实变函数期末复习

2018.12.17

韦斯翰

备注. 本资料中的证明均为 Sketch 性质的略写，所需补齐细节之处已在证明中注明，请大家作为复习时的练习.

. . . .

判断. 若开集 O 的测度 $m(O)=\alpha>0$, 则它的闭包的测度 $m(\overline{O})$ 可能<u>大于</u>α.

判断. 若可测函数 f 几乎处处等于某个连续函数 g，则 f 几乎处处连续.

判断. 若对任意 $x\in E$ 都有 $0\le f(x)<\infty$，则 f 是一个有界函数.

判断. 若 E 上的非负可测函数 f 满足 $\int_E f\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)=0$ 在 E 上 $a.e.$ 成立.

判断. 若 E 上的非负可测函数 f 满足 $\int_E f\mathrm{d}x<\infty$, 则 $f(x)<\infty$ 在 E 上 $a.e.$ 成立.

判断. 若 f 是可测集 E 上的非负有界可积函数，且 $m(E)<\infty$, 则 $\sup\limits_{\varphi\le f}\left\{\int_E\varphi\mathrm{d}x\right\}=\inf\limits_{\psi\ge f}\left\{\int_E\psi\mathrm{d}x\right\}$, 其中 φ 和 ψ 均是简单函数.

判断. 若 f 是可测集 E 上的非负可积函数，且 $m(E)=\infty$, 则 $\sup\limits_{\varphi\le f}\left\{\int_E\varphi\mathrm{d}x\right\}=\inf\limits_{\psi\ge f}\left\{\int_E\psi\mathrm{d}x\right\}$, 其中 φ 和 ψ 均是简单函数.

判断. 若定义在可测集 E 上的非负可测函数列 $\{f_n\}$ 是单调递减的，即对于任意 $n>0$, 都有 $f_{n+1}\le f_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$, 则 f_n 依测度趋于 0.

判断. 若定义在可测集 E 上的非负可测函数列 $\{f_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=0$，则 f_n 依测度趋于 0.

判断. 若定义在闭区间 $[0,1]$ 上的非负可测函数列 $\{f_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

解答题 1. 已知 $\{E_n\}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一列递增可测集列，记 $E=\bigcup\limits_{n>0} E_n$. 若 f 是 E 上的非负可测函数，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x$.

证明.

考虑函数列 $F_n(x)=f(x)\chi_{E_n}(x)$，试说明它是 E 上单调递增的可测函数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=f(x)$.

请调用 Beppo Levi 定理证出结果. □

解答题 2. 已知 f 是 E 上的非负可积函数，求证: $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}$, 使得

$$\int_E f(x)\chi_{\{x\in E:\ f(x)>N\}}(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

证明.

对于每个 $n\geq 0$, 令 $E_n=\{x\in E:\ f(x)\geq n\}$,

于是我们有 $f(x)=f(x)\chi_{E_0}(x)\geq f(x)\chi_{E_1}(x)\geq f(x)\chi_{E_2}(x)\geq\cdots\geq 0$. 由于 f 是可积的（为什么在此处要说明 f 的可积性?），我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x=\int_E \lim_{n\to\infty} f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x=0 \text{ (请说明第二个等号)}.$$

结论显然立得. □

解答题 3 (Lebesgue 积分的绝对连续性)**.** 已知 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数. 求证：$\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta>0$, 使得对于任意 $\mathbb{R}$ 中的可测子集 E，只要 $m(E)<\delta$，就有 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x<\epsilon$.

证明.

任意取定 $\varepsilon>0$.

令 $E_n=\{x\in\mathbb{R}:\ n\leq|f(x)|<n+1\}$.（将 f 的值域进行分拆, 优先考虑“高”值部分. 另外由于 f 可积, 所以 $|f|$ 取到 ∞ 的部分为零测集, 可以忽略不计.）

倘若 E_n 中除了有限个以外均为零测集, 则结论显然成立 (请验证). 现在假设 E_n 中有无穷个成员非零测集.

