Primer Certamen de Matemática I (MAT021)
Cálculo
1^{er} Semestre 2014

29 de abril 2014

NOMBRE: ____________________

RUT: ____________________ PARALELO: ______

1. $\boxed{\text{25 pt.}}$ Resuelva la siguiente inecuación en $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^3 - x}{|x-1| - 1} \geq 0.$$

Solución: En primer lugar, distinguimos dos casos:

<u>Caso 1:</u> Si $x \in [1, \infty)$ (es decir, si $x \geq 1$), entonces $|x-1| = x - 1$ y la inecuación se convierte en

$$\frac{x(x+1)(x-1)}{x-2} \geq 0.$$

Esta expresión no tiene sentido si $x = 2$. Los ceros del numerador (-1, 0 y 1) son soluciones pues la desigualdad no es estricta. En los intervalos restantes el signo es

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x(x+1)(x-1)}{x-2}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, el conjunto de soluciones para el caso 1 es

$$S_1 = [1, \infty) \cap \Big[(-\infty, -1] \cup [0, 1] \cup (2, \infty)\Big] = \{1\} \cup (2, \infty).$$

<u>Caso 2:</u> Si $x \in (-\infty, 1)$ (en otras palabras, si $x < 1$), entonces $|x-1| = 1 - x$ y la inecuación es

$$\frac{x(x+1)(x-1)}{-x} \geq 0.$$

Esta expresión no está definida si $x = 0$. Si $x \neq 0$, ella es equivalente a

$$(x+1)(x-1) \leq 0.$$

El conjunto de soluciones para el caso 2 es

$$S_2 = (-\infty, 1) \cap [-1, 1] - \{0\} = [-1, 0) \cup (0, 1).$$

Combinando toda la información deducimos que el conjunto de soluciones es

$$S = S_1 \cup S_2 = [-1, 0) \cup (0, 1] \cup (2, \infty).$$

2. $\boxed{\text{35 pt.}}$ Considere la función $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{rec}(f)$, definida mediante la asignación

$$f(x) = \left| \frac{2x+1}{x-1} \right|.$$

a) Determine $\mathrm{dom}(f)$.

b) Elabore el gráfico de f.

c) A partir del gráfico, encuentre $\mathrm{rec}(f)$.

d) Compruebe que f no es inyectiva.

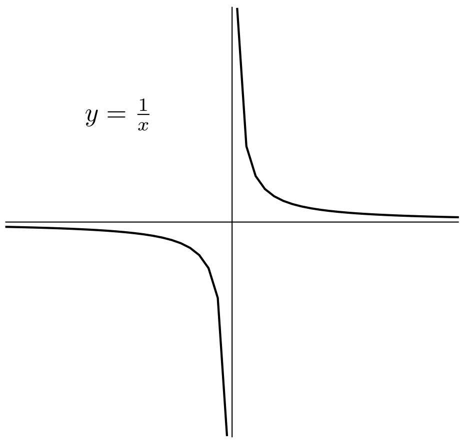
e) Verifique que la función $g : [-\frac{1}{2}, 1) \to \mathrm{rec}(f)$, definida por $g(x) = f(x)$, es biyectiva y calcule g^{-1}.

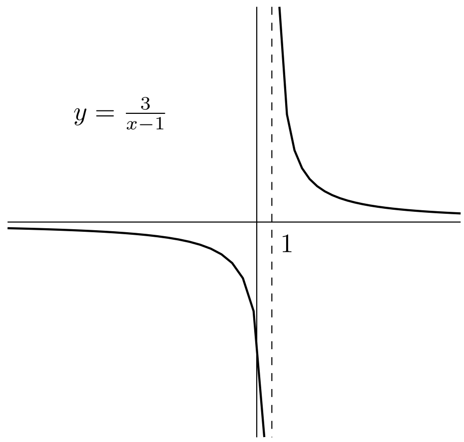
Solución:

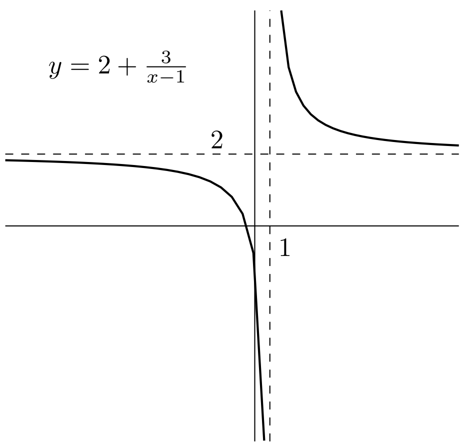
a) La función está definida salvo en aquellos puntos donde se anula el denominador. En consecuencia, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

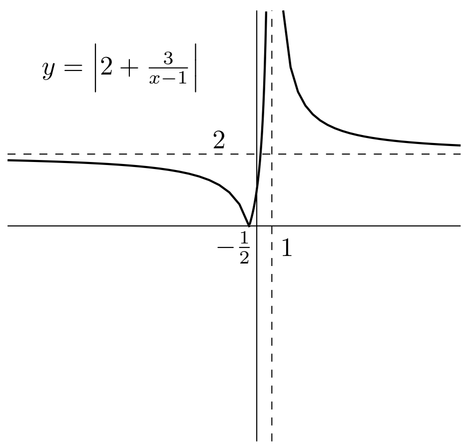
b) Obtendremos el gráfico de f a partir de otros gráficos conocidos. Para ello notemos que

$$f(x) = \left| \frac{2x+1}{x-1} \right| = \left| \frac{2x-2+3}{x-1} \right| = \left| \frac{2(x-1)+3}{x-1} \right| = \left| 2 + \frac{3}{x-1} \right|.$$









c) A partir del gráfico se observa que $\mathrm{rec}(f) = [0, \infty)$.

