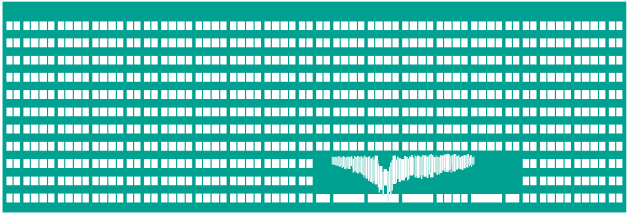
VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA



www.vsb.cz

Numerická lineární algebra 1

Singulární rozklad

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

6. května 2021

Singulární rozklad

Věta

Buď $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak existují ortogonální matice $U \in \mathbb{R}^{m\times m}, V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonální matice $S \in \mathbb{R}^{m\times n}$ takové, že platí
$$A = USV^T.$$

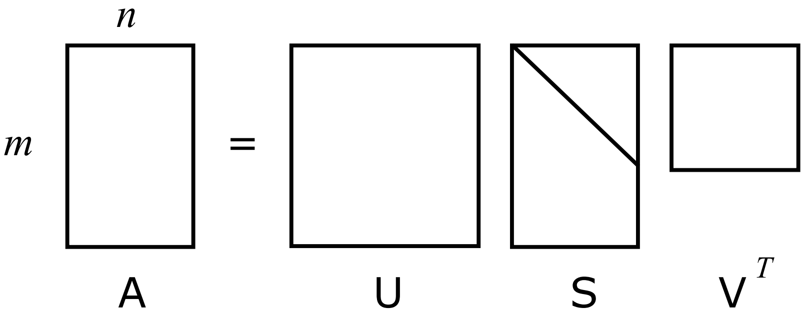
Singulární rozklad

Věta

Buď A $\in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak existují ortogonální matice U $\in \mathbb{R}^{m\times m}$, V $\in \mathbb{R}^{n\times n}$ a diagonální matice S $\in \mathbb{R}^{m\times n}$ takové, že platí

$$\mathsf{A} = \mathsf{USV}^T.$$

- Mluvíme o singulárním rozkladu matice (singular value decomposition, SVD).
- Matice S obsahuje na diagonále nezáporná singulární čísla (σ_i) seřazené od největšího po nejmenší.
- Sloupce matice U jsou levé singulární vektory, sloupce matice V jsou pravé singulární vektory.


n
m
=
A
U
S
V
T

Výpočet SVD pomocí rozkladu $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$

- Hledáme $\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{S}\mathsf{V}^T, \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A^T A = VS^T U^T USV^T$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A^T A = VS^T U^T USV^T = V \underbrace{S^T S}_{=\tilde{D}} V^T$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$

- Hledáme $\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{S}\mathsf{V}^T, \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak
$$\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{U}^T\mathsf{U}\mathsf{S}\mathsf{V}^T = \mathsf{V}\,\underbrace{\mathsf{S}^T\mathsf{S}}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\,\mathsf{V}^T$$
- Provedeme tedy spektrální rozklad $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$ a získáme
$$\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T \Rightarrow \mathrm{diag}(\mathsf{S}) = \sqrt{\mathrm{diag}(D)}$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Pak

$$A^T A = VS^T U^T USV^T = V \underbrace{S^T S}_{=\tilde{D}} V^T$$

- Provedeme tedy spektrální rozklad $A^T A$ a získáme

$$A^T A = QDQ^T \Rightarrow \mathrm{diag}(S) = \sqrt{\mathrm{diag}(D)}$$

a

$$V = Q$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$

- Hledáme $\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{S}\mathsf{V}^T, \mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak

$$\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{U}^T\mathsf{U}\mathsf{S}\mathsf{V}^T = \mathsf{V}\underbrace{\mathsf{S}^T\mathsf{S}}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\mathsf{V}^T$$

- Provedeme tedy spektrální rozklad $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$ a získáme

$$\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T \Rightarrow \mathrm{diag}(\mathsf{S}) = \sqrt{\mathrm{diag}(D)}$$

a

$$\mathsf{V} = \mathsf{Q}$$

- **Pozn.** Využili jsme toho, že vlastní čísla $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$ jsou nezáporná:

$$\text{Buď } \mathsf{A}^T\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v} \colon \lambda = \lambda\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}^T\lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T\mathsf{A}^T\mathsf{A}\boldsymbol{v} = (\mathsf{A}\boldsymbol{v})^T\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \|\mathsf{A}\boldsymbol{v}\|^2 \geq 0$$

