1　证明题

例: $f(x)=(x-1)^2$, 求 $f'(2x)$

要清楚是对谁求导

$$\begin{aligned}
f'(x) =&(f(x))' \\
f'(2x) \neq&(f(2x))' \\
f'(2x) =&\frac{(f(2x))'}{2}=\frac{((2x-1)^2)'}{2}=4x-2
\end{aligned}$$

莱布尼茨公式　设 $u(x), v(x)$ 有 n 阶导数，则

$$(u\cdot v)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$$

5.4 8. 设函数 $y=f(x)$在点x处三阶可导，且$f'(x)\neq 0$,若$f(x)$存在反函数$x=f^{-1}(y)$,试用$f'(x), f''(x)$以及$f'''(x)$表示$(f^{-1})'''(y)$.

解：要清楚是关于谁求导

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}&=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{f'(x)} \\
\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-f''(x)}{(f'(x))^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}=-\frac{f''(x)}{(f'(x))^3} \\
\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{f'''(x)f'(x)-3\left(f''(x)\right)^2}{\left(f'(x)\right)^4}\cdot\frac{1}{f'(x)} \\
&=\frac{3\left(f''(x)\right)^2-f'(x)f'''(x)}{\left(f'(x)\right)^5}
\end{aligned}$$

即

$$(f^{-1})'''(y)=\frac{3\left(f''(x)\right)^2-f'(x)f'''(x)}{\left(f'(x)\right)^5}$$

5.4 9. 设 $y=\arctan x$.

(1) 证明它满足方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$;

(2) $y^{(n)}|_{x=0}$.

解:

(1) $y'=\frac{1}{1+x^2}$, 得 $(1+x^2)y'=1$，两边求导，得到

$$\left(1+x^2\right)y''+2xy'=0$$

(2) 对两边求 $n-2$ 次导数，得到

$$\begin{aligned}\left(1+x^2\right) y^{(n)}+(n-2) 2 x y^{(n-1)}+\frac{(n-2)(n-3)}{2} 2 y^{(n-2)} \\ +2 x y^{(n-1)}+(n-2) 2 y^{(n-2)}=0 \quad(n \geqslant 3)\end{aligned}$$

令 $x=0$ 得到 $y^{(n)}|_{x=0}=-(n-1)(n-2) y^{(n-2)}|_{x=0} \quad(n \geqslant 3)$
所以

$$\left.y^{(n)}\right|_{x=0}=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!y^{\prime}(0), & n\text{为奇数} \\ (-1)^{\frac{n-2}{2}}(n-1)!y^{\prime \prime}(0), & n\text{为偶数}\end{cases}$$

又 $y^{\prime}(0)=1, y^{\prime \prime}(0)=0$, 所以

$$\left.y^{(2m)}\right|_{x=0}=0,\left.y^{(2m+1)}\right|_{x=0}=(-1)^m(2m)!$$

5.4 10. 设 $y=\arcsin x$
(1) 证明它满足方程

$$\left(1-x^2\right) y^{(n+2)}-(2n+1) x y^{(n+1)}-n^2 y^{(n)}=0$$

(2) 求 $y^{(n)}|_{x=0}$.
解：与上一题类似，先对 y 求一次导，得到关系式 $\sqrt{1-x^2} y^{\prime}=1$ 在两边求导得到

$$\sqrt{1-x^2} y^{\prime \prime}-\tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} y^{\prime}=0$$

化简得

$$\left(1-x^2\right) y^{\prime \prime}-x y^{\prime}=0$$

后面过程与上题类似，不再赘述
5.4 11. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处 n 阶可导且 $f^{(n)}(0)=0$, 其中 n 为任意正整数.

证：当 $x \neq 0$ 时，$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$, 而

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{t^2}} \qquad \left(t = \frac{1}{x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}
$$

同理可得

$$
f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{-6}{x^4} + \frac{4}{x^6}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}
$$

数学归纳法

假设

$$
f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}
$$

其中 $P_n(\frac{1}{x})$ 为 $\frac{1}{x}$ 的 $3n$ 次多项式，则当 $x \neq 0$ 时，

$$
f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}
$$

显然 $P_{n+1}(\frac{1}{x})$ 为 $\frac{1}{x}$ 的 $3(n+1)$ 次多项式又

$$
\begin{aligned}
f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{t \to \infty} \frac{t P_n(t)}{e^{t^2}} \qquad \left(t = \frac{1}{x}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以

$$
f^{(n+1)} = \begin{cases} P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}
$$

由数学归纳法知，$f(x)$ 在 $x=0$ 处 n 阶可导且 $f^{(n)}(0)=0$,