# 数学分析辅导讲义

魏森辉

日期 2019/11/15

## 1 计算题

1. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$$

解：有理化或等价替换（$\sqrt[k]{x+1}\sim 1+kx$）

答案：8

2. 求极限

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}$$

解：换元 $t=\alpha-\beta$

答案：$e^{\beta}$

3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sin n\sqrt[n]{2}(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\cos\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+1}-n)(\frac{1}{n}+1)}$$

解：取极限时如果结果是非零常数的项可以直接取这个值，如果出现 0，则这一项不能轻易取值，要考虑等价无穷小

答案：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}+n)n^3\frac{1}{2n^4}=1$

4. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{tan^2x}$$

解：不是 $1^{\infty}$ 型，两个指数形式的相减，往往需要提出公因数，这题类似上面换元的题目，这里需要用到 $a^b=e^{blna}$

答案：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{tan^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left((1+\frac{2}{3}\sin x)^x-1\right)}{\tan^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3^x(e^{xln(1+\frac{2}{3}\sin x)}-1)}{\tan^2 x}\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{3^x xln(1+\frac{2}{3}\sin x)}{\tan^2 x}=\frac{2}{3}$$

5. 多项式求极限模型（看次数最高的项）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_k n^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}=\begin{cases}\frac{a_m}{b_m}, & k=m\\ 0, & k>m\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n}{2n^3+n^2}=\frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^5+x^3+x}+2x^2}{x^{\frac{5}{3}}}=\infty$$

这个其实不算多项式，但是可以用个放缩，如果是趋于 0 呢？要先用换元 $n=\frac{1}{x}$

放缩法

6.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}$$

1. 求 $\lim_{x\to 0^+}(1+x+x^2)^{\sin\frac{1}{x}}$ 的极限

解：

$$\left(1+x+x^2\right)^{-1}\leqslant\left(1+x+x^2\right)^{\sin\frac{1}{x}}\leqslant\left(1+x+x^2\right)^{1}$$

由迫敛性，得

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x+x^2)^{\sin\frac{1}{x}}=1$$

2. 无穷大减无穷大不能判断结果

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5}{x^2-1}=1$$

# 2 证明题

证明. For simplicity, we use

$$E=mc^2$$

That's it. $\square$