病，应当受到慰问的人.

大年初一早晨，周大姐和几个书记，包括李书记，一行数人，把头天买好了的苹果、梨

子装进一些塑料网线袋子. 若干袋子大家分头提了，然后举步出发，慰问病人. 他们先到陈景润那里. 他住得最近.

陈景润正从楼梯上走下来. 大家招呼他. 他很惊讶，来了这许多的领导同志. 周大姐说，"过春节，我们看你来了，你的病好点了吧. "李书记也说，"新年好，给你贺新年. "陈景润说，"噢，今天是新年了呵? 我很高兴，谢谢你们，谢谢你们. 新年好，你们好."李书记说，"到你屋里去坐坐吧. ""不，不行，"陈景润说，"你没有先给我打招呼，不能进去. "周大姐沉吟了一下，说"好吧，我们就不去了. 李书记，你给他送水果上楼吧. 我们还上别家去，你回头再赶上我们好了. "李书记说，"好. "周大姐和陈景润握手，并祝他早日恢复健康，然后转过身走了. 李书记把水果袋递给陈景润说："春节了. 这是组织上送给你的. 希望你在新的一年里，多给党做点工作. ""不要水果，不要水果，"陈景润推却了，"我很好，我没有病，没有什么……这点点病，呃……呃，谢谢你，我很高兴. "说着说着他收下了水果. 李书记说，"上你屋聊聊?"他又张手拦住，"不，不要进屋了，你没有给我打招呼."

李书记说，"那好，我不上去了. 你有什么事，随时告诉我. 我也得去追上他们，到别家去看望看望. "于是握手作别，他返身走. 刚走两步，后面又叫，"李书记，李书记!"陈景润又追过来，把水果袋子给了李书记，并说，"给你家的小孩吃吧. 我吃不了这多. 我是不吃水果的. "李书记说，"这是组织上给你的，不过表示表示，一点点的心意罢了. 要你好好保养身体，可以更好地工作. 你收下吧，吃不下，你慢慢的吃吧. "

他默然收下了. 他噙着泪送李书记到大楼门口. 李书记扬手走了，赶上了周大姐他们的行列. 陈景润望着李书记的背影，凝望着周大姐一行人的背影模糊地消失在中关村路林荫道旁的切面铺子后面了. 突然间，他激动万分. 他回上楼，见人就讲，并且没有人他也讲. "从来所领导没有把我当作病号对待，这是头一次；从来没有人带了东西来看望我的病，这是头一次."他举起了塑料袋，端详它，说，"这是水果，我吃到了水果，这是头一次."

他飞快地进了小屋。一下子把自己反锁在里面了.

他没有再出来。直到春节过去了. 头一天上班，陈景润把一叠手稿交给了李书记，说："这是我的论文. 我把它交给党."

李书记看看他，又轻声问他："是那个（1 + 2)?"

"是的，闵老师已看过，不会有错误的，"陈景润说.

数学研究所立即组织了一次小型的学术报告会. 十几位专家，听了陈景润的报告，一致给以高度评价. 然后，数学研究所业务处将他的论文上报院部.

十一

显见，我们有：

$$P_x(1,2) \geq P_x\left(x, x^{\frac{1}{10}}\right) - \frac{1}{2} \sum_{x^{\frac{1}{10}} < p \leq x^{\frac{1}{3}}} P_x\left(x, p, x^{\frac{1}{10}}\right) - \frac{\Omega}{2} - x^{-0.91}$$

由上式、引理 8 和引理 9，即得到定理 1：

$$P_x(1,2) \geq \frac{0.67xC_x}{(logx)^2}$$

的证明. 完全类似的方法可得到定理 2 的证明.

以上就是陈景润的著名论文：《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》的"(三)结果". 作为结果的定理就是那个"陈氏定理".

四月中的一天，中国科学院在三里河工人俱乐部召开全院党员干部大会. 武衡同志在会上作报告. 他说到数学研究所一位中级的研究员作出了世界水平的重大成果. 当时没说人名，听到了，还不知说谁? 李书记在座中，捅了一下旁边的人. "干什么?"那人说. 他

问，“你听到没有?”“怎么啦?”那人又说．“这活儿是陈景润做出来的呵!”“噢? 还这么重要?”那人说．“这是世界名题．真不简单!”

第二天，新华社记者来访．他见到了陈景润，谈了话，进他房间看了看．回去就写出一篇报道，立即在内部刊物上发表．其中，说到了陈景润的经历；他刻苦钻研的精神；重大的科研成果以及他现在还住在一间烟熏火烤的小房间里．生活条件很差！疾病严重!！生命垂危!!!

伟大领袖和导师毛主席看到了这篇报道，立即作出了指示．

当天深夜，武衡同志走进了陈景润的小房间．

他立即被送进医院，由首都医院内科主任和卫生部一位副部长给他作了全面的身体检查．他患有多种疾病．他们要他立即住院疗养，他不肯．于是，向他传达了毛主席的指示．

他一共住院一年半．

在住院期间，敬爱的周总理曾亲自和华国锋副主席（当时是副总理）安排了陈景润的全国人民代表席位．在第四届全国人民代表大会上，陈景润见到了周总理，并和总理在一个小组里开会．人代会期间，当他得知总理的病时，当场哭了起来，几夜睡不着觉．大会后，他仍回医院治疗．

当他出院的时候，医院的诊断书上写着：“经住院治疗后，一般情况较好．精神改善；体温正常．体重增加十斤；饮食睡眠好转．腹痛腹胀消失；二肺未见活动性病灶．心电图正常；脑电图正常．肝肾功能正常；血沉及血象正常．”

早在他的论文发表时，西方记者迅即获悉，电讯传遍全球．国际上的反响非常强烈．英国数学家哈勃斯丹和西德数学家李希特的著作《筛法》正在印刷所校印．他们见到了陈景润的论文立即要求暂不付印，并在这部书里加添了一章，第十一章：“陈氏定理”．他们誉之为筛法的“光辉的顶点”．在国外的数学出版物上，诸如“杰出的成就”、“辉煌的定理”，等等，不胜枚举．一个英国数学家给他的信里还说，“你移动了群山!”

