

## Guía Complementos MAT021: Sumas y Progresiones

1. Calcule las siguientes sumas:

$$a) \sum_{k=1}^{100} (2k - 1)$$

$$b) \sum_{k=1}^{60} (2k - 3)(k + 3)$$

$$c) \sum_{k=3}^{100} \frac{3}{k^2 - 1}$$

$$d) \sum_{k=3}^{52} \frac{k^3 + k^2 + 1}{k(k + 1)}$$

$$e) \sum_{k=2}^{40} \frac{2k + 1}{k^2(k + 1)^2}$$

$$f) \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}$$

2. Escriba, utilizando notación de sumatoria, y calcule las siguientes sumas:

$$a) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 31^2 + 33^2 + 35^2$$

$$b) 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 + \dots + 28 \cdot 57$$

$$c) 4 + 8 + 14 + 22 + \dots + 652$$

$$d) 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \dots - 46^3$$

3. Calcule:

$$a) \sum_{k=1}^n k(n - k + 1)$$

$$b) \sum_{k=1}^n \frac{k + 1}{(k + 2)!}$$

$$c) \sum_{k=1}^n k \cdot k!$$

$$d) \sum_{k=1}^n (k^2 + 1) \cdot k!$$

$$e) \sum_{k=1}^n \ln \frac{k + 1}{k}$$

$$f) \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot 2^k}{(k + 2)!}$$

4. Para cada  $n$  impar, calcule la suma de  $n$  términos de:

$$1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 4^2 + \dots + n^2$$

5. Determine la suma de los  $2n$  primeros términos de:

$$2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + \dots$$

6. Determine la suma de los  $2n + 1$  primeros términos de:

$$1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - \dots$$

7. Encontrar la suma de los números entre 50 y 3000 que son divisibles por 11.

8. Calcule la suma de los  $n$  primeros términos de:

$$4 + 7 + 10 + 13 + \dots$$

9. Calcular el valor de la suma de los  $n$  primeros términos de:

$$3 \cdot 6 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 14 + \dots$$

10. Calcular  $\sum_{k=1}^n \frac{2k}{1 + k^2 + k^4}$ . **Ayuda:**  $1 + k^2 + k^4 = (k^2 + 1)^2 - k^2$ .

11. Determine el número natural  $n$  de manera que se cumpla:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} (k^2 - 48k) = 2 \sum_{k=1}^n (k^2 - 48k)$$

12. Calcule la suma de los  $n$  primeros términos de:

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots$$

13. Calcule la suma de todos los números del siguiente cuadro:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 \\ & & & & & & 1 & 2 & 3 \\ & & & & & & & & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \end{array}$$

14. Calcule la suma de  $n$  términos de:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots$$

15. Calcule el valor de  $\sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)} \left(\frac{1}{2}\right)^k$  y pruébelo por inducción.

16. Calcule el valor de  $\sum_{k=1}^n k(n-k+1)$  y pruébelo por inducción.

17. Calcular la suma de los  $n$  primeros términos de:

$$\begin{array}{l} a) \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots \\ b) \frac{3}{1 \cdot 3} + \frac{7}{2 \cdot 4} \cdot 3 + \frac{11}{3 \cdot 5} \cdot 3^2 + \frac{15}{4 \cdot 6} \cdot 3^3 + \frac{19}{5 \cdot 7} \cdot 3^4 + \dots \\ c) 1 \cdot n^2 + 2(n-1)^2 + 3(n-2)^2 + \dots \end{array}$$

18. Si  $\sum_{k=1}^n u_k = 2n^2 + 3n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , calcule  $u_k$  y  $\sum_{k=p}^{2p} u_k$ .

19. Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k^2 = \sum_{k=1}^n (4k-1)$$

20. Demuestre que:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k}{1+k^2+k^4} = 1 - \frac{1}{1+n+n^2}$$

21. Calcule  $\sum_{k=1}^n \frac{1+2+3+\dots+k}{k}$ .

22. Probar que:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

23. Calcule la suma

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^4 + k^2 + 1}{k^4 + k}$$

24. Calcule la suma

$$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \cdots + (1^2 + 2^2 + \cdots + 20^2)$$

25. Calcule la suma de  $n$  términos de:

$$\frac{2}{1 \cdot 2} + 2 \frac{5}{2 \cdot 3} + 4 \frac{10}{3 \cdot 4} + 8 \frac{17}{4 \cdot 5} + \cdots$$

26. Complete las siguientes expresiones, para transformarlas en identidades:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{4k} - \square \right) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4n+4} \\ \sum_{k=1}^n \left( \square - \frac{3}{2k+5} \right) &= \frac{3}{2n+7} - \frac{3}{7} \\ \sum_{k=1}^n 3^{2k+2} &= \sum_{k=\square}^{n+3} \square \end{aligned}$$

27. Calcular la suma de  $n$  términos de:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots$$

28. El cuarto término de una progresión aritmética es 0 y el término de orden 54 es  $-125$ . Encuentre el término de orden 42.

