

The Dark Side of the Moon:

Estudio del acoplamiento de marea de la Luna

Matías H. Senger
m.senger@hotmail.com

29/12/16

Resumen

Este trabajo presenta un *experimento computacional* que permite el estudio del fenómeno conocido como *acoplamiento de marea* que hace que la Luna siempre tenga la misma orientación vista desde la Tierra, dando origen así al *lado no visible de la Luna*. El experimento consistió en el diseño de una estructura sencilla para modelar a la Luna y a continuación su puesta en órbita alrededor de la Tierra para observar luego la evolución del sistema frente a distintas condiciones iniciales.



1. Introducción

Es sabido que el movimiento descrito por la Luna, el satélite natural que posee la Tierra, tiene la particularidad de que su período orbital coincide con el período de revolución sobre sí misma. Esta característica hace que su orientación, vista desde la Tierra, siempre sea la misma y en consecuencia que sólo una de las caras de la Luna sea visible desde nuestro planeta. Este fenómeno se conoce como *acoplamiento de marea*.

Sin realizar un análisis muy riguroso es evidente que para que exista un acoplamiento de marea es necesario que el cuerpo acoplado (o sea, la Luna) sea deformable y/o posea una forma irregular. Si la Luna fuese un cuerpo perfectamente rígido y esférico (o si se la pudiera considerar como tal) entonces sería imposible que las fuerzas de marea le propicien un torque tal que su movimiento de espín se acople al orbital.

En este trabajo se propone el estudio del acoplamiento de marea de la Luna con la Tierra mediante la simulación numérica en computadora de modelos mecánicos simplificados.



2. Descripción del experimento

El estudio del acoplamiento de marea de la Luna con la Tierra se realizó mediante simulación numérica en computadora. Para ello se utilizó un programa de simulación de sistemas de partículas de autoría propia, bautizado *Newton++*, que permite implementar un sistema de partículas, definir las interacciones presentes y establecer las condiciones iniciales para luego estudiar la evolución del mismo.

En la figura 1 se encuentra un esquema del sistema de partículas utilizado para modelar a la Luna. El mismo consiste en una disposición de $N = 2n$ partículas¹, con $n \in \mathbb{N}$, cada una de masa $m_i = \frac{m_L}{N}$, donde m_L es la masa de la Luna, que interactúan entre sí de la forma que se describe a continuación: dado un número natural $0 \leq i \leq N - 1$ entonces la partícula $(i + 1) \% N$ (nota²) tiene las siguientes interacciones

- Con las partículas i e $(i + 2) \% N$ (o sea con sus vecinas) interactúa mediante fuerzas elásticas de la forma $F = k_1(x - \ell_1)$ y mediante amortiguadores de la forma $F = d_1 \Delta v$ donde d_1 es una constante y Δv la diferencia de velocidades.
- Con la partícula $(i + 1 + \frac{N}{2}) \% N$ (o sea la que está justo en frente) interactúa con fuerzas de igual expresión pero de constantes k_2 , ℓ_2 y d_2 .
- Con la gravedad de la tierra.

¹Esto es simplemente para indicar que N es un número par.

²La operación $a \% b$ es el resto de la división entera entre a y b , conocida como “ a módulo b ”. Se utilizó esta notación ya que el pasaje al lenguaje del simulador numérico utilizado, *Newton++*, es directo.

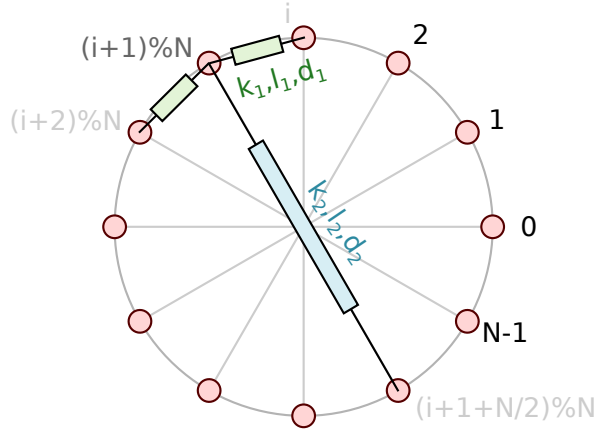


Figura 1: Esquema del modelo simplificado de la luna.

