

中国科学技术大学

本科毕业论文



激光康普顿散射中激光偏振 对辐射场的调控研究

作者姓名：	王昱森
学 号：	PB19020712
专 业：	光学
导师姓名：	孙方稳 教授 乔宾 教授
完成时间：	2023 年 5 月 20 日

University of Science and Technology of China
A dissertation for bachelor's degree



Regulation of the Radiation Field by Laser Polarization in Laser Compton Scattering

Author:	Wang Yusen
Student Number:	PB19020712
Speciality:	Optics
Supervisors:	Prof. Sun Fangwen Prof. Qiao Bin
Finished Time:	May 20,2023

摘 要

近年来,超快超强激光技术和加速器物理的蓬勃发展为解决强场下光与物质相互作用的前沿问题带来机遇。随着大科学装置的建设,高能领域许多由粒子物理理论预言的相互作用现象也被实验一一验证,其中包括将超强激光技术运用于加速器中验证相对论激光场条件下激光康普顿散射的辐射现象,使得建造能辐射高束流强度伽马射线的康普顿光源成为可能。

由于在强激光场条件下,经典的电动力学已无法准确描述辐射场形式,需从量子电动力学(QED)角度考虑辐射过程。辐射中高能光子的形成长度远大于入射激光的波长,这使得辐射场偏振将主要由入射激光的偏振特性来决定。因此,改变入射激光偏振可对高能辐射场的偏振及能量的空间分布进行调控。本文通过根据量子电动力学推导得到的微分散射截面,对不同激光偏振下激光康普顿散射辐射场的偏振和能量分布进行数值模拟与比较。再利用粒子模拟 PIC (Particle in Cell) 软件进行散射过程的仿真,与数值模拟对照以验证散射过程中激光偏振的调控机制,寻找实验差异的解释方法,为相关实验工作提供理论经验。

关键词: 激光康普顿散射; 量子电动力学; 激光偏振; 伽马辐射场; PIC 粒子模拟

ABSTRACT

Recently, the rapid development of ultrafast and ultra-strong laser technology and accelerator physics has brought opportunities for solving the frontier problems of the interaction between light and matter in strong fields. With the construction of large scientific facilities, many interaction phenomena predicted by particle physics theory in the high-energy field have been experimentally verified, including the verification of the radiation phenomenon from Laser Compton Scattering under relativistic laser field conditions by applying ultra-strong laser technology in accelerators, making it possible to build Compton sources that can radiate high beam intensity gamma rays.

Due to the fact that under strong laser field conditions, classical electrodynamics can no longer accurately describe the radiation field, the radiation process needs to be considered from the perspective of quantum electrodynamics (QED). The formation length of high-energy photons in radiation is much larger than the wavelength of the incident laser, which means that the polarization of the radiation field will be mainly determined by the polarization characteristics of the incident laser. Therefore, changing the polarization of the incident laser can control the polarization and spatial distribution of high-energy radiation fields. In this paper, by deriving the differential scattering cross section based on quantum electrodynamics, numerical simulations and comparisons of the polarization and energy distribution of Laser Compton Scattering radiation fields under different laser polarizations were conducted. Particle simulation PIC (Particle in Cell) software was used to simulate the scattering process and verify the mechanism of laser polarization control during the scattering process, and to find explanations for experimental differences, providing theoretical experience for relevant experimental work.

Key Words: Laser Compton Scattering; Quantum Electrodynamics; Laser Polarization; Gamma Radiation Field; PIC Particle Simulation

目 录

符号说明.....	3
第一章 引言.....	4
第二章 康普顿散射理论基础及微分散射截面计算.....	7
第一节 光子偏振.....	7
一、光子偏振态密度矩阵.....	7
二、描述光子偏振的 Stocks 矩阵.....	8
三、四维形式下的光子密度矩阵.....	8
第二节 电子极化.....	9
一、电子极化密度矩阵.....	9
二、电子极化密度矩阵具体形式.....	11
第三节 散射理论.....	12
一、散射矩阵形式.....	12
二、两体散射的微分散射截面推导.....	13
三、两体散射的 Mandelstam 变量.....	15
第四节 电子—光子相互作用.....	16
一、康普顿散射振幅.....	16
二、非偏振光子散射的散射截面.....	17
三、偏振光子散射的散射截面.....	21
第三章 康普顿散射辐射场的数值模拟	25
第一节 模拟中的坐标变换与简化	25
一、坐标变换与参数假设.....	25
二、微分散射截面公式变换.....	26
第二节 高能辐射场的数值模拟.....	27
一、总辐射场的空间分布及能谱.....	27
二、辐射场中各偏振分量的空间及能量分布.....	30
第四章 PIC 软件 Smilei 应用与粒子仿真模拟.....	38
第一节 PIC 软件简介及算法基础	38
一、软件简介.....	38

二、PIC 算法基础	38
第二节 Smilei 高能光子辐射模型	42
一、理论模型假设.....	42
二、数值模拟模型建立.....	43
第三节 激光康普顿散射模拟程序建立.....	46
一、单位标准化.....	46
二、粒子模拟程序建立.....	46
第四节 激光康普顿散射模拟结果.....	54
一、2D 激光康普顿散射模拟.....	54
二、3D 激光康普顿散射模拟.....	58
第五章 考虑粒子束散射时对散射公式的修正.....	66
第一节 粒子的相空间分布函数.....	66
第二节 修正后高能光子的空间及能量分布.....	68
第六章 总结与展望.....	71
参考文献.....	72
附录 A Dirac 矩阵满足的 Clifford 代数.....	74
附录 B Smilei 粒子模拟源文件（3D）.....	74
致 谢	79

符 号 说 明

∇	The gradient operator
δ	Dirac delta function
$\rho_{\alpha\beta}$	Density Matrix
c	Speed of light
γ	Lorentz factor
e	Elementary charge
m	The electron mass. Represents the rest energy of electron in natural units
k	The wave number. Represents the momentum of a photon in natural units
ω	The angular frequency. Represents the energy of a photon in natural units
σ	Scattering cross section
σ	Pauli Matrices
$\gamma^i (i = 0,1,2,3)$	Dirac Matrices
$\langle f S i\rangle$	Transition matrix element
\bar{u}	Dirac conjugate
$g_{\mu\nu}$	Metric tensor, denotes $g_{00} = 1, g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$
$e^{\lambda\mu\nu\rho}$	Antisymmetric unit tensor

第一章 引言

光与物质的相互作用是当今物理学前沿科研所关注的一大热点问题。大约一个世纪前, Joseph John Thomson 发现电子并开展了一系列光与物质的散射实验^[1], 正式开启了近代对光与物质相互作用的研究热潮。从其基于经典电动力学发展汤姆孙散射(Thomson scattering)的经典理论起, 物质本身及光能量尺度增加出现的新现象往往伴随着理论的更新。理论提出后, 实验物理学家在使用硬 X 射线时发现散射光能量较汤姆孙散射理论预测的要低, 经过尝试后发现偏差无法由经典理论解释。随着量子物理的蓬勃发展 Arthur Holly Compton 成功从量子物理出发解释了散射中电子从 X 射线中获得能量的过程,并将该过程命名为康普顿散射(Compton scattering)^[2],该理论过程也被吴有训先生的一系列实验所充分验证。

康普顿散射是在静止的自由电子与入射光子作用的理论, 当使电子能量升高成为高能电子后, 其可与低能光子相碰撞而使低能光子获得能量, 此过程为逆康普顿散射 (Inverse Compton Scattering)。后来, 随着加速器物理的蓬勃发展, 实验室中已可以产生能量范围相当广的高能电子束。一些大型加速器, 如欧洲核子中心的大型强子对撞机 (Large Hadron Collider) 甚至可以产生高达数万亿电子伏的电子束, 不仅完整验证了逆康普顿散射, 也极大地推动了基本粒子物理和宇宙学等领域的研究^[3]。例如、已知在宇宙空间和天体中普遍存在多种低能光子 (如射电光子、星光光子、微波背景光子), 同时在高能天体附近和宇宙射线中又经常存在大量高能电子, 因此逆康普顿散射的验证在天体物理的相关问题中具有重要的推动意义。由此, 根据逆康普顿散射理论产生高能光子射线的研究就此展开。

在激光强度较小的非相对论激光场中, 一般应用电动力学相关理论即可计算辐射的空间分布。然而, 随着激光强度的增加, 经典的电动力学或半经典方式已无法准确描述光子-电子相互作用, 需考虑量子电动力学 (QED) 效应。随着量子电动力学理论不断发展, 相关理论在近半个世纪内也逐渐完善。

然而, 囿于实验技术的限制, 对强场下光与物质作用机制的验证和发展成为了物理学界公认的难点, 如何产生超强激光也是实验科学家的一大困扰。经过近几十年的努力, 许多科学家在这个问题上做出卓越的贡献。2018 年诺贝尔物

理学奖颁予 Gérard Mourou 和 Donna Strickland 以表彰他们在超强激光技术方面的突破性贡献。他们利用啁啾脉冲放大 (chirped pulse amplification, CPA) 技术实现了高功率超短激光脉冲的产生^[4]。基于一代代研究人员的不懈努力,近年来随着激光技术的逐渐成熟,当前实验室内已经能够产生峰值功率达到近 PW 量级、峰值光强约为 $10^{22} - 10^{23} \text{ W/cm}^2$ 、脉冲宽度达到数十飞秒的激光脉冲^{[5][6]},如此强参数的激光为强场下光与物质相互作用的研究提供了有效手段。在实验技术发展的帮助下,通过将强激光技术应用在加速器中,实现了激光逆康普顿散射(下称激光康普顿散射(Laser Compton Scattering)^[7])。这不仅在实验上验证了 QED 理论预言的多种辐射现象,同时也使得制造束流强度较大、准直性好、具有一定偏振的高能康普顿光源成为可能。

在激光康普顿散射中,入射的相对论激光束通过与高能电子相互作用,使电子能量转移并同时产生高能光子,其应用十分广泛:在医学物理中,激光康普顿散射可以被应用于放射性核素的成像。通过使用激光束代替伽马射线与组织内电子相互作用,可以实现非侵入性的成像。另外,这种方法也可以同时提高成像的精度和分辨率,减少放射性核素对人体的伤害,应用前景广阔。在激光等离子体物理中,激光康普顿散射也可用以诊断等离子体中的电子密度和温度。激光束与等离子体相互作用时会产生高能电子和光子。这些光子可以通过与等离子体中的电子发生激光康普顿散射过程,从而产生散射光子。通过测量散射光子的能量和散射角度,可以确定等离子体中的电子密度和温度。在高能物理领域,基于激光康普顿散射产生的高能光束伽马射线可以用于研究原子核结构等高能物理的热点问题。

由于高能偏振伽马射线在多个前沿学科(包括高能物理、核物理及实验室天体物理及等)都有广泛的运用,其实用性也使得如何产生偏振度高、束流密度大的伽马射线成为研究的热点问题。目前实验中产生偏振伽马射线主要有两种方式:一种是利用高能电子束穿过金属靶时,电子在原子核的库仑场作用下发生非相干轫致辐射的方式产生伽马光^[8]。然而,这种方式产生的伽马光的散射角很大,且无法产生线偏振伽马光,应用有限;另一种即为激光康普顿散射机制获得高能伽马射线。另外,由于该过程中产生辐射光子的形成长度远大于入射的激光波长^[14],高能光子的偏振特性将主要由驱动激光决定。因此,如何调控激光康普顿散射中得高能射线辐射场的分布及偏振特性引起了广泛的研究兴趣。例如,Tang 等^[9]在 2020 年的研究表明,在弱非线性条件下,在利用圆偏振或

线偏振的平面波与电子束相互作用可以通过散射产生极化度高达 78% 或 91% 的圆偏振或线偏振伽马光。同时伽马光的偏振方向与激光偏振方向平行，且其偏振度与激光强度成反比，如图 1 所示。

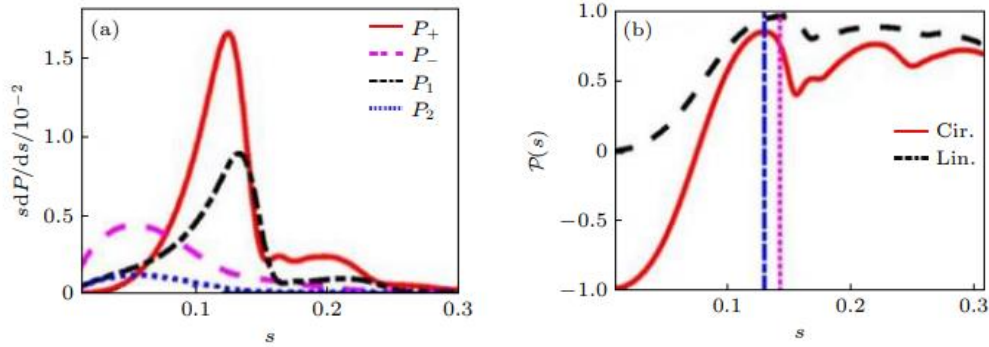


图 1 左图为偏振光的能谱，右图为散射光子偏振度

通过在模拟激光康普顿散射过程中改变入射激光场的偏振特性观察其对辐射场能谱的影响及对其偏振的空间分布的影响，可以在理论上较为准确地根据所需特定辐射场（例如其空间分布及偏振特性），模拟入射电子束空间构型及入射激光束偏振等参数，指导实验上康普顿光源的建设，具有很大的应用前景。本文通过介绍非线性康普顿散射的 QED 理论的基础上，完成对散射截面的计算及辐射场的理论推导，并应用基于时间的高阶电磁场 PIC（Particle in Cell）模拟软件 Smilei 对高能电子束与具有一定偏振的相对论性激光束间康普顿散射过程进行模拟，通过调控入射激光束的偏振特性，研究其对散射后辐射场的空间、强度等分布的影响，对实验进行具有一定的指导作用。

第二章 康普顿散射理论基础及微分散射截面计算

第一节 光子偏振

在本章中，理论推导均采用自然单位制，即光速 $c = 1$ ， $\hbar = 1$ ，电子质量 $m = 0.511 \text{ MeV}$ ，精细结构常数为 $\alpha = 1/137$ 。

一、光子偏振态密度矩阵

偏振是光最基本的物理性质之一。一般情况下，为准确描述偏振方向，在三维空间中通常将两正交的单位偏振矢量（记为 $\mathbf{e}^{(1)}$ 、 $\mathbf{e}^{(2)}$ ）作为偏振平面的基矢，并用以表示某个偏振方向

$$\mathbf{e} = x\mathbf{e}^{(1)} + y\mathbf{e}^{(2)} \quad (2.1)$$

其中系数 x 的模平方 $|x|^2$ 表示光子沿 $\mathbf{e}^{(1)}$ 方向偏振的概率，系数 y 同理。值得注意的是， $\mathbf{e}^{(1)}$ 、 $\mathbf{e}^{(2)}$ 既可以为两方向垂直的线偏振、也可为一对左旋及右旋圆偏振。具有确定动量 \mathbf{k} 及偏振态的光子一般称其为纯态（Pure State）光子，其偏振由一特定的偏振矢量 \mathbf{e} 来表述。对于动量 \mathbf{k} 一定但没有固定偏振态的光子，称其为部分偏振态（Partial Polarization）光子。由于无法找到一特定的偏振矢量来表述其偏振态，通常引入偏振密度矩阵（Polarization Density Matrix）来描述其偏振特性。

密度矩阵包含了光子偏振态的全部信息，并且应同时具有二重矢量旋转不变性。根据性质，定义二阶张量 $\rho_{\alpha\beta}$ 为光子偏振态密度矩阵：指标 α 、 β 只可取两个值（1、2），分别代表两个基矢的指标。根据物理实在， $\rho_{\alpha\beta}$ 应具有厄密性

$$\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\beta\alpha}^* \quad (2.2)$$

因此对角元 ρ_{11} 、 ρ_{22} 均为实数。另外其应满足归一化条件

$$\rho_{\alpha\alpha} = \rho_{11} + \rho_{22} = 1 \quad (2.3)$$

此条件下，密度矩阵可由三个实参变量来描述（ ρ_{12} 为复数时由实部与虚部共同描述）。由上，在给定某光子偏振态密度矩阵的条件下，即可通过将二阶张量投影到偏振基矢 $\rho_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha^* \mathbf{e}_\beta$ 得到其沿某特定方向偏振的概率。根据纯态光子的定义，其密度矩阵为

$$\rho_{\alpha\beta} = e_\alpha^* e_\beta \quad (2.4)$$

而对于一非偏振光子（即其沿各个方向的偏振概率相同），其密度矩阵应不包含光子具体的偏振状态的任何信息，形式为

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta} \quad (2.5)$$

二、描述光子偏振的 Stocks 参数

上节提到，密度矩阵由三个实参变量来描述。一般情况下习惯用描述偏振的实 Stocks 参数 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 来表示这三个实变量。在 Stocks 参数表示下，光子偏振密度矩阵可写为

$$\rho_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

其中每个 Stocks 分量取值均为-1 到 1。在式（1.6）的形势下，非偏振光子 Stocks 参数为

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0 \quad (2.7)$$

另外，完全偏振光子 Stocks 参数满足

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \quad (2.8)$$

三个 Stocks 分量具有各自的物理意义： ξ_3 表示在选取的偏振平面（设为 $\xi - \eta$ 平面）中沿 ξ 轴的偏振度，平行与垂直 ξ 轴偏振的概率分别为 $(1 + \xi_3)/2$ 及 $(1 - \xi_3)/2$ ； ξ_1 表示沿从 ξ 轴偏转 $\pi/4$ 方向的偏振度，平行与垂直该方向偏振的概率分别为 $(1 + \xi_1)/2$ 及 $(1 - \xi_1)/2$ 。 ξ_2 表示偏振光中的圆偏振度，其中左旋与右旋偏振概率分别为 $(1 + \xi_2)/2$ 及 $(1 - \xi_2)/2$ 。用这种表示方法可以更直观地从物理角度描述光子偏振密度矩阵的物理意义。

三、四维形式下的光子密度矩阵

为阐述四维形式下光子密度矩阵的形式，令 $e^{(1)}$ 、 $e^{(2)}$ 为选取的四维偏振基矢。选择基矢的一般化合理条件与三维形式类似，在 4-矢量内积规则 $ab = a_0b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 下表示为

$$\begin{cases} e^{(1)2} = e^{(2)2} = -1 \\ e^{(1)}e^{(2)} = 0 \\ e^{(1)}k = e^{(2)}k = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

将二阶张量 $\rho_{\alpha\beta}$ 记为三维形式以表示部分偏振光子的偏振矩阵元，有

$$\begin{aligned}\rho_{ik} = & \frac{1}{2} \left(e_i^{(1)} e_k^{(1)} + e_i^{(2)} e_k^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \xi_1 \left(e_i^{(1)} e_k^{(2)} + e_i^{(2)} e_k^{(1)} \right) \\ & - \frac{1}{2} i \xi_2 \left(e_i^{(1)} e_k^{(2)} - e_i^{(2)} e_k^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \xi_3 \left(e_i^{(1)} e_k^{(1)} - e_i^{(2)} e_k^{(2)} \right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

为方便计算，可在某特殊坐标系中选取 4-基矢分别为 $e^{(1)} = (0, \mathbf{e}^{(1)})$ 、 $e^{(2)} = (0, \mathbf{e}^{(2)})$ ，易得它们满足一般化合理条件，此时四维形式的光子密度矩阵即为

$$\begin{aligned}\rho_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)} \right) + \frac{1}{2} \xi_1 \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} + e_\mu^{(2)} e_\nu^{(1)} \right) \\ & - \frac{1}{2} i \xi_2 \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)} e_\nu^{(1)} \right) + \frac{1}{2} \xi_3 \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)} e_\nu^{(2)} \right)\end{aligned}\quad (2.11)$$

即可表示为

$$\rho_{\mu\nu} = \sum_{a,b=1}^2 \rho^{(ab)} e_\mu^{(a)} e_\nu^{(b)} \quad (2.12)$$

其中系数 $\rho^{(ab)}$ 构成一 2×2 矩阵，且可用标准基 $\{\mathbf{I}, \boldsymbol{\sigma}\}$ 表示为

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho^{(11)} & \rho^{(12)} \\ \rho^{(21)} & \rho^{(22)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \quad (2.13)$$

其中 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ 为 Stocks 参数。基于以上定义，纯态光子密度矩阵为

$$\rho_{\mu\nu} = e_\mu e_\nu^* \quad (2.14)$$

非偏振光子密度矩阵为

$$\rho_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 为度规张量。（见符号说明）

第二节 电子极化

一、 电子极化密度矩阵

在相对论量子力学中，有确定动量及能量 ε 的自由电子在位置表象下的旋量波函数为

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_p e^{-ipx} \quad (2.16)$$

其中 u_p 为归一化双旋量。负能量本征值 $-\varepsilon$ 对应的旋量波函数为

$$\psi_{-p} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u_{-p} e^{ipx} \quad (2.17)$$

由 Dirac 方程

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x, t) = 0 \quad (2.18)$$

将自由电子波函数 (1.16) 代入 Dirac 方程中有

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi_p &= \left(i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla - m\right)\psi_p \\ &= (\gamma^0 p^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} - m)\psi_p \\ &= (\gamma p - m)\psi_p = 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

由于 $\boldsymbol{\gamma}^\dagger = -\boldsymbol{\gamma}$, $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$, 方程两端共轭转置后有

$$(-p^0 \gamma^0 - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\gamma} - m)\psi_p^* = 0 \quad (2.20)$$

方程两端同乘 γ^0 , 代入关系 $\boldsymbol{\gamma}\gamma^0 = -\gamma^0\boldsymbol{\gamma}$, 通过定义一个新的旋量波函数 Dirac 共轭: $\bar{\psi} = \psi^* \gamma^0$, 式 (1.20) 等价于

$$\bar{\psi}_p(\gamma p + m) = 0 \quad (2.21)$$

故双旋量 u_p 及 u_{-p} 满足方程

$$\begin{cases} (\gamma p - m)u_p = \bar{u}_p(\gamma p - m) = 0 \\ (\gamma p + m)u_{-p} = \bar{u}_{-p}(\gamma p + m) = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

其中双旋量的狄拉克转置表示为 $\bar{u} = u^* \gamma^0$, 其归一化条件为

$$\begin{cases} \bar{u}_p u_p = 2m \\ \bar{u}_{-p} u_{-p} = -2m \end{cases} \quad (2.23)$$

以上, 旋量 u_p 用以描述自旋确定粒子 (沿特定 z 方向自旋为 $1/2$) 的自旋波函数。而自旋在相对论情况下不守恒, 此时 u_p 仅能描述粒子相对静止坐标系中自旋确定粒子的自旋状态。对于一个部分极化态 (Partial Polarization) 的电子, 无法通过一个确定的旋量 u_p 来表示其自旋波函数, 和光子类似, 我们可通过由旋量构造的电子极化密度矩阵来描述其自旋状态。定义

$$\rho_{ik} = u_{pi} \bar{u}_{pk} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4) \quad (2.24)$$

为极化密度矩阵, 其中 i, k 为旋量的指标。由式 (1.23) 得到其归一化条件为

$$\text{tr}(\rho) = 2m \quad (2.25)$$

在 (1.24) 定义下, 由式 (1.22) 易得极化密度矩阵满足

$$(\gamma p - m)\rho = \rho(\gamma p - m) = 0 \quad (2.26)$$

为找到满足上式的 ρ 的表达式, 需要通过从电子的自旋平均值出发的方式来合理构造电子极化密度矩阵。

二、电子极化密度矩阵具体形式

对于自旋确定（即以旋量 u_p 描述）电子，其自旋平均值为

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \int \psi^* \boldsymbol{\Sigma} \psi d^3x = \frac{1}{4\varepsilon} \overline{u_p} \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma} u_p \quad (2.27)$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})$ ，当自旋通过极化密度矩阵 ρ_{ik} 表示时，根据量子力学中密度矩阵的性质，部分极化电子的自旋平均值即对式（1.27）中的算子 $\gamma^0 \boldsymbol{\Sigma}$ 求迹得到

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{4\varepsilon} \text{tr}(\rho \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{4\varepsilon} \text{tr}(\rho \gamma^5 \boldsymbol{\gamma}) \quad (2.28)$$

