1. $\boxed{\text{25 pt.}}$ Sea $f(x)$ una función tal que

$$\frac{1-\cos 3x}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{-1+\sec^2 3x}{2x^2}, \quad x>0$$

calcule:

$$\lim_{x\to 0+} f(x)$$

Desarrollo:

$$1^\circ)\quad \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos(3x)}{x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-\cos(3x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(3x)}{1+\cos(3x)}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2(3x)}{(3x)^2}\cdot\frac{9}{1+\cos(3x)}$$

$$= 1\cdot\tfrac{9}{2} \qquad \text{(por álgebra y existencia de límite)}$$

$$= \tfrac{9}{2}$$

$$2^\circ)\quad \lim_{x\to 0+} \frac{-1+\sec^2(3x)}{2x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{\tan^2(3x)}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\sin^2(3x)}{(3x)^2}\cdot\frac{9}{2\cos^2(3x)}$$

$$= 1\cdot\tfrac{9}{2} \qquad \text{(por álgebra y existencia de límite)}$$

$$= \tfrac{9}{2}$$

Por lo tanto de 1°) y 2°) y utilizando Teorema del Acotamiento (o del Sandwich) se afirma que

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{9}{2}$$

2. $\boxed{\text{25 pt.}}$ Para las constantes $a, b \in \mathbb{R}^+$, considere la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 1 + \ln(\sqrt{ax} + b)$$

i.- Determine $f'(x)$.

ii.- Determine las constantes $a, b \in \mathbb{R}^+$ de modo que $f(0) = 1$ y $f'(1) = \frac{1}{3}$.

Desarrollo:

i.-

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{ax} + b}(\sqrt{ax} + b)' \\ &= \frac{1}{\sqrt{ax} + b}\,\frac{1}{2\sqrt{ax}}(ax)' \\ &= \frac{a}{2\sqrt{ax}(\sqrt{ax} + b)} \end{aligned}$$

ii.- $f(0) = 1 \;\Leftrightarrow\; 1 + \ln(b) = 1 \;\Leftrightarrow\; b = 1$

$f'(1) = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{2\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; a = 4$

Por lo tanto los valores son $a = 4$ y $b = 1$

3. $\boxed{\text{25 pt.}}$ Demuestre por inducción que $3^{2n}-1$ es divisible por 8 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desarrollo:

Sea $P(n) : 3^{2n}-1$ es divisible por 8.

1° $P(1) : 9-1=8$, es V ya que 8 es divisible por 8.

2° Hipótesis inductiva: Supongamos que es V para k o sea $P(k) : 3^{2k}-1$ es divisible por 8

Tesis inductiva: Por demostrar que es válido para $(k+1)$ esto es: $P(k+1) : 3^{2(k+1)}-1$ es divisible por 8

3° Demostración:

Alternativa 1:

$$\begin{aligned}
P(k+1) : 3^{2(k+1)}-1 &= 3^{2k+2}-1 \\
&= 3^2\cdot 3^{2k}-1 \\
&= 9\cdot 3^{2k}-1 \\
&= (8+1)\cdot 3^{2k}-1 \\
&= \underbrace{8\cdot 3^{2k}}_{div. por 8} + \underbrace{3^{2k}-1}_{div. por 8 por hip.}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $P(k+1) : 3^{2(k+1)}-1$ es divisible por 8

Alternativa 2:

Por hipótesis se tiene que $P(k) : 3^{2k}-1$ es divisible por 8, esto es: $3^{2k}-1=8t\ ,\ t\in\mathbb{N}$

Luego:

$$\begin{aligned}
3^{2k}-1=8t/\cdot(3^2) &\Leftrightarrow 3^2\cdot 3^{2k}-3^2 = 3^2\cdot 8t \\
&\Leftrightarrow 3^{2k+2}-9=3^2\cdot 8t \\
&\Leftrightarrow 3^{2k+2}-(1+8)=3^2\cdot 8t\ /+8 \\
&\Leftrightarrow 3^{2(k+1)}-1=8(\underbrace{3^2t+1}_{t_1})\ ,\ t_1\ \in\mathbb{N}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $P(k+1) : 3^{2(k+1)}-1$ es divisible por 8

Por lo tanto de 1°) , 2°) y 3°) se afirma que $3^{2n}-1$ es divisible por 8 para todo $n\in\mathbb{N}$

4. $\boxed{\text{25 pt.}}$

   i.- Dada la elipse de ecuación
   $$3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0.$$
   Encuentre el centro, los focos y sus vértices. Grafique la ecuación.

   ii.- Halle las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse dada en i.- que sean perpendiculares a la recta de ecuación $x + y - 5 = 0$.

   Desarrollo:

   [i.-] La elipse de ecuación $3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0$ es equivalente a $\dfrac{(x+\frac{2}{3})^2}{\frac{16}{9}} + \dfrac{(y-1)^2}{\frac{16}{3}} = 1$
   Se obtiene, entonces, que $a = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $b = \frac{4}{3}$ y $c = \frac{4\sqrt{2}}{3}$.

   - Centro= $(-\frac{2}{3}, 1)$,
   - Foco1= $(-\frac{2}{3}, 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3})$, Foco2= $(-\frac{2}{3}, 1 - \frac{4\sqrt{2}}{3})$
   - Vertices: $(-\frac{2}{3}, 1 + \frac{4}{\sqrt{3}}), (-\frac{2}{3}, 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}), (\frac{2}{3}, 1)$ y $(-2, 1)$
   - Asignar $\boxed{\text{3 puntos}}$ a la gráfica.

   [ii.-] Las rectas pedidas son de la forma $y = x + b$.
   Se intersecta con la elipse de manera tal que la intersección sea solo un punto.

   Intersección:
   $$\begin{cases} 3x^2 + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0 \\ y = x + b \end{cases} \begin{aligned} &\Longrightarrow \quad 3x^2 + (x+b)^2 + 4x - 2(x+b) - 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4x^2 + 2(1+b)x + (b^2 - 2b - 3) = 0 \end{aligned}$$

Luego la intersección será un solo punto ssi la ecuación tiene solo una solución y esto ocurre cuando $\Delta = 0$, es decir

$$\begin{aligned} 0 &= 4(1+b)^2 - 4 \times 4(b^2 - 2b - 3) \\ \Longleftrightarrow 0 &= (b^2 + 2b + 1) - 4(b^2 - 2b - 3) \\ \Longleftrightarrow 0 &= 3b^2 - 10b - 13 \\ \Rightarrow \quad & b = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4 \cdot 3 \cdot 13}}{6} = \frac{10 \pm 16}{6} \\ \Rightarrow \quad & b = -1 \vee b = \frac{13}{3} \end{aligned}$$

Las ecuaciones de las rectas pedidas son: $l_1 : y = x - 1$ y $l_2 : y = x + \frac{13}{3}$