

MaxClique

曾奥涵 2018013383

刘润达 2018013412

2019 年 7 月 3 日

介绍

给定图 G ，图中的一个团是 G 的一个完全子图，其中任意两个节点之间都有边连接。求给定图中最大团的问题被称为最大团问题。最大团问题是经典的 NP-hard 问题，现如今解决最大团问题的算法主要分为两类：

- ▶ 确定性算法
- ▶ 启发式算法

我们组同时实现了两种确定性算法 MaxCLQ 和 BBMCX，一种启发式算法 DLS。其中我们实现的经过优化后的 BBMCX 算法效率在一定程度上优于论文中的 BBMCX 算法（BBMCX 算法已是目前最快的确定性算法）。

确定性算法

我们实现了两种确定性算法

- ▶ MaxCLQ
- ▶ BBMCX

在 BBMCX 的基础之上，我们加入了两个优化：

- ▶ 用 `std::bitset` 高效维护节点集合
- ▶ 在染色过程中启发式地对节点重排序

最终实现的算法名为 BBMCX_BITSET。

BBMCX - 用 `std::bitset` 维护节点集合

在 BBMCX 的算法执行过程中，需要寻找包含三个颜色的集合。对于点 v ，第一个颜色的成立条件是存在颜色 k_1 ，使得 $|C_{k_1} \cap N(v)| = 1$ ，记重合的元素为 w 。第二个颜色的成立条件是存在颜色 k_2 ， $|C_{k_2} \cap N(v) \cap N(w)| = 0$ 。

条件中涉及大量的集合运算，如果单纯采用 `vector` 维护节点集合，只能遍历的形式来判断，单次复杂度为 $O(|V|)$ 。我们在染色的过程中，用 `std::bitset` 动态维护每个颜色对应的节点集合，同时预处理出每个节点相邻节点的 `bitset`，这样就能够高效的利用 `bitset` 按位并行计算的优势判断成立条件，复杂度降为 $O(\frac{|V|}{64})$ 。加入该优化，算法能有接近 50% 的性能提升。

BBMCX - 启发式节点排序

在染色的过程中，如果能够按照节点度数从大到小的顺序依次染色，那么会得到更好的染色结果。论文中提出的排序方式是：找到一个度数最小的点，将点从图中删掉，再找图中最小的点。然而，这种方案对于节点集合 V 的导出子图而言，重新排序的代价是 $O(|G_V|^2)$ ，复杂度较高。Janez Konc 等人分析得出，只有在搜索树的最浅几层重新计算节点才是划算的¹。

于是我们提出这样一种策略，根据输入数据的规模，动态计算重排序的阈值 k ，在搜索树中 $< k$ 的所有层重新计算节点顺序， $\geq k$ 的所有层按照原先的顺序排序。该优化加入后，搜索树的大小有了一定的减小，总的计算效率得到了一定的提升。

¹Konc, J., Janečič, D.; An improved branch and bound algorithm for the maximum clique problem. MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 58: 569-590, 2007

启发式节点排序

我们分析发现，上述策略的瓶颈就在于重排导出子图的代价较高。我们考虑退而求其次，直接以节点在导出子图中的度数大小排序，这样的策略在单层效果上会劣于依次删点排序，然而，利用 `bitset`，导出子图的节点度数可以在 $O(\frac{|G_v|^2}{64})$ 的复杂度内计算完成，这样重排的复杂度就不再成为瓶颈。

我们采用新的排序策略：根据图大小设定阈值 k ，在搜索树中 $< k$ 的所有层采用删点策略计算顺序， $\geq k$ 的所有层直接按照导出子图中的点度排序。

该优化加入后，搜索树的大小大大减小，算法的性能约有 100% 的提升（详见实验部分）。

启发式算法

我们实现了一种启发式算法 DLS (Dynamic Local Search)。

DLS 算法采用扩展 (expand) 和平移 (plateauSearch) 两种方式对当前团进行扩展。通过引入 Penalty 机制来减少算法困在局部最优解的情况，同时维护一个 DLS 数据结构，保证集合增删过程中的高效性。