Výpočet SVD pomocí rozkladu $A^T A$

- Hledáme $A = USV^T, A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Pak
$$A^T A = VS^T U^T USV^T = V \underbrace{S^T S}_{=\tilde{D}} V^T$$

- Provedeme tedy spektrální rozklad $A^T A$ a získáme
$$A^T A = QDQ^T \Rightarrow \mathrm{diag}(S) = \sqrt{\mathrm{diag}(D)}$$
a
$$V = Q$$

- **Pozn.** Využili jsme toho, že vlastní čísla $A^T A$ jsou nezáporná:
$$\text{Buď } A^T A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}\colon \lambda = \lambda\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}^T \lambda \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T A^T A\boldsymbol{v} = (A\boldsymbol{v})^T A\boldsymbol{v} = \|A\boldsymbol{v}\|^2 \geq 0$$

- Zbývá určit U

$$\mathsf{A}^T\mathsf{A} \quad = \quad \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}^T\mathsf{A} &= \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T \\
\mathsf{A} &= \underbrace{\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T}_{=\mathsf{U}}\mathsf{S}\mathsf{V}^T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}^T\mathsf{A} &= \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T \\
\mathsf{A} &= \underbrace{\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T}_{=\mathsf{U}}\mathsf{S}\mathsf{V}^T
\end{aligned}
$$

- Je $\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T$ ortogonální?

$$\begin{aligned} A^T A &= V S^T S V^T \\ A &= \underbrace{A^{-T} V S^T}_{=U} S V^T \end{aligned}$$

- Je $A^{-T} V S^T$ ortogonální?

$$(A^{-T} V S^T)^T A^{-T} V S^T$$

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^T\mathsf{A} &= \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T \\ \mathsf{A} &= \underbrace{\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T}_{=\mathsf{U}}\mathsf{S}\mathsf{V}^T \end{aligned}$$

- Je $\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T$ ortogonální?

$$(\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T)^T\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{S}\mathsf{V}^T\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T$$

$$\begin{aligned} A^T A &= V S^T S V^T \\ A &= \underbrace{A^{-T} V S^T}_{=U} S V^T \end{aligned}$$

- Je $A^{-T} V S^T$ ortogonální?

$$\begin{aligned} (A^{-T} V S^T)^T A^{-T} V S^T &= S V^T A^{-1} A^{-T} V S^T = \\ &= S V^T (A^T A)^{-1} V S^T \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}^T\mathsf{A} &= \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T \\
\mathsf{A} &= \underbrace{\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T}_{=\mathsf{U}}\mathsf{S}\mathsf{V}^T
\end{aligned}
$$

- Je $\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T$ ortogonální?

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T)^T\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \\
&= \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{A}^T\mathsf{A})^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T)^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} A^T A &= V S^T S V^T \\ A &= \underbrace{A^{-T} V S^T}_{=U} S V^T \end{aligned}$$

- Je $A^{-T} V S^T$ ortogonální?

$$\begin{aligned} (A^{-T} V S^T)^T A^{-T} V S^T &= S V^T A^{-1} A^{-T} V S^T = \\ &= S V^T (A^T A)^{-1} V S^T = S V^T (V S^T S V^T)^{-1} V S^T = \\ &= S V^T (V^{-T} S^{-1} S^{-T} V^{-1}) V S^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^T A &= VS^T SV^T \\ A &= \underbrace{A^{-T} VS^T}_{=U} SV^T \end{aligned}$$

- Je $A^{-T}VS^T$ ortogonální?

$$\begin{aligned} (A^{-T}VS^T)^T A^{-T}VS^T &= SV^T A^{-1} A^{-T} VS^T = \\ &= SV^T (A^T A)^{-1} VS^T = SV^T (VS^T SV^T)^{-1} VS^T = \\ &= SV^T (V^{-T} S^{-1} S^{-T} V^{-1}) VS^T = I \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}^T\mathsf{A} &= \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T \\
\mathsf{A} &= \underbrace{\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T}_{=\mathsf{U}}\mathsf{S}\mathsf{V}^T
\end{aligned}
$$

- Je $\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T$ ortogonální?

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T)^T\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \\
&= \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{A}^T\mathsf{A})^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T)^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \\
&= \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{V}^{-T}\mathsf{S}^{-1}\mathsf{S}^{-T}\mathsf{V}^{-1})\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{I}
\end{aligned}
$$

- Jak tedy získat U?

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}^T\mathsf{A} &= \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T \\
\mathsf{A} &= \underbrace{\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T}_{=\mathsf{U}}\mathsf{S}\mathsf{V}^T
\end{aligned}
$$

- Je $\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T$ ortogonální?

