**Coordinación de Matemática I (MAT021)**

1er Semestre de 2015

**Semana 9: Guía de Ejercicios de Complementos**, Lunes 4 al Viernes 8 de Mayo

**Contenidos**

- **Clase 1:** Lugares Geométricos Generalizados
- **Clase 2:** Primer y segundo principio de inducción

# 1. Ejercicios propuestos

**1.1.** Encontrar el lugar geométrico de los puntos P tal que PA y PB sean perpendiculares, siendo $A = (1, 4)$y $B = (2, 5)$

**1.2.** Encontrar el L.G de los puntos $P$ tal que $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$ donde $A = (-2, 0)$ y $B = (2, 0)$.

**1.3.** Encontrar el L.G de los puntos $P$ tal que su distancia al punto $A = (2, 0)$ es 3veces su distancia a la recta $x = -2$.

**1.4.** Un segmento de longitud 4 está posicionado apoyado en los ejes coordenados. Si se desliza por los ejes coordenados, determinar el lugar geométrico que genera el punto medio $M$.

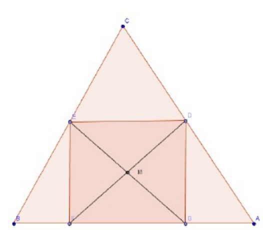
**1.5.** En un sistema de coordenadas se fija el punto $V = (-3, 0)$ se trazan el haz de circunferencias de radio mayor o igual a 3 con centro en el eje X y que pasan por V. Cada circunferencia cortará a los ejes coordenados generando los puntos $(x_p, y_p)$. Determinar el L.G que genera estos puntos.

**1.6.** Se trazan cuerdas, perpendiculares al eje X, de la circunferencia: $x^2 + y^2 = r^2$ . Se toma el punto medio, M = (u,v), de todas las mitades superiores de las cuerdas trazadas. Determinar la ecuación de la curva que forman tales puntos M.

**1.7.** Encuentra el lugar geométrico de los puntos $P\,(x, y)$ que equidistan de los puntos $A = (-5, 2)$ y $B = (1, 4)$

**1.8.** Encuentra la ecuación del lugar geométrico de los puntos $P\,(x, y)$, tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos $A = (-2, -1)$ y $B = (0, 3)$ es 16.

**1.9.** En un triángulo cuyos vértices son $A = (7, 0)$ , $B = (0, 10)$ y $C = (-4, 0)$ encuentra el lugar geométrico que describen los centros de los rectángulos inscritos en ese triángulo y que tienen uno de sus lados sobre el lado $AC$.



**1.10.** Encuentra el lugar geometrico de los puntos cuyas distancias al eje $X$ es seis veces su distancia al eje $Y$.

**1.11.** Encuentra el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos $A = (3, 9)$ y $B = (5, 2)$

**1.12.** Hallar el lugar geométrico de los puntos de una curva que tienen la propiedad de que su ordenada más $\frac{3}{2}$ es igual a su distancia al punto $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.

**1.13.** Encontrar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen es $\frac{1}{2}$ de su distancia a la recta $x + 3 = 0$

**1.14.** Encuentra la ecuación del Lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos $A = (1, 3)$ y $B = (-2, 4)$ sea igual a 20.

**1.15.** Encuentra el lugar geométrico de los puntos que equidistan del círculo cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 + 10x + 8y + 32 = 0$$

y de la recta $y = 6$.
**Indicación:** Si $P = (x, y)$ es un punto que se encuentra sobre el círculo, entonces la distancia de $P$ al círculo es la distancia de $P$ al centro del círculo menos el radio de éste.

**1.16.** Encuentra el lugar geométrico de los centros de los círculos tangentes externamente a los círculos

$$\begin{aligned} (x+4)^2 + (y-3)^2 &= 25 \\ (x-4)^2 + (y-3)^2 &= 4 \end{aligned}$$

**1.17.** Pruebe que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple:

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

e) $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = a\frac{r^n - 1}{r-1}$

f) $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}$

g) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

**1.18.** Si $a_1 = a_2 = 1$ y $a_{n+1} = 3a_n + a_{n-1}, \ (n \geq 2)$, entonces $a_n$ y $a_{n+1}$ son primos relativos.

**1.19.** Si $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + n$ para $n \geq 2$, entonces:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(a_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

**1.20.** Pruebe que:

$$83^{4n} - 2 \cdot 97^{2n} + 1$$

es divisible por 16.