在相对电子静止坐标系（即粒子 4-动量为 $p^\mu = (m, 0)$ ）中定义矢量

$$\boldsymbol{\zeta} = 2\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2\varepsilon} \text{tr}(\rho \gamma^5 \boldsymbol{\gamma}) \quad (2.29)$$

易见对于纯态粒子 $|\boldsymbol{\zeta}| = 1$ ，部分偏振态粒子 $|\boldsymbol{\zeta}| < 1$ 。若在同一电子静止坐标系内定义 4 维赝矢

$$a^\mu = (0, \boldsymbol{\zeta}) \quad (2.30)$$

则在任意坐标系中均有

$$a^\mu p_\mu = 0, a^\mu a_\mu = -\boldsymbol{\zeta}^2$$

在速度为 $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m$ 的运动坐标系中，由 Lorentz 变换得 4 维赝矢 a^μ 在该坐标系中各分量分别为

$$\begin{cases} a^0 = \frac{|\mathbf{p}|}{m} \zeta_\perp \\ a_\perp = \zeta_\perp \\ a_\parallel = \frac{\varepsilon}{m} \zeta_\parallel \end{cases} \quad (2.31)$$

其中 \parallel 与 \perp 分别表示矢量 \mathbf{a} 与三维动量 \mathbf{p} 平行及垂直的分量。通过以上的定义，即可构造费米子极化密度矩阵的具体形式。对于非极化电子（ $\boldsymbol{\zeta} = 0$ ），可证明当且仅当极化密度矩阵具有形式

$$\rho = \frac{1}{2} (\gamma p + m) \quad (2.32)$$

时其满足式（1.26）。更一般的，对于极化电子（ $\boldsymbol{\zeta} = 2\bar{\mathbf{S}}$ ），可证明当且仅当极化密度矩阵具有形式

$$\rho = \frac{1}{4m} (\gamma p + m) (1 - \gamma^5 (\gamma a)) (\gamma p + m) \quad (2.33)$$

时其满足式（1.26）。其中 a 为式（1.30）定义的 4 维赝矢，将其展开并应用 Dirac 矩阵所满足的 Clifford 代数（见附录），极化密度矩阵可简化为

$$\rho = \frac{1}{2}(\gamma p + m)(1 - \gamma^5(\gamma a)) \quad (2.34)$$

式 (1.34) 即为费米子极化密度矩阵具体形式。

第三节 散射理论

一、散射矩阵形式

考虑某粒子经散射过程，由初态 $|i\rangle$ 可散射至各种可能的末态 $|f\rangle$ 。散射后态矢量表示为各末态的叠加态

$$\sum_f |f\rangle \langle f|S|i\rangle \quad (2.35)$$

其中 $\langle f|S|i\rangle$ 为跃迁矩阵元，记为 S_{fi} 。 S_{fi} 的模平方 $|S_{fi}|^2$ 为散射到特定末态 $|f\rangle$ 的概率。由跃迁矩阵元构成的矩阵称为散射矩阵（S 矩阵）。根据散射作用的物理过程，跃迁矩阵元应具有形式

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) T_{fi} \quad (2.36)$$

δ_{fi} 表示当粒子间没有发生散射时散射矩阵退化为单位矩阵。另外 $\delta^4(P_f - P_i)$ 物理含义为散射前后的 4-动量守恒， P_f 为所有散射后粒子 4-动量之和， P_i 为所有散射前粒子 4-动量之和：

$$P_f = \sum p_f, P_i = \sum p_i \quad (2.37)$$

T_{fi} 称为散射振幅（Scattering Amplitude）。式 (1.36) 中 δ 函数可表示为积分形式

$$\delta^4(P_f - P_i) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i(P_f - P_i)x} d^4x \quad (2.38)$$

将跃迁矩阵元在某个足够大的有限空间 V 及时间范围 t 内积分后取其模平方，即为该有限空间 V 内由初态 $|i\rangle$ 散射跃迁为末态 $|f\rangle$ 的总概率

$$|S_{fi}|^2 = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V t \quad (2.39)$$

两边同时除以时间间隔 t 即为单位时间内的跃迁概率

$$w_{f \leftarrow i} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \quad (2.40)$$

由于每个自由粒子均由一个具有振幅 u 的平面波描述，故考虑初末态时散射振幅应具有形式

$$T_{fi} = u_1^* u_2^* \cdots Q u_1 u_2 \cdots \quad (2.41)$$

$u_1, u_2 \cdots$ 为初态粒子振幅、 $u_1^*, u_2^* \cdots$ 为末态粒子振幅， Q 为某个与所有参与相互作用粒子的初态有关的矩阵。

二、两体散射的微分散射截面推导

下面考虑两粒子参与的散射情况。假设相互作用的两粒子 4-动量分别为 $(\varepsilon_1, \mathbf{p}_1)$ 及 $(\varepsilon_2, \mathbf{p}_2)$ ，碰撞后形成的散射粒子动量为 \mathbf{p}_a' （指标 a 指代特定粒子，且满足 $\mathbf{P}_f = \sum \mathbf{p}_a'$ ）。散射后相空间内末态数为

$$\prod_a \frac{V d^3 p_a'}{(2\pi)^3}$$

V 为有限散射空间体积。故由式（1.40），单位时间内散射后粒子动量为 \mathbf{p}_a' 的概率为

$$dw_f = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |T_{fi}|^2 V \prod_a \frac{V d^3 p_a'}{(2\pi)^3} \quad (2.42)$$

散射后粒子能量满足质能关系式

$$\varepsilon_a'^2 = \mathbf{p}_a'^2 + m^2 \quad (2.43)$$

为与电子平面波函数或光子波函数协调，定义归一化的散射振幅 M_{fi} 满足

$$T_{fi} = \frac{M_{fi}}{\sqrt{2\varepsilon_1 V} \sqrt{2\varepsilon_2 V} \prod_a \sqrt{2\varepsilon_a' V}} \quad (2.44)$$

代入式（1.42），即得

$$dw_f = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4\varepsilon_1 \varepsilon_2} \prod_a \frac{V d^3 p_a'}{(2\pi)^3 2\varepsilon_a'} \quad (2.45)$$

为由微分散射概率推导洛伦兹不变形式的两粒子微分散射截面，需用微分散射概率除以场论^[10]中定义的概率流密度

$$j = \frac{I}{V \varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (2.46)$$

其中 I 为 4-标量，具体形式为

$$I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (2.47)$$

在质心系中，令 $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$ ，代入式 (1.47) 后得

$$I = |\mathbf{p}|(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (2.48)$$

代入式 (1.45)，洛伦兹不变形式的两粒子微分散射截面为

$$d\sigma = \frac{dw_f}{j} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \prod_a \frac{V d^3 p_a'}{(2\pi)^3 2\varepsilon_a'} \quad (2.49)$$

考虑散射过程中没有其他粒子湮灭或产生的情况，即取指标 $a = 1, 2$ 。此时微分散射截面具有形式

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \delta^4(P_f - P_i) \frac{V^2 d^3 p_1' d^3 p_2'}{4\varepsilon_1' 4\varepsilon_2'} \quad (2.50)$$

为消除形式中的 δ 函数，且由于 $d\sigma$ 具有洛伦兹不变性，在两粒子质心系中考虑更为方便直观。设在质心系中散射前后两粒子动量分别为 $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}, \mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}'$ 。由总能量守恒，有 $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'$ ，式 (1.50) 展开后有

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2} |M_{fi}|^2 \frac{1}{4I} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2') \delta(\varepsilon_1' + \varepsilon_2' - \varepsilon) \frac{V^2 d^3 p_1' d^3 p_2'}{4\varepsilon_1' 4\varepsilon_2'} \quad (2.51)$$

第一个 δ 函数可由对 $d^3 p_2'$ 的积分消除。对 $d^3 p_1'$ 的积分可由式 (1.43) 转变为

$$d^3 p_1' = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\phi' = |\mathbf{p}'| d\phi' \frac{\varepsilon_1'^{\varepsilon_2'} d(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')}{\varepsilon_1' + \varepsilon_2'} \quad (2.52)$$

$d\phi'$ 为空间角微元。故第二个 δ 函数可通过对 $d(\varepsilon_1' + \varepsilon_2')$ 的积分消除。故微分散射截面在积分后形式为

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} |M_{fi}|^2 \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}| \varepsilon^2} d\phi' \quad (2.53)$$

在弹性散射情况下，定义洛伦兹协变的 Mandelstam 变量 t (见 1.1.1)

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_1')^2 \\ &= m_1^2 + m_1'^2 - 2(p_1 p_1') \\ &= m_1^2 + m_1'^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_1' + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{p}_1'| \cos \theta \end{aligned} \quad (2.54)$$

故其微分关系满足 $dt = 2|\mathbf{p}||\mathbf{p}'| d\cos \theta$ ，由空间角微元 $d\phi' = d\phi d\cos \theta$ 关系代入散射截面得

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{dt d\phi}{I^2 2\pi} \quad (2.55)$$

若散射截面与方向角 ϕ 无关，则散射截面为

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2} \quad (2.56)$$

可见微分散射截面具有洛伦兹不变性，即其表达式不随坐标系选取改变。

为计算散射振幅 $|M_{fi}|^2$ 的具体形式，需完整考虑散射粒子前后的偏振态。对一个完全偏振粒子，设其散射前后旋量振幅分别为 u 及 u' ，散射振幅应具有形式

$$M_{fi} = \bar{u}' Au = \bar{u}'_k A_{kl} u_l \quad (2.57)$$

A 为由散射中其他粒子动量及偏振态共同决定的矩阵。由

$$(\bar{u}' Au)^* = u' \gamma^0 A^* u^* = u^* A^\dagger \gamma^0 u' = \bar{u} \bar{A} u' \quad (2.58)$$

其中 $\bar{A} = \gamma^0 A^\dagger \gamma^0$ 为 Dirac 共轭，故散射振幅平方可表示为

$$|M_{fi}|^2 = (\bar{u}' Au)(\bar{u} \bar{A} u') = u'_i \bar{u}'_k A_{kl} u_l \bar{u}_m \bar{A}_{mi} \quad (2.59)$$

若散射前粒子处于某偏振混合态，设其密度矩阵为 ρ ，散射至某个由密度矩阵 ρ' 描述的末态，此时散射振幅平方中的双旋量乘积化为密度矩阵元素，即

$$u'_i \bar{u}'_k \rightarrow \rho'_{ik}, u_l \bar{u}_m \rightarrow \rho_{lm}$$

此时由密度矩阵的物理意义，散射振幅平方为

$$|M_{fi}|^2 = \text{tr}(\rho' A \rho \bar{A}) \quad (2.60)$$

其中密度矩阵的具体形式由式 (1.33) 给出。式 (1.60) 同时给出散射粒子在由 A 表述的散射过程下末态时密度矩阵有形式

$$\rho^{final} \sim A \rho \bar{A} \quad (2.61)$$

对 $\rho' \rho^{final}$ 求迹即为末态处于 ρ' 的期望值。

三、两体散射 Mandelstam 变量

在考虑散射过程的动力学关系时，普适形式的 4-动量守恒可表示为

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0 \quad (2.62)$$

其中两项为初态粒子 4-动量 q_a ，其时间分量 $q_a^0 > 0$ ；而散射粒子的两项 4-动量为 $-q_a$ ，其时间分量 $q_a^0 < 0$ 。下面规定 q_1 、 q_2 指代入射粒子的 4-动量。对于过程中任意给定的粒子，由质能方程 (1.43)，均满足 4-动量的平方为粒子质量的平方，即

$$q_a^2 = m_a^2 \quad (2.63)$$

对式 (1.62) 表示的过程，根据时间分量正负的选取，可有三个等价的反应过程：

$$1 + 2 \rightarrow 3 + 4 \quad (\text{I})$$

$$1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4 \quad (\text{II})$$

$$1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3 \text{ (III)}$$

他们均由 4-动量守恒推导得到，具有交换对称性。其中数字表示粒子本身，上横线数字表示该粒子的反粒子。上述三个过程分别称为 s 道、t 道及 u 道。在粒子物理中，为了体现交叉对称性，常代替单个粒子的外动量选取一组等价动力学变量，称为 Mandelstam 变量，具体定义为

$$\begin{cases} s = (q_1 + q_2)^2 = (q_3 + q_4)^2 \\ t = (q_1 + q_3)^2 = (q_2 + q_4)^2 \\ u = (q_1 + q_4)^2 = (q_2 + q_3)^2 \end{cases} \quad (2.64)$$

易证明 Mandelstam 变量具有关系

$$s + t + u = h \quad (2.65)$$

其中 $h = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$ 。在 s 道、t 道及 u 道中都可以用能量与动量来表示 Mandelstam 变量。例如，在 s 道及粒子 1、2 的质心系中，粒子 4-动量分别为

$$q_1 = p_1 = (\varepsilon_1, \mathbf{p}_s) \quad q_2 = p_2 = (\varepsilon_2, -\mathbf{p}_s)$$

$$q_3 = -p_3 = (-\varepsilon_3, -\mathbf{p}_s') \quad q_4 = -p_4 = (-\varepsilon_4, \mathbf{p}_s')$$

令 $\varepsilon_s = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$ ，由动量守恒关系及 Mandelstam 变量定义可得

$$\begin{aligned} s &= \varepsilon_s^2 \\ 2t &= h - s + 4\mathbf{p}_s \cdot \mathbf{p}_s' - \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) \\ 2u &= h - s + 4\mathbf{p}_s \cdot \mathbf{p}_s' + \frac{1}{s}(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2) \end{aligned} \quad (2.66)$$

第四节 电子—光子相互作用

一、康普顿散射振幅

光子被自由电子散射的康普顿过程可以表示为

$$p + k = p' + k' \quad (2.67)$$

其中 p 、 k 分别表示散射前电子、光子的 4-动量； p' 、 k' 分别表示散射后电子、光子的 4-动量。此散射过程中的 Mandelstam 协变量为

$$\begin{aligned} s &= (p + k)^2 = (p' + k')^2 = m^2 + 2pk = m^2 + 2p'k' \\ t &= (p - p')^2 = (k' - k)^2 = 2(m^2 - pp') = -2k'k \\ u &= (p + k)^2 = (p' - k')^2 = m^2 - 2pk' = m^2 - 2p'k \end{aligned} \quad (2.68)$$

且满足 $s + t + u = 2m^2$ 。散射过程由以下的两个费曼图描述

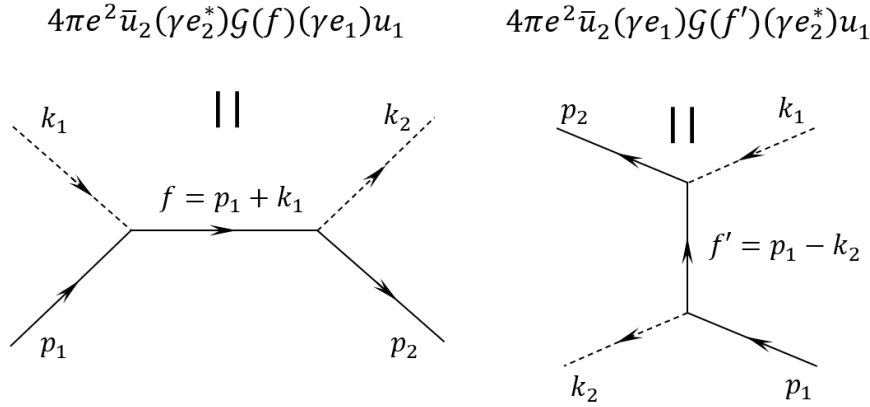


图 2 康普顿散射过程费曼图

由量子场论相关知识可推导得到康普顿散射过程的散射振幅为

$$M_{fi} = -4\pi e_0^2 \bar{u}' [(\gamma e'^*) G(p + k) (\gamma e) + (\gamma e) G(p - k') (\gamma e'^*)] u \quad (2.69)$$

其中 e_0^2 为元电荷的平方, e 、 e' 为散射前后的光子 4-动量, u 、 u' 为散射前后电子的旋量振幅, $G(p)$ 为动量表象下电子的传播子。乘积项展开可将散射振幅表示为

$$M_{fi} = -4\pi e^2 e_\mu'^* e_\nu (\bar{u}' Q^{\mu\nu} u) \quad (2.70)$$

其中 Q 为

$$Q^{\mu\nu} = \frac{1}{s - m^2} \gamma^\mu (\gamma p + \gamma k + m) \gamma^\nu + \frac{1}{u - m^2} \gamma^\nu (\gamma p - \gamma k' + m) \gamma^\mu \quad (2.71)$$

由式 (1.68) 一式 (1.70), 对于任意偏振态的散射粒子, 其散射振幅的平方 (即散射概率) 形式应为

$$|M_{fi}|^2 \sim 16\pi^2 e^4 \text{tr}(\rho^{e'} \rho_{\lambda\mu}^\gamma Q^{\mu\nu} \rho^e \rho_{\nu\sigma}^\gamma \bar{Q}^{\sigma\lambda}) \quad (2.72)$$

其中 ρ^e 为电子极化密度矩阵, ρ^γ 为光子偏振密度矩阵, 且 $\bar{Q}^{\sigma\lambda} = \gamma^0 Q^{\sigma\lambda\dagger} \gamma^0$ 。

二、非偏振光子散射的散射截面

由第二章第一节及第二节, 非偏振光子的偏振密度矩阵为

$$\rho_{\mu\nu}^\gamma = \rho_{\mu\nu}^{\gamma'} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \quad (2.73)$$

非极化电子的极化密度矩阵为

$$\rho^e = \frac{1}{2} (\gamma p + m), \quad \rho^{e'} = \frac{1}{2} (\gamma p' + m) \quad (2.74)$$

代入散射截面公式 (1.56) 得

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \frac{1}{64\pi} |M_{fi}|^2 \frac{dt}{I^2} \\
 &= \frac{\pi e^4}{4} \frac{dt}{(s-m^2)^2} \text{tr}\{(\gamma p' + m)Q^{\lambda\mu}(\gamma p + m)\bar{Q}^{\lambda\mu}\} \\
 &= dt \frac{\pi e^4}{(s-m^2)^2} [f(s, u) + g(s, u) + f(u, s) + g(u, s)] \quad (2.75)
 \end{aligned}$$

其中根据 Dirac 矩阵满足的 Clifford 代数规则, $Q^{\lambda\mu}$ 由式 (1.70) 给出。 $f(s, u)$ 、 $g(s, u)$ 分别具有形式

$$\begin{aligned}
 f(s, u) &= \frac{\text{tr}\left((\gamma p' + m)\gamma^\mu(\gamma p + \gamma k + m)\gamma^\nu(\gamma p + m)\gamma_\nu(\gamma p + \gamma k + m)\gamma_\mu\right)}{4(s-m^2)^2} \\
 &= \frac{2}{(s-m^2)^2} [4m^2 - (s-m^2)(u-m^2) + 2m^2(s-m^2)] \quad (2.76)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(s, u) &= \frac{\text{tr}\left((\gamma p' + m)\gamma^\mu(\gamma p + \gamma k + m)\gamma^\nu(\gamma p + m)\gamma_\mu(\gamma p - \gamma k' + m)\gamma_\nu\right)}{4(s-m^2)(u-m^2)} \\
 &= \frac{2m^2}{(s-m^2)(u-m^2)} [4m^2 + (s-m^2) + (u-m^2)] \quad (2.77)
 \end{aligned}$$

即微分散射截面可完全由 Mandelstam 协变量表述。将其代入微分散射截面中有

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= 8\pi r_e^2 \frac{m^2 dt}{(s-m^2)^2} \\
 &\left[\left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{s-m^2} + \frac{m^2}{u-m^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{u-m^2}{s-m^2} + \frac{s-m^2}{u-m^2} \right) \right] \quad (2.78)
 \end{aligned}$$

在不同坐标系中均由洛伦兹协变量 $s-m^2$ 及 $u-m^2$ 决定截面形式。

1. 静止电子散射

首先考虑在实验室坐标系中电子静止情况, 此时电子 4-动量为 $p = (m, 0)$, 有

$$\begin{aligned}
 s - m^2 &= 2pk = 2m\omega \\
 u - m^2 &= -2pk' = -2m\omega' \quad (2.79)
 \end{aligned}$$

由式 (1.67), 康普顿散射过程 4-动量守恒有

$$p + k - k' = p' \quad (2.80)$$

等式两侧平方并代入 $p^2 = p'^2 = m^2$, 得到

$$pk - pk' - kk' = m(\omega - \omega') - \omega\omega'(1 - \cos\theta) = 0 \quad (2.81)$$

θ 为入射及散射光子间动量夹角。此即康普顿效应公式。由式(1.68), Mandelstam 变量 $t = -2k'k = -2\omega'\omega(1 - \cos \theta)$, 将式(1.81)代入其微分关系中有

$$dt = 2\omega'^2 d \cos \theta = \frac{1}{\pi} \omega'^2 d\theta' \quad (2.82)$$

代入微分散射截面(1.78)有

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_e^2 \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} - \sin^2 \theta \right) d\theta' \quad (2.83)$$

当入射光能量满足 $\omega \ll m$ 时, 近似有 $\omega' \approx \omega$, 此时微分散射截面为

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \theta) d\theta' \quad (2.84)$$

此即低能汤普逊微分散射截面公式。将散射角与散射光子能量关系(1.81)代入微分散射截面中可得到其散射能谱

$$d\sigma = \pi r_e^2 \frac{m d\omega'}{\omega^2} \left[\frac{\omega}{\omega'} + \frac{\omega'}{\omega} + \left(\frac{m}{\omega'} - \frac{m}{\omega} \right)^2 - 2m \left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega} \right) \right] \quad (2.85)$$

为简便, 定义两个新的洛伦兹协变量

$$x = \frac{s - m^2}{m^2} = \frac{2\omega}{m}, \quad y = \frac{m^2 - u}{m^2} = \frac{2\omega'}{m} \quad (2.86)$$

则散射总截面为

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{8\pi r_e^2}{x^2} \int_{\frac{x}{x+1}}^x \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right] dy \\ &= 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left[\left(1 - \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} \right) \log(1+x) + \frac{1}{2} + \frac{8}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.87)$$

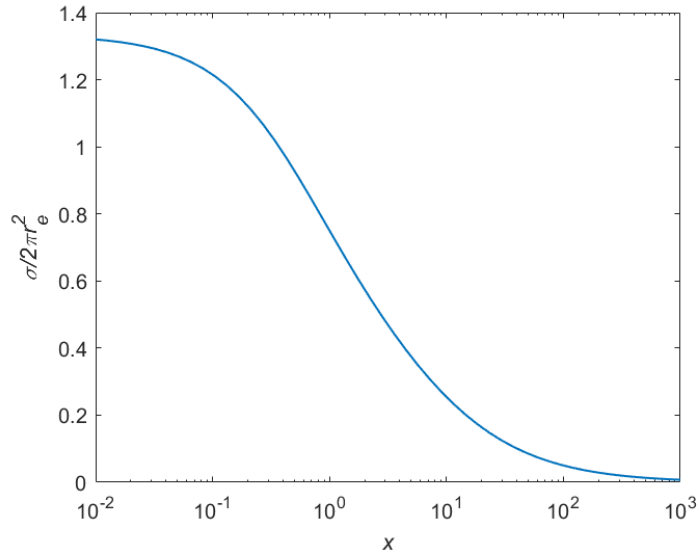
非相对论情况 ($x \ll 1$) 下, 截面为

$$\sigma = \frac{8\pi r_e^2}{3} (1 - x) \quad (2.88)$$

此即低能汤普逊散射截面公式。在相对论情况 ($x \gg 1$) 下, 截面为

$$\sigma = 2\pi r_e^2 \frac{1}{x} \left(\log(1+x) + \frac{1}{2} \right) \quad (2.89)$$

由式(1.87), 截面随入射光能量增加而逐渐减小, 散射截面 $\sigma - x$ 曲线如图 1 所示。

图 3 在实验室参考系下静止电子的微分散射截面 σ 随 x 变化曲线

2. 高能电子散射

现考虑实验室坐标系中入射电子具有能量 E_e 的情况，此时电子 4-动量为 $p = (E_e, \mathbf{p})$ ，实验室坐标下洛伦兹协变参数为

$$\begin{aligned} s - m^2 &= 2pk = 2(E_e\omega - |\mathbf{p}|\omega \cos \theta_i) \\ u - m^2 &= -2pk' = -2(E_e\omega' - |\mathbf{p}|\omega' \cos \theta_f) \\ t &= -2kk' = -2\omega\omega'(1 - \cos \theta_s) \end{aligned} \quad (2.90)$$