由于 f 可积, 且 $E_i\cap E_j=\varnothing$, $\bigcup_{n\geq 0} E_n=\mathbb{R}$, 故我们有

$$\sum_{n\geq 0}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{\bigcup_{n\geq 0} E_n}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}}|f(x)|\mathrm{d}x<\infty.$$

由正项级数收敛可知, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $\sum_{n\geq N}\int_{E_n}|f(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon$.

令 $\delta = m(\bigcup_{n\geq N} E_n) > 0$.（此处为何能保证大于 0?）

现在请试说明结论成立.（将 E 拆成在 $\bigcup_{n\geq N} E_n$ 中和不在 $\bigcup_{n\geq N} E_n$ 中两部分）

□

备注. 此为积分论中的重要定理, 这里给出的是较为直观的证明, 大家也可以参考教材中的证明.

解答题 4 (Riemann-Lebesgue 定理)**.** 已知 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数. 求证:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0.$$

这是一个非常著名的定理，有一个直观的看法是，当自然数 n 足够大时，$\cos nx$ 周期就足够小，导致可积函数 f 在这段极短的周期内的"震荡"足够小，以至于近似的看成常函数，也就是可积函数 f 在整条实轴 $\mathbb{R}$ 上被近似的看成阶梯函数。我们证明的思路就是从阶梯函数开始考虑，用阶梯函数的积分来逼近 f 的积分. 而 f 的可积性导致 f 的积分可以被简单函数的积分逼近，故而此证明方式中最困难的地方在于用阶梯函数的积分逼近简单函数的积分.

我们现在开始第一步：首先验证对于 $\mathbb{R}$ 上的阶梯函数 f 来说，结论显然成立.

CHECK. 若 f 是一个可积的阶梯函数, 则 $f(x) = \sum_{k=1}^{K} a_i\chi_{I_i}$, 其中 $a_i \neq 0$, 并且 I_i 是互不相交的长度有限的区间 (think why). 在每一个小区间 $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$ 上, 可将 $\int_{I_i} a_i\cos nx\mathrm{d}x$ 的值转化为 Riemann 积分:

$$\int_{I_i} a_i\cos nx\mathrm{d}x = a_i\int_{\alpha_i}^{\beta_i}\cos nx\mathrm{d}x = \frac{a_i(\sin(n\beta_i) - \sin(n\alpha_i))}{n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

验证完毕.

接下来我们开始将 f 逐渐"放松"到阶梯函数. 我们首先将 f 用简单函数逼近.

引理 1. 若 f 是可测集 E 上的可积函数. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在可积简单函数 φ, 使得

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证明.

f 的可积性预示着非负可测函数 f_+ 和 f_- 的可积性.

由于 f 的正部 f_+ 是非负可积函数，所以存在可积简单函数 $\varphi_1 \leq f_+$，使得

$$|\int_E f_+(x)\mathrm{d}x - \int_E \varphi_1(x)\mathrm{d}x| = \int_E |f_+(x) - \varphi_1(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon/2.$$

同理，存在可积简单函数 $\varphi_2 \leq f_-$，使得

$$|\int_E f_-(x)\mathrm{d}x - \int_E \varphi_2(x)\mathrm{d}x| = \int_E |f_-(x) - \varphi_2(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon/2.$$

令可积简单函数 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, 我们有

$$\int_E |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x = \int_E |(f_+(x) - \varphi_1(x)) - (f_-(x) - \varphi_2(x))|\mathrm{d}x \leq$$
$$\int_E |f_+(x) - \varphi_1(x)|\mathrm{d}x + \int_E |f_-(x) - \varphi_2(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

□

下一步我们将可积的简单函数用可积的阶梯函数来逼近，其中的主要手法是任意可测集 E，都存在包含 E 的开集 O，使得 $m(O \setminus E)$ 任意小.