En el esquema de la figura 1 se han ilustrado estas interacciones para una de las partículas mediante símbolos similares a los de las impedancias en los circuitos eléctricos, con el fin de representar el hecho de que cada interacción posee una parte reactiva que acumula energía y una parte activa que la disipa. En resumen, la fuerza sobre la partícula $(i+1)\%N$ será

$$\mathbf{F}_{(i+1)\%N} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{(i+2)\%N} + \mathbf{F}_{(i+1+\frac{N}{2})\%N} + \mathbf{F}_G$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{k_1} + \mathbf{F}_i^{d_1} & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{F}_i^{k_1} = k_1 (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{(i+1)\%N}) \left(1 - \frac{\ell_1}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{(i+1)\%N}|} \right) & \text{Fuerza elástica} \\ \mathbf{F}_i^{d_1} = d_1 [\dot{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}] \hat{\mathbf{r}} & \text{Fuerza disipativa} \end{array} \right. \\ \mathbf{F}_{(i+2)\%N} & \text{Completamente análoga a la expresión de } \mathbf{F}_i \\ \mathbf{F}_{(i+1+\frac{N}{2})\%N} & \text{Completamente análoga a la expresión de } \mathbf{F}_i \text{ pero con parámetros } k_2, \ell_2 \text{ y } d_2 \end{array} \right.$$

donde $\mathbf{r} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{(i+1)\%N}$, $\dot{\mathbf{r}}$ es su derivada temporal y $\hat{\mathbf{r}}$ es un versor con la dirección de \mathbf{r} , y

$$\mathbf{F}_G = Gm_T \frac{m_L}{N} \frac{\mathbf{r}_{(i+1)\%N}}{|\mathbf{r}_{(i+1)\%N}|^3}$$

con \mathbf{r}_i indicando la posición de cada partícula y $\dot{\mathbf{r}}_i$ su derivada temporal, es decir su velocidad.

Los parámetros ℓ_1 y ℓ_2 se configuraron siempre de modo tal que si la luna estuviera completamente libre de interacciones externas entonces los puntos de equilibrio de cada masa cayeran sobre una circunferencia cuyo diámetro es de $3,474 \times 10^6$ m que es, aproximadamente, el de la Luna.



3. Simulaciones realizadas

3.1. Puesta en órbita

Como primera experiencia lo que se hizo fue colocar a este modelo de la Luna en órbita alrededor de la Tierra, sin darle importancia al movimiento de espín ni a la estructura interna del sistema. Para ello se utilizaron datos de la órbita lunar tomados de Internet. Se ubicó a la Tierra fija en el origen de coordenadas y a la Luna sobre el eje x en la posición correspondiente al perigeo, tal como se ilustra en la figura 2. A la Luna se le impartió una velocidad inicial en dirección y .

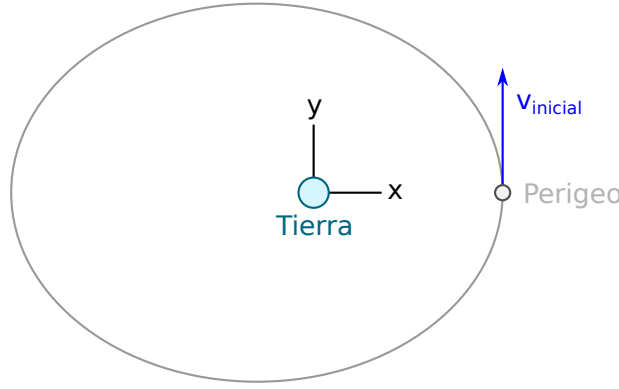


Figura 2: Condiciones iniciales dadas a la órbita lunar.

Al correr la simulación se verificó que el período orbital resultante coincide en buena medida con el real y que la órbita presenta las características deseadas, además de ser independiente de la estructura interna dada a la Luna. Estas condiciones iniciales se impusieron por igual a todas las simulaciones realizadas.