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T)^T\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \\
&= \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{A}^T\mathsf{A})^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T)^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \\
&= \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{V}^{-T}\mathsf{S}^{-1}\mathsf{S}^{-T}\mathsf{V}^{-1})\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{I}
\end{aligned}
$$

- Jak tedy získat U?

$$
\mathsf{U} = \mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T
$$

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^T\mathsf{A} &= \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T \\ \mathsf{A} &= \underbrace{\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T}_{=\mathsf{U}}\mathsf{S}\mathsf{V}^T \end{aligned}$$

- Je $\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T$ ortogonální?

$$\begin{aligned} (\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T)^T\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \\ &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{A}^T\mathsf{A})^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T)^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \\ &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{V}^{-T}\mathsf{S}^{-1}\mathsf{S}^{-T}\mathsf{V}^{-1})\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{I} \end{aligned}$$

- Jak tedy získat U?

$$\begin{aligned} \mathsf{U} &= \mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T \\ \mathsf{U}^T &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T\mathsf{A}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^T A &= V S^T S V^T \\ A &= \underbrace{A^{-T} V S^T}_{=U} S V^T \end{aligned}$$

- Je $A^{-T} V S^T$ ortogonální?

$$\begin{aligned} (A^{-T} V S^T)^T A^{-T} V S^T &= S V^T A^{-1} A^{-T} V S^T = \\ &= S V^T (A^T A)^{-1} V S^T = S V^T (V S^T S V^T)^{-1} V S^T = \\ &= S V^T (V^{-T} S^{-1} S^{-T} V^{-1}) V S^T = I \end{aligned}$$

- Jak tedy získat U?

$$\begin{aligned} U &= A^{-T} V S^T \\ U^T &= S V^T A^{-1} \\ U^T A &= S V^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^TA &= VS^TSV^T \\ A &= \underbrace{A^{-T}VS^T}_{=U}SV^T \end{aligned}$$

- Je $A^{-T}VS^T$ ortogonální?

$$\begin{aligned} (A^{-T}VS^T)^TA^{-T}VS^T &= SV^TA^{-1}A^{-T}VS^T = \\ &= SV^T(A^TA)^{-1}VS^T = SV^T(VS^TSV^T)^{-1}VS^T = \\ &= SV^T(V^{-T}S^{-1}S^{-T}V^{-1})VS^T = I \end{aligned}$$

- Jak tedy získat U?

$$\begin{aligned} U &= A^{-T}VS^T \\ U^T &= SV^TA^{-1} \\ U^TA &= SV^T \\ U^TAV &= S \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{A}^T\mathsf{A} &= \mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T \\
\mathsf{A} &= \underbrace{\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T}_{=\mathsf{U}}\mathsf{S}\mathsf{V}^T
\end{aligned}
$$

- Je $\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T$ ortogonální?

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T)^T\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \\
&= \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{A}^T\mathsf{A})^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{V}\mathsf{S}^T\mathsf{S}\mathsf{V}^T)^{-1}\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \\
&= \mathsf{S}\mathsf{V}^T(\mathsf{V}^{-T}\mathsf{S}^{-1}\mathsf{S}^{-T}\mathsf{V}^{-1})\mathsf{V}\mathsf{S}^T = \mathsf{I}
\end{aligned}
$$

- Jak tedy získat U?

$$
\begin{aligned}
\mathsf{U} &= \mathsf{A}^{-T}\mathsf{V}\mathsf{S}^T \\
\mathsf{U}^T &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T\mathsf{A}^{-1} \\
\mathsf{U}^T\mathsf{A} &= \mathsf{S}\mathsf{V}^T \\
\mathsf{U}^T\mathsf{A}\mathsf{V} &= \mathsf{S} \\
\mathsf{A}\mathsf{V} &= \mathsf{U}\mathsf{S}
\end{aligned}
$$

- Postup:
  1. Sestavme $A^T A$

- Postup:
  1. Sestavme $A^T A$
  2. Nalezneme spektrální rozklad $A^T A = VDV^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$A^T A = VDV^T$$

- Postup:
  1. Sestavme $A^T A$
  2. Nalezneme spektrální rozklad $A^T A = VDV^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$A^T A = VDV^T = \underbrace{VP^T}_{=\tilde{V}} \underbrace{PDP^T}_{=\tilde{D}} \underbrace{PV^T}_{=\tilde{V}^T}$$