其中 θ_i 、 θ_f 分别为入射、散射光子与入射电子动量间的夹角。由 4-动量守恒 $p + k - k' = p'$ ，等式两边平方得

$$(E_e\omega - |\mathbf{p}|\omega \cos \theta_i) - (E_e\omega' - |\mathbf{p}|\omega' \cos \theta_f) - \omega\omega'(1 - \cos \theta_s) = 0 \quad (2.91)$$

即散射光子能量为

$$\omega' = \frac{\omega(E_e - |\mathbf{p}| \cos \theta_i)}{(E_e - |\mathbf{p}| \cos \theta_f) + \omega(1 - \cos \theta_s)} \quad (2.92)$$

现考虑光子-电子对撞式散射过程，此对撞模式下有 $\theta_i = \pi$ ， $\theta_s = \pi - \theta_f$ ，散射光子能量为

$$\omega' = \frac{\omega(E_e + |\mathbf{p}|)}{(E_e - |\mathbf{p}| \cos \theta_f) + \omega(1 + \cos \theta_f)} \quad (2.93)$$

利用质能公式 (1.43)，有

$$\omega' = \frac{\omega E_e \left(1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{E_e^2}} \right)}{E_e \left(1 - \cos \theta_f \sqrt{1 - \frac{m^2}{E_e^2}} \right) + \omega (1 + \cos \theta_f)} \triangleq \frac{\omega E_e (1 + \delta)}{E_e (1 - \cos \theta_f \delta) + \omega (1 + \cos \theta_f)} \quad (2.94)$$

其中定义 δ 因子为

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{m^2}{E_e^2}} \quad (2.95)$$

由式 (2.94)，我们可以通过使入射光与高能电子进行正对撞式的散射过程来大幅增强散射光能量，发射出高能光子束，即完成激光康普顿散射。以下，令入射光中心波长为 $\lambda_0 = 10^{-6}m$ ，即入射光子能量约为 1.24eV 时观察不同散射角 θ_f 处散射光子能量随入射电子能量变化而变化的趋势，结果如图 4 所示。

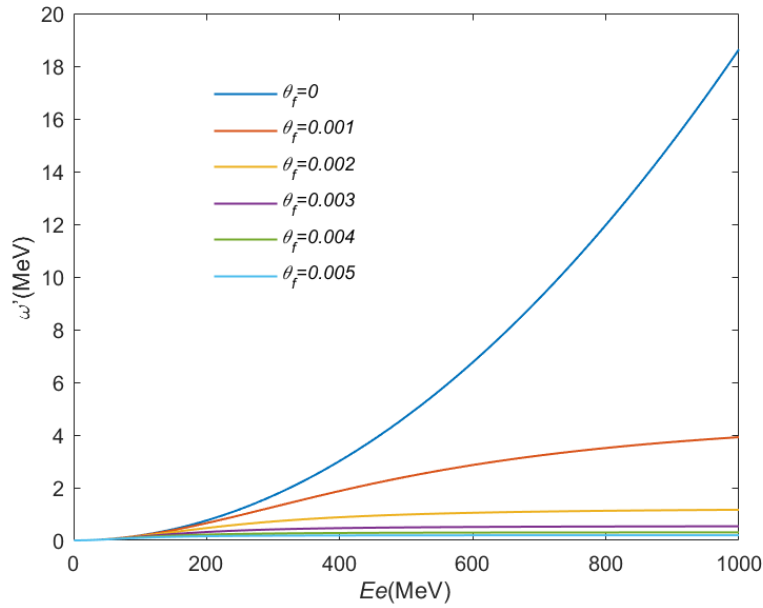


图 4 入射光子 $\omega = 1.24MeV$ 时散射光子能量与高能电子束能量关系图

由图 4，随着散射角 θ_f 的增大，散射光子能量迅速减小，高能光子集中在很小的 θ_f 空间范围内。完全背散射光子（即 $\theta_f = 0$ ）能量随电子束能量升高不断上升。对于 $\theta_f \neq 0$ 的散射光子，电子束能量升高时 $\delta \rightarrow 1$ ，散射光子能量逐渐趋于饱和值 $\omega' = \omega/(1 - \cos \theta)$ 。

三、偏振光子散射的散射截面

下面回到式 (2.72) 来考察当考虑入射及散射光子偏振时的散射截面形式。在本章第一节中讨论过，光子的偏振密度矩阵可通过满足式 (2.9) 的两单位 4-矢量 $e^{(1)}$ 、 $e^{(2)}$ 作为基矢来表述。在同时考入射及散射光子时，为能用同一组正交基同时表示它们的偏振态，可将 $e^{(1)}$ 、 $e^{(2)}$ 选取为如下形式^[11]：

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= \frac{N}{\sqrt{(-N)^2}} \\ e^{(2)} &= \frac{P}{\sqrt{(-P)^2}} \end{aligned} \quad (2.96)$$

其中 N 、 P 为通过电子及光子动量构造的 4-矢量，满足

$$\begin{aligned} K^\lambda &= k^\lambda + k'^\lambda \\ q^\lambda &= k'^\lambda - k^\lambda = p^\lambda - p'^\lambda \\ p^\lambda &= (p^\lambda + p'^\lambda) - \frac{K^\lambda(pK + p'K)}{K^2} \\ N^\lambda &= e^{\lambda\mu\nu\rho} P_\mu q_\nu K_\rho \end{aligned} \quad (2.97)$$

散射矩阵元 $Q^{\mu\nu}$ 可视为某 4-张量的构成元。在该定义下，任意的 4-张量中的元素均可通过将其投影到四个相互正交的 4-矢量（例如式中定义的 P 、 N 、 q 、 K ）得到。由于光子偏振密度矩阵 $\rho_{\mu\nu}^\gamma$ 及 $\rho_{\mu\nu}^{\gamma'}$ 仅由 $e^{(1)}$ 、 $e^{(2)}$ 作为基矢来表述，故仅含沿 4-矢量 P 及 N 的分量。因此仅需考虑张量沿这两个 4-矢量的分量：将 $Q_{\mu\nu}$ 展开为

$$\begin{aligned} Q_{\mu\nu} &= Q_0(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}) + Q_1(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}) \\ &\quad - iQ_2(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(2)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(1)}) + Q_3(e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)}) \end{aligned} \quad (2.98)$$

将式 (2.71) 中的 $Q^{\mu\nu}$ 用 P 、 N 、 q 、 K 表示，有

$$Q^{\mu\nu} = \gamma^\mu \frac{1}{2} \frac{\gamma P + m}{s - m^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{1}{2} \frac{\gamma P + m}{u - m^2} \gamma^\mu - \frac{1}{t} [\gamma^\mu (\gamma K) \gamma^\nu - \gamma^\nu (\gamma K) \gamma^\mu] \quad (2.99)$$

将其沿 P 及 N 投影并比较系数，可以得到

$$Q_0 = -ma_+, Q_1 = \frac{1}{2}ia_+\gamma^5(\gamma K), Q_2 = -ma_+\gamma^5, Q_3 = ma_+ + \frac{1}{2}a_-(\gamma K) \quad (2.100)$$

其中

$$a_\pm = \frac{1}{s - m^2} \pm \frac{1}{u - m^2} \quad (2.101)$$

由于 Q 由 $e^{(1)}$ 、 $e^{(2)}$ 作为基矢来表述，与式 (2.13) 同理，可将其用 Pauli 矩阵展开为

$$Q = Q_0 + \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.102)$$

在定义 Dirac 共轭 $\overline{Q}_{\mu\nu} = \gamma^0 Q_{\mu\nu}^\dagger \gamma^0$ 下，同理有

$$\overline{Q} = \overline{Q}_0 + \overline{\mathbf{Q}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.103)$$

其中根据 Dirac 矩阵满足的代数关系，有

$$\overline{Q}_0 = Q_0, \overline{Q}_1 = -Q_1, \overline{Q}_2 = -Q_2, \overline{Q}_3 = Q_3$$

由式 (2.72)，当光子被非极化电子散射时，散射振幅为

$$|M_{fi}|^2 = 16\pi^2 e^4 \text{tr} \left(\rho^{e'} \rho_{\lambda\mu}^\gamma Q^{\mu\nu} \rho^e \rho_{\nu\sigma}^\gamma \overline{Q}^{\sigma\lambda} \right) \quad (2.104)$$

在散射前后 4-动量分别为 p 、 p' 时，非极化电子的极化密度矩阵分别为

$$\begin{aligned} \rho_e &= \frac{1}{2}(\gamma p + m) \\ \rho_e' &= \frac{1}{2}(\gamma p' + m) \end{aligned} \quad (2.105)$$

设散射前后光子偏振密度矩阵分别为

$$\begin{aligned} \rho_{\mu\nu}^\gamma &= \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ \rho_{\mu\nu}^{\gamma'} &= \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\xi}' \cdot \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned} \quad (2.106)$$

其中， $\boldsymbol{\xi}$ 、 $\boldsymbol{\xi}'$ 分别为入射光和散射光各自坐标系中选取一定 $\xi - \eta$ 坐标系时的 Stocks 参数。换句话说， $\boldsymbol{\xi}'$ 并不是探测器探测到的光子的 Stocks 参数。为了能够在实验室坐标系下探测到散射光的偏振状态，需进行 Stocks 参数的坐标变换，详见第三章第一节。另由 Pauli 矩阵与矢量的内积满足

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.107)$$

将式 (2.99) 一式 (2.107) 代入洛伦兹协变的微分散射截面 (2.78) 中，经化简，可得光子散射至 $\boldsymbol{\xi}'$ 的微分散射截面为

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{2} d\overline{\sigma} + 2r_e^2 \frac{dy d\phi}{x^2} \left\{ (\xi_3 + \xi_3') \left[-\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \right] + \xi_1 \xi_1' \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \xi_2 \xi_2' \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{y} \right) + \xi_3 \xi_3' \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.108)$$

其中 $d\overline{\sigma}$ 为对非偏振光子的微分散射截面，在实验室坐标系中有

$$\begin{aligned}
d\sigma = \frac{2r_e^2}{x^2} & \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - (\xi_3 + \xi_3') \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] \right. \\
& + \xi_1 \xi_1' \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) + \xi_2 \xi_2' \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{y} \right) \\
& \left. + \xi_3 \xi_3' \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2} \right] \right\} dy d\phi
\end{aligned} \tag{2.109}$$

其中 x 、 y 为式(2.86)中定义的洛伦兹协变量。若不考虑散射光子的偏振状态,即令 $\xi' = 0$,微分散射截面具有形式

$$d\sigma(\xi) = \frac{4r_e^2}{x^2} \left\{ (1 - \xi_3) \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right\} dy d\phi \tag{2.110}$$

同理,由非偏振光子入射($\xi = 0$)探测到偏振光子的散射截面具有形式

$$d\sigma(\xi') = \frac{4r_e^2}{x^2} \left\{ (1 - \xi_3') \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) \right\} dy d\phi \tag{2.111}$$

由

$$dy = d \left[\frac{2\omega' E_e (1 - \delta \cos \theta_f)}{m^2} \right] = \frac{2\omega\omega' \sin \theta_f d\theta_f}{m^2} \tag{2.112}$$

微分散射截面为

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{\sin \theta_f d\theta_f d\phi} = \frac{4\omega\omega' r_e^2}{m^2 x^2} & \left\{ \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) - (\xi_3 \right. \\
& + \xi_3') \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] + \xi_1 \xi_1' \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) \\
& \left. + \xi_2 \xi_2' \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{y} \right) + \xi_3 \xi_3' \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.113}$$

以上,我们从量子电动力学框架出发,成功推得了偏振光子与电子散射的微分散射截面,在下一章中我们将对各种偏振入射光情形下的辐射场进行数值模拟。值得注意的是,式(2.113)中未考虑电子极化,当能量尺度继续增大到一定数量级时,电子极化对散射过程调控作用明显,式(2.72)所示的散射振幅将有一定变化。

第三章 康普顿散射辐射场的数值模拟

第一节 模拟中的坐标变换与简化

一、坐标变换与参数假设

由于式 (2.109) 推导得到的微分散射截面公式是洛伦兹协变的, 即在任意参考系下可由洛伦兹不变量表示, 我们选取实验室坐标对入射光与散射光的偏振状态 (即 Stocks 参数) 进行表示。由图 5 所示, 实验室坐标系以电子入射的惯性坐标系 (x_e, y_e, z_e) 进行表示, 其中 z_e 轴方向为电子入射方向。入射、散射光本征坐标系 (右手系) 分别为 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 、 $(\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{z}')$, 波矢 \mathbf{k}, \mathbf{k}' 构成散射平面, 其矢量方向分别为 \tilde{z} 轴及 \tilde{z}' 轴方向。 \tilde{x} 轴及 \tilde{x}' 轴重合, 且均垂直于散射平面。 \tilde{y} 轴及 \tilde{y}' 轴方向由右手系方向确定, 几何关系如图 5 所示。

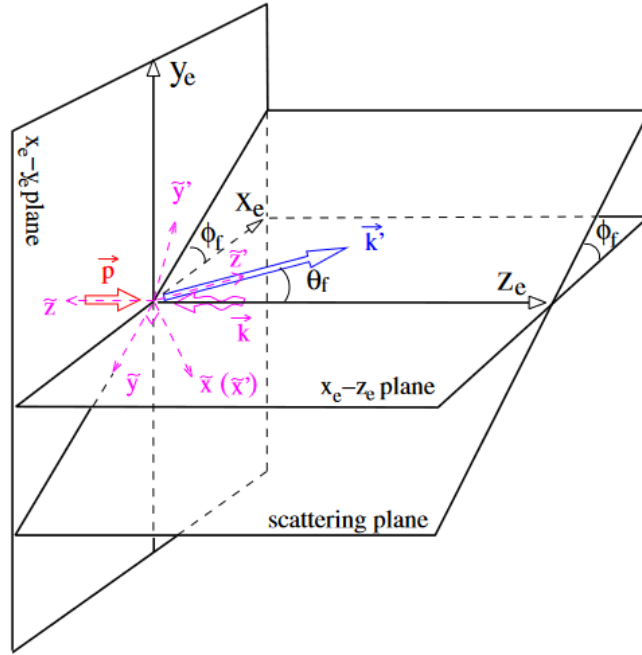


图 5 标准参考系及表示符号示意图^[12]

式 (2.109) 中的 Stocks 参数均在入射、散射光子的本征坐标系中定义。在第二章第四节中曾讨论过, 高能电子与激光正碰散射的过程在很小的背散射空间角 ($\cos \theta_f \rightarrow 1$) 内产生高能光子, 这使得我们可以在同一个坐标系 (x_e, y_e, z_e) 中对 Stocks 参数近似表示。根据 L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz 在场论中的描述^[10], 当入射光入射方向 \tilde{z} 轴与 z_e 轴夹角为 2π 时, 其 Stocks 参数可近似表示为

$$\begin{aligned}
\xi_1 &\approx P_t \sin(2\tau - 2\phi_f) \\
\xi_2 &\approx P_c \\
\xi_3 &\approx -P_t \cos(2\tau - 2\phi_f)
\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中 P_t 、 P_c 分别为实验室坐标系中度量线偏振及圆偏振的参数， τ 为 P_t 表示的偏振方向与 x_e 轴间的夹角， ϕ_f 为散射平面与 $x_e - z_e$ 面间的夹角，如图 5 所示。

二、微分散射截面公式变换

根据以上的参数替换，令入射激光在上述实验室坐标系 (x_e, y_e, z_e) 中线偏振参数为 P_t 、圆偏振参数为 P_c 。为简化公式，令参数 P_t 表示的偏振方向与 x_e 轴间夹角为 $\tau = 0$ ，则将入射光 Stocks 参数表示为

$$\begin{cases} \xi_1 \approx -P_t \sin 2\phi_f \\ \xi_2 \approx P_c \\ \xi_3 \approx -P_t \cos 2\phi_f \end{cases} \tag{3.2}$$

上节已说明 ϕ_f 为散射平面与 $x_e - z_e$ 面间的夹角。为使在测量散射光 Stocks 参数时，测量方向与入射光在同一个实验室坐标系 (x_e, y_e, z_e) 中相协调，需要首先在其中定义散射光在 (x_e, y_e, z_e) 坐标系内 Stocks 参数为 $\overline{\xi}_1'$ 、 $\overline{\xi}_2'$ 、 $\overline{\xi}_3'$ ，该操作等价于令探测器探测方向与实验室坐标系相协调以便于测量。为了将其变换至散射光子自身坐标系 (x', y', z') 中，并考虑到散射角满足 $\theta_f \ll 1$ ，通过三维坐标变换关系式有

$$\begin{cases} \xi_1' \approx -\overline{\xi}_1' \cos 2\phi_f + \overline{\xi}_3' \sin 2\phi_f \\ \xi_2' \approx -\overline{\xi}_2' \\ \xi_3' \approx -\overline{\xi}_1' \sin 2\phi_f - \overline{\xi}_3' \cos 2\phi_f \end{cases} \tag{3.3}$$

代入微分散射截面公式 (2.113) 有

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(\xi, \xi')}{\sin\theta_f d\theta_f d\phi} = & \frac{4\omega\omega' r_e^2}{m^2} \frac{1}{x^2} \left\{ \left[1 + (P_t \cos 2\phi_f + \bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f + \bar{\xi}_3' \cos 2\phi_f) \right. \right. \\
& + P_t (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f \cos 2\phi_f + \bar{\xi}_3' \cos^2 2\phi_f) \left. \right] \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right] \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \left[1 - P_c \bar{\xi}_2' \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{y} \right) \right] + \frac{1}{2} P_t (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f \cos 2\phi_f \\
& + \bar{\xi}_3' \cos^2 2\phi_f) + P_t (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f \cos 2\phi_f \\
& - \bar{\xi}_3' \sin^2 2\phi_f) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) \left. \right\} \quad (3.4)
\end{aligned}$$

其中 r_e 为电子的经典半径。

第二节 高能辐射场的数值模拟

一、总辐射场的空间分布及能谱

当仅考虑散射光在远场处的强度分布而不考虑其偏振状态时，等同于令散射光子为非偏振光子，其 Stocks 参数为

$$\xi_1' = \xi_2' = \xi_3' = 0$$

代入式 (3.4)，微分散射截面表达式为

$$\frac{d\sigma(\xi, \xi')}{\sin\theta_f d\theta_f d\phi_f} = \frac{4\omega\omega' r_e^2}{m^2} \frac{1}{x^2} \left\{ \left[1 + P_t \cos 2\phi_f \right] \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \right\} \quad (3.5)$$

即微分散射截面 $d\sigma(\xi, \xi')$ 仅由入射光的线偏振强度 P_t 及散射面夹角 ϕ_f 决定。其中 Lorentz 不变量 x 、 y 在实验室坐标系中分别为

$$\begin{aligned}
x &= \frac{s - m^2}{m^2} = \frac{2\omega E_e (1 + \delta)}{m^2} \\
y &= \frac{m^2 - u}{m^2} = \frac{2\omega' E_e (1 - \delta \cos \theta_f)}{m^2} \quad (3.6)
\end{aligned}$$

根据式 (3.5)，由于圆偏振光偏振强度 $P_t = 0$ ，其在散射面上的强度分布应与散射平面夹角 ϕ_f 无关，具有空间对称性。当 $P_t \neq 0$ ，散射强度由 ϕ_f 及散射角 θ_f 共同决定，在散射平面的不对称性将由 P_t 绝对值的大小决定。

以下对远场处散射场空间分布进行数值模拟。令入射光中心波长为 $\lambda_0 = 10^{-6}m$ ，即入射光子能量为 $1.24eV$ 。另令入射电子束能量为 $1GeV$ ，在距离散射点 $60m$ 处的 $100mm \times 100mm$ 平面上的相对散射强度分布如图6所示。

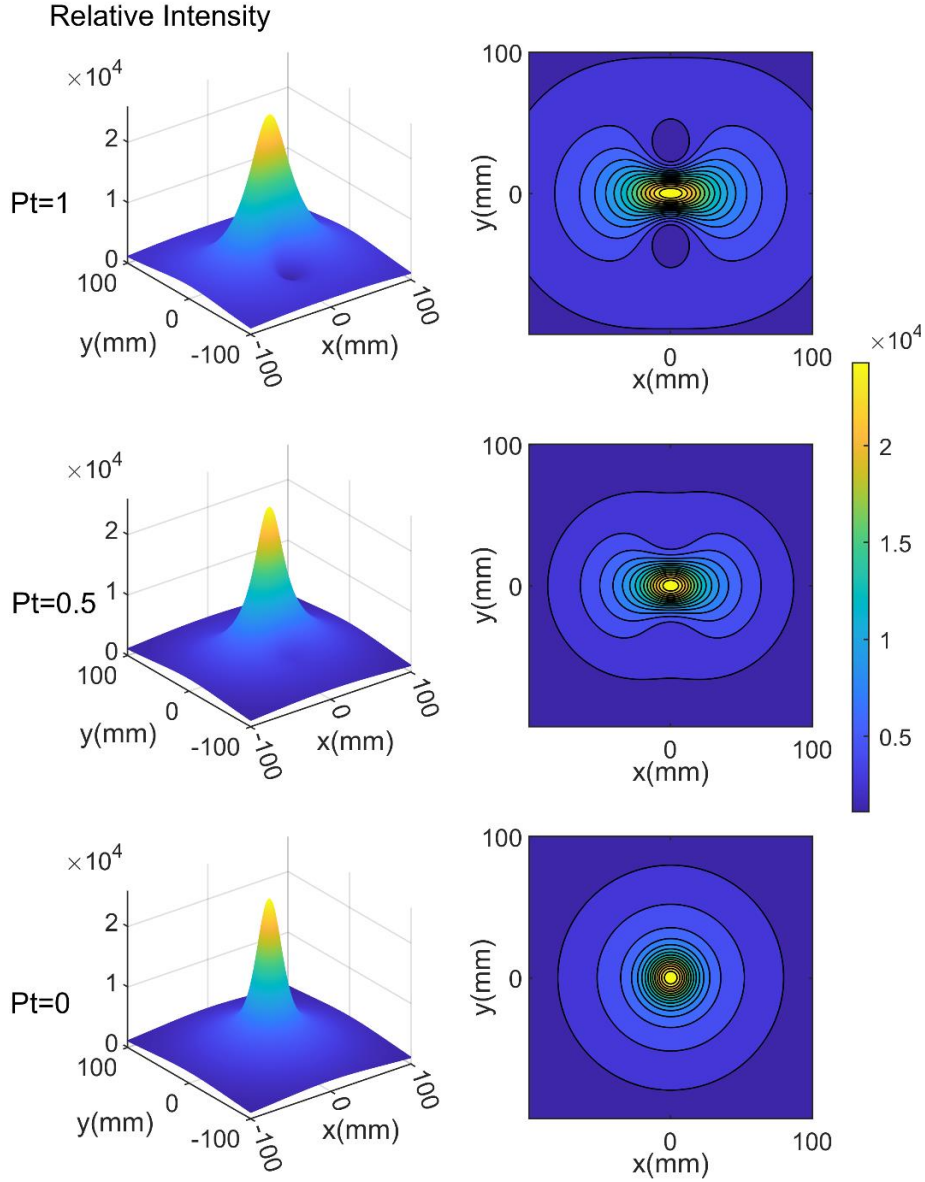


图 6 入射光子能量为 $1.24eV$ ，入射电子束能量为 $1GeV$ 时距离散射点 $60m$ 处 $100mm \times 100mm$ 平面上的相对散射强度分布及等高线图

以坐标轴 x 方向为 P_t 表示的入射光的偏振方向，图6分别给出了入射沿 x 轴线偏光($P_t = 1$)、椭圆偏振光($P_t = 0.5$)及圆偏光($P_t = 0$)时远场处 $100mm \times 100mm$ 辐射面上的辐射强度分布及其等高线图。与前文中根据散射截面公式的预测相同，圆偏振光入射时散射光强度各向同性，等高线为一系列同心圆环，并且辐