真是愚公一般的精神呵!

或问：这个陈氏定理有什么用处呢? 它在哪些范围内有用呢?

大凡科学成就有这样两种：一种是经济价值明显，可以用多少万，多少亿人民币来精确地计算出价值来的，叫做“有价之宝”；另一种成就是在宏观世界、微观世界、宇宙天体、基本粒子、经济建设、国防科研、自然科学、辩证唯物主义哲学等等等等之中有这种那种作用，其经济价值无从估计，无法估计，没有数字可能计算的，叫做“无价之宝”，例如，这个陈氏定理就是．

现在，离开皇冠上的明珠，只有一步之遥了．

但这是最难的一步。且看明珠归于谁之手吧!

十二

陈景润曾经是一个传奇式的人物．关于他，传说纷纭，莫衷一是．有善意的误解、无知的嘲讽，恶意的诽谤、热情的支持，都可以使得这个人扭曲、变形、砸烂或扩张放大．理解人不容易；理解这个数学家更难．他特殊敏感、过于早熟、极为神经质、思想高度集中．外来和自我的肉体与精神的折磨和迫害使得他试图逃出于世界之外．他相当成功地逃避在纯数学之中，但还是藏匿不了．纯数学毕竟是非常现实的材料的反映．“这些材料以极度抽象的形式出现，这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实．”（恩格斯）陈景润通过数学的道路，认识了客观世界的必然规律．他在诚实的数学探索中，逐步地接受了辩证唯物论的世界观．没有一定的世界观转变，没有科学院这样的集体和党的关怀，他不可能对哥德巴赫猜想作出这辉煌贡献．被冷酷地逐出世界的人，被热烈的生命召唤了回来．帮派体系打击迫害，更显出党的恩惠温暖．冲击对于他好像是坏事；也是好事，他得到了锻炼而成长了．病人恢复了健康，畸零人成了正常人．正直的人已成为政治的人．多余的人，为国增了光．他进步显著，他坚定抗击了“四人帮”对他的威胁与利诱．无所不用其极地威胁他诬陷邓副主

席，他不屈！许以高官厚禄，利诱他向人妖效忠，他不动！真正不简单！数学家的逻辑像钢铁一样坚硬！今后，可以信得过，他不会放松了自己世界观的继续改造. 他生下来的时候，并没有玫瑰花，他反而取得成绩. 而现在呢？应有所警惕了呢，当美丽的玫瑰花朵微笑时.

一九七七年九月于中关村

"用当代语言来叙述，哥德巴赫猜想有两个内容，第一部分叫做奇数的猜想，第二部分叫做偶数的猜想. 奇数的猜想指出，任何一个大于等于 7 的奇数都是三个素数的和. 偶数的猜想是说，大于等于 4 的偶数一定是两个素数的和."

关于歌德巴赫猜想的难度我就不想再说什么了，我要说一下为什么现代数学界对歌德巴赫猜想的兴趣不大，以及为什么中国有很多所谓的民间数学家对歌德巴赫猜想研究兴趣很大.

事实上，在 1900 年，伟大的数学家希尔伯特在世界数学家大会上作了一篇报告，提出了 23 个挑战性的问题. 歌德巴赫猜想是第八个问题的一个子问题，这个问题还包含了黎曼猜想和孪生素数猜想. 现代数学界中普遍认为最有价值的是广义黎曼猜想，若黎曼猜想成立，很多问题就都有了答案，而歌德巴赫猜想和孪生素数猜想相对来说比较孤立，若单纯的解决了这两个问题，对其他问题的解决意义不是很大. 所以数学家倾向于在解决其它的更有价值的问题的同时，发现一些新的理论或新的工具，"顺便"解决歌德巴赫猜想.

4.2 百年华罗庚

百年华罗庚

1910 年 11 月 12 日，江苏省太湖西岸的一个小县城金坛华老祥家，呱呱坠地了一个白白胖胖的小子. 华老祥是一个小杂货铺的店主，中年得子，欣喜若狂. 他把儿子抱过来往一个空箩筐里一放，说："进箩筐里辟邪，同庚百岁，就叫华罗庚吧!"这就是日后成了大数学家的华罗庚.

经历劫难初露锋芒

华罗庚小时候很顽皮，终日在杂货店里蹦跳嬉闹，常常把柜台当马骑，爬上爬下. 长大一点就喜欢看戏，戏班子演完戏收拾起道具走了，他就跟着他们走，累了就躺在野地里睡觉，弄得家里人到处找他. 结果他竟得了个"罗呆子"的绰号.

1922 年，12 岁的"罗呆子"上了刚刚开办的金坛县立初中. 由于他呆头呆脑，字又写得不好，语文老师很不喜欢他，数学老师每次考试也只给他打 60 分.

到了初中二年级，华罗庚仿佛像一块埋在泥沙中的珍宝，刹那间放出了耀眼的光芒. 他的锋芒刚一闪烁，就被一位独具慧眼的数学老师王维克发现了. 王维克从华罗庚潦草的数学作业本和考试答卷中发现了他在数学方面的天赋，到了期末考试时，对他说："你不必考了，我给你 100 分，全班第一. 但我也要给你几本书看，你回家去做那里面的题目."华罗庚接过老师手中的书一看：一本《大代数》，一本《解析几何》，还有一本《微积分》.

1925 年，华罗庚初中毕业后辍学在家，1927 年 17 岁时同吴筱元结婚，1928 年不幸患伤寒落了个左腿残疾。自此他刻苦自学数学.

1930 年，20 岁的华罗庚在上海《科学》杂志上发表了他的成名作《苏家驹之代数的五次方程式解法不能成立之理由》，指出了上海《学艺》杂志所载数学家苏家驹《代数的五次方程式的解法》中的错误. 真是初生牛犊不怕虎!

破格提拔负笈西行

华罗庚的论文引起了当时清华大学数学系主任熊庆来的注目，在他的竭力推荐下，华罗庚于 1931 年进入清华大学数学系任助理，管理图书、公文、打字，兼办杂事。在清华，身边有一流的数学家，图书馆里有中外数学书籍和期刊，华罗庚如鱼得水，拼命地学习. 1933 年，在清华大学理学院院长叶企孙主持下，破格提拔华罗庚为助教. 1935 年又被提拔为讲师.