- Postup:
  1. Sestavme $A^T A$
  2. Nalezneme spektrální rozklad $A^T A = VDV^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$A^T A = VDV^T = \underbrace{VP^T}_{=\tilde{V}}\underbrace{PDP^T}_{=\tilde{D}}\underbrace{PV^T}_{=\tilde{V}^T} = \tilde{V}\tilde{D}\tilde{V}^T$$

- Postup:
  1. Sestavme $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$
  2. Nalezneme spektrální rozklad $\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{V}\mathsf{D}\mathsf{V}^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{V}\mathsf{D}\mathsf{V}^T = \underbrace{\mathsf{V}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{V}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{D}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{V}^T}_{=\tilde{\mathsf{V}}^T} = \tilde{\mathsf{V}}\tilde{\mathsf{D}}\tilde{\mathsf{V}}^T$$

  3. Z odmocnin prvků $\tilde{d}_{i,i}$ sestavíme $\mathsf{S} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

- Postup:
  1. Sestavme $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$
  2. Nalezneme spektrální rozklad $\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{V}\mathsf{D}\mathsf{V}^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{V}\mathsf{D}\mathsf{V}^T = \underbrace{\mathsf{V}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{V}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{D}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{V}^T}_{=\tilde{\mathsf{V}}^T} = \tilde{\mathsf{V}}\tilde{\mathsf{D}}\tilde{\mathsf{V}}^T$$

  3. Z odmocnin prvků $\tilde{d}_{i,i}$ sestavíme $\mathsf{S} \in \mathbb{R}^{m\times n}$
  4. $\mathsf{V} = \tilde{\mathsf{V}}$

- Postup:
  1. Sestavme $\mathsf{A}^T\mathsf{A}$
  2. Nalezneme spektrální rozklad $\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{V}\mathsf{D}\mathsf{V}^T$, seřadíme sestupně prvky na diagonále D a permutujeme příslušné sloupce V

$$\mathsf{A}^T\mathsf{A} = \mathsf{V}\mathsf{D}\mathsf{V}^T = \underbrace{\mathsf{V}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{V}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{D}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{V}^T}_{=\tilde{\mathsf{V}}^T} = \tilde{\mathsf{V}}\tilde{\mathsf{D}}\tilde{\mathsf{V}}^T$$

  3. Z odmocnin prvků $\tilde{d}_{i,i}$ sestavíme $\mathsf{S} \in \mathbb{R}^{m\times n}$
  4. $\mathsf{V} = \tilde{\mathsf{V}}$
  5. Vyřešíme $\mathsf{U}\mathsf{S} = \mathsf{A}\mathsf{V}$ pro neznámou matici U

- Rovnici $US = AV$ lze řešit pomocí QR rozkladu.

- Rovnici $US = AV$ lze řešit pomocí QR rozkladu.
- US má ortogonální sloupce $\Rightarrow$ AV má ortogonální sloupce.

- Rovnici $\mathsf{US} = \mathsf{AV}$ lze řešit pomocí QR rozkladu.
- US má ortogonální sloupce $\Rightarrow$ AV má ortogonální sloupce. Vypočtěme úplný QR rozklad

$$\mathsf{AV} = \mathsf{QR}.$$

Zde Q má normované ortogonální sloupce a R je diagonální.

- Rovnici $US = AV$ lze řešit pomocí QR rozkladu.
- US má ortogonální sloupce $\Rightarrow$ AV má ortogonální sloupce. Vypočtěme úplný QR rozklad

$$AV = QR.$$

Zde Q má normované ortogonální sloupce a R je diagonální.Pak

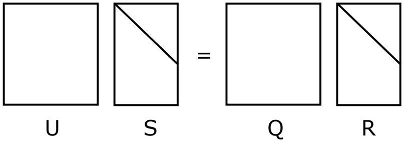
$$US = QR$$

- Rovnici US = AV lze řešit pomocí QR rozkladu.
- US má ortogonální sloupce ⇒ AV má ortogonální sloupce. Vypočtěme úplný QR rozklad

$$\mathsf{AV} = \mathsf{QR}.$$

Zde Q má normované ortogonální sloupce a R je diagonální.Pak

$$\mathsf{US} = \mathsf{QR}$$



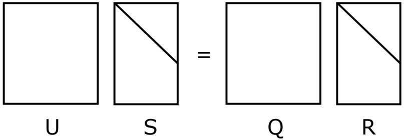
$$\boldsymbol{u}_i s_{i,i} = \boldsymbol{q}_i r_{i,i}$$

