UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Coordinación Matemáticas I

Primer Semestre 2015

Solución Taller 2

Semana 2: 16-20 de Marzo

.

Ejercicio 1

Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}_0^+$ para los cuales el conjunto solución de la siguiente inecuación es vacío:

$$|x-a|+|x+a|<1$$

Solución

Analizamos los casos determinados por $x \in]-\infty,-a] \vee x \in]-a,a] \vee$ x$\in]a,+\infty]$.

Caso 1: $x \in]-\infty,-a]$

La inecuación que se debe resolver es $-x+a-x-a<1$
y su solución $x>\frac{-1}{2}$
Entonces la solución de este caso es $S_1=]-\infty,-a] \cap]\frac{-1}{2},+\infty[$ la cual es vacío si $a \in [\frac{1}{2},+\infty[$

Caso 2: $x \in]-a,a]$

En este caso, se tiene la inecuación $-x+a+x+a<1$ la cual afirma que $a<\frac{1}{2}$
Luego como $S_1=\phi$ siempre que $a \in [\frac{1}{2},+\infty[$, se tiene que $S_2=\phi$ para $a \in [\frac{1}{2},+\infty[$

Caso 3: $x \in]a,+\infty]$

Para este caso la inecuación que se debe resolver es $x-a+x+a<1$
con solución $S_3=\phi$ si y solo si $a \in [\frac{1}{2},+\infty[$
Finalmente, el conjunto solución de la inecuación es vacío si $a \in [\frac{1}{2},+\infty[$

Ejercicio 2

a) Demuestre que la proposición $(\exists x \in \mathbb{R})$, $2x^2 + 10 < -x^2 - 5x$ es Falsa

b) Demuestre que la proposición $(\forall x \in \mathbb{R})$, $x^2 + 10(x+1) > 7x$ es Verdadera

Solución

a) Demostrar que la proposición $(\exists x \in \mathbb{R})$, $2x^2 + 10 < -x^2 - 5x$ es Falsa, equivale a demostrar que su negación es verdadera.

   Se demuestra que $(\forall x \in \mathbb{R}) 2x^2 + 10 \geq -x^2 - 5x$ es verdadera
   La inecuación $2x^2 + 10 \geq -x^2 - 5x$ equivale a $3x^2 + 5x + 10 \geq 0$ y el discriminante de la función cuadrática es negativo y ademas el coeficiente de x^2 es positivo, por lo tanto $3x^2 + 5x + 10 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   Por lo tanto la proposición $(\forall x \in \mathbb{R}) 2x^2 + 10 \geq -x^2 - 5x$ es verdadera, quedando demostrado que $(\exists x \in \mathbb{R})$, $2x^2 + 10 < -x^2 - 5x$ es Falsa

b) Se demuestra directamente que la proposición es verdadera, ya que la inecuación $x^2 + 10(x+1) > 7x$ es equivalente a $x^2 + 3x + 10 > 0$ donde la función cuadrática tiene discriminante negativo y el coeficiente de x^2 es positovo por lo tanto $x^2 + 3x + 10 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ejercicio 3

a) Resuelva la ecuación $(5ax + 3)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ en términos de $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\}$.

b) Determine valores de $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\}$ para los cuales las soluciones anteriores tienen distinto signo

Solución

a) la ecuación $(5ax + 3)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ equivale a $|5ax + 3| = |2x - 1|$
   obteniendo las soluciones: $x_1 = \frac{-4}{5a-2}$, $x_2 = \frac{-2}{5a+2}$ para $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\}$.

b) Las soluciones anteriores tienen distinto signo si $x_1 x_2 < 0$
   Se resuelve la desigualdad $\frac{(-4)}{(5a-2)} \frac{(-2)}{(5a+2)} < 0$ la cual equivale a $\frac{8}{(5a-2)(5a+2)} < 0$
   y su solución es $a \in]\frac{-2}{5}, \frac{2}{5}[$

Ejercicio 4

a) Dados A y B no vacíos tal que $|A| = 17, |A - B| = 5$ y $|A \cup B| = 25$. Calcule $|(A - B) \cup (B - A)|$.

b) Demuestre que si $a^2 \in \mathbb{N}$ es múltiplo de 3 entonces $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de 3

Solución

a) $|A| = 17, |A - B| = 5$ y $|A \cup B| = 25$.
Para calcular $|(A - B) \cup (B - A)|$ observe que
$|(A - B) \cup (B - A)| = |(A \cup B) - (A \cap B)| = |A \cup B| - |A \cap B| = 25 - |A \cap B|$
Para obtener $|A \cap B|$, tenemos que $|A - B| = |A| - |A \cap B|$ y de esta ecuación obtenemos que $|A \cap B| = 12$
Finalmente, $|(A - B) \cup (B - A)| = |(A \cup B) - (A \cap B)| = |A \cup B| - |A \cap B| = 25 - 12 = 13$

b) Demuestre que si $a^2 \in \mathbb{N}$ es múltiplo de 3 entonces $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de 3
Se demuestra que el contrarecíproco es verdadero, es decir,
Demostraremos que si $a \in \mathbb{N}$ no es múltiplo de 3 entonces $a^2 \in \mathbb{N}$ no es múltiplo de 3
Si $a \in \mathbb{N}$ no es múltiplo de 3 entonces tenemos los casos de $a = 3k + 1$ o bien, $a = 3k + 2$, para algún $k \in \mathbb{N}$.
caso 1, si $a = 3k + 1$ entonces $a^2 = (3k + 1)^2$, luego $a^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, demostrando que a^2 no es múltiplo de 3.
caso 2, si $a = 3k + 2$ entonces $a^2 = (3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$, por lo tanto se tiene que a^2 no es múltiplo de 3.
Por lo tanto se ha demostrado que si $a \in \mathbb{N}$ no es múltiplo de 3 entonces a^2 no es múltiplo de 3 y esta afirmación es equivalente a que si $a^2 \in \mathbb{N}$ es múltiplo de 3 entonces $a \in \mathbb{N}$ es múltiplo de 3