华罗庚在清华的 4 年间，先后在欧美、日本等数学杂志上发表了十几篇数论方面的论文，引起了国际数学界的注目.

1936 年，26 岁的华罗庚获中华文化教育基金会资助以访问学者的身份到英国剑桥大学进修. 当时剑桥的数学大师哈代对他说可以用两年的时间获得博士学位，而一般人则需要三年. 华罗庚则表示他到剑桥来是为了求学问，而不是为了求学位.

寄旅昆明日金瓯半缺时

1937 年"七七事变"后，日本全面进犯中国. 1938 年华罗庚毅然回国，受聘于昆明西南联大数学系任教授，其时年仅 28 岁.

在昆明，华罗庚与比他年长十岁的闻一多同住一套房子. 闻一多一家八口人和华罗庚一家六口人隔帘而居，无论是暖春凉秋，还是寒冬炎夏，晚上在同一屋顶的两盏小油灯下，两位自甘清贫、愤世嫉俗的西南联大教授，一治文史，一治数理，常常工作到夜半更深. 正如华罗庚所写的这样一首诗：

挂布分居共容膝，岂止两家共坎坷;
布东考古布西算，专业不同心同仇.

华罗庚在昆明期间，先后发表了 20 多篇论文. 他在 1941 年完成了第一部数学名著《堆垒素数论》，讨论了华林问题、哥德巴赫猜想等. 同时，他把自己的研究领域由数论扩充到群论、矩阵几何学、自导函数论和多复变函数论的研究.

梁园虽好归去来兮

抗战胜利后，华罗庚应苏联科学院和苏联对外文化协会的邀请，于 1946 年 2 ~ 5 月在苏联做了 3 个月的学术访问，其间苏联科学院于 1946 年 3 月用俄文出版了华罗庚的《堆垒素数论》一书.

1946 年 7 月，华罗庚同吴大猷、曾昭伦、李政道、朱光亚、唐敖庆等人，在上海黄浦江畔登上“美格将军号”轮船前往美国访学. 华罗庚应聘普林斯顿大学和伊利诺大学任教授，在数论、代数与复分析等方向都做出了大量卓越的研究成果.

1949 年 10 月的一天，华罗庚兴高采烈地从外边回到家里，一迈进房门，就大声喊道：“快拿酒来，今天要喝酒！祖国解放了，我要回国!”

就这样，华罗庚率全家于 1950 年 3 月回到北京. 他在归途中发表了致全体中国留美学生的公开信：

“朋友们！不一一道别，我先诸位而回去了!”

“朋友们，梁园虽好，非久居之乡，归去来兮!”

“为了抉择真理，我们应当回去；为了国家民族，我们应当回去；为了为人民服务，我们也应当回去；就是为了个人出路，也应当早日回去，建立我们工作的基础，为我们伟大的祖国建设和发展而奋斗!”

筚路蓝缕以启山林

华罗庚回国后的第一个职务是清华大学数学系主任，1952 年 7 月又担任中国科学院数学研究所首任所长.

华罗庚幼年失学，他把培养人才看得十分重要. 他是在中学生中开展数学竞赛活动的热心创始人和组织者. 他为青少年写了《从孙子的“神奇妙算”谈起》《从祖冲之圆周率谈起》《从杨辉三角谈起》等通俗读物. 他亲切地对青年一代说：“我希望你们在和煦的东风里，在初升的太阳照射下，出于兰，胜于兰!”

华罗庚于 1957 年出版了他的旧作《堆垒素数论》和新作《数论导引》，成为数学的经典著作. 他还在 1956 年荣获国家首届自然科学一等奖.

休辞行彳亍　背篓攀云路

华罗庚于 20 世纪五六十年代的历次政治运动，诸如“反右斗争”“拔白旗运动”直至“文化大革命”中也曾受到批判和冲击，但由于毛泽东、周恩来等中央领导同志的特别关照，较之中国的绝大多数知识分子，他可以算是一个幸运儿，受到了特殊的保护.

华罗庚从 1964 年起，顺应当时应用数学开始渗透到科学和社会各个领域的大潮流，行程 20 余省，深入工厂农村，推广“优选法”和“统筹法”，提高管理和生产的效率，取得了显著的经济效益，也摸索出了一条发展我国应用数学的新道路. 正如他诗中所说：“休辞行彳亍，背篓攀云路”，“甘任螺丝钉，敢当降魔杵”.

下棋找高手弄斧到班门

“文化大革命”结束以后，1978 年华罗庚被任命为中国科学院副院长. 他以近古稀之年，再次远渡重洋，应邀到欧美各国访问和讲学.

在外访问期间，名作家梁羽生采访华罗庚，问他准备了多少题目，怎么个讲学法。华罗庚说：“我准备了 10 个领域的数学问题，哪个大学以函数论著名，我就讲函数论；哪个大学以偏微分方程著名，我就讲偏微分方程……”梁羽生一惊：“真是艺高人胆大呀!”华罗庚说：“不是艺高人胆大，而是我一贯主张弄斧必到班门，才能有所进步!”梁羽生听了频频点头，心想武侠要找高手过招，棋家要找高手对弈，凡大师皆如此呵!

华罗庚在各国的讲学获得了巨大的成功. 1983 年联邦德国出版了《华罗庚选集》，收集了他的 48 篇论文，并附 1929 ~ 1977 年发表过的 150 篇论文、10 部专著和 11 部通俗读物的目录. 华罗庚创立了“华不等式”“华方程”“华算子”“华定理”，及至“中华数学学派”.

一心为人民慷慨掷此身

1985 年 3 月，华罗庚当选为全国政协副主席，他积极参政议政，频繁从事各种国事活动和科学活动. 6 月 3 日，他应邀访问日本. 为了准备 6 月 12 日的学术报告，11 日晚上他一直工作到深夜两点才入睡.