最终结果在较小的测试点上表现不佳，但在非常大的测试点上，DLS 算法能够在相对较短的时间内计算出一个较优解。

实验结果

Name	ω	MaxCLQ	BBMCX	BBMCX_B	DLS
brock200_1	21	5.848s	1.377s	0.284s	3.95s(21)
brock200_2	12	0.131s	0.027s	0.005s	3.27s(10)
brock200_3	15	0.365s	0.092s	0.015s	3.77s(14)
brock200_4	17	1.18s	0.336s	0.059s	5.12s(17)
brock400_1	27	5614.92s	586.18s	171.73s	15.82s(23)
brock400_2	29	2118.35s	242.39s	68.01s	24.95s(24)
brock400_3	31	3623.74s	386.20s	110.60s	30.37s(23)
brock400_4	33	2082.06s	207.90s	61.54s	14.99s(24)
brock800_1	23	> 12h	7342.49s	2475.67s	31.22s(20)
brock800_2	24	> 12h	9229.95s	2153.64s	29.19s(20)
brock800_3	25	> 12h	7183.32s	1526.52s	25.73s(19)
brock800_4	26	> 12h	8257.82s	1030.65s	24.88s(18)
frp100-40	100	12h(80)	12h(82)	12h(83)	1h(84)

Table: 在不同的数据集上，各算法的用时对比

实验结果

Name	ω	BBMCX_1	BBMCX_2
brock200_1	21	0.409s	0.284s
brock200_2	12	0.008s	0.005s
brock200_3	15	0.023s	0.015s
brock200_4	17	0.076s	0.059s
brock400_1	27	345.48s	171.73s
brock400_2	29	128.36s	68.01s
brock400_3	31	218.69s	110.60s
brock400_4	33	153.17s	61.54s
brock800_1	23	6821.66s	2475.67s
brock800_2	24	7210.39s	2153.64s
brock800_3	25	5525.27s	1526.52s
brock800_4	26	6219.36s	1030.65s

Table: 启发式重排序策略用时对比

实验结果

Name	ω	BBMCX	Ours
brock200_1	21	0.240s	0.284s
brock200_2	12	0.008s	0.005s
brock200_3	15	0.018s	0.015s
brock200_4	17	0.044s	0.059s
brock400_1	27	194.7s	171.73s
brock400_2	29	87.94s	68.01s
brock400_3	31	155.5s	110.60s
brock400_4	33	88.87s	61.54s
brock800_1	23	3496.9s	2475.67s
brock800_2	24	3140.1s	2153.64s
brock800_3	25	2063.7s	1526.52s
brock800_4	26	1429.8s	1030.65s

Table: 与论文中的实现对比

Github 协作

The screenshot shows the GitHub interface for the repository 'Sengxian / MaxClique'. The repository is marked as 'Private'. At the top, there are buttons for 'Watch' (1), 'Star' (0), and 'Fork' (0). Below this is a navigation bar with links to 'Code', 'Issues' (0), 'Pull requests' (0), 'Projects' (0), 'Wiki', 'Security', 'Insights', and 'Settings'. The repository name 'MaxClique algorithms for OOP Team Projects' is displayed, along with an 'Edit' button. A 'Manage topics' link is also present. A progress bar shows 41 commits, 1 branch, 0 releases, and 2 contributors. Below the progress bar are buttons for 'Branch: master', 'New pull request', 'Create new file', 'Upload files', 'Find File', and 'Clone or download'. A list of recent commits is shown, including a merge commit by Sengxian and two other commits by the same user.

Sengxian / MaxClique Private

Watch 1 Star 0 Fork 0

Code Issues 0 Pull requests 0 Projects 0 Wiki Security Insights Settings

MaxClique algorithms for OOP Team Projects Edit

Manage topics

41 commits 1 branch 0 releases 2 contributors

Branch: master New pull request Create new file Upload files Find File Clone or download

Sengxian	Merge commit 'd496d8f' into HEAD	Latest commit 16c36e5 12 hours ago
src	Merge commit 'd496d8f' into HEAD	12 hours ago
testcase	DLS debug finished	yesterday
.gitignore	ignore .vscode	4 days ago

小组采用 Github 协作，开发效率较高。