Control I de Matemática I (MAT021)

1^{er} Semestre 2015

Tiempo: 45 minutos

1. Resuelva en $\mathbb{R}$ la siguiente inecuación:

$$0 < \sqrt{5 - |3x+2|} \leq 2$$

Solución:

1°) **Restricción:**

$$\begin{aligned}
&5 - |3x+2| \geq 0 && \Leftrightarrow \\
&|3x+2| \leq 5 && \Leftrightarrow \\
&-5 \leq 3x+2 \leq 5 && \Leftrightarrow \\
&-7 \leq 3x \leq 3 && \Leftrightarrow \\
&-\tfrac{7}{3} \leq x \leq 1 &&
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x \in [-\frac{7}{3},\ 1]$

2°) **Desarrollo:**

$$\begin{aligned}
&0 < \sqrt{5 - |3x+2|} \leq 2 && \Leftrightarrow \\
&0 < 5 - |3x+2| \leq 4 && \Leftrightarrow \quad 0 < 5 - |3x+2| \wedge 5 - |3x+2| \leq 4
\end{aligned}$$

Por la parte 1º) sabemos que $0 \leq 5 - |3x+2|$ por lo tanto para asegurar que $0 < 5 - |3x+2|$ basta agregar la condición

$$0 \neq 5 - |3x+2| \Leftrightarrow x \neq \frac{-7}{3} \wedge x \neq 1.$$

La desigualdad $5 - |3x+2| \leq 4$ se resuelve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&5 - |3x+2| \leq 4 && \Leftrightarrow \\
&|3x+2| \geq 1 && \Leftrightarrow \\
&-1 \geq (3x+2) \ \vee (3x+2) \geq 1 && \Leftrightarrow \\
&-3 \geq 3x \ \vee 3x \geq -1 && \Leftrightarrow \\
&x \leq -1 \vee x \geq -\tfrac{1}{3} && \Leftrightarrow \\
&\therefore x \in]-\infty, -1] \cup [-\tfrac{1}{3}, \infty[&&
\end{aligned}$$

Luego el conjunto solución es:

$$\left[-\frac{7}{3},\ 1\right] \cap \mathbb{R} - \left\{\frac{-7}{3}, 1\right\} \cap \left(]-\infty,-1] \cup \left[-\frac{1}{3}, \infty\right[\right) = \left]-\frac{7}{3}, -1\right] \cup \left[-\frac{1}{3}, 1\right[$$

2. *a*) Determine el valor de verdad de la siguiente proposición: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(y^2 - x + 3 = 0)$ Justifique.

   b) Niegue la proposición anterior.

Solución:

a) La proposición es Falsa ya que, por ejemplo, si $x = -3$, $y^2 = -6$ que no es posible en los reales.

b) $\overline{(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(y^2 - x + 3 = 0)} \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y^2 - x + 3 \neq 0)$.

3. *a*) Demuestre que $\forall k \in]-\infty, -\frac{1}{12}[$, la ecuación $x^2 + (2k+1)x + k(k-2) = 0$ no admite soluciones reales .

   b) Resuelva cuando $k = -\frac{1}{12}$

Solución:

a) La ecuación $x^2 + (2k+1)x + k(k-2) = 0$ no admite soluciones reales si y solo si el discriminante de la ecuación es menor que cero:

$$\begin{aligned}
&\Delta = (2k+1)^2 - 4k(k-2) < 0 && \Leftrightarrow \\
&4k^2 + 4k + 1 - 4k^2 + 8k < 0 && \Leftrightarrow \\
&12k + 1 < 0 && \Leftrightarrow \\
&k < -\tfrac{1}{12}
\end{aligned}$$

Luego queda demostrado que: $\forall k \in]-\infty, -\frac{1}{12}[$, la ecuación $x^2 + (2k+1)x + k(k-2) = 0$ no admite soluciones reales.

b) Resolución para $k = -\frac{1}{12}$:

$$\begin{aligned}
x^2 + (2k+1)x + k(k-2) = 0 \quad &\underbrace{\Leftrightarrow}_{k=-\frac{1}{12}} \quad x^2 + \tfrac{5}{6}x + \tfrac{144}{25} = 0 \\
&\Rightarrow \qquad x_1 = x_2 = -\tfrac{5}{12}
\end{aligned}$$

Luego, para $k = -\frac{1}{12}$, la ecuación tiene dos soluciones iguales y son $x_1 = x_2 = -\frac{5}{12}$.

Otra resolución para *b*) :

De la parte anterior sabemos que $\Delta = 12k + 1$. Por lo tanto se tiene que $\Delta = 0 \iff k = \frac{-1}{12}$.

La solución de la ecuación es:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(2k+1)}{2} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-5}{12}.$$