引理 2. 若 φ 是 $\mathbb{R}$ 上的可积简单函数. 那么对于任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\mathbb{R}$ 上的可积阶梯函数 ψ，使得

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证明.

任意取定 $\varepsilon > 0$.

由于 φ 是 $\mathbb{R}$ 上的可积简单函数, 可假设 $\varphi = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{E_i}$, 其中 E_i 互不相交, 且 $a_i \neq 0,\ i = 1, 2, \cdots, k$.

对于每个 $1 \leq i \leq k$, 存在开集 $O_i \supset E_i$, 使得 $m(O_i \setminus E_i) < \dfrac{\varepsilon}{|a_i| \cdot k}$.

令阶梯函数 $\psi = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{O_i}$.

于是我们有

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)|\mathrm{d}x \leq \sum_{i=1}^k |a_i| \int_{\mathbb{R}} |\chi_{E_i}(x) - \chi_{O_i}(x)|\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{i=1}^k |a_i| m(O_i \setminus E_i) < \sum_{i=1}^k |a_i| \frac{\varepsilon}{|a_i| \cdot k} = \varepsilon.$$

□

我们现在建立 Riemann-Lebesgue 定理.

证明.

任意取定 $\varepsilon > 0$.

根据引理 1, 我们有可积简单函数 φ, 使得 $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon/4$;

根据引理 2, 我们有可积阶梯函数 ψ, 使得 $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon/4$.

于是我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \psi(x)| \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - \varphi(x)| \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x) - \psi(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon/2.$$

进而有

$$0 \leq |\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos nx \mathrm{d}x| \leq |\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos nx - \psi(x) \cos nx \mathrm{d}x| + |\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \cos nx \mathrm{d}x| \leq$$
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - \psi(x)| \mathrm{d}x + |\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \cos nx \mathrm{d}x| < |\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \cos nx \mathrm{d}x| + \varepsilon/2$$

由于 ψ 是可积阶梯函数, 所以 $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \cos nx \mathrm{d}x \to 0$.（根据第一步的 CHECK）所以存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得任意 $n > N$, 都有 $|\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \cos nx \mathrm{d}x| < \varepsilon/2$, 进而有

$$|\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos nx \mathrm{d}x| < \varepsilon.$$

□

判断. 若对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 都有 $f \in \mathcal{L}([0, n])$, 且极限 $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} f(x) \mathrm{d}x$ 存在, 是否有 $f \in \mathcal{L}([0, \infty))$?

解答题 5. 若 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数，满足对于任意的开集 $O \subset \mathbb{R}$, 都有 $\int_O f(x) \mathrm{d}x = 0$. 求证: f 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处等于 0.

证明.

假设 $m(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}) > 0$.

那么我们可以找到 $N \in \mathbb{N}$, 使得可测集 $E_N = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 1/N\}$ 是正测集.(此处补全细节)

根据积分连续性, 存在正数 δ, 使得对于任意可测集 F, 只要 $m(F) < \delta$, 就有 $\int_F |f(x)|\mathrm{d}x < \frac{m(E_N)}{2N}$.

注意到存在开集 $O \supset E_N$, 使得 $m(O \setminus E_N) < \delta$.(Think why)

从而 $\int_O f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_N} f(x)\mathrm{d}x + \int_{O\setminus E_N} f(x)\mathrm{d}x \geq \frac{m(E_N)}{N} - \frac{m(E_N)}{2N} = \frac{m(E_N)}{2N} > 0$, 矛盾. □

解答题 6 (解答题 5 推论 1)**.**

若对于任意 $a < b$, 都有 $\int_{[a,b]} f(t)\mathrm{d}t = 0$, 则 $f(x) = 0$ ($a.e.\ x \in \mathbb{R}$).

证明.

