# 数学分析辅导讲义

魏森辉

日期 2019/11/15

## 1 计算题

**等价无穷小**

1. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$$

解：有理化或等价替换（$\sqrt[k]{x+1}\sim 1+\frac{1}{k}x$）

答案：8

2. 求极限

$$\lim_{\alpha\to\beta}\frac{e^{\alpha}-e^{\beta}}{\alpha-\beta}$$

解：换元 $t=\alpha-\beta$

答案：$e^{\beta}$

3. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2\sin\frac{1}{n}\sqrt[n]{2}(1-\cos\frac{1}{n^2})}{\cos\frac{1}{n}(\sqrt{n^2+1}-n)(\frac{1}{n}+1)}$$

解：取极限时如果结果是非零常数的项可以直接取这个值，如果分子或分母出现0，则这一项不能轻易取值，要考虑等价无穷小

答案：0

4. 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{tan^2x}$$

解：不是 $1^{\infty}$ 型，两个指数形式的相减，往往需要提出公因数，这题类似上面换元的题目，这里需要用到 $a^b=e^{blna}$

答案：

$$\lim_{x\to 0}\frac{(3+2\sin x)^x-3^x}{tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^x\left((1+\frac{2}{3}\sin x)^x-1\right)}{\tan^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3^x(e^{xln(1+\frac{2}{3}\sin x)}-1)}{\tan^2 x}\qquad=\lim_{x\to 0}\frac{3^x xln(1+\frac{2}{3}\sin x)}{\tan^2 x}=\frac{2}{3}$$

**多项式求极限模型**

看次数最高的项

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0}{b_k n^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n+b_0}=\begin{cases}\frac{a_m}{b_m}, & k=m\\ 0, & k>m\end{cases}$$

5.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n}{2n^3+n^2}=\frac{3}{2}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{2x+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt[3]{x^5+x^3+x}+2x^2}{x^{\frac{5}{3}}}=\infty$$

如果 x 趋于 0，建议先用换元 $n=\frac{1}{x}$

**放缩法**

6. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}$$

7. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+n^2}$$

8. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$$
$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

9. 求极限

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+x+x^2\right)^{\sin\frac{1}{x}}$$

解:

$$\left(1+x+x^2\right)^{-1}\leqslant\left(1+x+x^2\right)^{\sin\frac{1}{x}}\leqslant\left(1+x+x^2\right)^{1}$$

由迫敛性，得

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x+x^2)^{\sin\frac{1}{x}}=1$$

或者

$$(1+x+x^2)^{\frac{1}{x+x^2}(x+x^2)\sin\frac{1}{x}}$$

**和差化积-积化和差公式**

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \tag{1}$$

$$\sin a-\sin b=2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \tag{2}$$

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \tag{3}$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \tag{4}$$

注意：这几个公式熟练记忆，以后经常要用

10. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x}-\sin\sqrt{x})$$

答案：0

11. 化简

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx \qquad x\in(0,2\pi)$$

解:

$$\begin{aligned}2\sin\frac{x}{2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)&=\sin\frac{x}{2}+\left(\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}\right)+\cdots\\&\quad+\left[\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin(n-\frac{1}{2})x\right]\\&=\sin(n+\frac{1}{2})x\end{aligned}$$

# 2　判断题

1. 若 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)g(x)=0$且$\forall x\in(0,2),g(x)>0,$则$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$　(　)

反例:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\neq 1\\ 1 & x=1\end{cases}\quad f(x)g(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & x\neq 1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

2. 设 $\lim_{x\to a} f(x)=A, \lim_{u\to A} g(u)=B \Rightarrow \lim_{x\to a} g(f(x))=B$ ( )
反例：

$$u=f(x)=x\sin\frac{1}{x}, \quad y=g(u)=\begin{cases} 0 & u=0 \\ 1 & u\neq 0 \end{cases}$$

3. 设 $\lim_{x\to a} f(x)=A, \lim_{u\to A} g(u)=B,$ 且存在$U^o(a)$,使得在$U^o(a)$内$f(x)\neq A$, 则能推出 $\lim_{x\to a} g(f(x))=B$ ( )

*证明*. 由 $\lim_{u\to A} g(u)=B$ 知, 对任何的 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得当 $0<|u-A|<\eta$ 时，$|g(u)-B|<\varepsilon$, 又由 $\lim_{x\to a} f(x)=A$, 对上面的 $\eta$，存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\eta$. 由于 $f(x)\neq A$, 所以当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$0<|f(x)-A|<\eta$, 从而 $|g(f(x))-B|<\varepsilon$, 即 $\lim_{x\to a} g(f(x))=B$. □

# 3 证明题

**归纳法证明极限题**

1. 设 $0<c<1, a_1=\frac{c}{2}, a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}$, 证明：$\{a_n\}$ 收敛，并求其极限

*证明*. 这类题一般可以这样做：首先解方程得到一个上界或下界，然后归纳法证明 $\{a_n\}$ 确实满足这个范围然后根据 $\{a_n\}$ 的范围再去用归纳法求 $\{a_n\}$ 的单调性最后单调有界必有极限 □

答案：极限 $\lim_{n\to\infty} a_n=1-\sqrt{1-c}$
说明：有同学问为什么极限不取 $\lim_{n\to\infty} 1+\sqrt{1+c}$, 因为这里用归纳假设很容易看出，$a_n<1$，所以其实一开始你去假设 $0<a_n<1$ 也是可以做的
2. 用类似地方法可以证明 $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}} \qquad a_1=\sqrt{2}$
提示：假设 $a_{n-1}\leq a_n$, 有 $a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}\leq\sqrt{2+a_n}=a_{n+1}$