

时间序列分析作业

10161511403, 魏森辉

2019 年 11 月 26 日

题目一：设 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 为二维正态向量, 求用 y 对 x^2 的最小方差估计及线性无偏最小方差估计

答：(1) 设 $[x, y]^T \sim N(\mu_1, \theta_1^2, \mu_2, \theta_2^2, \rho)$, 则 y 对 x 的最小方差估计是 $E[x^2|y]$, 令 $z = x^2$, 我们有

$$\begin{aligned} E[z|y] &= E[x^2|y] \\ &= E^2(x|y) + Var(x|y) \\ &= (\mu_1 + \rho\theta_1(y - \mu_2)/\theta_2^2)^2 + \theta_1^2(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

(2) 线性无偏最小方差估计 $\hat{z}_y = Ez + R_{zy}R_y^+(y - Ey)$

$$\begin{aligned} Ez &= VarX + (Ex)^2 = \theta_1^2 + \mu_1^2 \\ R_y^+ &= \frac{1}{\theta_2^2} \end{aligned}$$

题目二：考虑如下的线性随机递推

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + D(\omega(k+1)) \\ y(k) = Cx(k) + F\omega(k) \end{cases}$$
$$x(k) \in \mathbb{R}^n, y(k) \in \mathbb{R}^n, \omega(k) \in \mathbb{R}^n$$

$\omega(k)$ 满足 $\omega(k+1) = M\omega(k) + \xi(k)$, $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $\xi(k)$ 为零均值白噪声用 y^k 求 $x(k), x(k+1)$ 线性无偏最小方差估计, 并求 *Kalman* 滤波方程

答： y^k 对 $x(k), x(k+1)$ 的线性无偏最小方差估计为 $\hat{x}(k|k), \hat{x}(k+1|k)$ *Kalman* 滤波方程不会求