3.2. El modelo más sencillo

Si se coloca $N = 2$, $k_1 \rightarrow \infty$, $d_1 = 0$, $k_2 \rightarrow \infty$ y $d_2 = 0$ entonces se obtiene un cuerpo rígido formado por dos masas separadas una distancia igual al diámetro de la Luna, tal como se esquematizó en la figura 3. Si bien este modelo no es lo que se consideraría como una buena aproximación a la Luna, sirve como punto de partida para el análisis. Además nos recuerda al problema de Hiperión visto en clase ☺.

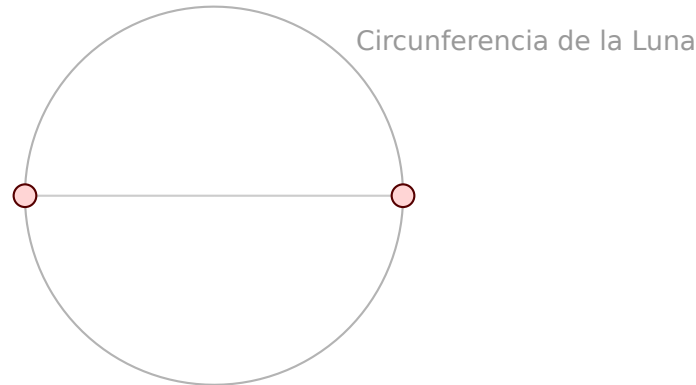


Figura 3: Configuración más básica del modelo utilizado. Consiste en un cuerpo rígido formado por dos partículas de masas $m_L/2$ separadas una distancia igual al diámetro de la Luna.

3.2.1. Pequeñas oscilaciones

El primer análisis que se realizó fue el de pequeñas oscilaciones. Dada la geometría del cuerpo y el potencial efectivo al cual está sometido habrá un punto de equilibrio para el cuerpo alineado con la Tierra, tal como se muestra en la figura 4. Se puede mostrar que la frecuencia temporal de oscilaciones pequeñas de este sistema será, cuando la órbita sea circular,

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{3Gm_T \left(\frac{1}{R^3} + \frac{R_L^2}{R^5} \right)} \quad (1)$$

donde G es la constante de gravitación universal, m_T la masa de la Tierra, R_L el radio de la Luna y R el radio de la órbita circular.

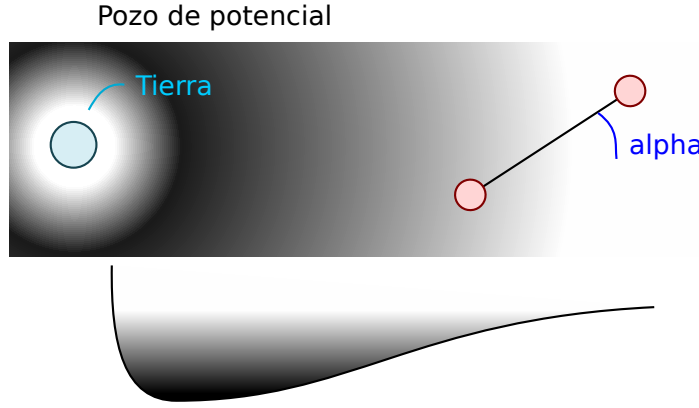


Figura 4: Esquematación del modelo de la figura 3 sometido al potencial efectivo cuando está en órbita. Debido a este potencial el sistema presentará un punto de equilibrio estable para $\alpha = 0$.

Para observar las pequeñas oscilaciones lo que se hizo fue darle a cada una de las partículas, además de la velocidad orbital, una velocidad tal que todo el cuerpo adquiriera una velocidad angular de espín similar a la orbital. Al realizar la simulación se observaron, efectivamente, las pequeñas oscilaciones mencionadas.