1985 年 6 月 12 日下午 4 时，华罗庚在东京大学报告厅为日本数学会做学术报告，他先用中文讲，由翻译译成日语. 后来讲到专门数学问题时，他征求了会议主席和听众的意见，改用英语讲. 他越讲越兴奋，讲得满头大汗，他先把上衣脱了，接着把领带也解掉了继续讲. 在暴风雨般的掌声中结束了一小时的讲演后，他刚坐下来便因心脏病突发而猝然逝世. 一颗蜚声国际数学界长达半个多世纪的巨星陨落了！噩耗传来，举国悲痛.

华罗庚曾经慷慨陈词：一心为人民，慷慨掷此身！他晚年时也曾写道：力竭也，但斗志未衰，战士死在沙场幸甚。这是他一生的写照.

（本文发表于《科学世界》2010 年第 11 期）

4.3 几何对现代科学的影响–丘成桐

几何对现代科学的影响–丘成桐

总论

数学大概是科学中最古老的学门, 也是所有科学的基础. 数学这门学问已经发展了数千年, 其中有两个始终未改变的要素: 「数」与「形」, 也就是理解整数结构及物体形状, 这两者始终是数学家最热衷的研究课题.

几何学是科学的一部分, 完全致力于理解物体的形状. 兹描述它对科学的贡献如下.

古希腊的贡献、牛顿力学

上面提到数及几何, 这两个主题实际上是密切相关的.

公元前 530 年, 希腊数学家毕达哥拉斯 (公元前 570 年 ∼ 约 495 年) 在义大利南部 Croton 组织了一个秘密社团, 循数学之道探索人类灵魂的救赎. 他发现了著名的毕氏定理, 证明直角三角形满足的方程式. 藉由这个公式, 几何和代数有了联系. (日后发展的三角学, 以此公式为基础.)

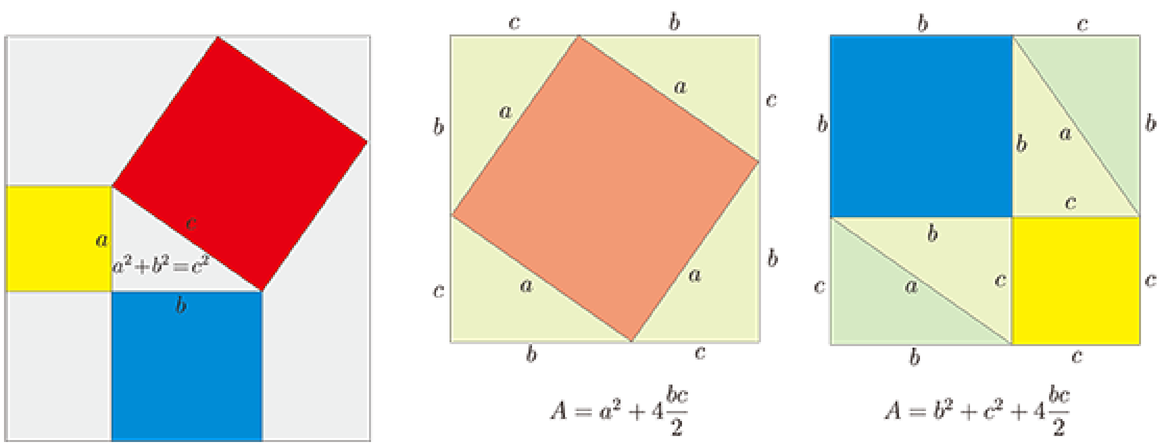


图 4.1: 勾股定理.

更重要的是, 毕达哥拉斯的某门徒发现: 若直角三角形的两个直角边的长度都等于 1, 则斜边的长度不能写成两个整数的比. 这震惊了整个学派, 因为他们认为宇宙中的一切事物都可用整数来解释. 这是几何首次揭示数字结构, 也是数学家首次经由几何扩张数系规模.

数百年后, 阿基米德 (公元前 287 年 ∼212 年) 考虑二次多项式界定的几何物体, 计算其面积及体积. 他以具体方式使用无穷过程, 建立起计算 π 的方法. 因此, 希腊数学家经由几何过程, 实质上已引入了代数数及超越数.

同样重要的是, 欧几里得 (公元前 325 年 ∼265 年) 发现了欧几里得公理, 借之推导出平面几何所有已知的定理. 欧几里得深受柏拉图 (公元前 429 年 ∼347 年) 等希腊先哲暨数学家的影响; 柏拉图宣称, 唯有了解几何的学者才能进入他的哲学殿堂.

在古代的科学发展中, 希腊学者的公理方法堪称独特. 该方法结合原子说后, 对现代物理学的发展产生了深远的影响. 毕竟, 牛顿 (1643∼1727) 基于类似的方法写下他著名的力学著作, 藉由牛顿力学三定律推导力学规则.

简单公理足以推导出极其复杂的物理现象, 这一事实全然符合希腊与西方文化的预期 (但对中国人、印度人、埃及人和巴比伦人来说则属陌生)。它代表了唯有人类才能够发展的高水平文明.

爱因斯坦 (1879∼1955) 曾说: 「世界上最难理解的事, 是它竟可以被理解.」牛顿力学的

巨大成功, 使物理学家相信统一场论存在；这是爱因斯坦在人生最后四十年全力推导的理论.

微积分与笛卡儿坐标

微积分的发明, 是数学的巨大进展；当中重要动机, 是意图计算几何物体的体积 (积分) 及行星的运动量. 印度数学家和天文学家早已知道如何微分 $\sin x$, 原因是行星的角度变化微小；他们藉由微分函数 $\sin x$ 来计算校正.

在牛顿之前, 除了古文明的发展, 另有其他极其重要的工作. 笛卡儿 (1596∼1650) 关于坐标的工作至关紧要. 借助笛卡儿坐标 (通称直角坐标) 表达, 我们能以分析的形式陈述几何问题. 更甚者, 我们也因之而能体察高维空间物理系统的自由度！这个概念对牛顿来说至为重要；他认为宇宙是静态的, 物理系统可用固定的坐标描述. 古希腊数学家以降, 直角坐标的引进堪称我们对空间理解的一大跃进.

