Cálculo

1. $\boxed{\text{25 pt.}}$

   a) Determinar el valor de $f'(1)$ para que $g'(0) = 0$, donde
   $$g(x) = f(e^x\sqrt{x+1}).$$

   b) Si $h'(x) = (x+2)^2$ y $h(0) = 3$. Encuentre $(h^{-1})'(3)$ utilizando el Teorema de la Función Inversa.

a) $g'(x) = f'(e^x\sqrt{x+1}) \cdot (e^x\sqrt{x+1})'$

$= f'(e^x\sqrt{x+1}) \cdot \left[e^x\sqrt{x+1} + \dfrac{e^x}{2\sqrt{x+1}}\right]$

$g'(0) = f'(1)\left[1 \cdot \sqrt{1} + \dfrac{1}{2\sqrt{1}}\right] = f'(1) \cdot \dfrac{3}{2}$

$g'(0) = 0$

$\rightarrow f'(1) = 0$

b) Por Teo. Función Inversa: $(h^{-1})'(3) = \dfrac{1}{h'(h^{-1}(3))} = \dfrac{1}{h'(0)}$

$h(0) = 3 \iff h^{-1}(3) = 0$

$h'(x) = 2(x+2)$

$(h^{-1})'(3) = \dfrac{1}{2(0+2)} = \dfrac{1}{4}$.

2. $\boxed{\text{25 pt.}}$ Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 6 & x \leq 3 \\ -x + 6 & x > 3 \end{cases}$$

a) Encuentre $a \in \mathbb{R}$ para que la función f sea continua en todo el intervalo $[0, 4]$.

b) Para el valor de a encontrado, determine en que puntos del intervalo $[0, 4]$ la función es derivable.

c) Para el valor de a encontrado, encuentre máximo y mínimo global en el intervalo $[0, 4]$.

a) x^2+ax+6 es función continua en todo x.
$-x+6$ " " " " " " .

Para verificar continuidad de f en $[0,4]$ solo falta imponer continuidad en $x=3$:

$f(3) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} -x+6 = 3.$ $\Rightarrow$ $9+3a+6 = 3$

$3a = -12$

$f(3) = 9 + 3a + 6$

$\boxed{a = -4}$

b) x^2-4x+6 es derivable para todo x $\Rightarrow$ f es derivable en $[0,3[$
$-x+6$ " " " " " $\Rightarrow$ f " " " $]3,4]$

Falta verificar derivabilidad en $x=3$.

Para eso estudio límites laterales de $\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-4x+6-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} x-1 = 2$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-x+6-3}{x-3} = -1$$

Como $\nexists \lim \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$, la función f no es derivable en 3.

c) La función f es continua en $[0,4]$ $\xRightarrow{\text{Teo. de Weierstrass}}$ Tiene extremos globales

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-4, & x<3 \\ -1, & x>3 \end{cases}$$

La derivada tiene un cero en $x=2$ y un pto. de no existencia en $x=3$. Puntos críticos: $\{2,3\}$.

Evalúo en $0, 2, 3, 4$.

$f(0) = 6$

$f(2) = 2$

$f(3) = 3$

$f(4) = 2$

f tiene ~~un~~ mínimo global en $x=2$ y $x=4$, cuyo valor es 2.

f " " máximo global en $x=0$, cuyo valor es 6.

Complemento

	3.	4.
Puntaje		

NOMBRE: ______

RUT: ______ PARALELO: ______

3. $\boxed{25 \text{ pt.}}$

   a) Encontrar la ecuación de la circunferencia de centro (4,-1) y que pasa por el punto (0,-4).

   b) Encontrar foco y directriz de la parábola de ecuación $x^2 = -16y$.

   c) Comprobar que la circunferencia es tangente a la directriz de la parábola.

a) $\mathcal{C}: (x-4)^2 + (y+1)^2 = d^2((4,-1),(0,-4)) = 4^2 + (-1+4)^2 = 25.$

ó

$\mathcal{C}: (x-4)^2 + (y+1)^2 = r^2$

y evaluamos en $(0,-4)$: $(-4)^2 + (-4+1)^2 = 25.$

b) $\mathcal{P}: x^2 = -16y$

$\Leftrightarrow y = \frac{-1}{16}x^2 \Rightarrow c = -4.$

vértice $(0,0) \Rightarrow$ Foco $(0-4,0) = (-4,0)$

directriz $\Rightarrow d: y = 4.$

c) Dos caminos para resolver esta parte.