Para estudiar la frecuencia de las pequeñas oscilaciones se utilizó el momento angular de espín

$$\mathbf{L}_{\text{espín}} = \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{r}_{i \text{ CM}} \times m_i \dot{\mathbf{r}}_{i \text{ CM}}$$

donde $\mathbf{r}_{i \text{ CM}}$ es un vector que va desde el centro de masa de la Luna hasta la partícula i . En la figura 5 se encuentra la transformada de Fourier de la componente z de $\mathbf{L}_{\text{espín}}$. Tal como se puede ver ésta posee dos picos principales ubicados en las frecuencias de $4,23 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ y $7,33 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$. La primera frecuencia se corresponde con la frecuencia orbital de la Luna en tanto que la segunda coincide con la predicha por (1) si en R se coloca el radio medio de la órbita lunar. Además posee una componente continua mucho mayor que debido a la escala logarítmica no se percibe.

La componente de $4,23 \times 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ tiene origen en el hecho de que la órbita posee cierta excentricidad y al estar la rotación del cuerpo acoplada a la órbita, entonces esta rotación está sometida a una perturbación periódica de la misma frecuencia que la órbita.

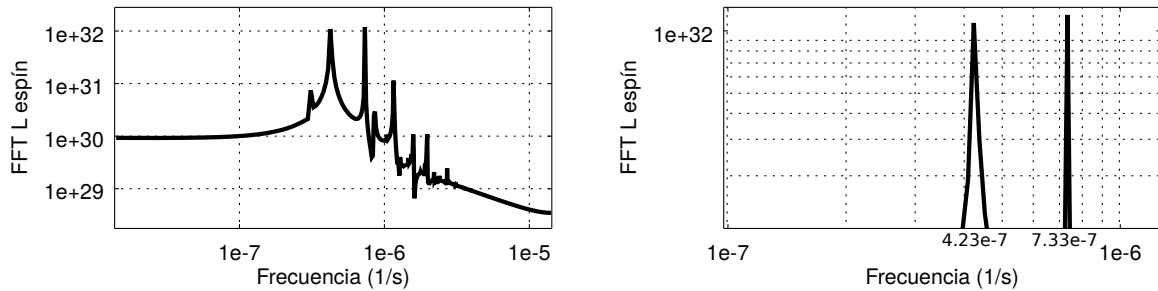


Figura 5: Transformada de Fourier del momento angular de espín del cuerpo rígido, a la izquierda completa y a la derecha un detalle de los dos picos más altos.

3.2.2. Otras condiciones iniciales

Además del caso de pequeñas oscilaciones estudiado, se realizaron simulaciones para diversas condiciones iniciales. Lo que se observó en todos los casos fue que el movimiento de espín es uno de dos posibles: 1) o queda acoplado a la órbita por siempre o 2) queda desacoplado de la órbita por siempre. El hecho de que esté o no acoplado depende de las condiciones iniciales, en particular de la rotación inicial que se le imparta a la Luna. Se observó, incluso, que si se le imparte una rotación de espín en sentido inverso (o sea tal que $\mathbf{L}_{\text{espín}}$ apunte en $-\hat{z}$) suficientemente fuerte para que no haya acoplamiento entonces el sistema permanecerá por siempre en dichas condiciones.

En la figura 6 se muestra el momento angular del cuerpo en una de las simulaciones realizadas, en particular en una en la que se le impuso una velocidad angular de espín en sentido inverso. Tal como puede apreciarse el cuerpo rota, globalmente, en sentido negativo. Sin embargo hay momentos en los que su rotación cesa por completo y luego se hace positiva en forma oscilante.

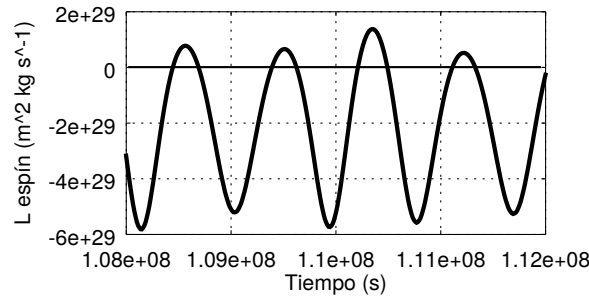


Figura 6: Momento angular de espín obtenido al imponer como condición inicial una velocidad angular de espín en sentido inverso a la orbital. Se puede ver que por momentos el cuerpo rotó en un sentido y por momentos en otro, pero siempre predominantemente en sentido negativo.