牛顿结合微分与积分, 根据平方反比定律计算行星运动. 他成功解释了著名的开普勒行星运动定律. 微积分的巨大成功, 确立了它在科学中的地位.

微积分可用来详细描述曲线和曲面；欧拉 (1707∼1783) 对此做过讨论, 写下曲率公式, 并以微分方程陈述费马 (1607∼1665) 的最小作用量原理 (least action principle). 古典力学因此有大幅度的进展.

黎曼

这是奠定现代数学和科学基础的时期：高斯 (1777∼1855)、黎曼 (1826∼1866)、James C. Maxwell (1831∼1879) 及法拉第 (1791∼1867) 的伟大发现, 促成科学家对空间、电力及磁力的新理解. 高斯及黎曼基于他们对几何和微积分发展的体悟, 实际上得出了 Maxwell 方程四定律中的三个.

但几何学最引人注目的发展是黎曼的就职演讲论文及他的黎曼面理论. 它们都以非常内在的方式影响了我们对自然界的理解.

黎曼之前的空间概念, 几乎都取决于直角坐标的固定性. 牛顿视空间为静态的部分缘由, 是他认为万事万物都必须藉由宇宙的内在坐标系来度量. 我相信, 如果他知道黎曼引入的几何思想, 可能就会有不同的想法.

人们疏于细究黎曼 1854 年的著名演讲. 他有兴趣发展的空间概念, 要能够理解现实世界的物理本质. 他已忧心自己的几何力有未逮, 不足以处理至小及极大尺度的宇宙.

以现代术语来说, 他对量子几何的概念感兴趣. 他想知道：使用非二次方程来量度极大的宇宙的同时, 是否该用离散几何测量极小的尺度。他的主张仍饶富趣味.

在黎曼引入这些概念之前, 有一些重要的发展, 其中之首要者, 是等效原理的概念. 它可以追溯至古代, 经伽利略 (1564 1642)、克卜勒 (1571 1630) 等人修饬后, 变得更为基本, 后来成为爱因斯坦建立广义相对论的基本原理. 以爱因斯坦的语言来陈述：重力定律独立于观察者. 黎曼在陈述其几何时已意识到该原理, 因而建立曲率张量的概念.

高斯的 Theorem Egregium

曲率张量的内在 (intrinsic) 定义可回溯至高斯. 1827 年, 高斯发表 Theorem Egregium (「最好定理」), 名称源于他对自己的定理甚感兴奋. 吾人若在三维欧氏空间计算曲面两个主曲率的乘积, 所得之值称为高斯曲率, 是由曲面上的距离度量所完全决定；换言之, 它与曲面具体嵌入三维空间的方式无关.

要理解这个概念, 我们可审视悬链面 (catenoid) 和螺面 (helicoid). 它们的外观非常不同, 但它们可经由连续过程形变为彼此, 过程中不会产生皱折或撕裂, 因此不会出现额外的压缩或剪切. 高斯曲率在这种变形下保持下变 (见图4.2).

高斯对双曲几何的概念 (由 János Bolyai (1802∼1860) 及 Nikolai Lobachevsky (1792∼1856) 独立提出) 感到兴奋的同时, 也清楚理解此曲率的重要性. 我相信高斯很想将自己的定理置于一个自然的框架, 好让他的定理能以自然的方式出现. 因此, 当黎曼为博士论文口试提出

三个不同的主题时, 高斯选择了「几何学的基础」这个题目. 显然黎曼的历史性演讲也没让高斯失望.

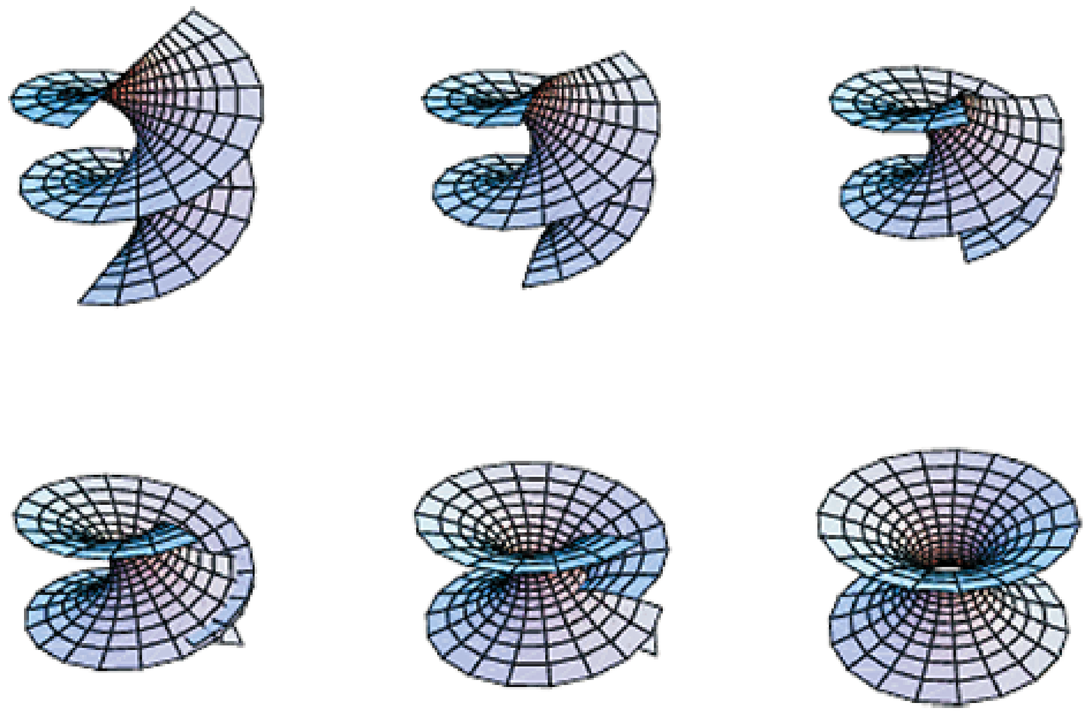


图 4.2: 悬链面和螺面. 高斯曲率保持不变.