射强度随散射角 θ_f 减小而迅速减小,在中心处形成散射峰。当以线偏振光入射时,能量在空间内重新分布:辐射强度沿偏振方向集中分布,垂直偏振方向上强度下降梯度较大,等高线为哑铃型。同时在偏振垂直方向上形成两个低辐射能量区。对于处于中间态的椭圆偏振光,辐射强度分布的非均匀性随线偏振参数 P_t 的升高而增大。对于以上的所有模拟情况,高能射线均分布在很小的散射角内。

由式(2.91),散射角 θ_f 与辐射光子能量有微分关系

$$d \cos \theta_f = \frac{\omega E_e (1 + \delta)}{\omega - \delta E_e} d \left(\frac{1}{\omega'} \right) \quad (3.7)$$

代入微分散射截面公式(3.4)内,有

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma(\xi, \xi')}{-\frac{\omega E_e (1 + \delta)}{\omega - \delta E_e} d \left(\frac{1}{\omega'} \right) d\phi_f} \\ &= \frac{4\omega\omega' r_e^2}{m^2} \frac{1}{x^2} \left\{ [1 + P_t \cos 2\phi_f] \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

故散射光的能谱具有形式

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\xi, \xi')}{d\omega'} &= \frac{4\omega^2 r_e^2 E_e (1 + \delta)}{m^2 (\omega - \delta E_e)} \frac{1}{x^2(\omega)} \frac{1}{\omega'} \int_0^{2\pi} d\phi_f \left\{ \left[\left(\frac{1}{x(\omega)} - \frac{1}{y(\omega, \omega')} \right)^2 + \frac{1}{x(\omega)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{y(\omega, \omega')} \right] [1 + P_t \cos 2\phi_f] + \frac{1}{4} \left(\frac{y(\omega, \omega')}{x(\omega)} + \frac{x(\omega)}{y(\omega, \omega')} \right) \right\} \\ &= \frac{8\pi\omega^2 r_e^2 E_e (1 + \delta)}{m^2 (\omega - \delta E_e)} \frac{1}{x^2(\omega)} \frac{1}{\omega'} \left\{ \left[\left(\frac{1}{x(\omega)} - \frac{1}{y(\omega, \omega')} \right)^2 + \frac{1}{x(\omega)} - \frac{1}{y(\omega, \omega')} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{y(\omega, \omega')}{x(\omega)} + \frac{x(\omega)}{y(\omega, \omega')} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

其中 Lorentz 协变量 $y(\omega, \omega')$ 表达式为

$$\begin{aligned} y(\omega, \omega') &= \frac{2\omega' E_e (1 - \delta \cos \theta_f)}{m^2} \\ &= \frac{2\omega' E_e \left[1 - \delta \left(\frac{\omega E_e (1 + \delta) - \omega' E_e - \omega' \omega}{\omega' (\omega - \delta E_e)} \right) \right]}{m^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

即散射光总能谱与入射光具体偏振态无关,仅由入射光子能量 ω 及电子束能量 E_e 决定。由式(3.9),当入射光中心波长为 $\lambda_0 = 10^{-6}m$ (即入射光子能量为 1.24eV,

下同)、入射电子束能量为 1GeV 时, 考虑在散射角为 $\theta_f = 0.0005$ 范围内的空间角中的辐射高能光子能谱, 如图 7 所示

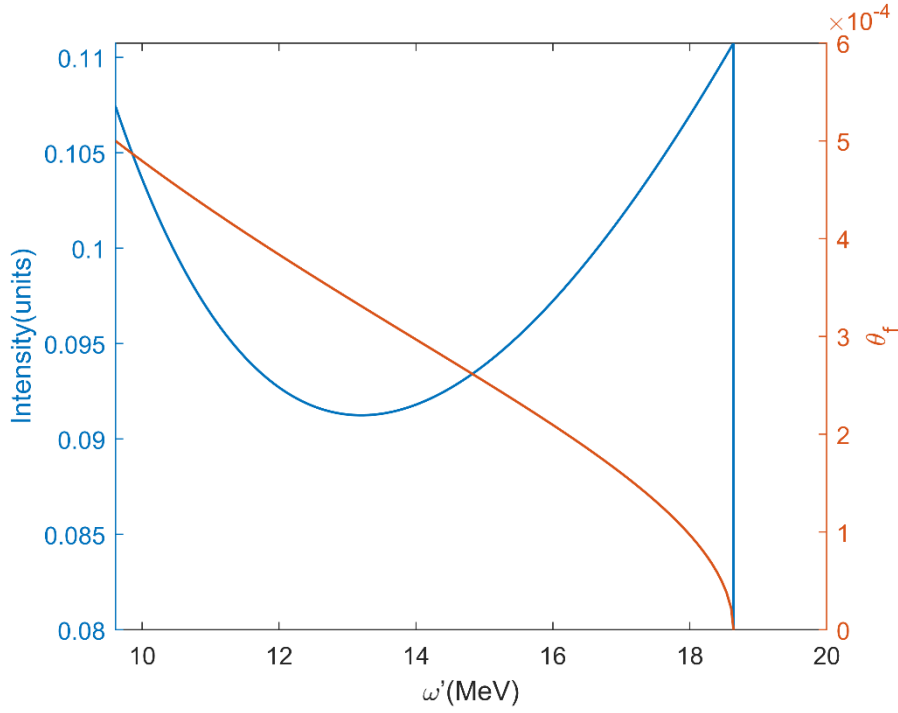


图 7 入射光子能量为 1.24eV、电子束能量为 1GeV, 蓝线为在散射角为 $\theta_f = 0.0005$ 内的空间角中的电子辐射高能光子归一化能谱, 橙线为辐射光子能量对应的散射角。

由图, 横坐标为散射光子能量 (单位为 MeV), 背散射光子在最大能量 18.64MeV 处形成辐射极值, 归一化强度为 1。在约 13MeV 以下由于相应能量的高能光子辐射空间角较大, 总散射强度上升, 对应散射角约为 0.0003。

二、辐射场中各偏振分量的空间及能量分布

由于微分散射截面是 Lorentz 协变的, 可在实验室坐标系中得到不同偏振态入射光在远场处辐射场的各偏振分量的空间及能量分布。为方便研究, 后文模拟中将入射光均设为完全偏振光。

1. 线偏振光入射

首先考虑入射光为沿 x_e 轴偏振的线偏振光的辐射场。根据第一节中的坐标系简化方法, 入射光偏振参数为 $(P_t, P_c) = (1, 0)$ 。此时微分散射截面为

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma(\xi, \xi')}{\sin\theta_f d\theta_f d\phi} = & \frac{4\omega\omega' r_e^2}{m^2} \frac{1}{x^2} \left\{ \left[1 + (\cos 2\phi_f + \bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f + \bar{\xi}_3' \cos 2\phi_f) \right. \right. \\
& + (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f \cos 2\phi_f + \bar{\xi}_3' \cos^2 2\phi_f) \left. \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right] \right. \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \frac{1}{2} (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f \cos 2\phi_f + \bar{\xi}_3' \cos^2 2\phi_f) \\
& \left. \left. + (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f \cos 2\phi_f - \bar{\xi}_3' \sin^2 2\phi_f) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

故，散射场强度由散射平面夹角 ϕ_f 及散射角 θ_f 决定。令入射光中心波长为 $\lambda_0 = 10^{-6}m$ ，入射电子束能量为1GeV，在距离散射点60m处的100mm×100mm平面上分别探测散射光中沿 x_e 轴偏振分量、沿 y_e 轴偏振分量、沿 $x_e - y_e$ 轴45度夹角及其垂直方向偏振分量、左旋光分量及右旋光分量的空间强度分布。散射相对强度模拟结果如图8所示。

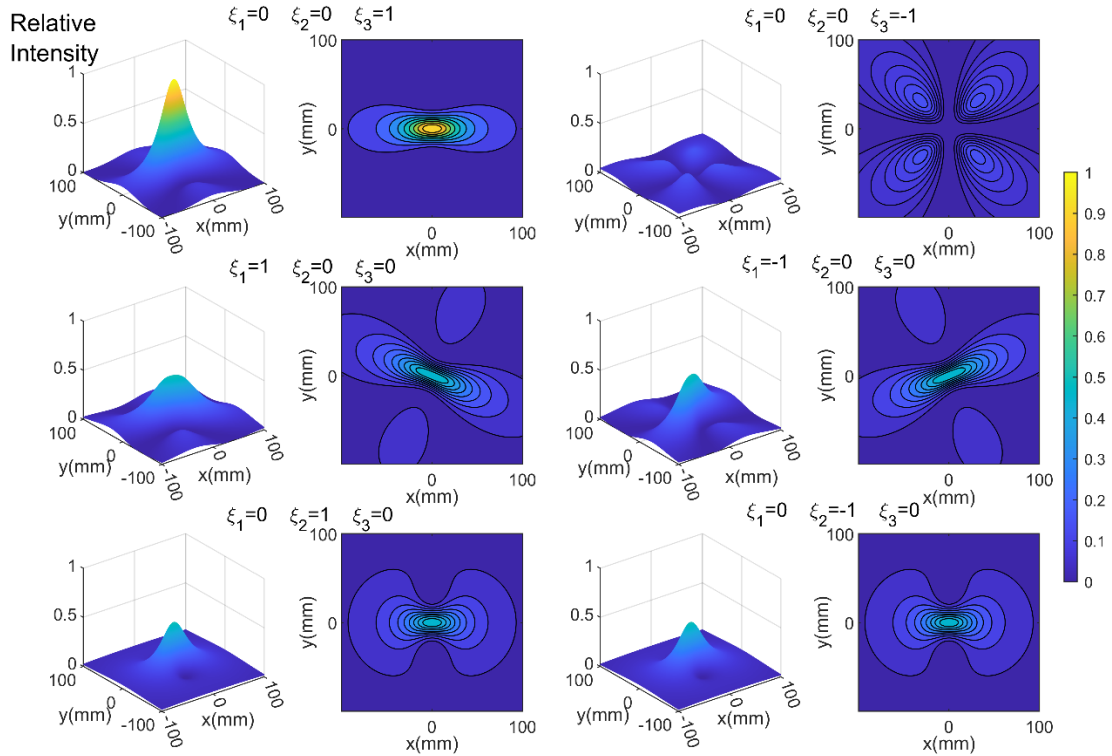


图 8 入射光偏振参数为 $(P_t, P_c) = (1, 0)$ 时各偏振分量在距离散射点60m处100mm×100mm平面上的相对辐射强度分布及等高线图。

由图，散射光中 Stocks 参数为 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 0, 1)$ 的光子为沿 x_e 轴的偏振分量，在空间上主要沿 x_e 轴分布并形成散射峰。模拟图中以其散射峰峰值为归一化

强度。散射峰半高全宽约为 62 mm。其沿 y_e 轴强度下降梯度较大，半高全宽约为 22.8 mm。参数为 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 0, -1)$ 的光子为沿 y_e 轴的偏振分量，其在 x_e 、 y_e 轴附近基本无分布，其四个散射强度峰相对中心对称分布，出现在与中心距离约 44 mm 处。参数分别为 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, 0, 0)$ 和 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (-1, 0, 0)$ 的光子为沿 $x_e - y_e$ 轴 45 度夹角及 135 度夹角的偏振分量，具有对称性。它们在空间上均沿与 x_e 轴约 30°左右夹角形成散射峰，散射峰值为沿 x_e 轴的偏振分量的 0.5 倍，半高全宽约为 46.3 mm。另外其在散射极大区域垂直方向形成两个幅度较小的散射区，由图 (6)，线偏振入射光在垂直偏振方向形成低能辐射区中主要由 45 度夹角及 135 度夹角内的线偏振光构成。参数分别为 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, 1, 0)$ 和 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (0, -1, 0)$ 的光子为左（右）旋偏振分量，它们在空间上具有相同分布，满足角动量守恒，均沿 x_e 轴分布并形成散射峰，其散射峰值约为沿 x_e 轴的偏振分量的 0.5 倍，强度等高线为哑铃型分布。两方向半高全宽与 x_e 轴偏振分量近似。

下考虑在散射角为 $\theta_f = 0.0015$ 内的空间角中以上各偏振态的高能光子能谱。由式 (3.11)，线偏振光入射时散射 Stocks 参数为 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 的偏振态光子能谱表达式为

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma(\xi, \xi')}{d\omega'} = & \frac{4\omega^2 r_e^2 E_e (1 + \delta)}{m^2 (\omega - \delta E_e)} \frac{1}{x^2(\omega)} \frac{1}{\omega'} \int_0^{2\pi} d\phi_f \left\{ [1 \right. \\
 & + (\cos 2\phi_f + \bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f + \bar{\xi}_3' \cos 2\phi_f) + (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f \cos 2\phi_f \\
 & + \bar{\xi}_3' \cos^2 2\phi_f)] \left[\left(\frac{1}{x(\omega)} - \frac{1}{y(\omega, \omega')} \right)^2 + \frac{1}{x(\omega)} - \frac{1}{y(\omega, \omega')} \right] \\
 & + \frac{1}{4} \left(\frac{y(\omega, \omega')}{x(\omega)} + \frac{x(\omega)}{y(\omega, \omega')} \right) + \frac{1}{2} (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f \cos 2\phi_f + \bar{\xi}_3' \cos^2 2\phi_f) \\
 & \left. + (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f \cos 2\phi_f - \bar{\xi}_3' \sin^2 2\phi_f) \left(\frac{1}{x(\omega)} - \frac{1}{y(\omega, \omega')} + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

其中 Lorentz 协变量 $x(\omega)$ 、 $y(\omega, \omega')$ 分别由式 (3.6) 及式 (3.10) 给出。在考察的背散射空间角内能谱图如图 9。

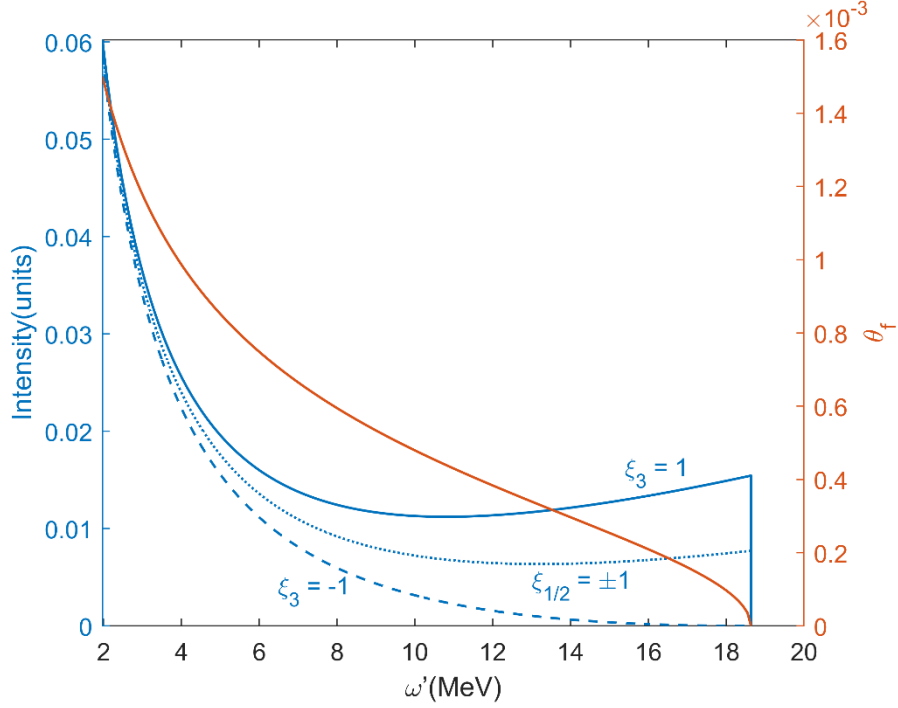


图 9 线偏光入射时 $\theta_f = 0.0015$ 内的空间角中的各偏振态高能光子能谱

由图，在散射角较大的低能光子区域（ $\theta_f > 0.001$ ，散射光子能量在 4MeV 以下）区间，各偏振态光子密度区别不大，并且由于辐射空间区域较广，计算得到的各分量谱密度均为较大值。随着散射角的减小，沿 y_e 轴的偏振分量（ $\xi_3 = -1$ ）谱密度逐渐下降至 0，即在靠近中心处基本没有沿 y_e 轴偏振的高能光子出现。沿 x_e 轴的偏振分量在 θ_f 下降至约 0.0005 弧度时谱密度上升，在完全背散射区域（ $\theta_f \sim 0$ ）处占主要地位。其余各分量（即 Stocks 参数 $\xi_3 = 0$ ）能谱曲线相同， θ_f 下降至约 0.0003 时谱密度上升，在背散射处谱密度约为沿 x_e 轴的偏振分量的一半。

线偏振光具有性质上的对称性。同样，当入射光为沿 y_e 轴偏振的线偏振光时，相应偏振参数为 $(P_t, P_c) = (-1, 0)$ ，其辐射场形式应与图 8 所示情况正交。相同参数设置下各分量空间分布如图 10 所示。

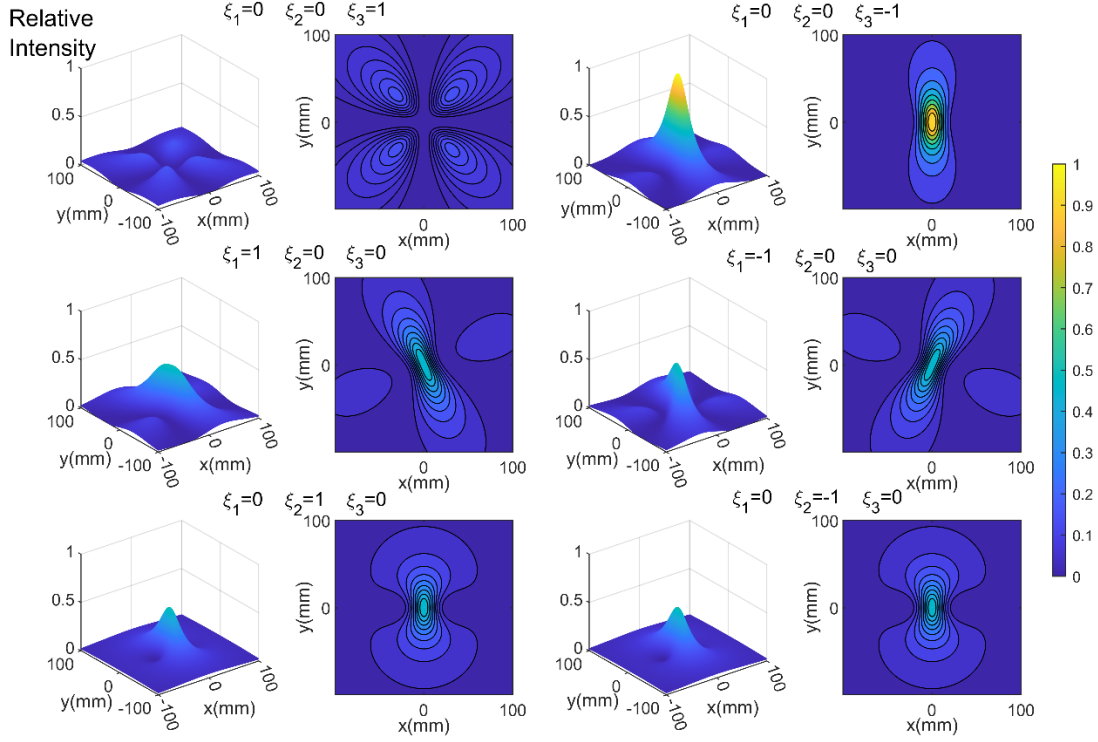


图 10 入射光偏振参数为 $(P_t, P_c) = (-1, 0)$ 时各偏振分量在距离散射点 60m 处 $100\text{mm} \times 100\text{mm}$ 平面上的相对辐射强度分布及等高线图

综合以上两种模拟结果可以推断，当线偏振光入射时，若其偏振方向为 \mathbf{e} ，辐射场中沿该方向偏振分量及左旋、右旋光分量均会沿 \mathbf{e} 方向以辐射状形成散射峰，其余线偏振分量沿某一夹角相对 \mathbf{e} 对称分布，并形成两个小的散射区。由此，我们可以通过对远场散射光进行特定偏振的滤波实现对其散射后的空间构型的调控。

2. 圆偏振光入射

下考虑入射光为右旋圆偏振光时的远场辐射场分布。入射光偏振参数为 $(P_t, P_c) = (0, 1)$ ，此时微分散射截面为

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\xi, \xi')}{\sin\theta_f d\theta_f d\phi} &= \frac{4\omega\omega' r_e^2}{m^2} \frac{1}{x^2} \left\{ \left[1 + (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f + \bar{\xi}_3' \cos 2\phi_f) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \left[1 - \bar{\xi}_2' \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

同上，令入射光中心波长为 $\lambda_0 = 10^{-6}\text{m}$ ，入射电子束能量为 1GeV ，在距离散

射点 60 m 处的 100 mm×100 mm 平面上分别探测其散射光中沿 x_e 轴偏振分量、沿 y_e 轴偏振分量、沿 $x_e - y_e$ 45 度夹角及其垂直方向分量、左旋光分量及右旋光分量的空间强度分布。模拟结果如图所示。

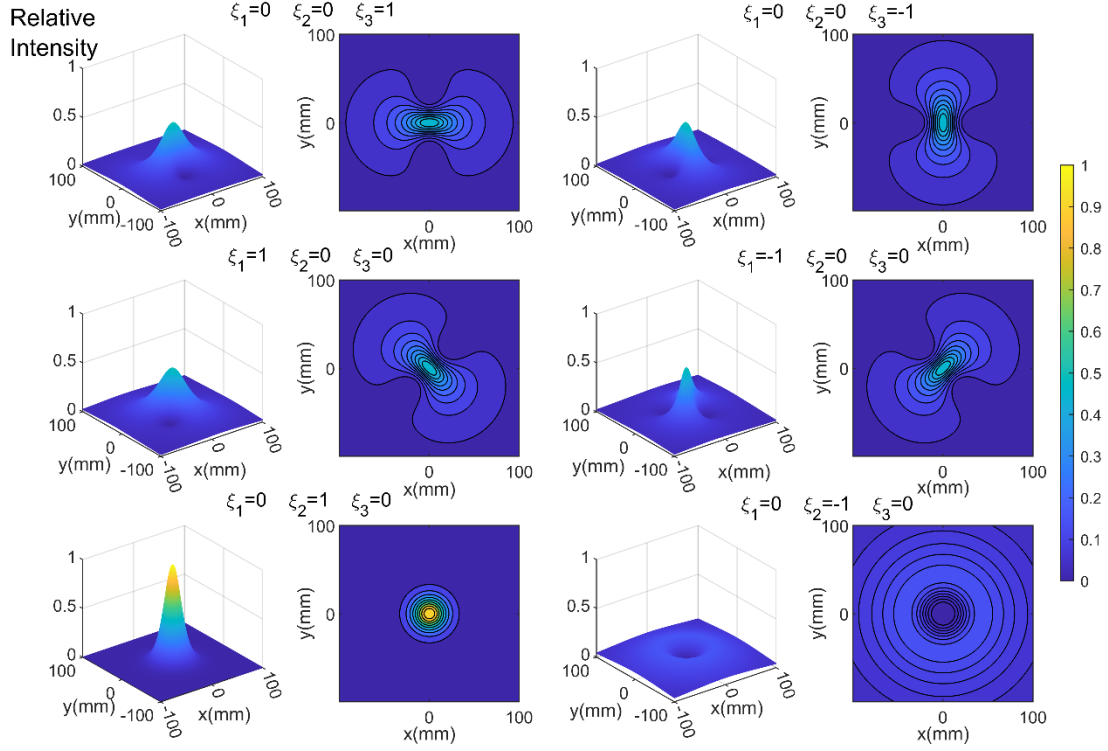


图 11 入射光偏振参数为 $(P_t, P_c) = (0, 1)$ 时各偏振分量在距离散射点 60m 处 100mm×100mm 平面上的相对散射强度分布及等高线图

由于圆偏振光具有空间旋转对称性，散射光中各线偏振分量分布均具有对称性与相似性。由图：任意线偏振分量均沿其偏振方向形成辐射峰，并在完全背散射处达到峰值。辐射强度等高线以哑铃状分布，偏振方向辐射峰的半值半宽约为 31.0 mm，垂直偏振方向的半值半宽约为 11.4mm。右旋圆偏振分量（ $\xi_2 = 1$ ）在小散射角度内占主要地位，形成各向同性的散射峰，其半高全宽为 17mm。有趣的是，右旋光散射峰的周围会出现一圈左旋分量（ $\xi_2 = -1$ ）的辐射环，其散射极大出现在与中心相距约 43.4mm 处。通过将其在全部散射光中进行偏振检出的方法或可在实验上实现远场的高能光子的环形辐射，且辐射环具有与入射光相反的圆偏方向。