d) Basta encontrar dos elementos de $\mathrm{dom}(f)$ que tengan la misma imagen por f. Por ejemplo,

$$f(-2) = 1 = f(0), \qquad \text{o bien} \qquad f\left(\tfrac{2}{5}\right) = 3 = f(4).$$

e) En el intervalo señalado, se tiene que

$$g(x) = \left|\frac{2x+1}{x-1}\right| = -\frac{2x+1}{x-1} = -\left[2 + \frac{3}{x-1}\right].$$

Para la inyectividad, simplemente notemos que

$$g(x_1) = g(x_2) \iff -\left[2 + \frac{3}{x_1-1}\right] = -\left[2 + \frac{3}{x_2-1}\right] \iff \frac{3}{x_1-1} = \frac{3}{x_2-1} \iff x_1 = x_2.$$

Para la sobreyectividad (usaremos esto también en el cálculo de la inversa), dado $y \in [0,\infty) = \mathrm{rec}(f)$, tenemos que

$$\begin{aligned} y = g(x) \quad &\iff \quad y = \frac{2x+1}{1-x} \\ &\iff \quad y - yx = 2x+1 \\ &\iff \quad y - 1 = (y+2)x \\ &\iff \quad x = \frac{y-1}{y+2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $y \in \mathrm{rec}(g)$, y g es sobreyectiva.
Finalmente. la función $g^{-1} : [0,\infty) \to [-\frac{1}{2}, 1)$ está definida mediante la relación

$$y = g(x) \quad \iff \quad x = g^{-1}(y)$$

para $x \in [-\frac{1}{2}, 1)$ e $y \in [0,\infty)$. En vista de lo anterior, concluimos que

$$g^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+2}.$$

Primer Certamen de Matemática I (MAT021)
Complemento
1^{er} **Semestre 2014**
29 de abril 2014

NOMBRE: ______________________________

RUT: ______________________ PARALELO: ______

3. $\boxed{\text{25 pt.}}$

a) Compruebe que
$$\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)=2\operatorname{sen}(A)\cos(B).$$

b) Encuentre todas las soluciones en $\mathbb{R}$ de la ecuación:
$$\operatorname{sen}(7x)+\operatorname{sen}(x)=\operatorname{sen}(4x).$$

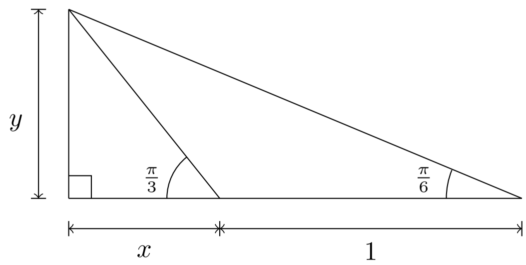
Solución:

a) De acuerdo con las fórmulas para el seno de la suma y diferencia de ángulos tenemos:
$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B) &= \operatorname{sen}(A)\cos(B)+\operatorname{sen}(B)\cos(A)+\operatorname{sen}(A)\cos(B)-\operatorname{sen}(B)\cos(A)\\ &= 2\operatorname{sen}(A)\cos(B).\end{aligned}$$

b) Utilizaremos la fórmula de la parte anterior. Para ello resolvemos el sistema
$$\begin{cases} A+B &= 7x\\ A-B &= x,\end{cases}$$
obteniendo $A=4$ y $B=3$. Concluimos que
$$\operatorname{sen}(7x)+\operatorname{sen}(x)=2\operatorname{sen}(4x)\cos(3x).$$
Por lo tanto, la ecuación a resolver es
$$2\operatorname{sen}(4x)\cos(3x)=\operatorname{sen}(4x),$$
que es equivalente a
$$\operatorname{sen}(4x)\Big[2\cos(3x)-1\Big]=0.$$
Esta igualdad se cumple en cualquiera de los siguientes casos:

- $\underline{\operatorname{sen}(4x)=0}$, lo cual ocurre cuando $4x=k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. Es decir, cuando $x=\frac{k\pi}{4}$, con $k\in\mathbb{Z}$.
- $\underline{\cos(3x)=\frac{1}{2}}$, lo cual se tiene cuando $3x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$. En otras palabras, cuando $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}$, con $k\in\mathbb{Z}$.

4. $\boxed{\text{15 pt.}}$ A partir de la información contenida en la figura, determine el valor de x e y:



Solución: Por una parte, tenemos que

$$\frac{y}{x+1} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Por otra,

$$\frac{y}{x} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{x+1}{\sqrt{3}} = y = x\sqrt{3},$$

o, de manera equivalente,

$$x + 1 = 3x.$$

Finalmente,

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{y, por lo tanto,} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$