3.3. El segundo modelo

El siguiente modelo con el cual se puede experimentar, manteniendo el esquema presentado en la sección 2, es el que se detalla en la figura 7. El mismo consta de dos masas unidas por un resorte de constante elástica k_2 y longitud $\ell_2 = 2R_L$ y un amortiguador de parámetro d_2 . De esta forma se le permite a la Luna sufrir deformaciones y disipar energía (en forma térmica, por ejemplo).

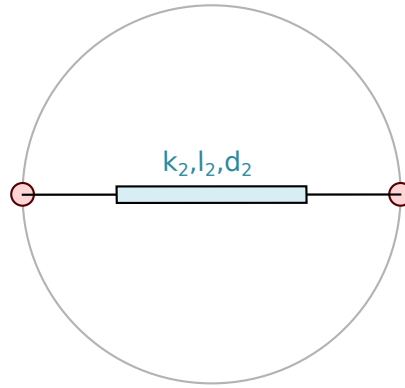


Figura 7: Segundo modelo (en orden de complejidad) ensayado. Éste consiste en dos masas unidas por un resorte y un amortiguador.

Los resultados obtenidos fueron satisfactorios. Se observó que este sistema acopla su movimiento de espín al de su órbita de forma muy rápida si los parámetros k_2 y d_2 son apropiadamente seleccionados. En la figura 8 se encuentra el momento angular de espín obtenido para una de las simulaciones realizadas. La Luna fue dejada “en reposo” (o sea sin movimiento de espín) en órbita alrededor de la tierra y luego de un transitorio el movimiento se estabilizó dando origen a un acoplamiento (todo esto que se describe es más evidente en las animaciones realizadas con los datos de la simulación, mas no son compatibles con el formato PDF).

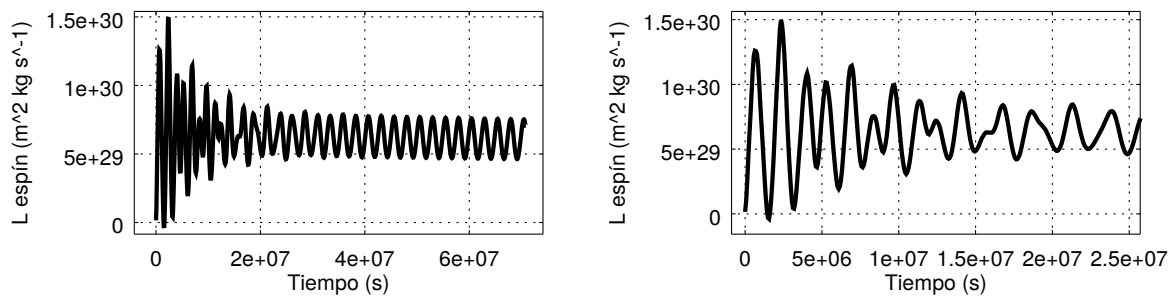


Figura 8: Momento angular de espín resultante de colocar un sistema como el de la figura 7 con $k_2 = 8 \times 10^{12} \text{ N m}^{-1}$ y $d_2 = 5 \times 10^{15} \text{ N m}^{-1} \text{ s}$. A la izquierda el resultado de toda la simulación, a la derecha una pequeña ventana temporal para mostrar en detalle el transitorio del principio. No se le impartió velocidad angular de espín al inicio a la Luna sino que se la dejó en reposo. Se observa que para $t \approx 2 \times 10^7 \text{ s}$ el movimiento de espín ya presentaba un acople estable al orbital.

Se llegó a observar incluso que si se le imparte una velocidad angular de espín negativa, el hecho de que exista disipación de energía hace que esta rotación se acople a la orbital.