**1.21.** Pruebe que si $n$ es impar, entonces 24 divide a:

$$n\left(n^2 - 1\right)$$

**1.22.** Pruebe que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(2^{4n} - 1 \text{ es divisible por } 15\right)$$

**1.23.** Pruebe que $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

**1.24.** Para todo $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

**1.25.** Demuestre que si $x \geq -1$, entonces para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

**1.26.** Probar que $7n^2 + 5n$ es un número par para todo $n \in \mathbb{N}$

**1.27.** Para todo $n \in \mathbb{N}$

$$3^{2n} - 1$$

es divisible por 8.

**1.28.** Pruebe que:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} \leq \frac{5}{6}$$

**1.29.** Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la función definida recursivamente por:

$$\begin{aligned} f(1) &= 7 \\ f(2) &= 17 \end{aligned}$$

para $n \geq 3$

$$f(n) = 5f(n-1) - 6f(n-2)$$

pruebe que:

$$f(n) = 2^{n+1} + 3^n$$

**1.30.** Pruebe que $(x - y)$ es un divisor de $x^n - y^n$, para $n \in \mathbb{N}$

**1.31.** Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sin(\theta + n\pi) = (-1)^n \sin(\theta)$$

**1.32.** Pruebe que, si $n \in \mathbb{N}$

$$5^n \geq 1 + 4n$$

**1.33.** Pruebe que $(x - y)$ es un divisor de $x^n - y^n$, para $n \in \mathbb{N}$

# 2. Ejercicios resueltos

**2.1.** Determine la longitud del segmento que une los centros de las circunferencias:

$$x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 - 10y + 9 = 0$$

**2.2.** Analizar el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $(4, 0)$ es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.

**2.3.** Determine la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de los puntos $A(-1, 3)$ y $B(2, 5)$.

**2.4.** ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano cuyo cuociente de distancia a los puntos $M(6, 0)$ y $N(-2, 0)$ es 3?

**2.5.** Hallar el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de $(2, 4)$ y $(-4, -1)$.

**2.6.** Un segmento rectilineo de longitud 6 unidades se mueve de manera tal que uno de sus extremos permanece siempre en el eje $X$ y el otro en el eje $Y$. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico del punto medio de dicho segmento.

**2.7.** Determine la ecuación de la circunferencia concéntrica con la circunferencia $4x^2 + 4y^2 - 16x + 20y + 25 = 0$, tangente a la recta de ecuación $5x - 12y = 1$.

**2.8.** Un segmento $\overline{AB}$ de longitud 2, se desplaza de forma que sus puntos extremos se apoyan uno sobre cada eje coordenado. Determine el lugar geométrico que describe el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

**2.9.** Sea $a > 0$. Encuentre la ecuación del lugar geométrico de todos los puntos $(x, y)$ que son puntos medios de las cuerdas de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ con un extremo en el punto $(a, 0)$.

**2.10.** Demostrar que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13

**2.11.** Probar por Inducción que: $10^n - 9n - 1$ es múltiplo de 81, $\forall n \geq 1$.

**2.12.** Muestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

donde $x \neq 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Ind.:

$$\sin\left(\frac{nx}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)}{2}x\right) = \sin\left(\frac{(n+2)\,x}{2}\right)$$

**2.13.** Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$ el número $7^n - 2^n$ es divisible por 5.

**2.14.** Muestre que para todo natural $n$ el número $(n+1)^3 - n - 1$ es divisible por 3.

# Respuestas y desarrollos

**2.1** Se tiene: $x^2+y^2-2x-8=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=8$ y $x^2+y^2-10y+9=0 \Leftrightarrow x^2+(y-5)^2=16$. Luego los centros de las respectivas circunferencias son: $(1,0)$ y $(0,5)$. Por lo tanto la distancia entre estos puntos es: $d((1,0),(0,5))=\sqrt{(1-0)^2+(0-5)^2}=\sqrt{26}$.

**2.2** $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2|x-1| \Rightarrow x^2-8x+16+y^2=4x^2-4x+2 \Rightarrow 3x^2-y^2=12$, es decir, se trata de una hipérbola.

