1. $\boxed{\text{25 pt.}}$ Llamamos S al conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|1-x|-1}{1-x^2} \geq 0$$

a) Determine S.

b) Determine (si es que existen) $\inf(S)$, $\min(S)$, $\sup(S)$ y $\max(S)$.

Solución:
a)

$$\frac{|1-x|-1}{1-x^2} \geq 0$$

1°) Restricciones: $x \neq 1 \ \wedge \ x \neq -1$

2°) i) Si $(1-x) > 0$ entonces $x < 1$, luego:

$$\begin{aligned}
\frac{|1-x|-1}{1-x^2} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{1-x-1}{1-x^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-x}{1-x^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x}{1-x^2} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x}{1+x} \leq 0 \quad ya \ \ que \ \ (1-x) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 0 \wedge (1+x) < 0) \vee (x \leq 0 \wedge (1+x) > 0) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in]-1, 0]
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $S_a =]-1, 0]$

ii) Si $(1-x) < 0$ entonces $x > 1$, luego:

$$\begin{aligned}
\frac{|1-x|-1}{1-x^2} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-1+x-1}{1-x^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{1-x^2} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x-2}{1+x} \leq 0 \quad ya \ \ que \ \ (1-x) < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 2 \wedge (1+x) < 0) \vee (x \leq 2 \wedge (1+x) > 0) \\
&\Leftrightarrow \quad (x \geq 2 \wedge x < -1) \vee (x \leq 2 \wedge x > -1) \\
&\Leftrightarrow \quad x \in]-1, 2]
\end{aligned}$$

Por lo tanto: $S_b =]-1, 2] \cap]1, \infty[=]1, 2]$

De i) y ii) se tiene la solución final $S = S_a \cup S_b =]-1, 0] \cup]1, 2]$

b) $\inf(S) = -1$, $\min(S)$: No tiene, $\sup(S) = 2$ y $\max(S) = 2$

2. $\boxed{\text{25 pt.}}$ Considere la función

$$\begin{array}{rcl} f : A & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & 1-\sqrt{-x^2-2x} \end{array}$$

donde A es el máximo dominio.

a) Determine A.

b) ¿Es f una función inyectiva? Justifique.

c) Considere la función

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & 1-|x| \end{array}$$

Determine $f \circ g$ señalando claramente su dominio.

Solución:

a)
$$\begin{array}{rcl} A = & & \{x \in \mathbb{R} \,/ \text{-}x^2 - 2x \geq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 + 2x \leq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \,/\, x(x+2) \leq 0\} \\ & = & [-2, 0] \end{array}$$

b) f no es una función inyectiva ya que, por ejemplo, $f(-2) = f(0) = 1$.

c) Alternativa I:

Expresando $g(x) = \begin{cases} 1+x & \text{si} \quad x < 0 \\ (1-x) & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

Por lo tanto $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{-(1+x)^2-2(1+x)} & \text{si} \quad -2 \leq (1+x) \leq 0 \wedge x < 0 \\ 1-\sqrt{-(1-x)^2-2(1-x)} & \text{si} \quad -2 \leq (1-x) \leq 0 \wedge x \geq 0 \end{cases}$

Esto es :
$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{-(1+x)^2-2(1+x)} & \text{si} \quad -3 \leq x \leq -1 \\ 1-\sqrt{-(1-x)^2-2(1-x)} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Alternativa II)

Considerando el Dominio de la función $[-2, 0]$

a) Si $x < 0$, $(1+x) \in [-2, 0]$ entonces $x \in [-3, -1]$

b) Si $x \geq 0$, $(1-x) \in [-2, 0]$ entonces $-2 \leq 1-x \leq 0 \;\Rightarrow\; 1 \leq x \leq 3$

Por lo tanto de a) y b) se obtiene que:

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{-(1+x)^2-2(1+x)} & \text{si} \quad -3 \leq x \leq -1 \\ 1-\sqrt{-(1-x)^2-2(1-x)} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

3. $\boxed{\text{30 pt.}}$ Un canal tiene sus dos orillas paralelas. Desde los puntos A y B en la orilla izquierda, se observa un punto P en la orilla derecha.
Si la distancia entre el punto A y el punto B es de 60m y si α es el ángulo $\widehat{PAB}$ y β es el ángulo $\widehat{PBA}$,

   a) Exprese el ancho del canal, en función de los ángulos α y β.

   b) Encuentre el valor exacto del ancho del canal si se conocen los ángulos $\alpha = \frac{\pi}{6}$ y $\beta = \frac{\pi}{4}$

Solución:
a) Alternativa I:

Conideremos $x = \overline{RP}$ e $y = \overline{BR}$, entonces, según la función Tangente se establecen las siguientes igualdades:

$\tan(\alpha) = \dfrac{x}{y}$ y $\tan(\beta) = \dfrac{x}{60-y}$.