再谈黎曼

黎曼创建的, 实际上是一种包含等效原理概念的几何学. 他的空间不依赖单一的直角坐标, 也更加动态. 这确实突破了牛顿对空间的旧观点. 为了充分理解等价原理的概念, 黎曼发展了张量的基本工具, 特别是黎曼曲率张量.

讽刺的是, 历史上关于黎曼曲率的首篇出版品, 是 1861 年黎曼提交给巴黎科学院, 争取某奖项而未果的论文. 在那篇文章中, 他用黎曼曲率来检测热传导的模式.

重点是, 黎曼曲率张量仅取决于度量张量. 黎曼的论文创建了内在几何的新概念, 独立于任何大域静态的笛卡儿系统.

张量分析

张量分析的引入, 对现代科学产生了巨大的影响. 它肇始于黎曼 1861 年的论文. 1869 年, Elwin B. Christoffel (1829∼1900) 和 Rudolf Lipschitz (1832∼1903) 不约而同, 详加讨论了张量分析及协变微分 (covariant derivatives). 1900 年, Ricci (1853∼1925) 及 Tullio Levi-Civita (1873∼1941) 在著作中做了更详尽的讨论.

1903 年, Ricci 提出张量缩约 (tensor contraction) 的主张, 取黎曼曲率张量的迹 (trace) 以形成一个二阶张量, 现称 Ricci 张量.

广义相对论、三谈黎曼

这些工作为爱因斯坦的广义相对论奠定了最重要的基础. 如果没有这些几何学者及 Marcel Grossmann (1878-1936) 的基础工作, 很难想像广义相对论要如何创立.

1887 年, Albert A. Michelson (1852∼1931) 和 Edward Morley (1838∼1923) 做了非常

著名的实验, 证明光速与观察者无关. 黎曼当时若仍在世, 正年届 61; 我们不免推测: 他之后可能会发现狭义相对论和广义相对论, 理由是: Lorentzian 对称群已经自然地出现在 Maxwell 方程组中, 而 Michelson 和 Morley 的实验则确实显示光速特殊的地位.

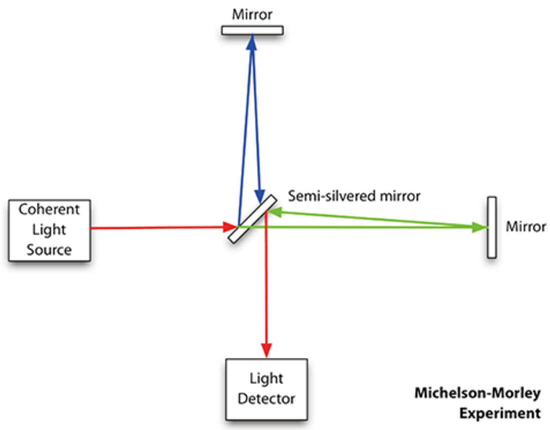


图 **4.3:** Michelson 和 Morley 的实验.

在推导爱因斯坦方程的较后阶段, 进一步缩约 Ricci 张量所得的纯量曲率, 恰好正确地量度了物质分布. 这意味着完整的黎曼曲率张量, 测量了时空的完整重力内容.

爱因斯坦的重力理论改变了时空的基本概念. Eddington (1882∼1944) 在 1919 年验证了到光会弯曲的理论预测. 援用哈伯 (1889∼1953) 以望远镜验证的的宇宙膨胀理论, 也能观察到时空是动态的.

规范理论、额外维度理论、Calabi-Yau 空间

创建广义相对论之后, 爱因斯坦企图统一大自然的多种力, 这个宏愿引发了诸多发展. 两个最重要的发展是: Hermann Weyl (1885∼1955) 发现的规范理论, 以及 Theodor Kaluza (1885∼1954) 与 Oskar Klein (1894∼1977) 提出的额外维度理论; 两者本质上都是几何的.

纤维丛 (fiber bundle) 理论和连络 (connection) 理论在 1940 年代早期发展成熟, 从而 Eduard Stiefel (1909∼1978) 与 Hassler Whitney (1907∼1989)、Lev Pontryagin (1908∼1988) 及陈省身 (1911∼2004) 提出特征类的基本数学理论.

Weyl 的规范理论有非交换 (non-abelian) 的对应版本, 亦即 Yang-Mills 理论. 杨振宁和 Robert Mills (1927∼1999) 观察到, 这套架构在纤维丛与特征类的一般性理论可以用来理解粒子物理; 最终它们成为高能物理中标准模型的基本工具. 量子物理和相对论是二十世纪理论物理学的两大支柱. 上述故事说明了当中的几何原委.

除此之外, Kaluza 对大自然的理论模型做出非常重要的贡献 (Klein 后来参与研究, 该理论现称 Kaluza-Klein 理论). Kaluza 是一位数学家. 他在平坦的 Minkowski 四维时空上添加圆, 从而提出第一个五维相对论. 他发现: 藉由爱因斯坦方程在此五维时空的真空解, 可获致有效的四维时空理论, 耦合重力与 Maxwell 方程. 这是令爱因斯坦十分兴奋的杰出成果. 唯一的问题是, 它会产生一个无法在自然界观察到的纯量场 (scalar field). 尽管如此, 拓朴及额外维度的思想, 是当代物理极为基本的论题.

弦论 (string theory) 的发展显示, 量子化的重力理论可能产生异常, 唯当时空的总维数为 10 时, 异常才会消失. 从这个意义上来说, 额外维度理论乃势所必然.

