Matemática I (MAT021)

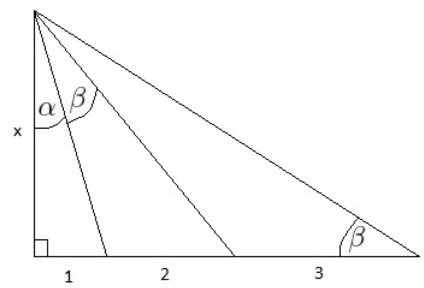
2^{do} Semestre de 2014. **Pauta Certamen 1**, Martes 09 de Septiembre de 2014.

1. Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera. Demuestre que $[(A-B)-(A-C)]\cup(A\cap B\cap C)=A\cap C$

   Solución:

$$\begin{aligned}
[(A-B)-(A-C)]\cup(A\cap B\cap C) &= [(A\cap B^c)-(A\cap C^c)]\cup(A\cap B\cap C)\\
&= [(A\cap B^c)\cap(A\cap C^c)^c]\cup(A\cap B\cap C)\\
&= [(A\cap B^c)\cap(A^c\cup C)]\cup(A\cap B\cap C)\\
&= [(A\cap B^c\cap A^c)\cup(A\cap B^c\cap C)]\cup(A\cap B\cap C)\\
&= \phi\cup(A\cap B^c\cap C)\cup(A\cap B\cap C)\\
&= A\cap C\cap(B^c\cup B)\\
&= A\cap C\cap\mathcal{U}\\
&= A\cap C
\end{aligned}$$

2. Considerando la figura dada, determinar el valor de $\tan\beta$.



Solución:
De acuerdo a la figura, tenemos que:

$$\tan\beta = \frac{x}{6}, \quad \tan(\beta+\alpha) = \frac{3}{x} \quad \text{y} \quad \tan\alpha = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto

$$\frac{3}{x} = \tan(\beta+\alpha) = \frac{\tan\beta + \tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha} = \frac{\frac{x}{6}+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{6}\cdot\frac{1}{x}}$$

lo cual implica que

$$\frac{3}{x} = \frac{\frac{x^2+6}{6x}}{\frac{5x}{6x}} = \frac{x^2+6}{5x} \Rightarrow 15 = x^2+6$$

Por lo tanto

$$x^2 = 9, \text{ así } x = 3$$

Finamelte $\tan\beta = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3. Se desea construir un edificio de base triangular, de tal manera que el triángulo resultante sea un triángulo rectángulo de perímetro $20+10\sqrt{2}$ mts. La hipotenusa de este triángulo corresponderá a la entrada del edificio y tendrá una longitud de $10\sqrt{2}$ mts

   a) Exprese el área del piso como una función $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que dependa de uno de los lados del triángulo que lo forma, donde X es el dominio de $f(x)$ de tal manera que X tenga sentido en el contexto del problema.
   b) Encuentre el recorrido de la función obtenida a)
   c) ¿Qué valores de los lados del triángulo escogería de tal manera que se alcance el área máxima?

   Solución:

   (a) Dado que el perímetro de la base triangular está dado por $10\sqrt{2} + a + b = 20 + 10\sqrt{2}$ (donde a y b son los catetos de tal base) entonces $f(a) = \frac{a}{2}(20 - a)$ representa el área de un triángulo rectángulo de lados a y b y perímetro $20 + 10\sqrt{2}$ mts. Ahora bien, como $f(a)$ representa el área de un triángulo se sigue que $0 < a < 20$ de esta manera la función buscada está dada por

$$\begin{aligned} f :]0, 20[\quad &\to \quad \mathbb{R} \\ a \quad &\to \quad \frac{a}{2}(20 - a) \end{aligned}$$

   (b) Debido a que $f(a)$ es una función cuadrática es fácil argumentar que su recorrido está dado por $]0, f(10)]$ donde $f(10) = 50$.

   (c) Dado que el $Rec(f) =]0, f(10)]$ entonces $a = 10$ es el lado del triángulo que hace que su área sea máxima, luego $b = 20 - a = 10$ y conseguimos las longitudes buscadas.

4. Determinar el conjunto solución de la siguiente inecuacuación

$$\frac{(|x|-1)(x^2+x+2)}{(x^2+x-6)} > 0$$

Solución:

Primero estudiemos la expresión $(|x|-1)$.

Si $x \geq 0$, entonces $(|x|-1) = (x-1)$. Este término es positivo si $x > 1$ y es negativo para los valores de $0 \leq x < 1$.

En el caso $x < 0$, tenemos que $(|x|-1) = (-x-1)$. Este término es negativo para $-1 \leq x < 0$ y es positivo para los valores de $x < -1$.

Finalmente $(|x|-1)$ es positivo para los valores de $x < -1$ y $x > 1$, y es negativo para los valores de x tales que $-1 < x < 1$.

La expresión cuadrática (x^2+x+2) tiene discriminante $\Delta = -7 < 0$, luego es siempre positiva o siempre negativa. como es una parábola que abre hacia arriba vemos que es siempre positiva.

El denominador $(x^2+x-6) = (x-2)(x+3)$. El término $(x-2)$ es negativo para $x < 2$ y positivo para $x > 2$. A su vez, $(x+3)$ es negativo para $x < -3$ y positivo para $x > -3$.

Esta información la podemos resumir en la siguiente tabla:

	$x < -3$	$-3 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x$
$(\lvert x\rvert-1)$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(\lvert x\rvert-1)(x^2+x+2)}{(x^2+x-6)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es

$$Sol =]-\infty, -3[\cup]-1, 1[\cup]2, \infty[$$