29. La suma de cinco términos de una PA es 20 y el producto entre el segundo y tercero es 32. ¿Cuál es la progresión?

30. La suma de tres términos en PA es 6 y el producto entre el mayor y el menor es  $-21$ . ¿Cuáles son los términos?

31. Calcule la suma de todos los múltiplos de 17 que están comprendidos entre 1000 y 4000.

32. La diferencia de una PA es cuatro, y el producto de sus cuatro primeros términos es 585. ¿Cuál es la progresión?

33. La suma de cuatro números en progresión aritmética es 24 y la suma de sus cuadrados es 164. Determine los números.

34. Encontrar la suma de 15 términos de la serie en PA cuyo  $n$ -ésimo término es  $4n + 1$ .

35. Calcular la suma de 21 términos en la PA siguiente:

$$\frac{a+b}{2}, a \frac{2a-b}{2}, \dots$$

36. Interpolar 18 medios aritméticos entre  $-35x$  y  $3x$ .

37. Si en una PA la suma de los  $m$  primeros términos es igual a la suma de los  $n$  primeros términos, demostrar que la suma de los  $(m+n)$  términos es nula.

38. Demuestre que la suma de un número impar de términos consecutivos de una progresión aritmética es igual al término central multiplicado por el número de términos.

39. Si la suma de los  $m$  primeros términos de una progresión aritmética es a la suma de los  $n$  primeros como  $m^2 : n^2$ , demuestre que el  $m$ -ésimo término es al  $n$ -ésimo término como  $(2m-1) : (2n-1)$ .

40. El producto de tres términos en PG es 27 y la suma es 21,5. ¿Cuáles son los términos?

41. Calcular la suma de  $2n$  términos de la progresión geométrica:  $3, -4, \frac{16}{3}, \dots$

42. Si los términos de lugares  $p, q, r$  de una progresión geométrica son  $a, b, c$ , respectivamente, demuestre que:

$$a^{q-r} \cdot b^{r-p} \cdot c^{p-q} = 1.$$

43. Si los números diferentes  $x, y, z$  están en progresión geométrica. Demostrar que  $\frac{1}{y-x}, \frac{1}{2y}, \frac{1}{y-z}$  están en progresión aritmética.

44. Interpolar tres medios geométricos entre  $3\frac{5}{9}$  y  $40\frac{1}{2}$ .

45. La suma de los 6 primeros términos de una PG es igual a 9 veces la suma de los tres primeros. Hallar la razón.

46. Divida el número 221 en 3 partes de modo que formen una progresión geométrica de manera que la parte mayor sobrepase a la menor en 136.

47. Si la media aritmética entre  $a$  y  $b$  es el doble de la media geométrica, demostrar que:

$$a : b = (2 + \sqrt{3}) : (2 - \sqrt{3})$$

48. Si  $p$  es el producto de  $n$  números en progresión geométrica,  $S$  su suma y  $S'$  la suma de los recíprocos de dichos números, demuestre que:

$$p^2 = \left(\frac{S}{S'}\right)^n$$

49. Dadas las sumas de infinitos términos:

$$x = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \dots$$

$$y = b + \frac{b}{r} + \frac{b}{r^2} + \dots$$

$$z = c + \frac{c}{r} + \frac{c}{r^2} + \dots$$

Demuestre que  $\frac{xy}{z} = \frac{ab}{c}$

50. Demostrar que:

$$1,232828\dots = \frac{12,205}{9900}$$

51. Calcule la suma de  $n$  términos

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \dots$$

52. Demostrar que si  $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + x(a-b)c$  es un cuadrado perfecto, entonces  $a, b, c$  están en PA.

53. Calcular  $(-1 < x < 1)$

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

(infinitos términos).

54. Hallar 3 números cuya suma sea 24 y que estén simultáneamente en PA y en PG.

55. Demuestre que

$$N = \underbrace{444\dots 4}_n \underbrace{88\dots 8}_{n-1} 9$$

es un cuadrado perfecto.

56. Tres números están en PG. Si el segundo se aumenta en 8, los números quedan en PA, pero si en esta última, el último se aumenta en 64, la progresión vuelve a ser geométrica. Encontrar los números.
57. La suma de los cuatro términos centrales de una PA de 12 términos es 74 y el producto de los extremos es 70. Determinar la progresión.
58. El producto de tres números en PG es 216. La suma de los productos de estos números tomados dos a dos es 156. Determine los números.
59. En una PA, se tiene que  $a_{13} = 34$ . Calcular

a)  $a_{11} + a_{15}$

b)  $a_1 + a_2 + \cdots + a_{25}$

60. Sume  $n$  términos de:

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \cdots$$

61. Sea  $q$  el producto de  $n$  números en PG,  $p$  su suma y  $t$  la suma de los recíprocos de dichos números; demuestre que:

$$q^2 = \left(\frac{p}{t}\right)^n$$

62. Si  $S_n = \sum_{k=1}^n a r^{k-1}$ , calcule  $S_1 + S_3 + S_5 + \cdots + S_{2n-1}$ .

63. Si  $x : y$  como  $2 : 1$ , resolver:

$$4^{2-x} + 16^{y-1/2} + 4^{4-x} + 16^{y+1/2} + 4^{6-x} + 16^{y+3/2} = 1365$$

64. En una PG, la suma de los 10 primeros términos es 244 veces la suma de los 5 primeros términos. Calcule la razón de la PG.

65. Calcule la suma de  $n$  términos de

$$1 + (1+a)x + (1+a+a^2)x^2 + (1+a+a^2+a^3)x^3 + \cdots \quad (a \neq 1)$$

66. Encontrar 3 números en PG, sabiendo que su suma es 26 y de tal manera que el término más grande sobrepase en 10 unidades a la suma de los otros dos.