时空基态的超对称模型, 是在真空 Minkowski 时空上外加六维 Calabi-Yau 空间. 其中六维 Calabi-Yau 空间的尺度非常微小, 迄今创建的最强大机器也检测不到它, 但它的拓朴及几何特性可用来计算质量及基本粒子的相互作用. 在物理和数学领域进行的弦论研究, 引

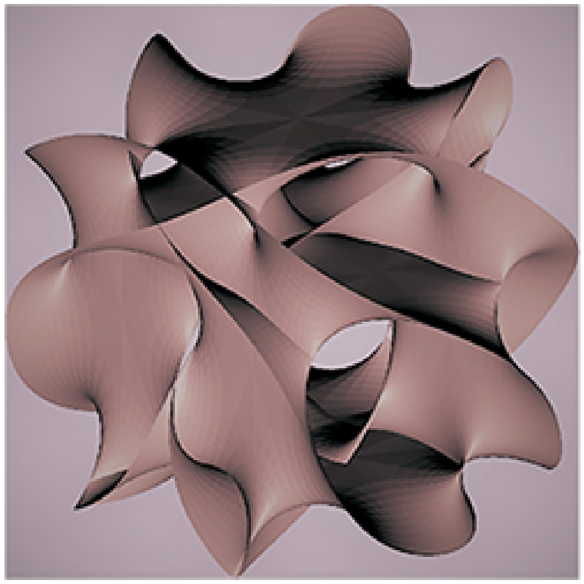


图 4.4: Calabi-Yau 空间.

发了许多重要的工作.

对偶性

在弦论的进展中, 出现一些出人意表但十分重要的对偶性概念, 统一了诸多看似相异的主题. 弦论中的对偶性是概括性的概念, 允许我们执行一些以前束手无策的重要计算。这包括大直径空间与小尺寸空间之间的对偶性.

重力理论与规范理论之间的对偶性, 创建出非常重要的科学思想. 它对凝聚态物理学来说也十分重要.

值谱 (Spectra)

量子力学是一门以高精确度描述大自然的学科. 量子物理非常重要的一项工具是算子值谱. 值谱的概念是数学家在 19 世纪发展出的, 事实上可回溯至古希腊哲学家. 毕达哥拉斯学派辨识出声波中的基音. 拨动端点固定的弦时, 可实际产生这些基音.

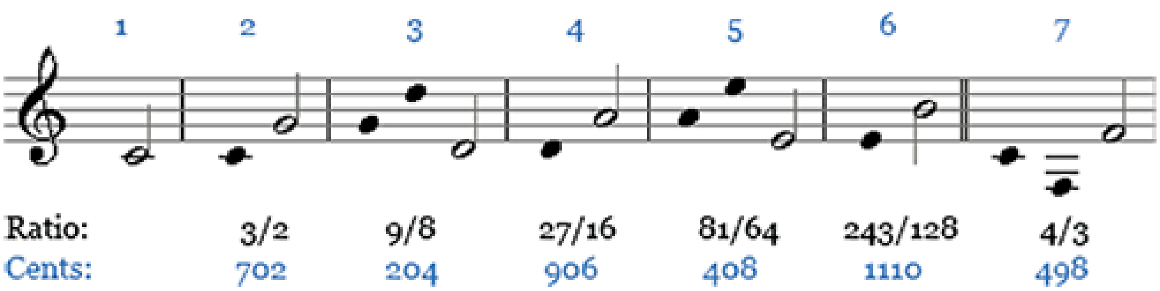


图 4.5: 音阶.

18 世纪后期, Jean Fourier (1768~1830) 提出主张：任何波都可分解为具某些频率的基波. 在任意选取的封闭曲面, 振动的固有频率与曲面的几何性质密切相关, 称为曲面值谱 (spectra of surface). 它们是各个曲面特有的、离散分布的无限多个数. 原则上, 我们可以敲击曲面并听取它发出的音调, 从而找到曲面的固有频率. 有个著名的问题：藉由这些基本频率, 我们是否可以决定曲面的几何形状? Mark Kac (1914 1984) 因此提出众人熟知的问题：

「是否可以听到曲面的形状?」

19 世纪伊始, 数学家总试图援用几何来估计紧致空间的基本频率. 有种众所周知的途径植基于变分法, 迭经 Lord Rayleigh (1842∼1919)、Lord Kelvin (1824∼1907)、George Pólya (1887∼1985)、Gábor Szegö (1895∼1985) 及其他多人改进.

等周界常数、图论

名为「等周界常数」的重要几何量, 在这种理论中广获使用. 埃及等古文明已知道: 具固定面积的平面区域中, 以圆盘的周长最短; 换言之, 任何区域的面积都不会大于其周长的平方除以 4π.

这类貌似纯良的不等式大概是最古老的不等式. 直至当代, 它在几何学仍具有根本的重要性: 给定一个封闭曲面, 我们要在这个曲面上找到某封闭曲线 C, 其界定的区域面积 A 不大于其他具相同周长的区域. 曲线 C 的长度 L 与区域面积 A 的比值 $\frac{L}{A}$ 是个重要的量.

我们要在所有可能的封闭曲线中最小化这个量. 这种形式的常数, 源自对等周不等式的考量; 二十世纪初, 数学家用该不等式估计封闭曲面的第一个非零频率, 如今称之为 Cheeger 常数. 该常数已被推广至图论; 在图论, 我们希望找到优质的几何裁切线, 分割后讯息得以有效地穿越裁切线.

再谈值谱

在量子物理及任何与波动相关的课题中, 值谱及波的行为该如何理解, 始终是至关紧要的问题. 有个植基于几何考量的重要方法.

四十年前, 我提出的一个简单的问题, 引发了众人对该领域的巨大兴趣. 该问题是: 取某个基波的节点集 (nodal set, 波在该集合中的各点都静止不动); 该集合的长度、波的特征值的平方根, 两者数量级应相同. 事实上, 我们想了解的是: 将节点线 (nodal lines) 的长度除以特征值的平方根, 所得的商如何分布.

量子穿隧 (Quantum Tunneling)、三谈值谱

另一个有趣的问题涉及量子穿隧: 粒子从一个量子阱 (quantum well) 游走到另一个量子阱, 需时多久? 它关乎 Schrödinger 算子的首两个特征值的间隙. 要做数值计算很困难, 因为间隙之窄小属指数级. 对波函数做几何考量有助于估计这种间隙.

电脑科学、再谈图论

在当代电脑科学, 几何概念大多有其显著的重要性. 除了之前提到的概念, 图论也存在等周界不等式和 Harnack 不等式的类似概念. 当代图论使用了大量的几何概念.