I) $\begin{cases} (x-4)^2+(y+1)^2=25 \\ y=4 \end{cases} \Rightarrow (x-4)^2=25-(4+1)^2=0$

$\boxed{x=4}$

El punto de intersección entre $\mathcal{C}$ y d es único $(4,4)$

$\Rightarrow$ son tangentes.

II) $(x-4)^2+(y+1)^2=25 \Rightarrow$ radio de $\mathcal{C}$ es $r=5$.

Verificamos que la distancia entre el centro de $\mathcal{C}$ $(4,-1)$

y la recta d es igual al radio.

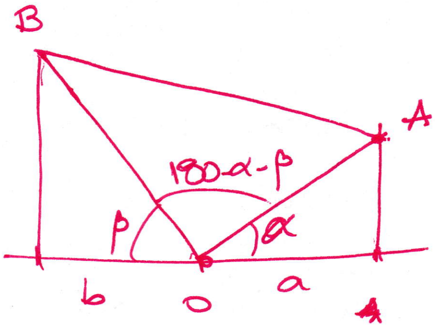
$$d((4,-1),d)=\frac{|-1-4|}{\sqrt{1}}=5=r \checkmark$$

4. $\boxed{\text{25 pt.}}$ Una persona mira hacia delante a un árbol que se encuentra a a [m] de distancia y observa la parte más alta del árbol con un ángulo de elevación de α. Si mira hacia atrás, observa la parte más alta de un poste que se encuentra a b [m] de distancia de ella con un ángulo de elevación de β.

   a) Determinar la distancia entre las partes más altas de ambos objetos en función de α, β, a y b (despreciar la altura del sujeto).

   b) Calcular dicha distancia si $a = 4$, $b = 2$, $\alpha = 30°$ y $\beta = 75°$ (despreciar la altura del sujeto).

a)



$$\cos\alpha = \frac{a}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OA} = \frac{a}{\cos\alpha}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\overline{OB}} \Rightarrow \overline{OB} = \frac{b}{\cos\beta}.$$

Teo. del coseno:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2.\overline{OA}.\overline{OB}\cos(180-\alpha-\beta)$$

$$AB = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2\alpha} + \frac{b^2}{\cos^2\beta} - \frac{2ab}{\cos\alpha\cos\beta}.\cos(180-\alpha-\beta)}.$$

b) $$AB = \sqrt{\frac{16}{\cos^2(30)} + \frac{4}{\cos^2(75)} - \frac{2.4.2}{\cos 30.\cancel{\cos 75}}.\cancel{\cos 75}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{4}{\cos^2(30)} + \frac{1}{\cos^2(75)} - \frac{4}{\cos 30}}$$

$\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 75 = \cos(30+45) = \cos 30 \cdot \cos 45 - \operatorname{sen} 30 \cdot \operatorname{sen} 45$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1).$

$$AB^2 = 4\left[\frac{4}{(\sqrt{3}/2)^2} + \frac{1}{\left[\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\right]^2} - \frac{4}{\sqrt{3}/2}\right]$$

$$= 4\left[\frac{16}{3} + \frac{8}{4-2\sqrt{3}} - \frac{8}{\sqrt{3}}\right]$$ ← está bien, no es necesario reducir.

$$= 4\left[\frac{16}{3} + \frac{8(4+2\sqrt{3})}{4} - \frac{8\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$= 4\left[\frac{16-8\sqrt{3}}{3} + 8 + 4\sqrt{3}\right]$$

$$= 16\left[\frac{4-2\sqrt{3}}{3} + 2 + \sqrt{3}\right]$$

$$= 16\left[\frac{10+\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\boxed{AB = 4\sqrt{\frac{10+\sqrt{3}}{3}}.}$$