与线偏振相同，考虑在散射角为 $\theta_f = 0.0015$ 空间角内的各偏振态的高能光子能谱，由式（3.13），圆偏振光入射时，散射 Stocks 参数为 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) 的偏振态光子能谱表达式为

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma(\xi, \xi')}{d\omega'} = & \frac{4\omega^2 r_e^2 E_e (1 + \delta)}{m^2 (\omega - \delta E_e)} \frac{1}{x^2(\omega)} \frac{1}{\omega'} \int_0^{2\pi} d\phi_f \left\{ \left[1 + (\bar{\xi}_1' \sin 2\phi_f + \bar{\xi}_3' \cos 2\phi_f) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left(\frac{y(\omega, \omega')}{x(\omega)} + \frac{x(\omega)}{y(\omega, \omega')} \right) \left[1 - \bar{\xi}_2' \left(1 + \frac{2}{x(\omega)} - \frac{2}{y(\omega, \omega')} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中 $x(\omega)$ 、 $y(\omega, \omega')$ 分别由式 (3.6) 及式 (3.10) 给出。在考察的背散射空间角内能谱图如图 12。

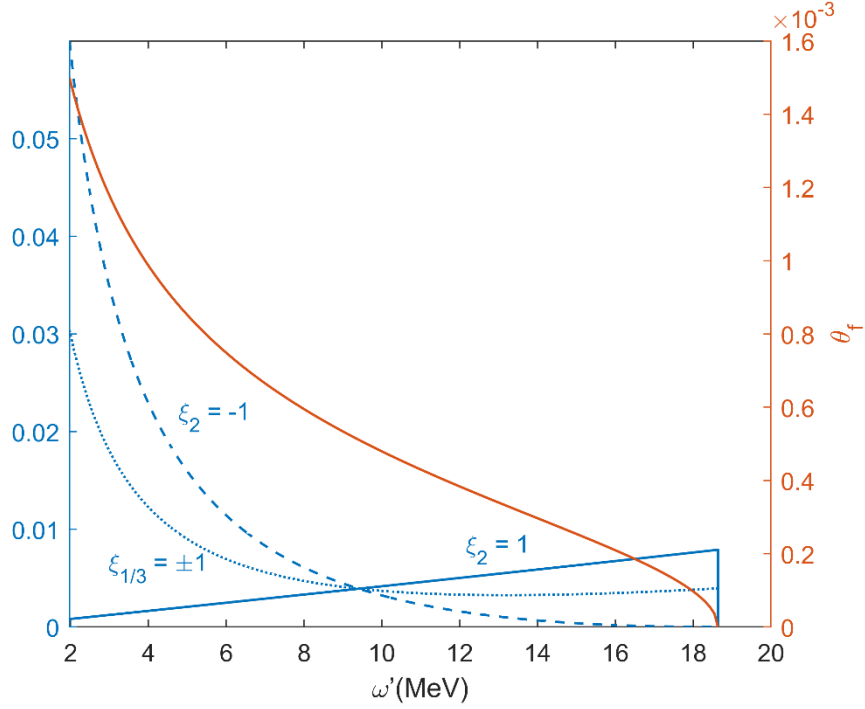


图 12 圆偏光入射时 $\theta_f = 0.0015$ 空间角内的各偏振态的高能光子能谱

由图，在低能光子区域右旋分量 ($\xi_2 = 1$) 谱密度较小，在散射角较大 ($\theta_f > 0.001$ ，散射光子能量在 4MeV 以下) 的区间内其余偏振分量谱密度远大于右旋分量，并且左旋分量 ($\xi_2 = -1$) 为主要组分。另外，各线偏振分量能谱相同，这与空间对称性相符。随着散射角逐渐减小，除右旋分量外其余偏振分量谱密度均逐渐下降，在在 θ_f 下降至约0.0005 (散射光子强度约为 9.5MeV) 时各分量占比相同，保持增长 (下降) 趋势至近背散射区域 ($\theta_f \sim 0$) 时，右旋分量占主导地位，且左旋分量基本无分布。

圆偏振光具有空间对称性，当入射光为左旋圆偏光时，偏振参数为 $(P_t, P_c) = (0, -1)$ ，其辐射场应与图 8 所示情况中所示的情况仅圆偏分量互补，其余相同。相同参数设置下各分量空间分布如图 13 所示。

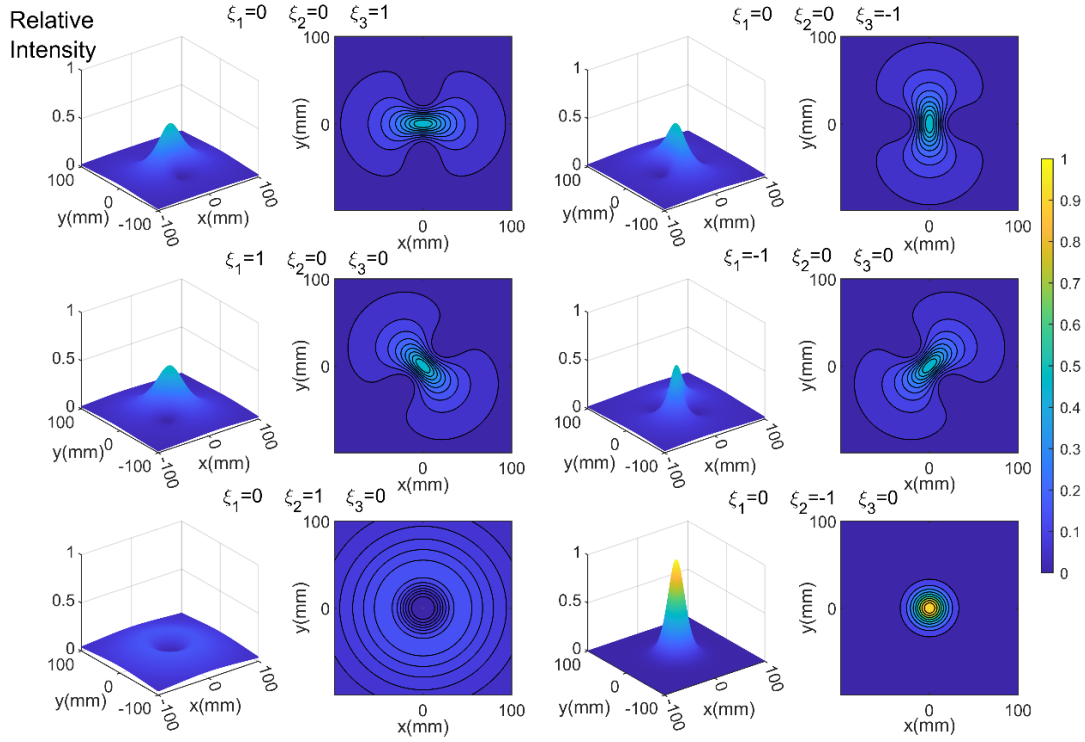


图 13 入射光偏振参数为 $(P_t, P_c) = (0, -1)$ 时各偏振分量在距离散射点 60m 处 $100\text{mm} \times 100\text{mm}$ 平面上的相对散射强度分布及等高线图

由上，圆偏振光入射时，同样可以通过对远场散射光进行特定偏振的滤波来对其散射的空间构型进行调控。

以上数值模拟仅讨论了特殊偏振态入射时辐射光强度的空间分布，理论上任意 Stocks 参数入射光的散射场均可由式 (3.4) 计算得到，图 14 展示了当线偏振分量 P_t 由 -1 变化至 1 时散射角 θ_f 为 0.0001、0.0002 及 0.0003 时线偏光 ($\xi_3 = 1$) 及右旋圆偏光 ($\xi_2 = 1$) 的强度变化曲面。其余情况均可由对称性推广得到。

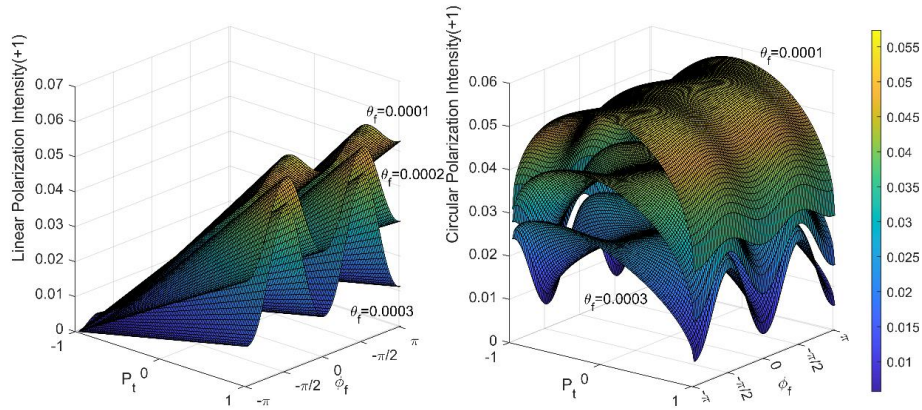


图 14 P_t 变化时不同散射角 θ_f 处线偏光 (左) 及右旋圆偏光 (右) 的强度变化曲面

第四章 PIC 软件 Smilei 应用与粒子仿真模拟

第一节 PIC 软件简介及算法基础

一、软件简介

Particle In Cell (PIC) 是一种计算电磁学的模拟方法，随着上世纪计算机技术的飞速发展，使得基于大量运算的 PIC 模拟成为现实。PIC 软件是用来实现这种计算方法的计算机软件。常见的 PIC 软件包括 LSP、WARPX 和 Smilei 等。这些软件核心即为使用数值方法求解麦克斯韦方程组和粒子运动方程，以模拟物理现象。其基本思想是将物理系统分成离散的粒子，然后对每个粒子进行动力学数值模拟。PIC 方法的可以模拟高度非线性的物理现象，如等离子体中的湍流和非线性波动等、同时也可用于以模拟微观尺度下的物理现象，如等离子体中的粒子束流和电子器件中的电子束流。这使得 PIC 方法在很多领域都有着广泛的应用前景。

然而，囿于有限的计算机算力，在对物理过程进行模拟时，软件通常无法完全计算全空间上的物理量及其变化趋势（如电磁场、粒子数密度等），因此需要通过时间空间进行离散化来简便计算。PIC 软件利用有限时域差分方法 (FDTD) 来求解 Maxwell 方程式，同时应用满足电荷守恒的电荷沉积规则。下面我们首先详细讨论 PIC 模拟方法的理论基础。

二、PIC 算法基础

1. 模拟的理论基础

对于在空间有一定分布形式的粒子 s ，设其分布函数为 $f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ ，其中 \mathbf{r} 、 \mathbf{p} 描述相空间中的位置。粒子 s 质量为 m_s 、电荷量为 q_s 时，其分布函数在电磁场中满足 Vlasov 方程^[13]

$$\left(\partial_t + \frac{\mathbf{p}}{m_s \gamma} \cdot \nabla + \mathbf{F}_L \cdot \nabla_p \right) f_s = 0 \quad (4.1)$$

其中 $\gamma = \sqrt{1 + \mathbf{p}^2/m_s^2}$ 为洛伦兹因子，受到的洛伦兹力为

$$\mathbf{F}_L = q_s(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.2)$$

其中粒子速度为 $\mathbf{v} = \mathbf{P}/(m_s \gamma)$ ，电场及磁场满足 Maxwell 方程

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{E}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Maxwell 方程中的电荷密度 ρ 、电流密度矢量 \mathbf{J} 由 s 粒子的分布函数 f_s 决定，具体为：

$$\rho(t, \mathbf{r}) = \sum_s q_s \int d^3p f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \tag{4.4}$$

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{r}) = \sum_s q_s \int d^3p \mathbf{v} f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \tag{4.5}$$

可见，粒子群通过 Vlasov 方程及 Maxwell 方程形成自洽的动力学过程。其受到洛伦兹力的作用后在空间上发生分布变化，再通过变化后的分布函数反作用于空间电场及磁场的分布。故求得每一时刻的分布函数 $f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ 即可复现粒子在电磁场中的运动。

PIC 软件的核心是将分布函数 $f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p})$ 进行离散化计算，对于总数共为 N_s 的 s 粒子，其分布函数为

$$f_s(t, \mathbf{r}, \mathbf{p}) = \sum_{p=1}^{N_s} \frac{\omega_p}{V_c} S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_p(t)) \tag{4.6}$$

其中 ω_p 为粒子的权重， S 为所有粒子空间分布的包络函数， V_c 为离散化网格的体积（包括 1d、2d、3d）。PIC 沿着这些粒子的连续轨迹积分 Vlasov 方程（4.1），并在离散空间网格上求解 Maxwell 方程组（4.3）。另外，单个粒子的相对论动力学方程由

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{r}_p}{dt} &= \frac{\mathbf{u}_p}{\gamma_p} \\
\frac{d\mathbf{u}_p}{dt} &= r_s \left(\mathbf{E}_p + \frac{\mathbf{u}_p}{\gamma_p} \times \mathbf{B}_p \right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

给出。其中 $r_s = q_s/m_s$ 为粒子荷质比， $\mathbf{u}_p = \mathbf{p}_p/m_s$ 为约化动量。根据如上的过程体系，PIC 软件通过时间空间离散化过程即可实现物理过程模拟。

PIC 软件利用有限时域差分方法（FDTD）来求解 Maxwell 方程式。该方法的前提是电磁场被空间格点（Yee 格点）离散化。图 15 展示了计算过程中在 Yee

格点内选取电磁场、电荷密度及电流密度的具体方法（位置）。在这种离散方式下，Maxwell 方程组中的微分算符仅作用在格点中心。另外考虑将时间离散为间隔相同的时间段，则 Maxwell 方程中时间微分的中心化可通过选取在整数时间间隔点 n 时的瞬时电场和在半整数时间间隔点 $(n + 1/2)$ 时的瞬时磁场来实现。此时粒子的位置与速度分别取在整数时间间隔点 n 时及半整数时间间隔点 $(n - 1/2)$ 步时的数值。

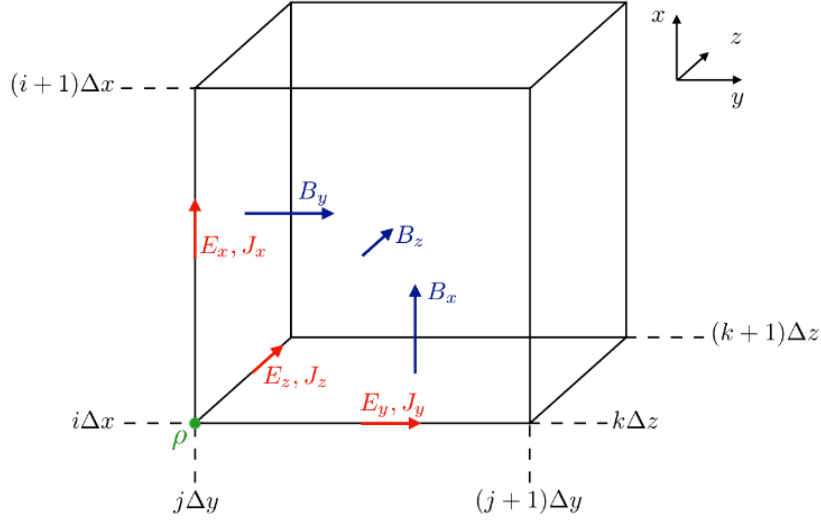


图 15 Yee 格点及物理量选取位置

初始时，需给定 s 粒子在某个格子 \mathbf{r} 内的粒子数密度 $n_s(\mathbf{r})$ 、平均速度 $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ 及温度 $T_s(\mathbf{r})$ 时。PIC 软件即将所有粒子 N_s 平均地置于每个格子中，其位矢为 \mathbf{r}_p 。动量按照平均速度为 $\mathbf{v}_s(\mathbf{r})$ 、温度为 $T_s(\mathbf{r})$ 时的 Maxwell-Jüttner 分布随机选取。由于不同位置的格子粒子数密度 $n_s(\mathbf{r})$ 不同，Smilei 分配给每个粒子一个权重 ω_p 以表明数密度的影响

$$\omega_p = \frac{n_s(\mathbf{r}(t=0))}{N_s} V_c \quad (4.8)$$

粒子置好后，即可得到单个格子的电荷密度及电流密度矢量

$$\rho(\mathbf{r}, t=0) = \sum_s \sum_p \frac{q_s \omega_p}{V_c} S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t=0)) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t=0) = \sum_s \sum_p \frac{q_s \omega_p}{V_c} \mathbf{v} S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p(t=0)) \quad (4.10)$$

初始静电场即可由将 $\rho(\mathbf{r}, t = 0)$ 、 $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t = 0)$ 代入 Maxwell 方程组得到。满足 Maxwell 方程组的外电磁场可在得到初始静电场后直接加入整个模拟区域，并对粒子系统产生作用。

2. PIC 模拟循环

在将时空离散化及计算得到上述物理量具体数值后，PIC 在之后的每一步均进行一次循环计算，总共进行设定的 N 步。其中，每一步循环均包括如下的几个步骤：

①. 在每个粒子处插入上步得到的电磁场值。对每个粒子 p，其在第 n 步时位置处的电场强度由插值得到

$$\mathbf{E}_p^{(n)} = \frac{1}{V_c} \int d^3\mathbf{r} S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p^{(n)}) \mathbf{E}(\mathbf{r})^{(n)} \quad (4.11)$$

磁感应强度在对半整数时间间隔点取平均

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})^{(n)} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{B}(\mathbf{r})^{(n+\frac{1}{2})} + \mathbf{B}(\mathbf{r})^{(n-\frac{1}{2})} \right] \quad (4.12)$$

由插值得到

$$\mathbf{B}_p^{(n)} = \frac{1}{V_c} \int d^3\mathbf{r} S(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p^{(n)}) \mathbf{B}(\mathbf{r})^{(n)} \quad (4.13)$$

②. 根据式 (4.7)，利用粒子推动方法^[14]，计算得到粒子新的位置及动量。粒子在下一个半整数时间点的动量及整数时间点的位置分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_p^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{u}_p^{n+\frac{1}{2}} + r_s \Delta t \left[\mathbf{E}_p^{(n)} + \frac{\mathbf{v}_p^{(n+\frac{1}{2})} + \mathbf{v}_p^{(n-\frac{1}{2})}}{2} \times \mathbf{B}_p^{(n)} \right] \\ \mathbf{x}_p^{n+1} &= \mathbf{x}_p^n + \Delta t \frac{\mathbf{u}_p^{(n+\frac{1}{2})}}{\gamma_p} \end{aligned} \quad (4.14)$$

③. 根据 Esirkepov 提出的方法^[15]计算得到格点的电荷密度及电流密度矢量。在不同的模拟维数下，沿网格方向的电流密度可以通过在时间间隔内通过边界的电荷量来计算。以三维情况为例，x、y、z 三个方向的电流密度分别为

$$\begin{aligned} (J_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(n+\frac{1}{2})} &= (J_x)_{i-\frac{1}{2},j,k}^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{q_s \omega_p}{V_c} \frac{\Delta x}{\Delta t} (W_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}^{(n+\frac{1}{2})} \\ (J_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(n+\frac{1}{2})} &= (J_y)_{i,j-\frac{1}{2},k}^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{q_s \omega_p}{V_c} \frac{\Delta x}{\Delta t} (W_y)_{i,j+\frac{1}{2},k}^{(n+\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

$$(J_x)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(n+\frac{1}{2})} = (J_x)_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{q_s \omega_p}{V_c} \frac{\Delta x}{\Delta t} (W_x)_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{(n+\frac{1}{2})} \quad (4.15)$$

其中 W 为 Esirkepov 方法中利用电流及 \mathbf{x}_p^{n+1} 、 \mathbf{x}_p^n 计算得到的量。电荷密度由

$$(\rho)_{i,j,k}^{(n+\frac{1}{2})} = \frac{q_s \omega_p}{V_c} S(\mathbf{r}_{i,j,k} - \mathbf{r}_p^{(n)}) \quad (4.16)$$

得到。

④. 根据 Maxwell 方程组计算下一步格点处的电磁场。电场强度为

$$\mathbf{E}^{(n+1)} = \mathbf{E}^{(n)} + \Delta t \left[\left(\nabla \times \mathbf{B}^{(n+\frac{1}{2})} \right) - \mathbf{J}^{(n+\frac{1}{2})} \right] \quad (4.17)$$

得到 $\mathbf{E}^{(n+1)}$ 后，磁感应强度为

$$\mathbf{B}^{(n+\frac{3}{2})} = \mathbf{B}^{(n+\frac{1}{2})} - \Delta t \left(\nabla \times \mathbf{E}^{(n+\frac{1}{2})} \right) \quad (4.18)$$

以上即为在一个时间周期中的 PIC 循环计算过程。

第二节 Smilei 高能光子辐射模型

一、理论模型假设

由第一节的讨论，实验技术的飞速发展同时也在推进着理论工作的进行，其中包括大量对基于经典电动力学及 QED 中辐射现象的解释的理论工作。在经典力学框架下，理论上一般运用带电粒子在电磁场中辐射形成的辐射压及蒙特卡洛方法来处理高能光子发射的量子过程，同时这种高能光子辐射过程目前也能够在包含 PIC 在内的各种动力学模拟代码中实现对实验中得到的辐射结果进行复现。同样地，根据能量尺度地不同，Smilei 在其 PIC 代码中引入了适用于不同辐射场景下处理高能光子发射及其反应的若干物理模块。下面首先介绍其数值模拟时的合理假设及算法基础。

Smilei 对高能光子辐射过程做出一些合理性的假设：对于能量尺度很高的相对论性粒子，若其洛伦兹因子 γ 满足

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \gg 1$$

则其在与激光相互作用时几乎完全产生背散射（即辐射仅存在一小空间角内），辐射光子方向由相对论性粒子速度决定。另外，假设辐射光子的时间很短，在该时间段内电磁场保持恒定，即电磁场的归一化矢势满足

$$a = \frac{e|A^\mu|}{mc^2} \gg 1 \quad (4.19)$$

另外需假设所有电子辐射均为非相干辐射，即要求辐射波长要远小于粒子间的分布间距 $n_e^{-1/3}$ 。在提出这些合理假设的基础下，高能光子发射的过程即可转化为背康普顿散射的非相干过程处理。

二、数值模拟模型建立

为衡量电磁场中粒子的能量尺度，需要引入一个重要参数量子参数 χ (quantum parameter)，在考虑康普顿散射过程时，电子的量子参数记为

$$\chi = \frac{\gamma}{E_s} \sqrt{(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})^2 - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})^2}{c^2}} \quad (4.20)$$

光子的量子参数记为

$$\chi_\gamma = \frac{\gamma_\gamma}{E_s} \sqrt{(\mathbf{E} + \mathbf{c} \times \mathbf{B})^2 - \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{E})^2}{c^2}} \quad (4.21)$$

其中 γ 、 γ_γ 分别为电子及发射光子的归一化能量，分别为

$$\gamma = \frac{\varepsilon_e}{m_e c^2}, \gamma_\gamma = \frac{\varepsilon_\gamma}{m_e c^2} \quad (4.22)$$

式（4.20）及式（4.22）中的 E_s 为 Schwinger 场。 $E_s = m^2 c^3 / (\hbar e)$ 。Ritus 等人^[16]在 1985 年的工作给出，高能光子的辐射概率为

$$\frac{d^2 N_\gamma}{d\tau d\chi_\gamma} = \frac{2}{3} \frac{\alpha^2 S\left(\chi, \frac{\chi_\gamma}{\chi}\right)}{\tau_e \chi_\gamma} \quad (4.23)$$

其中 α 为精细结构常数， $\tau_e = r_e/c$ 为光穿过经典电子半径所需的时间。令 $\xi = \chi_\gamma/\chi$ ，辐射效率函数 $S(\chi, \chi_\gamma/\chi)$ 具有形式

$$S(\chi, \xi) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \xi \int_v^{+\infty} \left[K_{\frac{5}{3}}(y) dy + \frac{\xi^2}{1-\xi} K_{\frac{2}{3}}(v) \right] \quad (4.24)$$

