24.Линейные разностные уравнения

Пусть функция y = f(x) определена для всех значений x вида xs = a+s·h, где a, h – фиксированные вещественные числа, h 6= 0 – шаг, s = 0, 1, 2, ... Выражение:

$$\Delta_h f(x_s) = f(a + (s + 1) * h) - f(a + s * h) \equiv f(x_s + h) - f(x_s)$$

Будем называть **конечной разностью** первого порядка функции f(x) в точке x_s. По индукции определяются конечные разности любого натурального порядка в точке $x = x_s$:

$\Delta_h f(x_s) = f(x + h) - f(x)$; $\Delta_h^2 f(x) = \Delta_h f(x + h) - \Delta_h f(x) \equiv \Delta_h(\Delta_h f(x))$
$\Delta_h^k f(x) = \Delta_h^{k-1} f(x + h) - \Delta_h^{k-1} f(x) \equiv \Delta_h^{k-1}(\Delta_h f(x))$;

Поскольку a и h фиксированы, то величина $f(x_s)$ зависит только от индекса s. Введём для соответствующей функции обозначение $u(s) = f(x_s)$.

$$\Delta_h f(x_s) = f(x_s + h) - f(x_s) = u(s + 1) - u(s) = \Delta_1 u(s)$$

Разности можем представить в виде: $\Delta^p u(s) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} * C_p^m * u(s + m)$, где C - число сочетаний.

Разностным уравнением называется соотношение $F\left(s, u(s), \Delta u(s), \dots, \Delta^k u(s)\right) = 0$, где F – заданная, а u – искомая функции. Решением уравнения называется функция $u(s)$ – обращающая его в тождество при всех s**.** **Порядок уравнения** равен разнице между максимальным и минимальным среди аргументов s + j значений u(s + j), явно входящих в уравнение после замены разностей. В частности, порядок равен k, если после такой замены уравнение явно содержит как u(s + k), так и u(s). **Линейным разностным уравнением порядка 1** называется уравнение вида:

$$\Delta u(s) + P(s)u(s) = Q(s) \leftrightarrow u(s + 1) = [1 - P(s)]u(s) + Q(s), P(s) \neq 1$$

Рассмотрим **однородное уравнение**: $u(s + 1) = [1 - P(s)]u(s)$, поэтапно подставляя s получим:

$\mathrm{u}(1) = [1 - P(0)]u(0)$; $\mathrm{u}(2) = [1 - P(1)]u(1)$; $\mathrm{u}(s) = [1 - P(s - 1)]u(s - 1)$

Перемножая которые получим:

$$\mathrm{u(s)} = \mathrm{u(0)} * \prod_{t=0}^{s-1} [1 - P(t)], s = 1,2,3 \dots$$

Для построения общего решения **неоднородного уравнения** применяют аналог метода вариации или метода подстановки. Рассмотрим уравнение:

$$\mathrm{u(s + k)} + a_1\mathrm{u(s + k - 1)} + \dots + a_k\mathrm{u(s)} = 0, s = 0, 1, 2, \dots; a_j = \mathrm{const} \in \mathrm{R}, a_k \neq 0.$$

Будем искать **частные решения** этого уравнения в виде $\mathrm{u(s)} = \lambda^s$, $\lambda = \mathrm{const} \neq 0$ Легко видеть, что функция такого вида есть решение уравнения в том и только том случае, когда λ есть корень характеристического уравнения. $\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0$. Правило построения фундаментальной системы решений: в фундаментальной системе решений уравнения с постоянными вещественными коэффициентами каждому вещественному корню λ кратности m характеристического уравнения соответствуют m частных решений λ^s , $s\lambda^s$, . . . ,$s^{m-1}\lambda^s$, а каждой паре комплексно сопряжённых корней, кратностей m соответствуют 2m частных решений $p^s \cdot \cos(ws)$, $s * p^s \cdot \cos(ws)$. . . , $s^{m-1} * p^s \cdot \cos(ws)$.(Same for sin()) По теореме, **общее решение уравнения** является линейной комбинацией решений фундаментальной системы.