**2.3** El lugar geométrico está dado por:
$\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2} \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-5)^2 \Leftrightarrow 6x+4y-19=0.$

**2.4**

$$\begin{aligned}
d((x,y),(6,0)) &= d((x,y),(-2,0))\cdot 3\\
(x-6)^2+y^2 &= ((x+2)^2+y^2)\cdot 3\\
x^2+12x+36-36+y^2 &= 12\\
(x+6)^2+y^2 &= 48
\end{aligned}$$

**2.5** $(x,y)$ esta en el gugar geométrico si y solo si

$$\begin{aligned}
d\left((x,y),(2,4)\right) &= d\left((x,y),(-4,-1)\right)\\
\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} &= \sqrt{(x+4)^2+(y+1)^2}\\
(x-2)^2+(y-4)^2 &= (x+4)^2+(y+1)^2
\end{aligned}$$

expandiendo

$$\begin{aligned}
x^2-4x+y^2-8y+20 &= x^2+8x+y^2+2y+17\\
&\Leftrightarrow\\
3-10y-12x &= 0
\end{aligned}$$

**2.6** Supongamos que los extremos son los puntos $A=(a,0)$ y $B=(0,b)$ entonces el punto medio es

$$M=\frac{A+B}{2}=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=(x,y)$$

notamos que

$$6^2=a^2+b^2$$

se sigue que

$$6^2=(2x)^2+(2y)^2$$

entonces

$$9=x^2+y^2$$

es una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 3.

**2.7** Completando cuadrados:

$$(x-2)^2+(y+\frac{5}{2})^2=4$$

El centro de la circunferencia dada es $(2,5/2)$, y el radio esta dado por:

$$d(C,\ell)=\frac{|10+30-1|}{13}=\frac{39}{13}=3$$

Luego la ecuación es:

$$(x-2)^2+(y+\frac{5}{2})^2=9$$

**2.8** Sea $M=(x,y)$, $A=(a,0)$ y $B=(0,\sqrt{4-a^2})$, entonces el punto medio $M$ de $AB$ es $M=(\frac{a}{2},\frac{\sqrt{4-a^2}}{2})$.Entonces $x=\frac{a}{2}\Longrightarrow a=2x\Longrightarrow a^2=4x^2$. Por otro lado
$y=\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\Longrightarrow a^2=4-4y^4\Longrightarrow 4x^2=4-4y^2$.
Por lo tanto, $x^2+y^2=1$

**2.9** Sea $C=(b,c)$ un punto perteneciente a la circunferencia $x^2+y^2=a^2$ entonces el punto medio de la curda que une $(b,c)$ con $(a,0)$ es

$$\left(\frac{b+a}{2},\frac{c}{2}\right)$$

así

$$\begin{array}{rcl} b & = & 2x-a \\ c & = & 2y \end{array}$$

(donde $(x,y)$ es el punto del lugar geométrico) como $(b,c)$ esta en la circunferencia se cumple

$$b^2+c^2=a^2$$

de donde

$$(2x-a)^2+(2y)^2=a^2$$

esto es

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

luego el lugar geométrico es una circunferencia de centro $\left(\frac{a}{2},0\right)$ y radio $\frac{a}{2}$.

**2.10** Sea $P(n):\ 5^{2n}+(-1)^{n+1}=3l,\quad l\in\mathbb{Z}$

- Por demostrar que $P(1)$ es verdadero.

  En efecto:

  $P(1):\ 5^2+(-1)^2=25+1=26$ que es divisible por 3.

- Asumamos válido para $n=k$, es decir, $P(k):\ 5^{2k}+(-1)^{k+1}=13l_1,\ \ l_1\in\mathbb{Z}$.

- Por demostrar que $P(k+1)$ es verdadero. Es decir, por demostrar:

$$P(k+1):\ 5^{2(k+1)}+(-1)^{k+2}=3l,\ \ l\in\mathbb{Z}$$

  En efecto:

$$\begin{array}{rcl} 5^{2(k+1)}+(-1)^{k+2} & = & 5^{2k}\cdot 5^2+(-1)^{k+2} \\ & = & 5^{2k}\cdot 25+(-1)^{k+2} \\ & = & 5^{2k}(26-1)-(-1)^{k+1} \\ & = & 26\cdot 5^{2k}-5^{2k}-(-1)^{k+1} \\ & = & 26\cdot 5^{2k}-(5^{2k}+(-1)^{k+1} \\ & = & 26\cdot 5^{2k}-13l_1 \\ & = & 13(2\cdot 5^{2k}-l_1 \\ & = & 13l \end{array}$$

  Por lo tanto, $P(k+1)$ es verdadero.

  Luego la proposición $P(n)$ se cumple $\forall n\in\mathbb{N}$.

**2.11** Considerar la función proposicional $p(n):10^n-9n-1$ es múltiplo de 81.

- $p(1):\ 10^1 - 9(1) - 1 = 10 - 9 - 1 = 0$ y $0$ es múltiplo de 81.

