目录

$\LaTeX$ 模版

Wilson79

2019 年 11 月 16 日

1 计算题

多项式求极限模型

看次数最高的项

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, & k=m \\ 0, & k>m \end{cases}$$

和差化积-积化和差公式

$$\sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \tag{1}$$
$$\sin a-\sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \tag{2}$$
$$\cos a+\cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} \tag{3}$$
$$\cos a-\cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} \tag{4}$$

注意：这几个公式熟练记忆，以后经常要用

2 判断题

1. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{u\to A} g(u) = B \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = B$ （ ）

反例:

$$u = f(x) = x\sin\frac{1}{x}, \quad y = g(u) = \begin{cases} 0 & u=0 \\ 1 & u\neq 0 \end{cases}$$

2. 设 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A, \lim\limits_{u\to A} g(u)=B$,且存在$U^o(a)$,使得在$U^o(a)$内$f(x)\neq A$, 则能推出 $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=B$ ( )

证明. 由 $\lim\limits_{u\to A} g(u)=B$ 知, 对任何的 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得当 $0<|u-A|<\eta$ 时，$|g(u)-B|<\varepsilon$, 又由 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, 对上面的 η，存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\eta$. 由于 $f(x)\neq A$, 所以当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$0<|f(x)-A|<\eta$, 从而 $|g(f(x))-B|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=B$. □

3 证明题

归纳法证明极限题

1. 设 $0<c<1, a_1=\frac{c}{2}, a_{n+1}=\frac{c}{2}+\frac{a_n^2}{2}$, 证明：$\{a_n\}$ 收敛，并求其极限

证明. 这类题一般可以这样做：首先解方程得到一个上界或下界，然后归纳法证明 $\{a_n\}$ 确实满足这个范围然后根据 $\{a_n\}$ 的范围再去用归纳法求 $\{a_n\}$ 的单调性最后单调有界必有极限 □

答案：极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1-\sqrt{1-c}$
说明：有同学问为什么极限不取 $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\sqrt{1+c}$, 因为这里用归纳假设很容易看出，$a_n<1$，所以其实一开始你去假设 $0<a_n<1$ 也是可以做的