- Rovnici US = AV lze řešit pomocí QR rozkladu.
- US má ortogonální sloupce $\Rightarrow$ AV má ortogonální sloupce. Vypočtěme úplný QR rozklad

$$\mathsf{AV} = \mathsf{QR}.$$

Zde Q má normované ortogonální sloupce a R je diagonální.Pak

$$\mathsf{US} = \mathsf{QR}$$



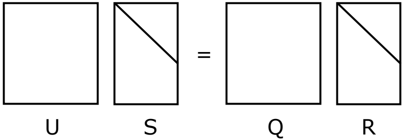
$$\boldsymbol{u}_i s_{i,i} = \boldsymbol{q}_i r_{i,i} \Rightarrow \boldsymbol{u}_i = \frac{r_{i,i}}{s_{i,i}} \boldsymbol{q}_i \qquad \text{pro } i \leq n,$$

- Rovnici US $=$ AV lze řešit pomocí QR rozkladu.
- US má ortogonální sloupce $\Rightarrow$ AV má ortogonální sloupce. Vypočtěme úplný QR rozklad

$$\mathsf{AV} = \mathsf{QR}.$$

Zde Q má normované ortogonální sloupce a R je diagonální.Pak

$$\mathsf{US} = \mathsf{QR}$$



$$\boldsymbol{u}_i s_{i,i} = \boldsymbol{q}_i r_{i,i} \Rightarrow \boldsymbol{u}_i = \frac{r_{i,i}}{s_{i,i}} \boldsymbol{q}_i \qquad \text{pro } i \leq n,$$

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{q}_i \qquad \text{pro } i > n.$$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singulární rozklad platí: $\mathsf{A} = \mathsf{USV}^T, \mathsf{A}^T = (\mathsf{USV}^T)^T = \mathsf{VSU}^T$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singulární rozklad platí: $\mathrm{A} = \mathrm{USV}^T, \mathrm{A}^T = (\mathrm{USV}^T)^T = \mathrm{VSU}^T \Rightarrow \mathrm{AV} = \mathrm{US}$, $\mathrm{A}^T\mathrm{U} = \mathrm{VS}$.

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singulární rozklad platí: $\mathsf{A} = \mathsf{USV}^T, \mathsf{A}^T = (\mathsf{USV}^T)^T = \mathsf{VSU}^T \Rightarrow \mathsf{AV} = \mathsf{US}$, $\mathsf{A}^T\mathsf{U} = \mathsf{VS}$.
- Sestavme matici

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}.$$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singulární rozklad platí: $\mathsf{A} = \mathsf{USV}^T, \mathsf{A}^T = (\mathsf{USV}^T)^T = \mathsf{VSU}^T \Rightarrow \mathsf{AV} = \mathsf{US}$, $\mathsf{A}^T\mathsf{U} = \mathsf{VS}$.
- Sestavme matici

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}^T\mathsf{U} & -\mathsf{A}^T\mathsf{U} \\ \mathsf{AV} & \mathsf{AV} \end{pmatrix}$$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singulární rozklad platí: $\mathsf{A} = \mathsf{USV}^T, \mathsf{A}^T = (\mathsf{USV}^T)^T = \mathsf{VSU}^T \Rightarrow$AV= US, $\mathsf{A}^T\mathsf{U} = \mathsf{VS}$.
- Sestavme matici

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}^T\mathsf{U} & -\mathsf{A}^T\mathsf{U} \\ \mathsf{AV} & \mathsf{AV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{VS} & -\mathsf{VS} \\ \mathsf{US} & \mathsf{US} \end{pmatrix}$$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singulární rozklad platí: $A = USV^T, A^T = (USV^T)^T = VSU^T \Rightarrow AV = US,\ A^TU = VS$.
- Sestavme matici

$$H = \begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^TU & -A^TU \\ AV & AV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VS & -VS \\ US & US \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

- Předchozí postup je numericky nestabilní. Existují další způsoby výpočtu.
- Pro matici A a její singulární rozklad platí: $\mathsf{A} = \mathsf{USV}^T, \mathsf{A}^T = (\mathsf{USV}^T)^T = \mathsf{VSU}^T \Rightarrow \mathsf{AV} = \mathsf{US},\ \mathsf{A}^T\mathsf{U} = \mathsf{VS}$.
- Sestavme matici

$$\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{A}^T\mathsf{U} & -\mathsf{A}^T\mathsf{U} \\ \mathsf{AV} & \mathsf{AV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{VS} & -\mathsf{VS} \\ \mathsf{US} & \mathsf{US} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

