

数学分析辅导讲义

魏森辉

日期 2019/11/15

1 计算题

等价无穷小

1. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

解：有理化或等价替换 ($\sqrt[k]{x+1} \sim 1 + kx$)

答案：8

2. 求极限

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta}$$

解：换元 $t = \alpha - \beta$

答案： e^β

3. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \sin n \sqrt[n]{2}(1 - \cos \frac{1}{n^2})}{\cos \frac{1}{n}(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\frac{1}{n} + 1)}$$

解：取极限时如果结果是非零常数的项可以直接取这个值，如果出现 0，则这一项不能轻易取值，要考虑等价无穷小

答案：原式 = $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} + n)n^3 \frac{1}{2n^4} = 1$

4. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + 2 \sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x}$$

解：不是 1^∞ 型，两个指数形式的相减，往往需要提出公因数，这题类似上面换元的题目，这里需要用到 $a^b = e^{b \ln a}$

答案：

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 + 2 \sin x)^x - 3^x}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x \left(\left(1 + \frac{2}{3} \sin x\right)^x - 1 \right)}{\tan^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x (e^{x \ln(1 + \frac{2}{3} \sin x)} - 1)}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x x \ln(1 + \frac{2}{3} \sin x)}{\tan^2 x} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

多项式求极限模型

看次数最高的项

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, & k = m \\ 0, & k > m \end{cases}$$

5.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n}{2n^3 + n^2} &= \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{2x + 1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^5 + x^3 + x} + 2x^2}{x^{\frac{5}{3}}} &= \infty\end{aligned}$$

这个其实不算多项式，但是可以用个放缩，如果是趋于 0 呢？要先用换元 $n = \frac{1}{x}$

放缩法

6. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 - \frac{1}{n}}$$

7. 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n^2}$$

8. 求极限

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}\end{aligned}$$

9. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x + x^2)^{\sin \frac{1}{x}}$$

解：

$$(1 + x + x^2)^{-1} \leq (1 + x + x^2)^{\sin \frac{1}{x}} \leq (1 + x + x^2)^1$$

由迫敛性, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x + x^2)^{\sin \frac{1}{x}} = 1$$

或者

$$(1 + x + x^2)^{\frac{1}{x+x^2} (x+x^2) \sin \frac{1}{x}}$$

和差化积-积化和差公式

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad (1)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \sin \frac{a-b}{2} \cos \frac{a+b}{2} \quad (2)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad (3)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} \quad (4)$$

注意: 这几个公式熟练记忆, 以后经常要用

10. 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{1+x} - \sin \sqrt{x})$$

11. 化简

$$\sum_{k=1}^n \cos kx \quad x \in (0, 2\pi)$$

解:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx \right) &= \sin \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{x}{2} \right) + \cdots \\ &\quad + \left[\sin \left(n + \frac{1}{2} \right)x - \sin \left(n - \frac{1}{2} \right)x \right] \\ &= \sin \left(n + \frac{1}{2} \right)x \end{aligned}$$

2 判断题

1. 若 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$ 且 $\forall x \in (0, 2), g(x) > 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ ()

反例:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad f(x)g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

2. 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{u \rightarrow A} g(u) = B \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$ ()

反例:

$$u = f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad y = g(u) = \begin{cases} 0 & u = 0 \\ 1 & u \neq 0 \end{cases}$$

3. 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{u \rightarrow A} g(u) = B$, 且存在 $U^o(a)$, 使得在 $U^o(a)$ 内 $f(x) \neq A$, 则能推出 $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$ ()

证明. 由 $\lim_{u \rightarrow A} g(u) = B$ 知, 对任何的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $0 < |u - A| < \eta$ 时, $|g(u) - B| < \varepsilon$, 又由 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, 对上面的 η , 存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \eta$. 由于 $f(x) \neq A$, 所以当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, $0 < |f(x) - A| < \eta$, 从而 $|g(f(x)) - B| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = B$. \square

3 证明题

归纳法证明极限题

1. 设 $0 < c < 1, a_1 = \frac{c}{2}, a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛, 并求其极限

证明. 这类题一般可以这样做: 首先解方程得到一个上界或下界, 然后归纳法证明 $\{a_n\}$ 确实满足这个范围然后根据 $\{a_n\}$ 的范围再去用归纳法求 $\{a_n\}$ 的单调性最后单调有界必有极限 \square

极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - \sqrt{1 - c}$

2. 用类似地方法可以证明 $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \quad a_1 = \sqrt{2}$

提示: 假设 $a_{n-1} \leq a_n$, 有 $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \leq \sqrt{2 + a_n} = a_{n+1}$