

数学分析辅导讲义

魏森辉

日期 2019/11/15

1 计算题

1. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

解：有理化或等价替换 ($\sqrt[k]{x+1} \sim 1 + kx$)

答案：8

2. 求极限

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta}$$

解：换元 $t = \alpha - \beta$

答案： e^β

3. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin n \sqrt[n]{2}(1 - \cos \frac{1}{n^2})}{\cos \frac{1}{n}(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\frac{1}{n} + 1)}$$

解：取极限时如果结果是非零常数的项可以直接取这个值，如果出现 0，则这一项不能轻易取值，要考虑等价无穷小

答案：原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} + n)n^3 \frac{1}{2n^4} = 1$

4. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + 2 \sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x}$$

解：不是 1^∞ 型，两个指数形式的相减，往往需要提出公因数，这题类似上面换元的题目，这里需要用到 $a^b = e^{b \ln a}$

答案：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + 2 \sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \left(\left(1 + \frac{2}{3} \sin x\right)^x - 1 \right)}{\tan^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x (e^{x \ln(1 + \frac{2}{3} \sin x)} - 1)}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x x \ln(1 + \frac{2}{3} \sin x)}{\tan^2 x} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

5. 多项式求极限模型（看次数最高的项）

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, & k = m \\ 0, & k > m \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n}{2n^3 + n^2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{2x + 1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^5 + x^3 + x} + 2x^2}{x^{\frac{5}{3}}} = \infty$$

这个其实不算多项式，但是可以用个放缩，如果是趋于 0 呢？要先用换元 $n = \frac{1}{x}$
放缩法

6.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}}$$

1. 求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x + x^2)^{\sin \frac{1}{x}}$ 的极限

解：

$$(1 + x + x^2)^{-1} \leq (1 + x + x^2)^{\sin \frac{1}{x}} \leq (1 + x + x^2)^1$$

由迫敛性，得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x + x^2)^{\sin \frac{1}{x}} = 1$$

2. 无穷大减无穷大不能判断结果

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 1} = 1$$

2 证明题

证明. For simplicity, we use

$$E = mc^2$$

That's it.