在一般图上, 有一个自然定义的算子, 作用于定义在顶点上的函数空间, 担当的角色类似于平滑流形上的 Laplace 算子. 该算子的值谱不难计算, 但它揭露了图的大量讯息. 图论中有个概念类似于定义在流形上的 Green 函数, 出现在 Larry Page 的公式中, 用于 Google 搜索引擎.

160 多年前, 黎曼在博士论文中引入黎曼面的概念, 其目的是研究复函数的单值化 (uniformization), 日后却成为研究曲面几何的至要工具. 顾险峰和我把单值化的想法应用于电脑影像的问题. 它对许多工程问题很有用, 譬如人脸辨识.

援用几何来辅助电脑图学的想法已广受青睐. 雷乐铭、林文伟、乐美亨等人把它应用于人脸辨识、医学影像及其他课题. Stanley Osher 和他的团队使用水平集方法, 取得了非常好的结果.

深度学习 (deep learning) 方法执行流形嵌入及机率测度变换. 机率测度变换可用最优传输映射 (optimal mass transportation map) 来进行, 这相当于微分几何中的 Minkowski-Alexandrov 定理, 可以陈述为 Monge-Ampère 方程.

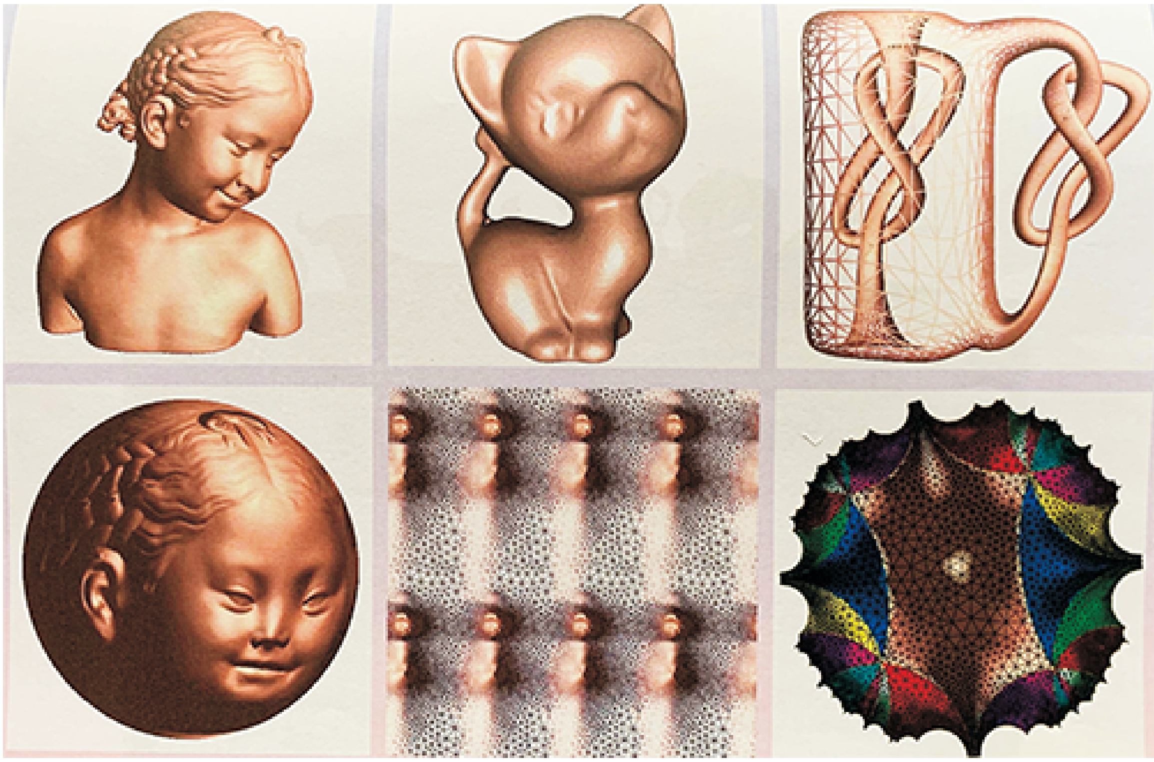


图 **4.6:** 球面几何、欧氏几何、双曲几何.

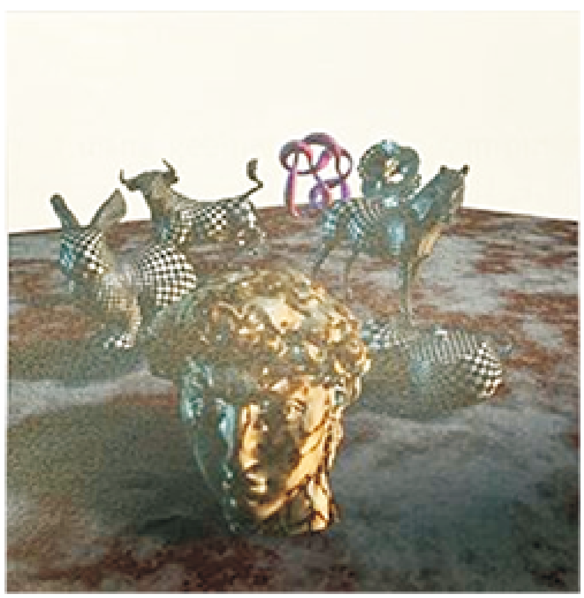


图 **4.7:** 纹理映射 (texture mapping).

图 **4.8:** 面部表情捕捉.

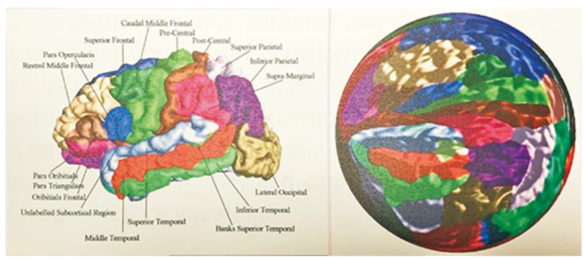


图 **4.9:** 大脑造影 (brain mapping).

图 **4.10:** 基于几何方法的生成模型 (generative model) 生成的随机面部图像.