- Platí tedy

$$\begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} O & A^T \\ A & O \end{pmatrix}}_{=H} \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & V \\ U & -U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & O \\ O & -S \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}}_{=\mathsf{H}} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice H jsou tedy tvořeny prvky matic $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{S}$:

$$\mathsf{H} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}}_{=\mathsf{H}} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice H jsou tedy tvořeny prvky matic $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{S}$:

$$\mathsf{H} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

- spektrální rozklad H tedy můžeme pomocí prvků matic $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{S}$ vyjádřit jako

$$\mathsf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix}, \mathsf{D} = \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}}_{=\mathsf{H}} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice H jsou tedy tvořeny prvky matic $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{S}$:

$$\mathsf{H} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

- spektrální rozklad H tedy můžeme pomocí prvků matic $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{S}$ vyjádřit jako

$$\mathsf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix}, \mathsf{D} = \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}}_{=\mathsf{H}} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice H jsou tedy tvořeny prvky matic $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{S}$:

$$\mathsf{H} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

- spektrální rozklad H tedy můžeme pomocí prvků matic $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{S}$ vyjádřit jako

$$\mathsf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix}, \mathsf{D} = \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{V}^T & \mathsf{U}^T \\ \mathsf{V}^T & -\mathsf{U}^T \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}}_{=\mathsf{H}} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

- Vlastní čísla a vlastní vektory matice H jsou tedy tvořeny prvky matic $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{S}$:

$$\mathsf{H} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_{:,i} \\ \boldsymbol{u}_{:,i} \end{pmatrix} s_i$$

- spektrální rozklad H tedy můžeme pomocí prvků matic $\mathsf{U}, \mathsf{V}, \mathsf{S}$ vyjádřit jako

$$\mathsf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix}, \mathsf{D} = \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{H} = \mathsf{QDQ}^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathsf{V} & \mathsf{V} \\ \mathsf{U} & -\mathsf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{S} & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & -\mathsf{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{V}^T & \mathsf{U}^T \\ \mathsf{V}^T & -\mathsf{U}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathsf{O} & 2\mathsf{VSU}^T \\ 2\mathsf{USV}^T & \mathsf{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}$$

- Postup výpočtu singulárního rozkladu

  1. Sestavíme $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}$.

- Postup výpočtu singulárního rozkladu
  1. Sestavíme $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}$.
  2. Nalezneme spektrální rozklad $\mathsf{H} = \mathsf{QDQ}^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$\mathsf{H} = \mathsf{QDQ}^T$$

- Postup výpočtu singulárního rozkladu
  1. Sestavíme $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}$.
  2. Nalezneme spektrální rozklad $\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T = \underbrace{\mathsf{Q}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}}\underbrace{\mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{Q}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}^T}$$

- Postup výpočtu singulárního rozkladu
  1. Sestavíme $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}$.
  2. Nalezneme spektrální rozklad $\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T = \underbrace{\mathsf{Q}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}}\underbrace{\mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{Q}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}^T} = \tilde{\mathsf{Q}}\tilde{\mathsf{D}}\tilde{\mathsf{Q}}^T$$

- Postup výpočtu singulárního rozkladu
  1. Sestavíme $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}$.
  2. Nalezneme spektrální rozklad $\mathsf{H} = \mathsf{QDQ}^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$\mathsf{H} = \mathsf{QDQ}^T = \underbrace{\mathsf{QP}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}}\underbrace{\mathsf{QDQ}^T}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\underbrace{\mathsf{PQ}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}^T} = \tilde{\mathsf{Q}}\tilde{\mathsf{D}}\tilde{\mathsf{Q}}^T$$

  3. Přenásobme: $\bar{\mathsf{Q}} = \sqrt{2}\tilde{\mathsf{Q}}$

- Postup výpočtu singulárního rozkladu
  1. Sestavíme $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}$.
  2. Nalezneme spektrální rozklad $\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T = \underbrace{\mathsf{Q}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}}\underbrace{\mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{Q}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}^T} = \tilde{\mathsf{Q}}\tilde{\mathsf{D}}\tilde{\mathsf{Q}}^T$$

  3. Přenásobme: $\bar{\mathsf{Q}} = \sqrt{2}\tilde{\mathsf{Q}}$
  4. Sestavme S z poloviny diagonálních prvků D.

- Postup výpočtu singulárního rozkladu
  1. Sestavíme $\mathsf{H} = \begin{pmatrix} \mathsf{O} & \mathsf{A}^T \\ \mathsf{A} & \mathsf{O} \end{pmatrix}$.
  2. Nalezneme spektrální rozklad $\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T$, seřadíme diagonální prvky d_i sestupně a permutujeme příslušné sloupce V

$$\mathsf{H} = \mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T = \underbrace{\mathsf{Q}\mathsf{P}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}}\underbrace{\mathsf{Q}\mathsf{D}\mathsf{Q}^T}_{=\tilde{\mathsf{D}}}\underbrace{\mathsf{P}\mathsf{Q}^T}_{=\tilde{\mathsf{Q}}^T} = \tilde{\mathsf{Q}}\tilde{\mathsf{D}}\tilde{\mathsf{Q}}^T$$