由已知可得, 函数 f 在任意开区间上的积分均为 0, 于是在任意开集 O 上积分均为 0(Think why). 由解答题 5 立得结论. □

解答题 7 (解答题 5 推论 2)**.**

若 f 是 $\mathbb{R}$ 上的可积函数, 满足对于任意的有界可测函数 φ, 都有 $\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0$. 求证: f 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处等于 0.

证明.

假设 f 在 $\mathbb{R}$ 上不是几乎处处为 0 得函数, 那么由解答题 5 知, 存在开集 O, 使得 $\int_O f(x)\mathrm{d}x \neq 0$.

令 $\varphi = \chi_O$, 矛盾. □

解答题 8. 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{(0,1)} f_n(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f_n(x) = \dfrac{2^{1+x/n}}{(\sin x)^{1/n}}$.

解答: 考察函数列 $\{f_n\}$ 的单调性, 并说明其中某一项是可积的.

解答题 9. 已知 $f \in \mathcal{L}((0,+\infty))$. 令 $f_n(x) = f(x)\chi_{(0,n)}(x)$. 求证：$f_n$ 依测度趋向于 f.

证明.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 我们需要证明的是

$$m(E_n^\varepsilon) \to 0$$

其中 $E_n^\varepsilon = \{x > 0 : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$.

注意到的是 $E_n^\varepsilon = \{x > 0 : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = \{x \geq n : |f(x)| > \varepsilon\}$, 于是

$$E_1^\varepsilon \supset E_2^\varepsilon \supset \cdots \supset E_n^\varepsilon \supset \cdots$$

$$\bigcap_{n=1}^\infty E_n^\varepsilon = \varnothing$$

又由于 $f \in \mathcal{L}((0, +\infty))$, 所以 $m(E_1^\varepsilon) < \infty$, 这蕴涵着 $m(E_n^\varepsilon) \to m(\cap_{n=1}^\infty E_n^\varepsilon) = 0$. $\square$

解答题 10. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 且

$$\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = 0$$

求证: 或者有 $f(x) = 0$, *a.e.* $x \in [a,b]$; 或者存在 $E \subset [a,b]$, 使得 $\int_E f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证明.

假设 $m(\{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}) > 0$.

注意到 $\{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\} = \{x \in [a,b] : f(x) > 0\} \cup \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$, 而由于 $\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x = 0$, 我们知道以上两者均为正测集.(Think why)

注意到 $\{x \in [a,b] : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in [a,b] : f(x) \geq 1/n\}$, 可知存在某个 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $m(\{x \in [a,b] : f(x) > 1/N\}) > 0$.

令可测集 $E = \{x \in [a,b] : f(x) > 1/N\}$. $\square$

解答题 11. 设 $f(x)$ 是 $E \subset \mathbb{R}$ 上的非负可测函数. 求证: 若存在一列可测集 $\{E_k\} \subset E$ 满足 $m(E \setminus E_k) < 1/k$, 并且使得极限

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x$$

存在, 则 $f \in \mathcal{L}(E)$.

证明.

令 $F = \bigcup_{k=1}^\infty E_k$.

由 $m(E \setminus E_k) < 1/k$ 可知,$m(E \setminus F) = 0$.

我们只需证明<u>非负函数</u> f 在 F 上可积即可.(Think why)

记 $f_k(x) = f(x)\chi_{E_k}(x)$. 由于 $m(E \setminus E_k) \to 0$, 所以 f_k 依测度趋于 f.(Think why)

由 Riesz Lemma, 存在 $\{k_i\}$, 使得 $f_{k_i}(x) \to f(x)$.

由 Fatou Lemma:

$$\int_F f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_F \lim_{i\to\infty} f(x)\chi_{E_{k_i}}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_F \liminf_{i\to\infty} f(x)\chi_{E_{k_i}}(x)\mathrm{d}x$$

$$\leq \liminf_{i\to\infty} \int_F f(x)\chi_{E_{k_i}}(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)\mathrm{d}x < \infty.$$

□