Matemática I (MAT021)

2$^{\text{do}}$ Semestre de 2014. **Pauta Certamen 3**, Martes 09 de Diciembre de 2014.

1. **(25 puntos)** En el desarrollo de $(1+x+ax^2+ax^3)^n$ determine $a \in \mathbb{R}$ si se sabe que el coeficiente de x^2 es igual a $\binom{n}{2}(3n+1)$.

Solución:

Tenemos que,

$$\begin{aligned}
(1+x+ax^2+ax^3)^n &= ((1+x)+ax^2(1+x))^n \\
&= (1+x)^n(1+ax^2)^n, \quad \text{usando dos veces el teorema del binomio} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}a^p x^{2p} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{l}a^p x^{k+2l}.
\end{aligned}$$

Lo que se busca ahora, son las combinaciones de k y l tal que $k+2l=2$, de donde se obtiene que $k=2,\ l=0$ y $k=0,\ l=1$. Por lo cual el coeficiente pedido es:

$$\binom{n}{2}\binom{n}{0}+\binom{n}{0}\binom{n}{1}a=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Si igualamos este último resultado a $\binom{n}{2}(3n+1)$, se obtiene que $a=3\binom{n}{2}$

2. **(25 puntos)** Considere el polinomio $p \in \mathbb{R}[x]$ definido por

$$p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$$

Se sabe que p tiene una raíz de la forma ki con $k \in \mathbb{R}^+$.

a) Determine el valor de k.

Solución:
Como ki es raíz de $p(x)$, tambien lo es $-ki$. Luego

$$p(ki) = k^4 + 4ik^3 - 5k^2 - 4ki + 4 = 0,$$

$$p(-ki) = k^4 - 4ik^3 - 5k^2 + 4ki + 4 = 0$$

Entonces

$$p(ki) - p(-ki) = 8ik^3 - 8ik = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow |k| = 1.$$

Por lo tanto $k = \pm 1$. Así $i, -i$ son raíces de $p(x)$.

b) Determine todas las raíces del polinomio p.

Solución:

De lo anterior sabemos que $p(x) = (x^2+1)(x^2-4x+4) = (x-i)(x+i)(x-2)^2$. Luego las raíces de $p(x)$ son $i, -i$ y 2.

c) Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $\frac{1}{p(x)}$.

Solución:

Debemos encontrar escalares a, c, d, e tales que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(x)} &= \frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1} \\ &= \frac{a(x-2)(x^2+1) + b(x^2+1) + (cx+d)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

Entonces a, c, d, e son tales que

$$1 = a(x-2)(x^2+1) + b(x^2+1) + (cx+d)(x-2)^2, \quad \forall x \in \mathbb{C}. \tag{1}$$

Como 1 se debe cumplir para todo $x \in \mathbb{C}$, tenemos:
Para $x = 2$, concluimos que $b = \frac{1}{5}$.
Para $x = 0$, se tiene

$$\frac{4}{5} = -2a + 4d \tag{2}$$

Para $x = 1$, se tiene

$$\frac{3}{5} = -2a + c + d \tag{3}$$

Para $x = 3$, se tiene

$$-1 = 10a + 3c + d \tag{4}$$

De (3) y (4) tenemos que

$$\frac{14}{5} = -16a + 2d \tag{5}$$

De (2) y (5) concluimos que $d = \frac{3}{25}$. Luego $a = \frac{-4}{25}$ y $c = \frac{4}{25}$. Por lo tanto

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{-4}{25(x-2)} + \frac{1}{5(x-2)^2} + \frac{4x+3}{25(x^2+1)}$$

3. **(25 puntos)**

(a) Sea f una función tal que $f(1)=1$. Determinar el valor de $f'(1)$ para que $g'(0)=0$, donde

$$g(x)=f\left(e^x\sqrt{x+1}\right)\ln\left[(x+1)^2f(x+1)\right]$$

Solución:
Usando la regla del producto y la regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'\left(e^x\sqrt{x+1}\right)\left[e^x\sqrt{x+1}+e^x\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right]\ln((x+1)^2f(x+1))+ \\ &\quad +f(e^x\sqrt{x+1})\frac{1}{(x+1)^2f(x+1)}\left[2(x+1)f(x+1)+(x+1)^2f'(x+1)\right] \end{aligned}$$

entonces,

$$g'(0)=f'(1)\left[1+\frac{1}{2}\right]\ln(f(1))+\cancel{f(1)}\frac{1}{\cancel{f(1)}}(2f(1)+f'(1))$$

como $f(1)=1$, tenemos que

$$g'(0)=\cancel{f'(1)(3/2)\ln(1)}+2+f'(1)$$

entonces

$$g'(0)=2+f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=-2$$

(b) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$.
Solución:

El límite tiene la forma $\frac{0}{0}$, y las funciones $f(x)=\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ y $g(x)=x$ son derivables en $x=0$ y se puede aplicar L'Hopital

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$$

que también tiene la forma $\frac{0}{0}$, luego podemos aplicar nuevamente la regla de L'Hopital, obteniendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{e^x+xe^x-1}$$

el cual tiene otra vez la forma $\frac{0}{0}$, una vez mas aplicamos la regla de L'Hopital, quedando

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'''(x)}{g'''(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x}{e^x+xe^x+e^x}=\frac{1}{2}.$$

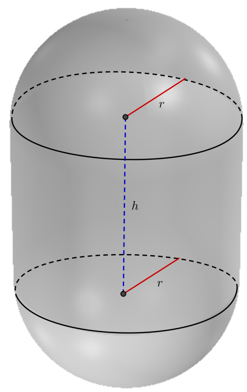
Luego,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2}$$

4. **(25 puntos)** Un cliente nos pide que diseñemos un tanque de almacenamiento de gas líquido. Las especificaciones del cliente demandan un tanque cilíndrico con extremos semiesféricos (**ver figura**), el cual debe contener 8000 m^3 de gas. Además, el cliente quiere usar la menor cantidad posible de material en la construcción del tanque.

   ¿Qué radio y altura recomendaría para la porción cilíndrica del tanque?

   Hint: $V_{\textbf{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad A_{\textbf{esfera}} = 4\pi r^2, \quad V_{\textbf{cilindro}} = \pi r^2 h$



Solución:

El volumen del tanque debe ser fijo, es decir, $V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h = 8000$ y lo que se quiere minimizar es el área de superficie, $A(r,h) = 2\pi r h + 4\pi r^2$.

Entonces de la expresión que se tiene de volumen se puede despejar h, onteniendo $h = \frac{8000}{\pi r^2} - \frac{4r}{3}$, luego reemplazando en la expresión del área, se tiene:

$$\begin{aligned} A(r) &= 2\pi r\left(\frac{8000}{\pi r^2} - \frac{4r}{3}\right) + 4\pi r^2 \\ &= \frac{16000}{r} + \frac{4\pi}{3} r^2 \end{aligned}$$

Ahora calculamos la primera derivada de esta función, obteniendo:

$$A'(r) = -\frac{16000}{r^2} + \frac{8\pi}{3} r = 0 \;\Rightarrow\; r^3 = \frac{6000}{\pi} \;\Rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{6000}{\pi}}.$$

Luego para ver si este punto minimiza o maximiza a la función área, calcularemos su segunda derivada:

$$A''(r) = \frac{32000}{r^3} + \frac{8\pi}{3} > 0.$$

Lo que implica que la función A se minimiza en $r = \sqrt[3]{\frac{6000}{\pi}}$.

Finalmente las dimensiones que se piden son:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6000}{\pi}} \text{ y } h = \frac{8000}{\pi r^2} - \frac{4r}{3}$$