  3. Přenásobme: $\bar{\mathsf{Q}} = \sqrt{2}\tilde{\mathsf{Q}}$
  4. Sestavme S z poloviny diagonálních prvků D.
  5. Z prvních n sloupců $\bar{\mathsf{Q}}$ sestavme U, V

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Hodnost matice A je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Hodnost matice A je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

Věta

Nenulová singulární čísla A jsou odmocninami nenulových vlastních čísel matic A^TA a AA^T.

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Hodnost matice A je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

Věta

Nenulová singulární čísla A jsou odmocninami nenulových vlastních čísel matic A^TA a AA^T.

Věta

Je-li $A = A^T$, pak singulární čísla A získáme jako absolutní hodnoty vlastních čísel A.

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Hodnost matice A je rovna počtu nenulových singulárních čísel.

Věta

Nenulová singulární čísla A jsou odmocninami nenulových vlastních čísel matic $A^T A$ a AA^T.

Věta

Je-li $A = A^T$, pak singulární čísla A získáme jako absolutní hodnoty vlastních čísel A.

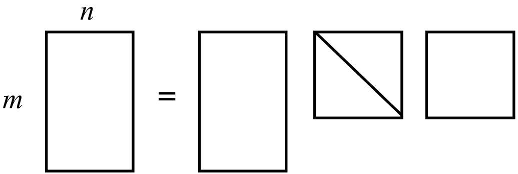
Věta

Maticová norma indukovaná Eukleidovskou vektorovou normou je rovna největšímu singulárnímu číslu

$$\|A\|_2 = \sigma_1.$$

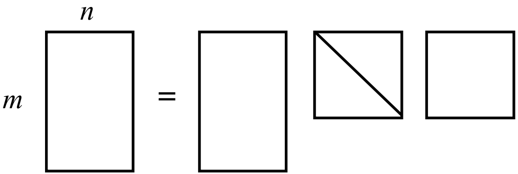
Redukovaná forma singulárního rozkladu

- Pro matice A $\in \mathbb{R}^{m \times n}$, kde $n < m$ můžeme sestavit SVD ve formě:

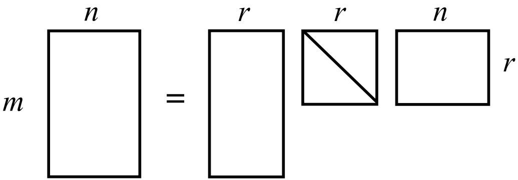


Redukovaná forma singulárního rozkladu

- Pro matice A $\in \mathbb{R}^{m \times n}$, kde $n < m$ můžeme sestavit SVD ve formě:



- Pokud matice nemá plnou hodnost, tzn. $r < n$, můžeme SVD dále redukovat:



Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Matici A s hodností r lze zapsat jako součet matic o hodnosti jedna:

$$\mathsf{A} = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T.$$

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta

Matici A s hodností r lze zapsat jako součet matic o hodnosti jedna:

$$\mathsf{A} = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T.$$

Důkaz vychází ze zápisu

$$\mathsf{S} = \sum_{j=1}^{r} \mathsf{S}_j,$$

kde $\mathsf{S}_j = \mathrm{diag}(0, 0, \ldots, \sigma_j, 0, \ldots, 0)$. Tzn.

$$\mathsf{A} = \mathsf{U} \sum_{j=1}^{r} \mathsf{S}_j \mathsf{V}^T = \mathsf{U}\mathsf{S}_1\mathsf{V}^T + \mathsf{U}\mathsf{S}_2\mathsf{V}^T + \ldots + \mathsf{U}\mathsf{S}_r\mathsf{V}^T.$$

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta (Eckart-Young-Mirsky)

Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom pro $k \leq h(\mathsf{A})$ poskytuje zkrácený singulární rozklad

$$\mathsf{A}_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T$$

nejlepší aproximaci matice A s hodností k. Tzn.

$$\|\mathsf{A} - \mathsf{A}_k\|_2 = \min_{\substack{\tilde{\mathsf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ h(\tilde{\mathsf{A}}) \leq k}} \|\mathsf{A} - \tilde{\mathsf{A}}\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta (Eckart-Young-Mirsky)

Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom pro $k \leq h(\mathsf{A})$ poskytuje zkrácený singulární rozklad

$$\mathsf{A}_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T$$

nejlepší aproximaci matice A s hodností k. Tzn.

$$\|\mathsf{A} - \mathsf{A}_k\|_2 = \min_{\substack{\tilde{\mathsf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ h(\tilde{\mathsf{A}}) \leq k}} \|\mathsf{A} - \tilde{\mathsf{A}}\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Pozn.

$$\mathsf{A} - \mathsf{A}_k = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T - \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T = \sum_{j=k+1}^{r} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T$$

Vlastnosti singulárního rozkladu

Věta (Eckart-Young-Mirsky)

Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom pro $k \leq h(\mathsf{A})$ poskytuje zkrácený singulární rozklad

$$\mathsf{A}_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T$$

nejlepší aproximaci matice A s hodností k. Tzn.

$$\|\mathsf{A} - \mathsf{A}_k\|_2 = \min_{\substack{\tilde{\mathsf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ h(\tilde{\mathsf{A}}) \leq k}} \|\mathsf{A} - \tilde{\mathsf{A}}\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Pozn.

$$\mathsf{A} - \mathsf{A}_k = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T - \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T = \sum_{j=k+1}^{r} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T \quad \Rightarrow \quad \|\mathsf{A} - \mathsf{A}_k\|_2 = \|\sum_{j=k+1}^{r} \sigma_j \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^T\|_2 = \sigma_{k+1}$$

Mooreova-Penroseova inverze

- Mooreove-Penroseova inverze
  - Pro každou matici $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existuje zobecněná inverze A^+, pro kterou platí

$$
\begin{aligned}
AA^+A &= A, \\
A^+AA^+ &= A+, \\
A^+A &= (A^+A)^T, \\
AA^+ &= (AA^+)^T.
\end{aligned}
$$

  A^+ nazýváme Mooreovou-Penroseovou inverzí.

Mooreova-Penroseova inverze

- Mooreove-Penroseova inverze
  - Pro každou matici $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existuje zobecněná inverze A^{+}, pro kterou platí

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\mathsf{A}^{+}\mathsf{A} &= \mathsf{A}, \\ \mathsf{A}^{+}\mathsf{A}\mathsf{A}^{+} &= \mathsf{A}+, \\ \mathsf{A}^{+}\mathsf{A} &= (\mathsf{A}^{+}\mathsf{A})^{T}, \\ \mathsf{A}\mathsf{A}^{+} &= (\mathsf{A}\mathsf{A}^{+})^{T}. \end{aligned}$$

    A^{+} nazýváme Mooreovou-Penroseovou inverzí.
  - Známe-li SVD rozklad, můžeme A^{+} snadno určit:

$$\mathsf{A}^{+} = \mathsf{U}\mathsf{S}^{+}\mathsf{V}^{T},$$

    kde S^{+} je diagonální matice s prvky

$$\begin{aligned} s^{+}_{i,i} &= \frac{1}{s_{i,i}} \quad \text{pro } s_{i,i} > 0, \\ s^{+}_{i,i} &= 0 \quad \text{pro } s_{i,i} = 0. \end{aligned}$$

- Mooreovu-Penroseovu inverzi lze využít např. k řešení problému nejmenších čtverců.
  - Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, řešme soustavu $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců:

$$\boldsymbol{x} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n} \|\mathsf{A}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = \mathsf{A}^+\boldsymbol{b}.$$

- Mooreovu-Penroseovu inverzi lze využít např. k řešení problému nejmenších čtverců.
  - Buď $\mathsf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, řešme soustavu $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ve smyslu nejmenších čtverců:

$$\boldsymbol{x} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n} \|\mathsf{A}\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}\| = \mathsf{A}^+\boldsymbol{b}.$$

- Pomocí Mooreovy-Penroseovy inverze můžeme nalézt všechna řešení soustavy $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^+\boldsymbol{b} + (\mathsf{I} - \mathsf{A}^+\mathsf{A})\boldsymbol{w},$$

kde $\boldsymbol{w}$ je libovolný vektor.

- Nevýhodou singulárního rozkladu je jeho vysoká výpočetní náročnost, vyžaduje přibližně $4m^2n + 8mn^2 + 9n^3$ operací.

Děkuji za pozornost

Michal Merta

VŠB – Technická univerzita Ostrava

michal.merta@vsb.cz

6. května 2021

VŠB TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA | IT4INNOVATIONS NÁRODNÍ SUPERPOČÍTAČOVÉ CENTRUM