3.4. Modelos con más de dos masas

Al simular modelos con más de dos masas se observó que siempre que los parámetros d_1 y d_2 sean no nulos el movimiento de espín de la Luna se acopla al movimiento orbital, como era de esperarse. Asimismo, el movimiento es más suave cuanto mayor es N lo cual también es razonable al considerar que el cuerpo se vuelve cada vez más similar a una distribución continua.

El modelo utilizado hasta ahora, figura 1, demostró ser un tanto inestable cuando el valor de N crece. Lo que se observó es que la circunferencia comienza a deformarse en formas extrañas cuando aún no ha habido acoplamiento de marea. Es por ello que se consideró realizar una modificación tal como se muestra en la figura 9. La idea básica es la misma solo que se reemplazó la interacción con la partícula opuesta al diámetro por una interacción con una nueva partícula ubicada en el centro. De esta forma al deformarse la estructura todas las fuerzas confluyen en forma concéntrica al núcleo y la estructura resultante es más estable.

Todos los resultados que se presentarán a continuación serán en base al modelo de la figura 9.

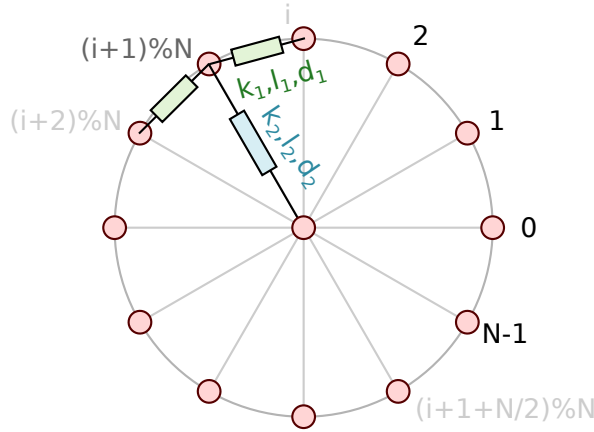


Figura 9: Sistema modificado. La esencia del sistema es la misma que el anterior, solo que las interacciones están dirigidas a una partícula central para otorgarle más estabilidad a la estructura.

Tal como se mencionó anteriormente las simulaciones realizadas indicaron que para que exista acoplamiento de marea es necesario que exista una disipación de energía producto de la deformación de la Luna. Se presentan en las figuras 10a y 10b los momentos angulares de espín obtenidos para la misma simulación pero en el primer caso sin disipación de energía ($d_1 = d_2 = 0$) y en el segundo caso con disipación de energía. Se simuló el sistema de la figura 9 con $N = 11$ y se dejó al sistema en órbita sin impartirle una rotación de espín. Esto se ve reflejado en el hecho de que el momento angular de espín de ambos gráficos tiene un valor nulo en $t = 0$.

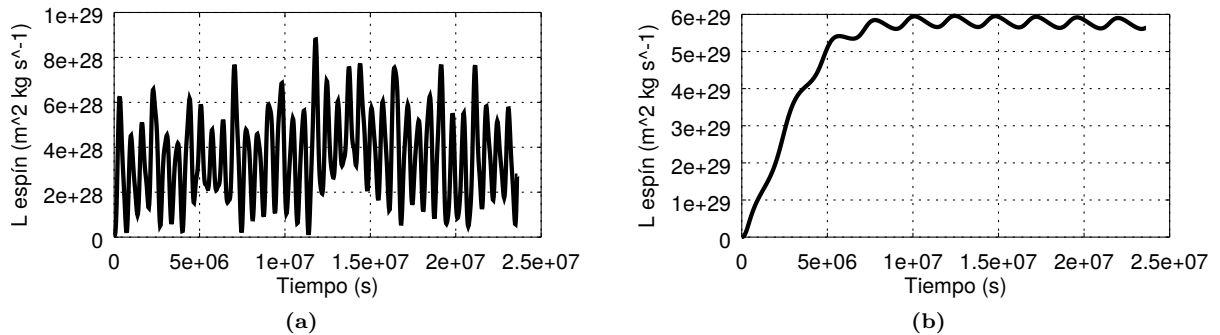


Figura 10: Momento angular de espín de la Luna obtenido de la siguiente manera: se simuló la estructura de la figura 9 con $N = 11$, dejándola en órbita con una rotación de espín nula y se observó su evolución. En la figura (a) se encuentra el resultado cuando no hay fuerzas disipativas (es decir con $d_1 = d_2 = 0$) y en la figura (b) cuando sí hay fuerzas disipativas.