其中 $v = 2\xi/[3\chi(1-\xi)]$ 。在给出辐射功率函数的条件下，即可得到电子的瞬时辐射功率谱

$$\frac{dP_{rad}}{d\gamma} = \frac{P_\alpha}{\gamma} S\left(\chi, \frac{\chi_\gamma}{\chi}\right) \quad (4.25)$$

其中 $P_\alpha = 2\alpha^2 m_e c^2 / (3\tau_e)$ ，对辐射光积分即得电子的瞬时辐射功率

$$P_{rad} = P_\alpha \chi^2 g(\chi) \quad (4.26)$$

其中 $g(\chi)$ 为量子修正项

$$g(\chi) = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^{+\infty} dv \left[\frac{2v^3}{(2+3v\chi)^2} K_{\frac{5}{3}}(v) + \frac{4v(3v\chi)^2}{(2+3v\chi)^4} K_{\frac{2}{3}}(v) \right] \quad (4.27)$$

不同能量尺度的粒子相互作用一般运用不同的辐射模型（即辐射光子的随机性在不同能量尺度体现不同），不同的辐射模型在经典及量子区域的表现也不尽相同，如何选择适当的辐射模型对模拟结果有着决定性的意义。Smilei 基于 Niel 等人^[17]的工作基础之上，运用电子的量子参数 χ 作为区分能量尺度的标度，对不同能量区域选取 Smilei 中内含的三种辐射模型。

由于式（4.23）所述的高能光子发射模型适用于电子量子参数为任何值的情形，对于量子效应明显区间，即电子能量尺度很高 $\chi \gtrsim 1$ 时，可运用此辐射模型对高能光子辐射及其对粒子的反冲作用进行精准详细地描述。值得关注的是，在高能情况下康普顿背散射过程可以发射能量与入射粒子能量量级相同的光子。因此，粒子的能量及速度可能会表现出随机突变，因此在此过程中高能光子发射的随机性不可忽略。由上，一般运用 Monte-Carlo 方法^{[18] [19] [20]}来描述分立的光子辐射过程。具体过程如下：

对每一个电子均施加一递增的参数 τ 称为光学深度（Optical depth），初始值为 0，约定当其递增至临界光学深度 τ_f 时电子发生辐射。临界光学深度由

$$\tau_f = -\log \xi \quad (4.28)$$

给出，其中 ξ 为 [0,1] 内的随机数。由式（4.23），单个电子的光学深度随时间递增时所满足的微分方程为

$$\frac{d\tau}{dt} = \int_0^{\chi_+} \frac{d^2 N}{d\chi dt} d\chi = \frac{2\alpha^2}{3\tau_e} \int_0^{\chi_+} \frac{S\left(\chi, \frac{\chi_\gamma}{\chi}\right)}{\chi} d\chi \equiv \frac{2\alpha^2}{3\tau_e} K(\chi_+) \quad (4.29)$$

式中用 χ_+ 表示电子的量子参数， χ 表示积分变量。电子辐射的高能光子的能量由反解其能量分布方程得到。设其分布函数为

$$P(\chi_+, \chi_\gamma) = \int_0^{\chi_\gamma} \frac{S\left(\chi_+, \frac{\chi}{\chi_+}\right)}{\chi} d\chi / \int_0^{\chi_+} \frac{S\left(\chi_+, \frac{\chi}{\chi_+}\right)}{\chi} d\chi \quad (4.30)$$

再选取另一 $[0,1]$ 内的随机数 η ，由 $P(\chi_+, \chi_\gamma) = \eta$ 反解得到辐射光子量子参数 χ_γ ，光子能量由

$$\varepsilon_\gamma = mc^2 \gamma_+ \frac{\chi_\gamma}{\chi_+} \quad (4.31)$$

给出。考虑动量守恒过程，运动电子在发射电子后的动量改变为

$$d\mathbf{p} = -\frac{\varepsilon_\gamma}{c} \frac{\mathbf{p}_e}{|\mathbf{p}_e|} \quad (4.32)$$

即光子辐射会对电子有反冲作用。电子的光子发射本身为分立过程，动量在光子辐射瞬间改变，而在辐射间隙电子动力学方程由洛伦兹力决定。

对于过度量子态^[17]，即在 $\chi \lesssim 1$ 的情况下，辐射光子的能量相对于入射电子的能量依旧较小。尽管如此，光子发射的随机性依旧不容忽视。另外，电子的动力学方程可由上述的全量子模型的Fokker-Planck展开得到的随机微分方程来描述。其动力学方程为

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}_L dt + \mathbf{F}_{rad} dt + \frac{mc^2 \sqrt{R(\chi, \gamma)} dW \mathbf{u}}{u^2 c} \quad (4.33)$$

$\mathbf{F}_L = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ 为电子受到的洛伦兹力， \mathbf{F}_{rad} 为漂移项，具体为 Landau-Lifshitz 辐射作用力中经过量子修正 $g(\chi)$ 的主要项。第三项称为扩散项， dW 为时间微分 dt 的 Weiner 过程， $R(\chi, \gamma)$ 为上述辐射发射的随机模型导出的函数：

$$R(\chi, \gamma) = \frac{2}{3} \frac{\alpha^2 \gamma h(\chi)}{\tau_e} \quad (4.34)$$

其中 $h(\chi)$ 具体形式为

$$h(\chi) = \frac{9\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^{+\infty} dv \left[\frac{2\chi^3 v^3}{(2 + 3v\chi)^3} K_{\frac{5}{3}}(v) + \frac{54\chi^5 v^4}{(2 + 3v\chi)^5} K_{\frac{2}{3}}(v) \right] \quad (4.35)$$

在电子能量尺度很小时（即经典情况下），电子的量子参数满足 $\chi \ll 1$ ，QED 效应在此尺度下可以忽略不计，此时辐射过程由非相干光子发射的累积效应引起，因此可视辐射力持续作用在粒子上。Smilei 应用 Landau-Lifshitz 模型描述作用在粒子上的辐射作用力。在 $\chi \ll 1$ 时，式（4.33）中的漂移项即可忽略，即电子的动力学方程为

$$d\mathbf{p} = \mathbf{F}_L dt + \mathbf{F}_{rad} dt \quad (4.36)$$

其中辐射作用力

$$\mathbf{F}_{rad} = -\frac{P_\alpha \chi^2 g(\chi) \mathbf{u}}{u^2 c} \quad (4.37)$$

第三节 激光康普顿散射模拟程序建立

一、单位标准化

由于 PIC 软件在进行运算时仅能处理无量纲数, 在建立模型前需要先对物理量进行基本单位归一化。在 Smilei 模拟中我们将电子元电荷量 e 作为电荷量单位 $Q_r = e$ 、将电子质量作为质量单位 $M_r = m_e$ 、将光速作为速度单位 $V_r = c$ 。由以上三个定义可以推导出能量单位(即电子静能) $K_r = m_e c^2$ 及动量单位 $P_r = m_e c$ 。由于通过入射激光的参数来划定模拟的空间规模较为合理, 下文粒子模拟中均以入射激光的中心波长作为长度单位 $\lambda_r = 10^{-6} m$, 此基础上圆频率单位为 $\omega_r = 2\pi c/\lambda_r$ 、时间单位为 $T_r = 1/\omega_r$ 。在以上单位定义下, 电子密度单位为

$$N_r = \frac{\epsilon_0 m_e \omega_r^2}{e^2} \quad (4.38)$$

单位化过程代码如下

```
# Units Definition-----
c = 299792458                                # c-->Vr = c
electron_mass = 9.10938356e-31                # electron_mass-->Mr = me
electron_charge = 1.60217662e-19              # electron_charge-->Qr = e
# Reference Energy Kr = me*c^2 = 0.511MeV
# Reference momentum Pr = me*c
lambda_r = 1e-6                               # Normalized wavelength
wr = 2*math.pi*c/lambda_r                    # Normalized frequency
# reference Time Tr = 1/wr
# reference particle density Nr = Epsi0*me*wr^2/e^2
```

二、粒子模拟程序建立

1. 模拟框架基本参数

以下描述模拟电子束及激光的康普顿散射过程的粒子模拟模型建立。如无特殊说明, 2D 平面模拟均为 3D 空间模拟的降维情况, 不再赘述。

在上节的单位标准化下, 令入射激光波长为 $l_0 = 2\pi$, 则其振动周期为 $t_0 = l_0/1 = 2\pi$ 。由于高能光子分布在较小的背散射空间角内, 设置模拟区域为一个 $2l_0 \times 2l_0 \times 20l_0$ 的立方体空间, 电子束及激光束分别自立方体左右的 $x-y$ 平面中心垂直入射, 在中心对撞发生散射。模拟时间设置为三十个激光振荡周期。对空间及时间的离散化遵循本章第一节中的限制。为满足要求, 设 z 方向内单个波

长 l_0 中有 64 个网格, x 、 y 方向单个波长 l_0 中有 128 个网格。时间步长设置为 Courant–Friedrichs–Lewy (CFL)步长的 0.95 倍。基本模拟参数的设置如下:

```
# Simulation Parameters Setup-----
# Normalized Laser Parameters
l0 = 2.0*math.pi          # Laser wavelength in units of lambda_r
t0 = 10                    # Laser cycle in units of c=1
# Simulation Box Parameters
Lx = 2.*l0                 # Simulation X-Length
Ly = 2.*l0                 # Simulation Y-Length
Lz = 20.*l0                # Simulation Z-Length
Tsim = 30.*t0              # Duration time of the whole simulation
resx = 64.                 # Number of cells in one laserwavelength
dx = l0/resx/2             # Space step for X-axis
dy = l0/resx/2             # Space step for Y-axis
dz = l0/resx               # Space step for Z-axis
dt = 0.95/math.sqrt( 1./dx**2 + 1./dy**2 +1./dz**2)
# Timestep (according to the protocol 0.95 x CFL)
```

2. 主函数

主函数用以规定该数值模拟中的物理模型。粒子的插值次序 (Interpolation order) 定为 5 点插值。另外, 基本的模拟参数 (包括网格总长度及元胞长度、模拟时长等) 已由上个模块定义。粒子在电磁场中的 Maxwell 方程组根据本章第一节中提到的“Yee”方法求解。在模拟中将电磁场边界条件设置为“silver-muller”开放边界条件, 使得电磁波传输到边界时自适应边界条件, 并且不考虑边界外部分对模拟区域内粒子的影响。主函数的设置如下:

```
# Namelists-----
Main(
    geometry = "3Dcartesian",          # Simulation Dimension
    interpolation_order = 4,
    interpolator = "momentum-conserving",
    cell_length = [dx, dy, dz],
    grid_length = [Lx, Ly, Lz],
    simulation_time = Tsim,
    timestep = dt,
    number_of_patches = [16, 16, 32],  # power(2,n)
    maxwell_solver = 'Yee',
    EM_boundary_conditions = [
        ['silver-muller'],
        ['silver-muller'],
```

```

    ['silver-muller'],
],
time_fields_frozen = 0.,
reference_angular_frequency_SI = wr,
print_every = 1,                                # Print outcome on TERMINAL
)

```

3. 入射激光场建立

入射激光场的合理建立是电子-光子相互作用需要满足的前提。Smilei 中默认入射激光构型为 Gauss 光束，实验中令激光束从模拟区域右侧正入射，将激光偏折入射角 ϕ_f 设置为 0。激光束在中心 $[l_0, l_0, 10l_0]$ 处聚焦，设置其光腰为 $0.6l_0$ （后文将提到，激光束光腰尺度应足够大于粒子的空间分布，以满足平面波近似）。参数 a_0 为其归一化的矢势，由式 (4.19)，考虑量子电动力学 QED 效应时需令电磁场的归一化矢势满足 $a \gg 1$ ，故设置为 100。参数 ellipticity 描述激光的偏振态，ellipticity=0 时为线偏振光，ellipticity= ± 1 时为圆偏振光。参数 time_envelope 描述激光场强度的随时变化包络。在本模拟中主要观察连续波及脉冲波两种情况下的散射过程，连续波型用 tconstant() 函数表示、脉冲波型用注释中的 tgaussian () 函数表示为半高全宽为 $1.5t_0$ 、持续时间为 $3t_0$ 的高斯型脉冲。入射激光的设置如下：

```

# Inject Laser Definition-----
LaserGaussian3D(
    box_side = "zmax", # Inject from zmax.
    a0 = 100., # Normalized vector potential.
    omega = 1., # Laser angular frequency in units of wr.
    focus = [10, 10, 10*10], # Position of Laser focus.
    waist = 0.6*10, # Laser waist.
    polarization_phi = 0., # Angle of polarization ellipse major axis
                           relative to perpendicular plane.
    ellipticity = 0., # Polarization ellipticity (0 for linear).
    time_envelope = tconstant() # Constant Gaussian wave.
    # Pulse Definition :
    # time_envelope = tgaussian(start=0., duration=3.*t0, fwhm=1.5*t0,
    # center=1.5*t0, order=2),
)

```

4. 入射电子束参数设置

我们曾在第二章中详细讨论了单个电子与光子的康普顿散射过程。然而，由于实验中很难实现理想的单能线电子束入射，一般模拟中常常入射具有一定空间构型电子束进行模拟。模拟中令初始时在全空间内没有电子，并且在之后的相互作用中电子每次仅辐射出一个光子。在高能情况下，利用上节中介绍的 Monte-Carlo 方法来模拟具体的辐射过程，粒子推进器应用 J. L. Vay^[14]提出的相对论情况下的推进方法。电子基本参数设置如下：

```
# Electrons Properties Definition-----
# Electron bunch properties
n0 = 0.001 # Electron density in units of Nr.
gamma = 1000./0.511 # Electron initial energy in units of Kr.
v0 = math.sqrt(1 - 1./gamma**2) # Initial velocity in units of c.
n = constant(n0, xvacuum=Lx, yvacuum=Ly)
# Initial spatial density distribution(vacancy).

Species(
    name = "electron",
    position_initialization = "random",
    momentum_initialization = "cold", # Zero temperature.
    particles_per_cell = 64,
    mass = 1., # In units of me.
    charge = -1., # In units of e.
    number_density = n, # In units of Nr.
    #charge density
    mean_velocity = [0, 0, v0], # Mean velocity in units of c.
    temperature = [0.], # Initial temperature in units of mec^2.
    boundary_conditions = [["remove"],["remove"],["remove"],],
    time_frozen = 0,
    pusher = "vay", # Particle pusher in relativistic situation.
    radiation_model = "Monte-Carlo",
    # Choose appropriate radiation model.
    radiation_photon_species = "photon", # Radiation particles - photons
    radiation_photon_sampling = 1,
    # One Macro-photon generated per emission event.
)
```

其中在函数首定义的 n_0 为入射电子在电子密度单位 N_r 下的密度。在模拟中规定入射能量为 1GeV 的高能电子， γ 即为其在能量单位 K_r 下的能量。 v_0 为其能量为 γ 时在速度单位 V_r 下的速度。

高能电子束从模拟区域左侧正入射，能量为 1GeV。入射电子束在每个元胞内包含 64 个电子，密度分布由权重决定。实验中可自定义入射电子束在 $x-y$ 平面上的空间分布，这里选用在 x, y 方向均为 Gauss 分布的空间构型入射。两方向上尺度均为 $0.2l_0$ ，半高全宽设置为 $0.1l_0$ 。电子束横截面尺寸小于 Gauss 光束腰斑的 1/2，此处可视平面波近似成立。另外也可以选用在 x, y 方向均匀分布的构型，该空间构型以 `trapezoidal()` 函数给出。初始时电子在空间中随机分布，动量无展宽分布（“cold”为零温时的动量分布），平均速度为沿 z 方向的速度 v_0 ，电子温度设置为零温。入射电子参数设置如下：

```
# Inject Electron Bunch Definition-----
n_inject = gaussian(n0, xvacuum=0.9*l0, xlength=0.2*l0, xfwhm=0.1*l0,
xcenter=l0, xorder=2, yvacuum=0.9*l0, ylength=0.2*l0, yfwhm=0.1*l0,
ycenter=l0, yorder=2)
# n_inject = trapezoidal(n0, xvacuum=0.9*l0, xplateau=0.2*l0,
xslope1=0., xslope2=0., yvacuum=0.9*l0, yplateau=0.2*l0, yslope1=0.,
yslope2=0.)

ParticleInjector(
    name = "Electron-Injector",
    species = "electron",
    box_side = "zmin",
    time_envelope = tconstant(), # Inject constant electron bunch.
    # Parameters inherited from the associated "species" by default.
    position_initialization = "random",
    momentum_initialization = "cold", # Zero temperature.
    mean_velocity = [0, 0, v0],
    temperature = [0.],
    number_density = n_inject,
    particles_per_cell = 64,
)
```

5. 辐射及辐射产生光子

本章第二节，电子辐射类型与其量子参数 χ 有关，故模拟时需要对电子的量子参数做以门槛标定来区分不同的辐射类型。参数 `minimum_chi_continuous` 标定了连续辐射的最低量子参数，小于该值的辐射反应不考虑。`minimum_chi_discontinuous` 标定了连续辐射与不连续分立辐射的界限。设置如下：

```
# Radiation Method Parameters-----
```



```

RadiationReaction(
    # When radiation mode is Niel, include the statement:
    # Niel_computation_method = "fit5",

    # Radiation parameters
    minimum_chi_continuous = 1e-6,
    minimum_chi_discontinuous = 1e-4,
)

```

相互作用时辐射的高能光子由以下定义，且传播到边界的光子将被吸收，设置如下：

```

# Photon Defination-----
Species(
    name = "photon",
    position_initialization = "random",
    momentum_initialization = "cold",
    particles_per_cell = 0,
    mass = 0.,
    charge = 0.,
    number_density = 0,
    mean_velocity = [0.],
    boundary_conditions = [["remove"]],
)

```

7. 相互作用过程诊断

运用 Smilei 提供的各种诊断工具可以实现对多个物理量的纪录，便于研究反应过程。以下为在模拟过程中的诊断工具。Scarlalr 诊断记录部分标量物理量，如粒子总能量、场的总能量等，每 50 步输出一次数据。

```

# Scalar Diagnostics
DiagScalar(
    every = 50, # 50 timesteps between each output.
)

```

Particlebinning 用于记录粒子某物理性质的分布。首先记录全部电子的能量分布，同样每 50 步输出一次：

```

DiagParticleBinning(
    deposited_quantity = "weight",
    every = 50,
)

```

```

time_average = 1,
species = ["electron"],
axes = [
    ["gamma", gamma/1.e4, gamma*2., 400, "logscale"],
    # "logscale" set the axis scale to logarithmic
]
)

```

其次记录辐射产生光子沿 x、y、z 轴的密度分布，每 50 步输出一次：

```

# Spatial distribution of photons along x
DiagParticleBinning(
    deposited_quantity = 'weight',
    every = 50,
    species = ["photon"],
    axes = [
        ["x", 0, Lx, 100],
    ]
    # Same for y/z axis
)

```

Probe 探针用于记录入射及出射平面上的电场分布，可用于观察入射光与粒子相互作用后的强度耗散，每 50 步输出一次：

```

# Spatial Intensity Distribution on End Plane
DiagProbe(
    every = 50,
    origin = [0., 0., Lz-10],
    corners = [[0., Ly, Lz-10], [Lx, 0., Lz-10]],
    number = [100, 100],
    fields = ["Ex", "Ey", "Ez"]
)
# Spatial Intensity Distribution on Incident Plane
DiagProbe(
    every = 50,
    origin = [0., 0., 10],
    corners = [[0., Ly, 10], [Lx, 0., 10]],
    number = [100, 100],
    fields = ["Ex", "Ey", "Ez"]
)

```

TrackParticle 记录所有粒子的空间坐标，用以构建重构粒子反应过程，由于记录数据量较大，每 100 步输出一次：

```
# Track coordinates of electrons
DiagTrackParticles(
    species = "electron",
    every = 100,
    attributes = ["x", "y", "z"]
)

# Track coordinates of photons
DiagTrackParticles(
    species = "photon",
    every = 100,
    attributes = ["x", "y", "z"]
)
```

最后，RadiationSpectrum 用以记录所有电子在全空间上的辐射谱，每 50 步输出一次：

```
# Estimate maximum photon energy
photon_energy_max = gamma

# Radiation Spectrum
DiagRadiationSpectrum(
    every = 50,
    species = ["electron"],
    photon_energy_axis = [photon_energy_max/1.e6, photon_energy_max,
400, "logscale"],
    axes = []
)
```

第四节 激光康普顿散射模拟结果

一、2D 激光康普顿散射模拟

由于二维情况的局限性，几乎无法体现激光场在空间中的偏振状态对康普顿散射的调控，故仅做连续及脉冲激光入射时的散射过程的模拟结果对比。

1. 连续激光入射相互作用

设置二维模拟中总模拟时间为 $30t_0$ ，在 $10t_0$ （timesteps=1500）前电子束与强激光场暂未相遇。 $10t_0$ 时电子与激光场相遇， $20t_0$ （timesteps=3000）时电子束到达模拟区域右侧边界，同时激光束传播至左侧边界。在 $20t_0 - 30t_0$ （timesteps=3000-4500）时间内系统保持稳态。下选取 timesteps=1000、2000、3000 及 4000 四个时间点重绘模拟区域中电子、高能光子及高能高斯激光场的分布图，如图所示。

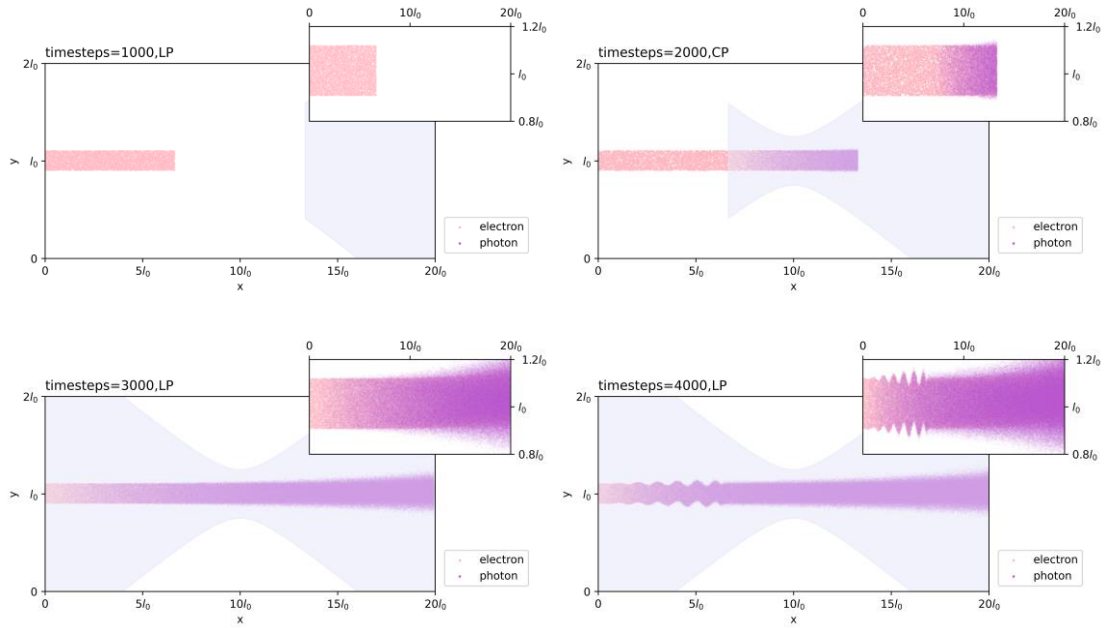


图 16 2D 连续激光康普顿散射过程示意图。粉色为入射电子束，深紫色点为辐射产生的高能光子，外侧为入射的高斯光束束腰传播面

由图 16，粉色像素代表入射电子束中的单个电子，紫色像素代表康普顿散射过程中电子发射的高能光子。每张主图为特定 timesteps 时的反应模拟图，子图为放大的电子、光子空间分布图（以下说明相同，指图 19）。高能激光场与电子束正向作用时沿背向辐射出高能光子。由于激光束持续输入，散射反应持续进行，

