UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Coordinación Matemáticas I

Primer Semestre 2015

Solución Taller 3

Semana 3: 23-27 de Marzo

.

Ejercicio 1

a) Si $\tan(\alpha) = \frac{7}{24}$. Encuentre el valor de la expresión $P = \frac{5\sin(\alpha)+7\cos(\alpha)}{6\cos(\alpha)-3\sin(\alpha)}$

b) Si $\cot(\alpha) = a$, con $a \neq 0$. Determine el valor de $P = \sec^2(\alpha) - 2(a + \frac{1}{a}) + \csc^2(\alpha)$ en términos de a.

Solución

a) $\tan(\alpha) = \frac{7}{24}$ entonces $\sin(\alpha) = \frac{7}{24}\cos(\alpha)$
reemplazando obtenemos $P = \frac{5\sin(\alpha)+7\cos(\alpha)}{6\cos(\alpha)-3\sin(\alpha)} = \frac{5\frac{7}{24}\cos(\alpha)+7\cos(\alpha)}{6\cos(\alpha)-3\frac{7}{24}\cos(\alpha)} = \frac{(\frac{35}{24}+7)\cos(\alpha)}{(6-\frac{21}{24})\cos(\alpha)} = \frac{\frac{35}{24}+7}{6-\frac{21}{24}} = \frac{203}{123}$

b) Si $\cot(\alpha) = a$ entonces $\tan(\alpha) = \frac{1}{a} \wedge \sec^2(\alpha) = 1 + \frac{1}{a^2} \wedge \csc^2(\alpha) = a^2$
por lo tanto $P = \sec^2(\alpha) - 2(a + \frac{1}{a}) + \csc^2(\alpha) = \frac{(1+a^2)(1-a)^2}{a^2}$

Ejercicio 2

a) Demuestre que en un triángulo ABC. Se cumple que $c = b\cos(\alpha) + a\cos(\beta)$

b) Demuestre las siguientes identidades:

(i) $\frac{\tan(\alpha)-\sin(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} = \frac{1}{2}\sec(\alpha)\sec^2(\frac{\alpha}{2})$ para $\alpha \in \mathbb{R} - \{k\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi, \pi + 2m\pi/k, n, m \in \mathbb{Z}\}$

(ii) $4\cos^2(\frac{\alpha}{2})\cot(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{1-\cos(\alpha)}$ para $\alpha \in \mathbb{R} - \{n\pi, 2k\pi/n, k \in \mathbb{Z}\}$

a) Por teorema del coseno se tiene que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb\cos(\alpha) \wedge b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

reemplazando a^2 de la primera igualdad en la segunda, se obtiene que $c = b\cos(\alpha) + a\cos(\beta)$

b) (i) $\frac{\tan(\alpha)-\sin(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)(1-\cos(\alpha))}{\cos(\alpha)\sin^3(\alpha)} = \frac{1-\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)(1-\cos^2(\alpha))} = \frac{1}{\cos(\alpha)(1+\cos(\alpha))} = \frac{1}{\cos(\alpha)}\frac{1}{1+\cos(\alpha)} = \frac{1}{2}\sec(\alpha)\sec^2(\frac{\alpha}{2})$

(ii) $4\cos^2(\frac{\alpha}{2})\cot(\alpha) = 2(1+\cos(\alpha))\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\left(\frac{1-\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)}\right) = \frac{2\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{1-\cos(\alpha)} = \frac{\sin(2\alpha)}{1-\cos(\alpha)}$

Ejercicio 3

a) Sea $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$. Determine el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ de manera que f sea función.

b) Sea $g : A \to \mathbb{R}_0^+$ tal que $g(x) = \sqrt{x+3} - 5$. Determine el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ de manera que g sea función.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \mathbb{R}\} = \{x \in \mathbb{R}/\frac{1-x}{x+2} \geq 0\}$
resolviendo la desigualdad se tiene que $A =]-2, 1[$

b) $A = \{x \in \mathbb{R}/g(x) \in \mathbb{R}_0^+\} = \{x \in \mathbb{R}/\sqrt{x+3} - 5 \geq 0\}$ Resolviendo la desigualdad se tiene que $A = [22, +\infty[$

Ejercicio 4

Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R}/\sqrt{14-x} < x+6\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}/|\frac{x+2}{3-x}| > 4\}$

a) Determine cotas superiores e inferiores de los conjuntos A y B

b) Detemine, en caso que existan, supremo e ínfimo de A y B

c) Determine, en caso de existir, máximo y mínimo de cada conjunto

$A =]-2, 14]$ y $B =]2, 3[\cup]3, \frac{14}{3}[$

a) Cotas superiores A es el conjunto $[14, +\infty[$ y las cotas superiores de B es $[\frac{14}{3}, +\infty[$
El conjunto de cotas inferiores de A es $]-\infty, -2]$ y las cotas inferiores de B es $]-\infty, 2]$

b) $sup(A) = 14$, $sup(B) = \frac{14}{3}$, $inf(A) = -2$, $inf(B) = 2$

c) El máximo de A es 14 ya que $14 \in A$ y ademas $14 \geq a, \forall a \in A$ y mínimo de A no existe
No existe $x \in B$ tal que $x \leq b, \forall b \in B$ y no existe $x \geq b, \forall b \in B$ por lo tanto B no tiene mínimo y tampoco tiene máximo