Para el caso sin disipación de energía, figura 10a, se observa que el momento angular presenta una oscilación mucho más abrupta que para el otro caso y oscila prácticamente entre un valor máximo y cero. Por el contrario,

el caso con disipación de energía, figura 10b, presenta una respuesta mucho más suave y que termina adoptando un valor medio bien definido.

Para estas estructuras deformables no es sencillo relacionar el momento angular con una velocidad angular. Sin embargo, a partir de observar las animaciones realizadas con los datos de cada simulación, es claro que los únicos casos que presentan acoplamiento de marea son aquellos en los que $d_1, d_2 \neq 0$, es decir aquellos en los que hay disipación de energía producto de la deformación.

En la figura 11 se muestra una captura de pantalla de una de las animaciones realizadas a partir de datos de simulación. Dicha imagen se corresponde con una simulación en la que se utilizó la estructura de la figura 9 con $N = 21$ y en la que se configuró $d_1, d_2 \neq 0$, es decir con disipación de energía.

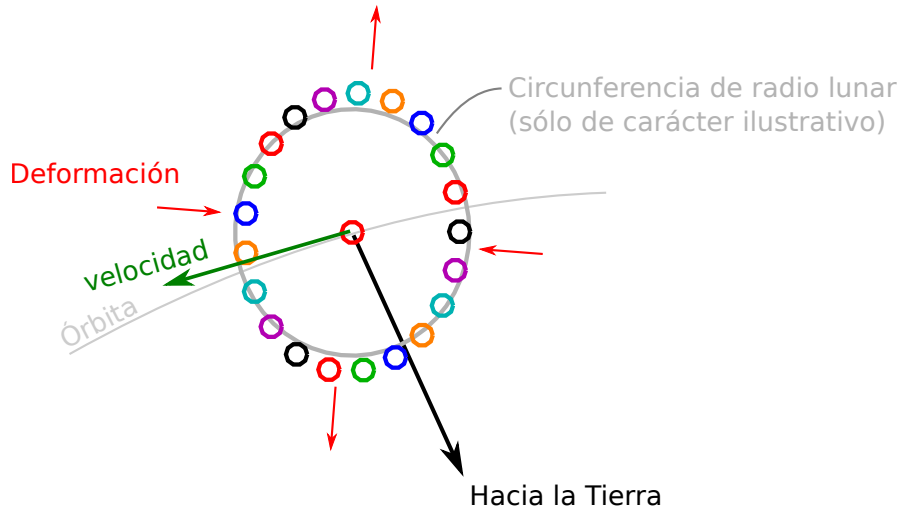


Figura 11: Captura de pantalla de un instante de una simulación realizada con $N = 21$. Se observa al modelo de la figura 9 en un momento previo a que ocurriera el acoplamiento de marea. Se ha graficado una circunferencia que coincide con la posición de las partículas en el equilibrio con el fin de hacer más visible la deformación. No se han graficado las interacciones sino únicamente la posición de cada partícula.



4. Conclusiones

Se realizó un experimento computacional de un modelo simplificado de la Luna para estudiar el fenómeno de acoplamiento de marea. A partir de los datos de las simulaciones se realizaron animaciones para observar la evolución del sistema y se verificó que los únicos casos que presentan acoplamiento de marea son aquellos en los que la estructura es deformable y además disipa energía.

Se estudió además un modelo extremadamente simplificado que consta de dos partículas separadas por una distancia rígida y se observó el régimen de pequeñas oscilaciones del sistema, verificándose que el resultado experimental coincide con la predicción teórica de la Mecánica Clásica. Este modelo, si bien dista mucho de lo que se consideraría una buena aproximación de la Luna, puede ser utilizado como primera aproximación para otros satélites naturales como es el caso de Hiperión: un satélite de Saturno que posee una forma irregular.