  $\therefore\ p(1)$ es Verdadero

- Asumamos válido para $n = k$, es decir, $10^k - 9k - 1$ es múltiplo de 81.

- Por demostrar que $P(n)$ se cumple para $n = k + 1$.
  En efecto,

$$\begin{aligned}
10^{k+1} - 9(k+1) - 1 &= 10^k 10 - 9k - 9 - 1 \\
&= 10^k(9+1) - 9k - 1 - 9 \\
&= (10^k - 9k - 1) + 9(10^k - 1) \\
&= (10^k - 9k - 1) + 9(10^k - 9k - 1 + 9k) \\
&= (10^k - 9k - 1) + 9(10^k - 9k - 1) + 81k
\end{aligned}$$

  Esta última expresión es múltiplo de 81, pues $10^k - 9k - 1$ es múltiplo de 81, por hipotesis de inducción y $81k$ es múltiplo de 81.

  Así $10^n - 9n - 1$ es múltiplo de 81, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**2.12** Si $n = 1$ se cumple

$$\sin x = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

supongamos que

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \sin(kx) &= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} + \sin((n+1)x) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin((n+1)x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)2\sin\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)\cos\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\left(\sin\left(\frac{nx}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)}{2}x\right)\right)
\end{aligned}$$

pero (ver indicación)

$$\begin{aligned}
& \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)}{2}x\right) \\
= \quad & \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{n}{2}x\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) - \sin\left(\frac{n}{2}x\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
= \quad & \sin\left(\frac{nx}{2}\right) + \sin x \cos\left(\frac{n}{2}x\right) - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{n}{2}x\right) \\
= \quad & \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\left(1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \sin x \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \\
= \quad & \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos x + \sin x \cos\left(\frac{n}{2}x\right) \\
= \quad & \sin\left(\frac{nx}{2} + x\right) \\
= \quad & \sin\left(\frac{(n+2)\,x}{2}\right)
\end{aligned}$$

así

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+2)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

por el principio de inducción la fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

**2.13** Consideremos la función proposicional $p(n) : 7^n - 2^n$ es divisible por 5.

- $p(1) : 7 - 2 = 5$ es divisible por 5 lo cual es verdadero.
- Si $n = k$, entonces $p(k)$ es Verdadero
  Es decir, $7^k - 2^k$ es divisible por 5.
- Por demostrar que $P(n)$ se cumple para $n = k + 1$. Es decir, por demostrar que:

  $$7^{k+1} - 2^{k+1} \text{ es divisible por } 5$$

  En efecto

  $$\begin{aligned}
  7^{k+1} - 2^{k+1} &= 7\left(7^k\right) - 2\left(2^k\right) \\
  &= (5+2)\,7^k - 2\left(2^k\right) \\
  &= 5\left(7^k\right) + 2\left(7^k - 2^k\right)
  \end{aligned}$$

  por la hipótesis de inducción, existe un $n_0$ ta que

  $$7^k - 2^k = 5n_0$$

  se sigue

  $$\begin{aligned}
  7^{k+1} - 2^{k+1} &= 5\left(7^k\right) + 2\left(5n_0\right) \\
  &= 5\left(7^k + 2n_0\right) \\
  &= 5v_0
  \end{aligned}$$

  con $v_0 \in \mathbb{Z}$ entonces $7^{k+1} - 2^{k+1}$ es divisible por 5.

Por el principio de inducción para todo $n \in \mathbb{N}$ el número $7^n - 2^n$ es divisible por 5.

**2.14** Para $n = 1$ se tiene

$$2^3 - 2 = 6 = 2 \cdot 3$$

supongamos que $(k+1)^3 - k - 1$ es divisible por 3, esto es, existe $u_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$(k+1)^3 - k - 1 = 3u_0$$

mostremos que $(k+2)^3 - k - 2$ es divisible por 3, en efecto

$$\begin{aligned}
& (k+2)^3 - k - 2 \\
= \;& (k+1+1)^3 - k - 1 - 1 \\
= \;& (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 3(k+1) + 1 - k - 1 - 1 \\
= \;& (k+1)^3 - k - 1 + 3\left((k+1)^2 + (k+1)\right) \\
= \;& 3u_0 + 3\left((k+1)^2 + (k+1)\right) \\
= \;& 3v_0
\end{aligned}$$

se sigue que es divisible por 3. Por el principio de inducción, para todo natural $n$ el número $(n+1)^3 - n - 1$ es divisible por 3.