De esto se desprende que:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& y\tan(\alpha) \\ x &=& (60-y)\tan(\beta) \end{array}\right|$$

$\Rightarrow y\tan(\alpha) = (60-y)\tan(\beta) \Rightarrow y(tan(\alpha)+\tan(\beta)) = 60\tan(\beta) \;\Rightarrow y = \dfrac{60\tan(\beta)}{tan(\alpha)+\tan(\beta)}$

Ahora, como $x = y\tan(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{60\tan(\beta)\tan(\alpha)}{tan(\alpha)+\tan(\beta)})$

a) Alternativa II:
A) Según Teo Seno (Ver Figura) se tiene que:

$$\frac{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))}{60} \quad = \quad \frac{\sin(\alpha)}{\overline{PB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{PB} \quad = \quad \frac{60\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

B) Según Función Seno (Ver figura):

$$\sin(\beta) \quad = \quad \frac{x}{\overline{PB}} \quad \Rightarrow \quad x \quad = \quad \frac{60\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

a) Alternativa III:

A) Según Teo Seno (Ver Figura)se tiene que:

$$\frac{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))}{60} \quad = \quad \frac{\sin(\beta)}{\overline{AP}} \quad \Rightarrow \quad \overline{AP} \quad = \quad \frac{60\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

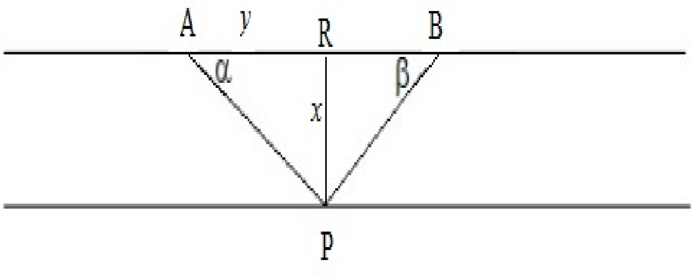
B) Según Función Seno (Ver figura):

$$\sin(\alpha) \quad = \quad \frac{x}{\overline{AP}} \quad \Rightarrow \quad x \quad = \quad \frac{60\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Por lo tanto, el ancho del canal, en función de los ángulos α y β es de: $\dfrac{60\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

b) Si $\alpha = \frac{\pi}{6}$ y $\beta = \frac{\pi}{4}$, entonces el valor exacto del ancho del canal es de $\dfrac{60}{1+\sqrt{3}}$ ya que:

$x = \dfrac{60\sin(\alpha)\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{60\sin(\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{4})}{\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})} \Leftrightarrow x = \dfrac{60}{1+\sqrt{3}}$



4. $\boxed{\text{20 pt.}}$ Sea $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)$.

   a) Exprese la función f de la forma $y = A\operatorname{sen}(Bx + C)$. Encuentre amplitud, período y ángulo de fase.

   b) Grafique la función f en el intervalo $[0, \pi]$, indicando las intersecciones con el eje x.

Solución:

$$a)\quad \frac{\sqrt{3}}{4}\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos(\tfrac{\pi}{6})\sin(2x) + \sin(\tfrac{\pi}{6})\cos(2x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin(2x + \tfrac{\pi}{6})$$

Por lo tanto: Amplitud=$\frac{1}{2}$, Período=π , Ángulo de Fase=$-\frac{\pi}{12}$.
(Obs.: El ángulo de fase también puede expresarse como $\frac{\pi}{12}$ siempre que se aclare que es a la izquierda.)

b) Las intersecciones con el eje x se obtienen resolviendo la igualdad $\sin(2x+\frac{\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow 2x+\frac{\pi}{6} = k\pi\ \ k \in \mathbb{Z}$
Esto es $x = \frac{1}{2}(k\pi - \frac{\pi}{6})\ \ k \in \mathbb{Z}$ lo que entrega $x = \frac{5\pi}{12}$ y $x = \frac{11\pi}{12}$

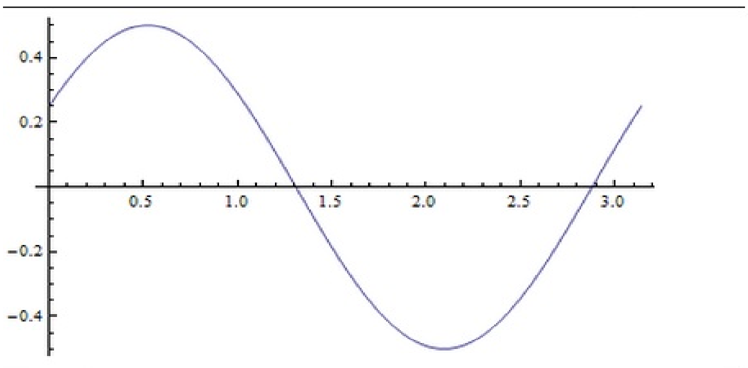


Figura 1: Grafica