作用时间越长时产生的高能光子密度越大。高能光子仅具有一个较小的发散角，并主要沿电子运动方向，其辐射密度随散射角 θ_f 增大而下降。 $timesteps=4000$ 中的小范围电子束振荡为三维计算在模拟规定的二维边界条件下带来的影响，不做考虑。反应进行过程中辐射光子沿 y 方向分布的数密度如图 17 所示。

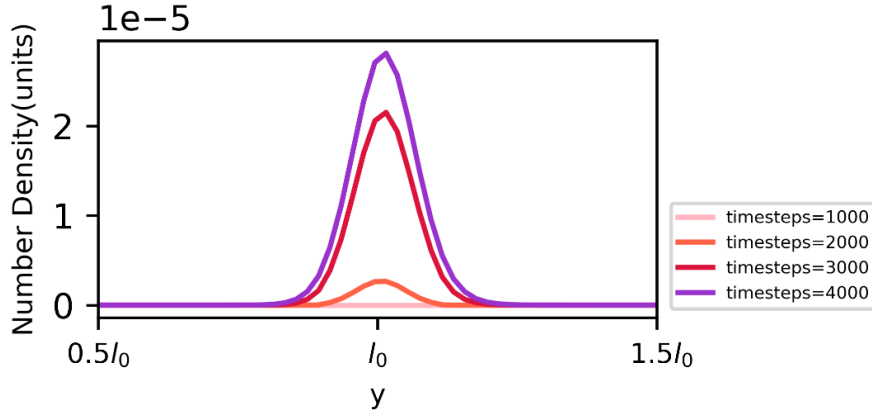


图 17 连续激光下电子辐射高能光子沿 y 方向的数密度分布

电子束在空间上为沿 y 轴 $0.9l_0$ 到 $1.1l_0$ 区间的高斯分布，高能光子分布与电子数密度正相关，故高能光子分布同样主要为高斯分布。由于光子散射方向有一定的散射角 θ_f ，随反应进行时光子沿 y 轴分布范围有一个小的扩展，即高斯分布的全宽随反应进行小幅度增宽。

图 18 展示了连续激光场散射过程中相应时间点时的辐射功率谱（即光子能量分布）（左）及该时刻电子的能量谱（右）。

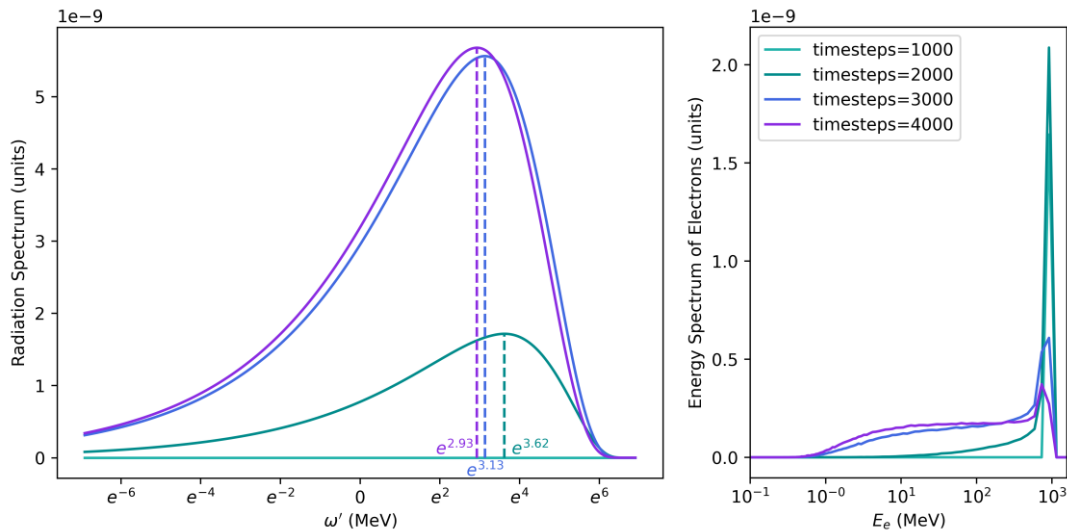


图 18 连续激光下电子辐射功率谱及电子能谱

辐射功率谱以自然对数坐标为底，并在图中标出了每一时刻辐射功率的峰值位置。根据理论计算，康普顿散射辐射峰应为 $\omega' = 18.6386 \text{ MeV}$ ，即 $e^{2.925}$ 处。由图 18，

无相互作用时电子能量均为 1000MeV 。当电子束与激光刚相遇开始进行散射时 ($\text{timesteps}=2000$) 辐射峰值较高, 且与理论给出的辐射峰值误差在较小范围内。此时小部分电子损失能量, 电子能谱不再为 1000MeV 处的尖峰函数而逐渐出现低能分量。由于在连续波情况下电子束持续与激光相互作用, 部分损失能量的电子与强激光相互作用而散射的高能光子能量较低, 使得辐射能谱峰值逐渐减小。并且由于散射作用在空间上的发生几率随高斯激光束的传播而逐渐增大, 电子在散射过程中损失大部分能量, 能谱迅速向低能区域展宽。之后系统散射过程逐渐趋于稳态。

2. 脉冲激光入射相互作用

设置输入激光在时域上为一全宽为 $3t_0$ 的高斯分布脉冲时, 在 $10t_0$ (即 $\text{timesteps}=1500$) 前电子束与强激光脉冲同样未相遇。 $10t_0$ 时电子与激光脉冲相遇, $20t_0$ ($\text{timesteps}=3000$) 时电子束到达模拟区域右侧边界, 同时脉冲传播至左侧边界, 之后脉冲由边界条件的划定反射。同样选取 $\text{timesteps}=1000$ 、 2000 、 3000 及 4000 四个时间点重绘模拟区域中电子、高能光子及高能高斯激光场的分布图, 如图所示。

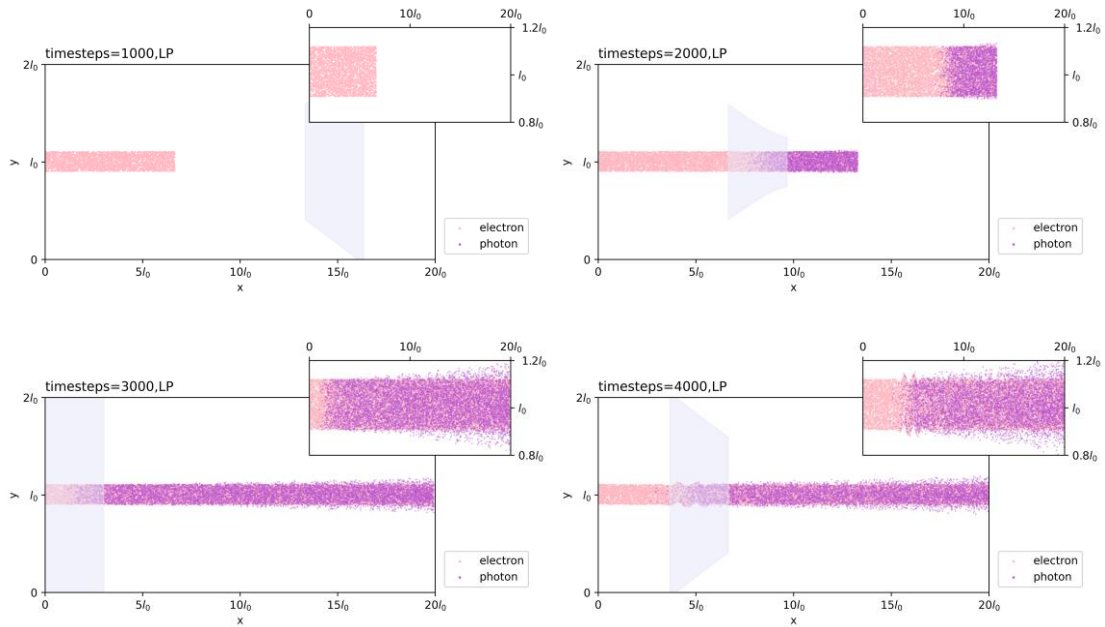


图 19 2D 脉冲激光康普顿散射过程示意图。粉色为入射电子束, 深紫色点为辐射产生的高能光子, 外侧为入射的高斯光束束腰传播面

同样, 高能激光场与电子束正向作用时沿背向辐射出高能光子。但由于电子束各横截面处与脉冲激光相遇作用时间较短且均相同, 空间上电子束各处的高能光子

密度相似，且相较于连续激光作用时光子密度低很多。高能光子同样具有一个较小的发散角，辐射密度随散射角 θ_f 增大而下降。反应进行过程中辐射光子沿 y 方向分布的数密度如图 20 所示。

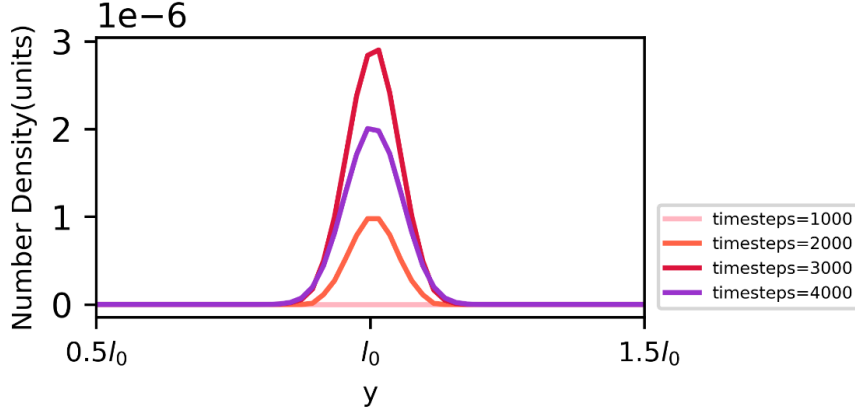


图 20 脉冲激光下电子辐射高能光子沿 y 方向的数密度分布

与连续激光场情况相同，高能光子沿 y 轴分布同样主要为高斯分布。但由于激光脉冲到达边界反射之后有部分电子不再与脉冲激光作用， $timesteps=4000$ 的数密度曲线下降，但由于散射具有一定角度，光子高斯分布的全宽随反应进行依然有小幅度增宽。

图 21 展示了脉冲激光散射过程中相应时间点时的辐射功率谱（左）及该时刻电子的能量谱（右）。

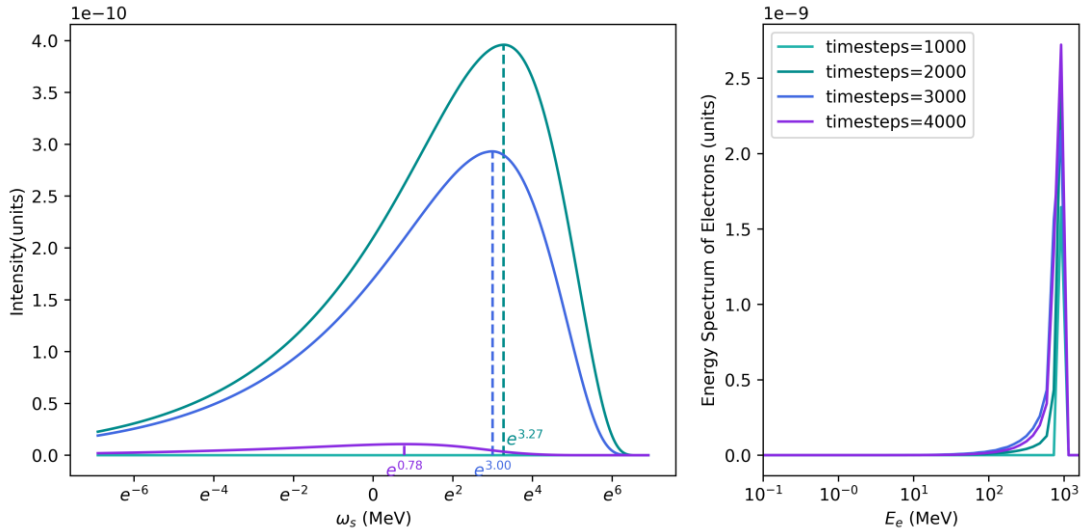


图 21 脉冲激光下电子辐射功率谱及电子能谱

由图 21，无相互作用时电子能量均为 1000MeV 。当电子束与脉冲激光初始散射时辐射峰值较高，且与理论给出的辐射峰值误差在可接受范围内，部分电子损失能量，电子能谱逐渐出现低能分量。由于脉冲激光与电子束持续作用造成其能量

逐渐损失，散射的辐射强度整体逐渐下降，同时辐射能谱峰值迅速减小。但由于与脉冲作用的电子数较少，与连续波作用时情况差异较大，电子能谱展宽不明显，仅有小部分的低能分布。

以上为 2D 情况下对康普顿散射过程的模拟及连续波与脉冲作用的对比。

二、3D 激光康普顿散射模拟

三维情况下，入射激光的偏振状态会对散射过程有一定的调控。但根据第三章第二节中的模拟，偏振光对康普顿散射的调控在远场处显现。由于 PIC 软件在模拟过程中需要处理大量的模拟数据，在没有超算辅助加持的条件下几乎无法模拟出足够远场处的辐射分布。另外，如何将散射过程中辐射的高能光子的极化与辐射场相关联一直是 PIC 面临的一大难题，这也使得探测辐射场的偏振信息在模拟中无法实现，在不修改源代码的情况下仅能统计所有的辐射光子信息（即非偏振态光子）。但在此条件下依然能通过某些诊断方法探测到某些由入射光偏振态带来的辐射变化，以下分别为线偏振及圆偏振激光在连续激光及脉冲激光入射时的散射过程模拟及参数对比。

1. 连续激光入射相互作用

根据本章第三节中的设置，总模拟时间为 $30t_0$ ，总步数约为 6000 步，在 $10t_0$ （timesteps=2000）前电子束与强激光场暂未相遇，无相互作用发生。 $10t_0$ 时电子与激光场在模拟区域中心处（即激光聚焦处）相遇， $20t_0$ （timesteps=4000）时电子束到达模拟区域右侧边界，同时激光束传播至左侧边界。在 $20t_0 - 30t_0$ （timesteps=4000-6000）时间内整个系统保持稳态。与二维模拟时的选取规则类似，选取 timesteps=1000、2500、4000 及 5500 四个时间点重绘三维区域中电子、高能光子及高能高斯激光场的空间分布图，如图 22 所示。类似地，图中粉色像素代表入射的在 x、y 方向均为高斯分布的电子束，单个紫色像素点代表康普顿散射过程中电子散射出的高能光子。每张主图为以上选取的 timesteps 时的空间反应模拟图，子图为放大的电子、光子空间分布图（以下说明相同，指图 26），比例尺有一定变化。

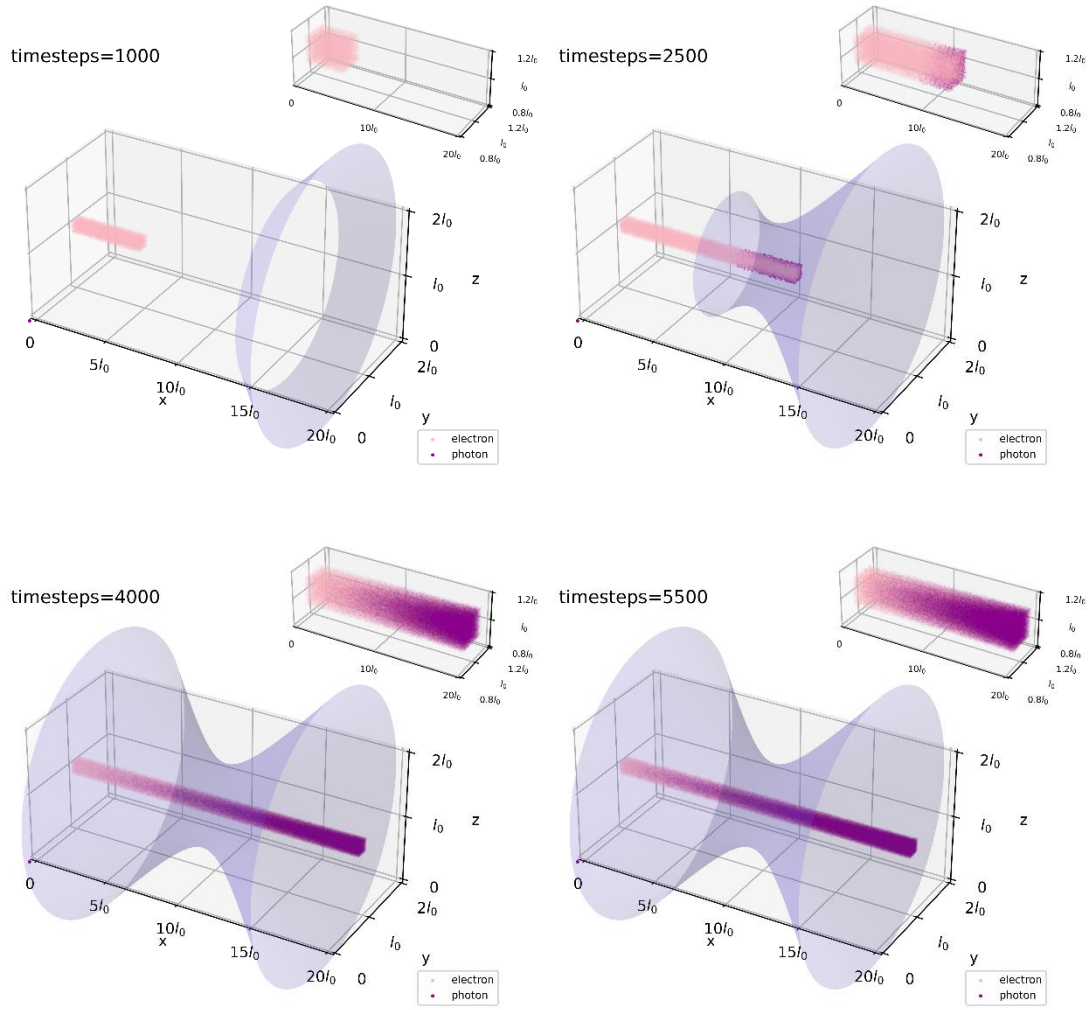


图 22 3D 连续激光康普顿散射过程示意图。粉色为入射电子束，深紫色点为辐射产生的高能光子，外侧为入射的高斯光束束腰传播面

三维情况下，高能激光场与电子束正向作用时沿电子束入射的背向辐射出高能光子，随着激光束的持续输入，散射反应不断进行，电子束横截面与激光场作用时间越长时产生的高能光子密度越大（即 $\text{timesteps}=4000$ 电子束头部光子密度远大于 2500 时光子数密度）。另外，高能光子具有一个空间上较小的发散角，其密度随散射角 θ_f 增大而下降（由子图给出）。另外由于电子在空间上的高斯分布，电子束中部光子数密度较大，外部光子数密度逐渐减小。

图 23 展示了连续激光散射过程中选取时间点时的辐射功率谱（左）及该时刻相应电子的能量谱（右），其中 LP 指代线偏振情况，CP 指代圆偏振情况。由第三章第二节，当不考虑散射光子的偏振态时，散射能谱与入射光偏振无关，故两种入射的辐射谱与电子能谱差异不大。由图 23，无相互作用时电子能谱为 1000

MeV 处的尖峰函数。当电子束与激光刚相遇开始进行散射（timesteps=2500）时辐射峰值较低，且与理论给出的辐射峰值（ $e^{2.925}$ ）误差在较小范围内。

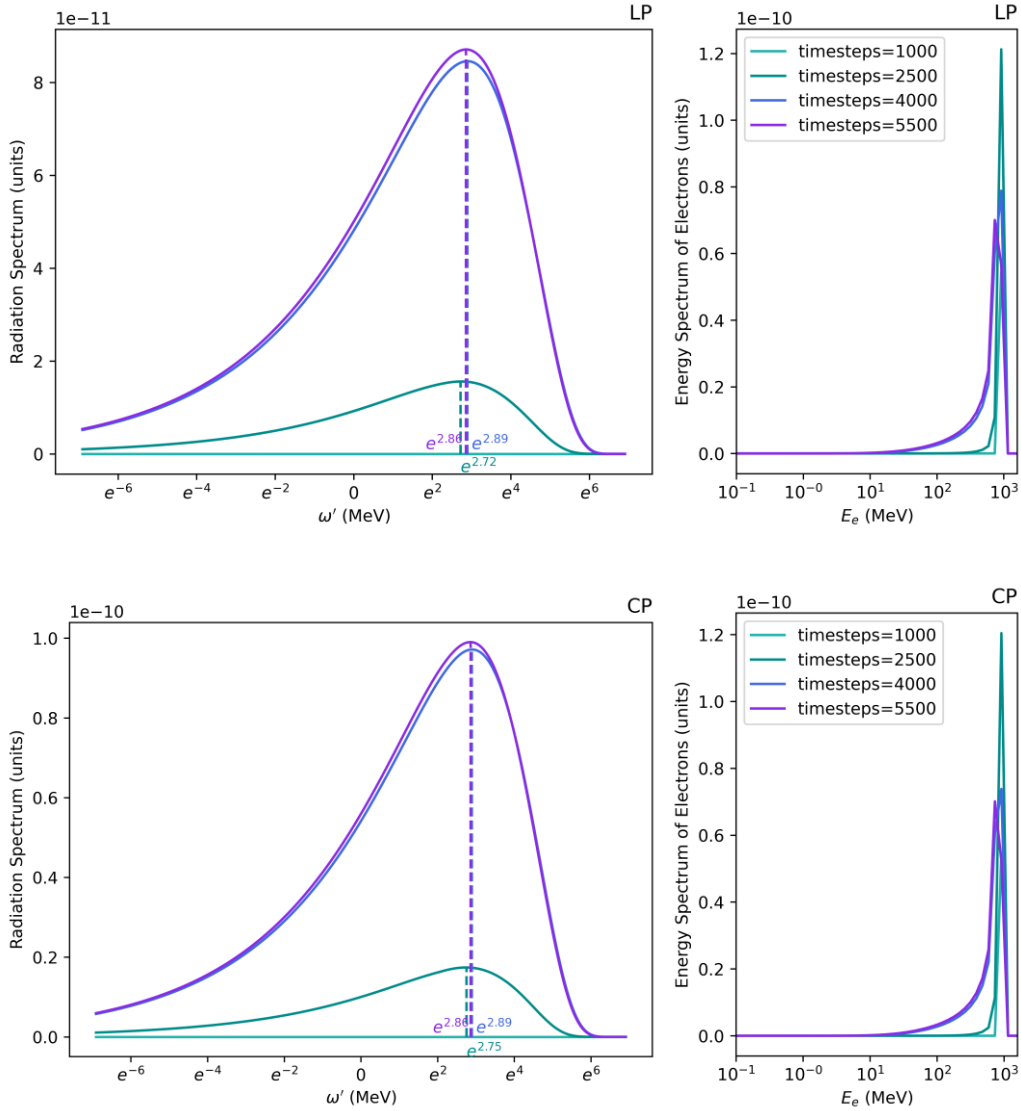


图 23 线偏振、圆偏振连续激光下电子辐射功率谱及电子能谱

散射过程使小部分电子损失能量，电子能谱出现低能分量的拐角。随着辐射光子密度的上升，辐射峰值逐渐逼近理论值（ $e^{2.89}$ ）。之后由于在连续波情况下电子束持续与激光相互作用，部分损失能量的电子与强激光相互作用而散射的高能光子能量较低，使得辐射能谱峰值有一个小的减弱。与二维情况不同，稳态过程中电子能谱变化较小，展宽幅度也较小。

图 24 分别展示了在 timesteps=2000 时出射的线偏振（圆偏振）激光束在激光出射平面（ $z = 20l_0$ ）的归一化强度分布图及其在 timesteps=6000 时到达电子入射平面（ $z = 0$ ）时的归一化强度分布图。根据高斯光束的传播理论，其在两平

面上的相对强度分布近似,但由于与高能电子在散射作用中损耗了大部分的能量,在出射时绝对强度均衰减为入射时的约 $1/100$ 左右。根据本章第二节中 Smilei 对高能光子辐射模型中的假设,由于在三维空间中入射激光场与电子相互作用概率较大,散射后其强度迅速下降,归一化矢势不再满足式 (4.19),故不再辐射高能光子,使得电子能谱展宽较小。

