

# 时间序列分析作业

10161511428, 孔寅豪

2019 年 11 月 26 日

题目 1: 设  $[x, y]^T$  为二维正态向量, 求用  $y$  对  $x^2$  的最小方差估计及线性无偏最小方差估计

答: (1) 设  $[x, y]^T \sim N(\mu_1, \sigma_1^2, \mu_2, \sigma_2^2, \rho)$ , 则  $y$  对  $x$  的最小方差估计是  $E[x^2|y]$ , 令  $z = x^2$ , 我们有

$$\begin{aligned} E[z|y] &= E[x^2|y] = E^2(x|y) + \text{Var}(x|y) \\ &= (\mu_1 + \rho\sigma_1(y - \mu_2)/\sigma_2^2)^2 + \sigma_1^2(1 - \rho^2) \end{aligned}$$

(2)  $y$  对  $x^2$  的线性无偏最小方差估计  $\hat{z}_y = Ez + R_{zy}R_y^+(y - Ey)$

$$Ez = \text{Var}X + (Ex)^2 = \sigma_1^2 + \mu_1^2$$

题目 2: 考虑如下的线性随机递推

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + D(\omega(k+1)) \\ y(k) = Cx(k) + F\omega(k) \end{cases}$$

$$x(k) \in \mathbb{R}^n, y(k) \in \mathbb{R}^n, \omega(k) \in \mathbb{R}^n$$

$\omega(k)$  满足  $\omega(k+1) = M\omega(k) + \xi(k)$ ,  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\xi(k)$  为零均值白噪声用  $y^k$  求  $x(k), x(k+1)$  线性无偏最小方差估计, 并求 *Kalman* 滤波方程

答:  $y^k$  对  $x(k), x(k+1)$  的线性无偏最小方差估计为  $\hat{x}(k|k), \hat{x}(k+1|k)$