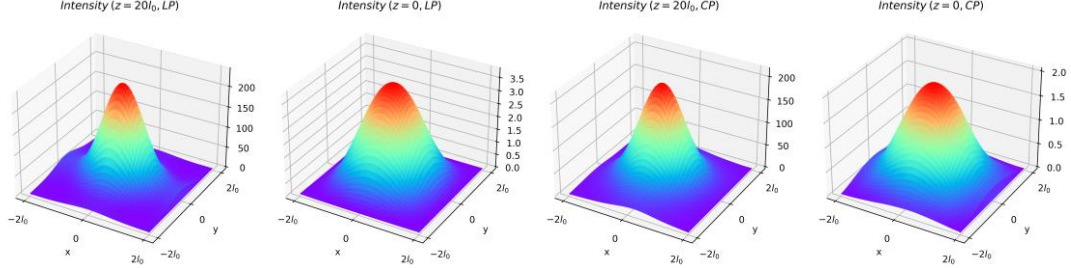


图 24 线偏振、圆偏振连续激光在入射、出射面上的强度分布

上文中提到,由于偏振光对康普顿散射的调控在远场处才能明显出现,使得在 $20l_0$ 的模拟空间中基本无法明显观测到某散射平面上散射光子在空间上的重新分布。但是可以通过对比两种偏振光入射条件下某同一时刻时所有光子沿 x 、 y 的分布来对比偏振的调控机制。

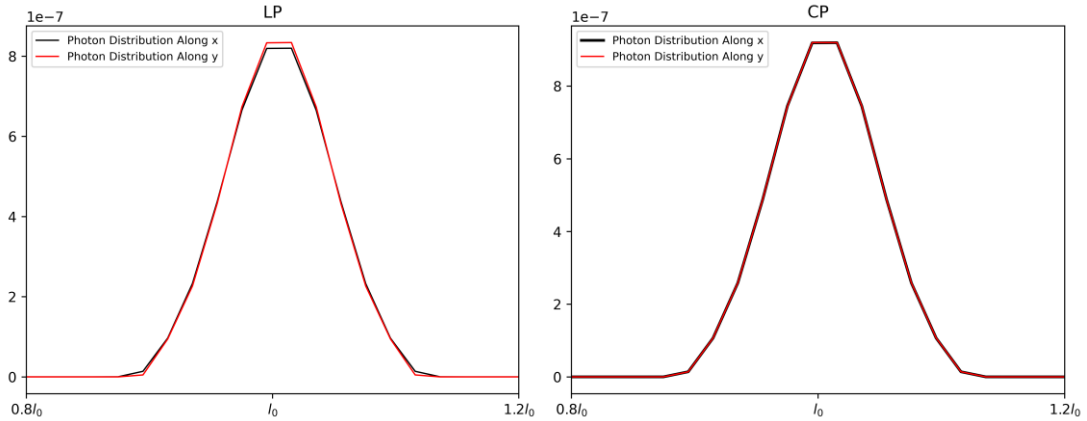


图 25 线偏振、圆偏振连续激光入射时电子辐射高能光子沿 x/y 方向的数密度分布

由图 25, 选取 $timesteps=4000$ 同一时刻线偏振 (LP) 及圆偏振 (CP) 两种情况, 黑线表示高能光子沿 x 轴的数密度分布曲线, 红线表示其沿 y 轴的数密度分布曲线。由于高能电子在 x 、 y 轴为对称的高斯分布, 高能光子在空间上也近似为高斯分布。圆偏振光 (图 25 右) 由于具有空间对称性, 在高能光子数巨大的情况下 (总数超 3×10^9), 其 x 、 y 轴分布曲线完全重合; 而对于线偏振光 (图 25 左), 根据上文中的模拟, 在不考虑辐射光子偏振时, 辐射场在空间上沿入射光偏振方向 (即 x 轴方向) 重新展宽分布。在 $20l_0$ 的模拟区域中已经可见光子沿

x 轴分布曲线展宽略大于沿 y 轴分布曲线，半高全宽较大，即在 x 轴方向空间分布较广，一定程度上体现了由模拟结果提出的预计的差异。

2.脉冲激光入射相互作用

同连续波情况，模拟时间为 $30t_0$ ，总步数为 6000，此时的高能激光设置为时域上持续时间为 $3t_0$ 的高斯脉冲光束。 $10t_0$ 时电子与激光场在模拟区域中心处（即激光聚焦处）相遇， $20t_0$ （timesteps=4000）时电子束到达模拟区域右侧边界，同时激光脉冲传播至左侧边界。同样选取 timesteps=1000、2500、4000 及 5500 四个时间点重绘三维区域中电子、高能光子及高能高斯激光场的空间分布图，如图 26 所示。

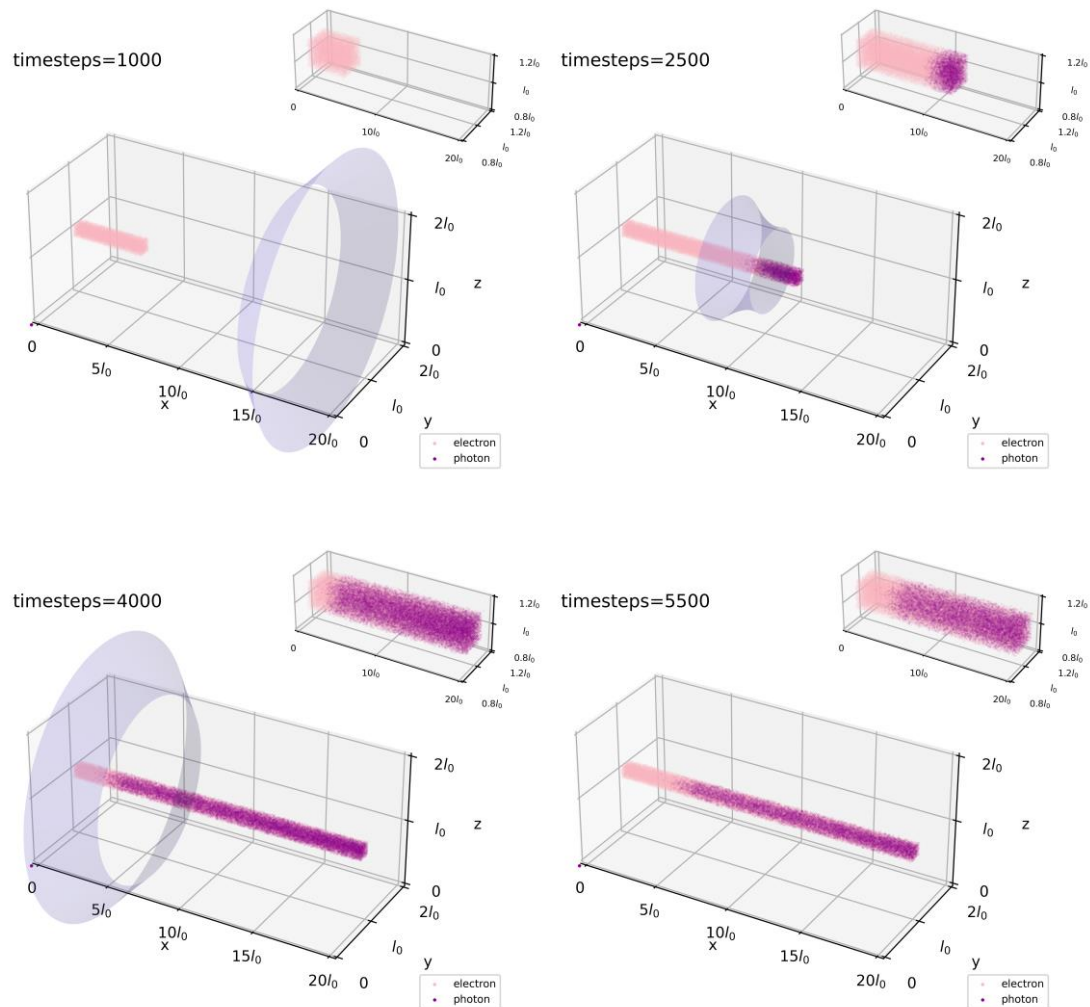


图 26 3D 脉冲激光康普顿散射过程示意图。粉色为入射电子束，深紫色点为辐射产生的高能光子，外侧为入射的高斯光束束腰传播面

由图 26，高能激光脉冲与电子束正向作用时沿电子束入射的背向辐射出高能光子。电子束每一处横截面与脉冲激光束作用时间相同，故电子束各处散射的高能光子密度差距比连续波情况下小很多。但随着散射反应不断进行，脉冲激光强度逐渐下降，相互作用处散射的高能光子数密度随反应进行稍有下降（即 $timesteps=5500$ 时电子束整体的光子数密度小于 $timesteps=4000$ 时的光子数密度）。由于模拟中运用三维的 silver-mullar 边界吸收条件，激光脉冲吸收后末端电子不再发生康普顿散射，无高能光子产生。图 27 显示了脉冲激光在 $timesteps=300$ 时出射的线偏振（圆偏振）脉冲峰值在激光出射平面（ $z = 20l_0$ ）的归一化强度分布图及其在 $timesteps=4300$ 时到达电子入射平面（ $z = 0$ ）时的归一化强度分布图。

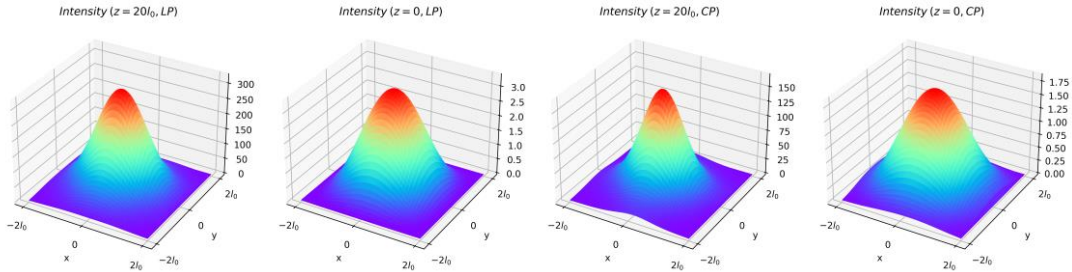


图 27 线偏振、圆偏振脉冲激光在入射、出射面上的强度分布

脉冲峰值在两平面上的相对强度分布近似，与高能电子在散射作用中损耗了大部分的能量，在出射时绝对强度同样均衰减为入射时的约 $1/100$ 左右。

图 28 展示了激光脉冲散射过程中在选取时刻的辐射功率谱（左）及该时刻相应电子的能量谱（右），其中 LP 指代线偏振情况，CP 指代圆偏振情况。

为显示辐射强度的变化，将第一个时间点选为刚开始进行散射时的时间点（ $timesteps=2200$ ）。由图，由于脉冲激光能量耗散较快，散射初辐射峰值较连续波时较低（ $e^{2.40}$ 左右），但与理论结果误差不大。另外由于所有高能电子与激光脉冲作用时间均较短，散射作用后的电子再次散射概率较小，其能谱展宽不明显，能谱线型仅有一个很小的低能偏折，在 1000MeV 处始终形成一个尖峰。由于散射作用持续，激光脉冲能量下降，辐射强度整体衰减，同时辐射极大逐渐减小。当脉冲激光到达边界时，根据设定的 silver-mullar 吸收边界条件，脉冲激光不再与电子束作用，散射能谱降为 0，电子能谱随电子束入射渐渐回到单一的 1000MeV 尖峰（ $timesteps=5500$ ）。

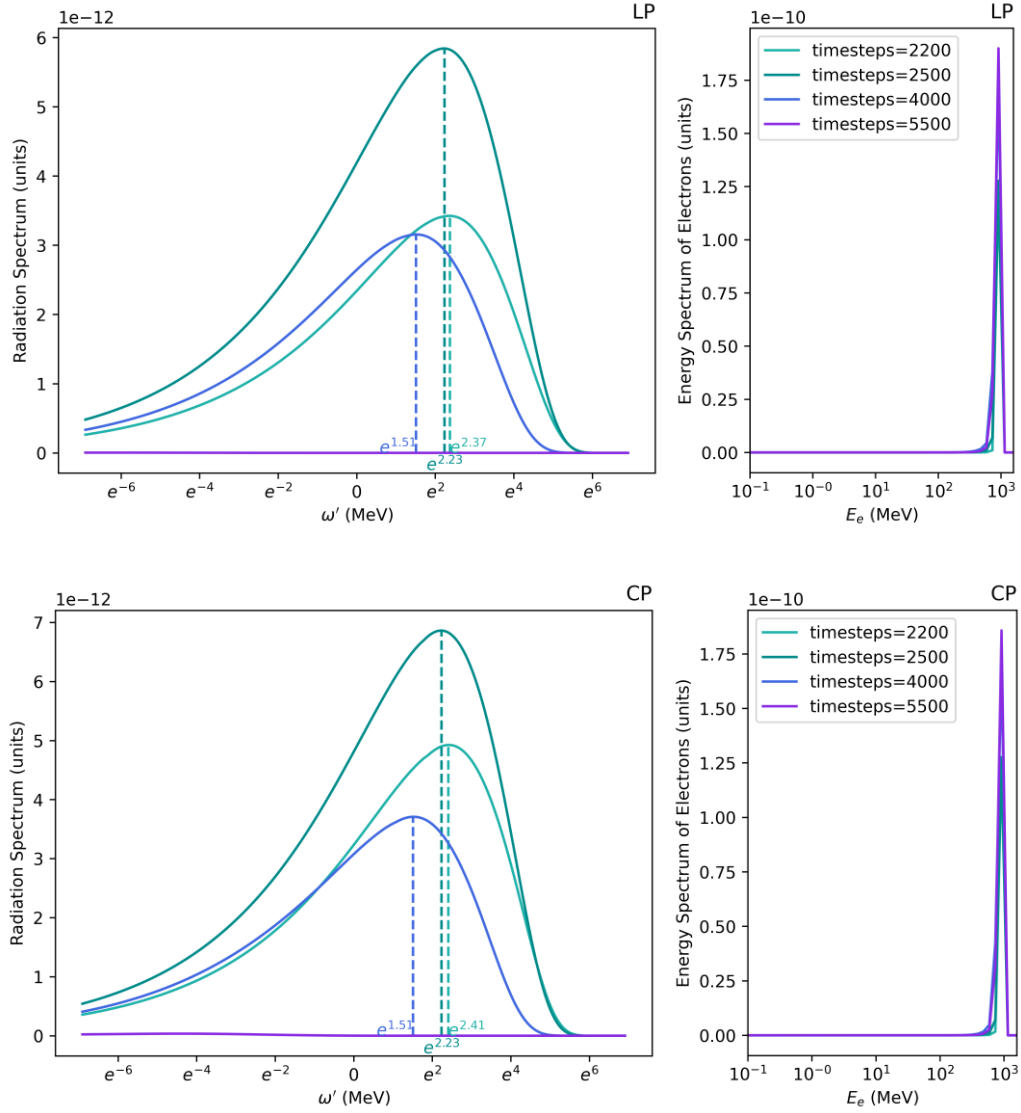


图 28 线偏振、圆偏振脉冲激光下电子辐射功率谱及电子能谱

与连续波情况相同，囿于模拟算力的限制，仅可以通过对比两种偏振光入射条件下某同一时刻时所有光子沿 x 、 y 的分布来对比偏振的调控机制。圆偏振光脉冲（图 29 右）入射时高能光子沿 x 、 y 轴分布曲线依旧完全重合；而线偏振光（图 29 左）可见光子沿 x 轴分布曲线展宽略大于沿 y 轴分布曲线，半高全宽较大，但由于辐射光子数量较少，其展宽程度较连续波较小

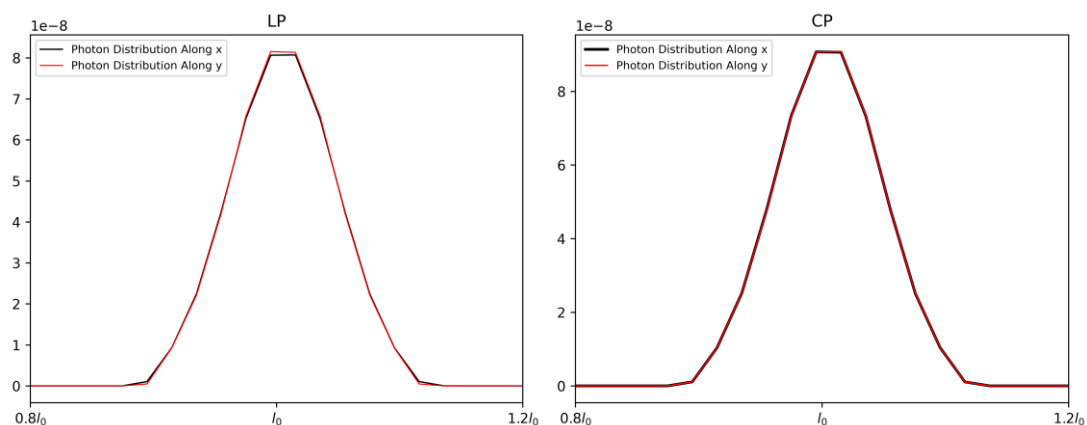


图 29 线偏振、圆偏振脉冲激光入射时电子辐射高能光子沿 x/y 方向的数密度分布

以上为 3D 情况下对康普顿散射过程的模拟及连续波与脉冲作用下线偏振光与圆偏振光间的模拟结果对比。模拟结果初步论证了第三章第二节中的部分数值模拟结论。

第五章 考虑粒子束散射时对散射公式的修正

第一节 粒子的相空间分布函数

在第二章中，我们基于理想的粒子散射过程推导出了微分散射截面，从而得到了激光康普顿散射中激光偏振改变时对空间分布及能谱的影响。然而根据 PIC 模拟结果，辐射高能 γ 光子能谱与理论有较大差异，在第四章第三节中提到，实验中往往无法实现单能的线电子束与激光进行理想相互作用，电子在相空间的分布展宽及激光束空间构型均对实验结果有一定的影响，粒子束散射过程由图 30 所示。下面我们将主要从电子及光子在相空间分布的角度，参考 Sun. ^[12]等人的工作对散射公式进行一定的修正。

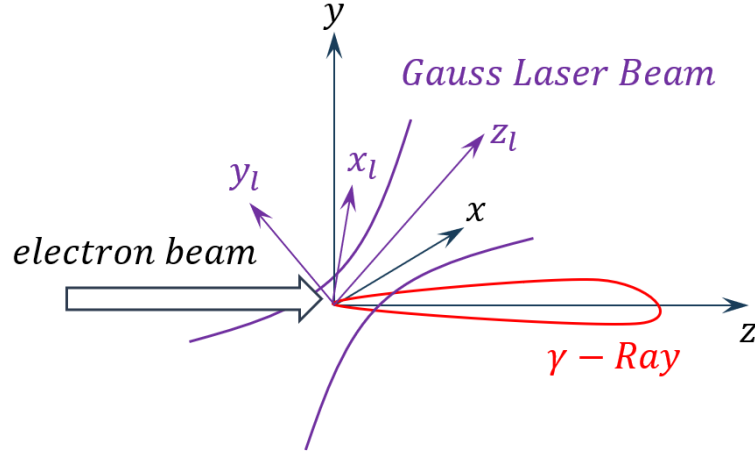


图 30 粒子束散射过程示意图

由于电子束出射时速度沿 z 方向，传播过程中其横向分量速度较小，可以定义沿 x 、 y 方向的倾角 x' 、 y' 来描述近轴电子传播倾斜程度

$$x' = \frac{v_x}{v_z}, y' = \frac{v_y}{v_z} \quad (5.1)$$

用空间坐标 x 、 y 及倾角 x' 、 y' 描述电子的空间即为迹空间，由所有电子在迹空间构成的分布即为迹空间分布，分布的包络（即包含迹空间内所有粒子的曲线）即为迹空间椭圆。在束流物理场中，一般在迹空间（即空间坐标与偏折角构成的空间）中考虑问题，迹空间椭圆有表达式：

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \varepsilon \quad (5.2)$$

一般将系数 γ 、 α 、 β 称为 Twiss 参数 (Twiss Parameters)，它们与 ε 一同描述迹空间中的椭圆具体形式。描述迹空间椭圆 ε 大小的参数称为发射度， γ 和 β 用来表示束流的比例， α 用于描述迹空间椭圆的倾斜度，且 Twiss 参数满足条件

$$\gamma\beta - \alpha^2 = 1 \quad (5.3)$$

具有高斯分布的电子束入射坐标为 (x, y, z) ，电子束入射方向为 z 方向，其在空间中的分布由分布函数给出。令单个电子动量为 p ，电子束中心动量设为 p_0 ，沿 x, y 方向的倾角分别为式 (5.1) 定义的 x' 、 y' ， x, y 方向的 Twiss 参数分别为 $\gamma_{x,y}$ 、 $\alpha_{x,y}$ 、 $\beta_{x,y}$ ，横向发射度为 $\varepsilon_{x,y}$ 。设电子束动量展宽为 σ_p ，束流长度均方根为 σ_z ，则入射电子束的分布函数具有形式^[12]

$$\begin{aligned} f_e(x, y, z, x', y', p, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3 \varepsilon_x \varepsilon_y \sigma_p \sigma_z} \exp \left[-\frac{\gamma_x x^2 + 2\alpha_x x x' + \beta_x x'^2}{2\varepsilon_x} \right. \\ &\quad \left. -\frac{\gamma_y y^2 + 2\alpha_y y y' + \beta_y y'^2}{2\varepsilon_y} - \frac{(p - p_0)^2}{2\sigma_p^2} - \frac{(z - ct)^2}{2\sigma_z^2} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

考虑具有一定空间分布和谱线展宽的激光束，设其中心波数为 k_0 ，激光束的 Rayleigh 长度为 β_0 ，能量展宽的平方根为 σ_k ，激光束长度为 σ_l ，则光子的分布函数具有形式

$$f_p(x_l, y_l, z_l, k, t) = \frac{1}{(2\pi)^2 \sigma_l \sigma_k \sigma_w^2} \exp \left[-\frac{x_l^2 + y_l^2}{2\varepsilon_x} - \frac{(z_l + ct)^2}{2\sigma_l^2} - \frac{(k - k_0)^2}{2\sigma_k^2} \right] \quad (5.5)$$

其中

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{\lambda \beta_0}{4\pi} \left(1 + \frac{z_l^2}{\beta_0^2} \right)} \quad (5.6)$$

根据以上的分布函数，在某时刻 t 在相空间中某处的电子数密度为 $n_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = N_e f_e(x, y, z, x', y', p, t)$ ，光子数密度为 $n_p(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = N_p f_p(x_l, y_l, z_l, k, t)$ ，其中 N_e 、 N_p 分别为入射电子及光子总数。Landau^[10]给出 dt 时间内在相空间单位元 $d\mathbf{p}d\mathbf{k}dV$ 中发生碰撞数为

$$dN(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, t) = \sigma_t(\mathbf{p}, \mathbf{k}) c \left(1 - \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) n_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) n_p(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{p}d\mathbf{k}dVdt \quad (5.7)$$

$\sigma_t(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ 为由入射光子、电子动量描述的总散射截面， $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}_e/c$ 。若光束的作用率 f_0 给定，则生成的 γ 光束流为

$$\frac{dN(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{k}, t)}{dt} = f_0 \int \sigma_t(\mathbf{p}, \mathbf{k}) c \left(1 - \frac{\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\right) n_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) n_p(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{p} d\mathbf{k} dV \quad (5.8)$$

在散射作用下生成的高能 γ 光子总数为

$$N_\gamma = N_e N_p \int \sigma_t(\mathbf{p}, \mathbf{k}) c (1 - \beta \cos \theta_i) f_e(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) f_p(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) d\mathbf{p} d\mathbf{k} dV dt \quad (5.9)$$

第二节 修正后高能光子的空间及能量分布

下面我们推导探测到的光子空间分布及能谱。由于出射电子的能谱一般具有一定的展宽，所以某一能量的 γ 光子可能为各种能量的高能电子在任意某角度散射得到。如图 31，假设散射发生处的空间坐标为 (x_c, y_c, z_c) ，散射光子在 (x_d, y_d, z_d) 处被探测到，轴向距离为 $z_d - z_c = L$ ，假设散射角为 θ_f ，其在 x 、 y 方向的投影量分别为 θ_{fx} 、 θ_{fy} ，近轴时应有关系

$$x' = \frac{x_d - x_c}{L}, y' = \frac{y_d - y_c}{L} \quad (5.10)$$

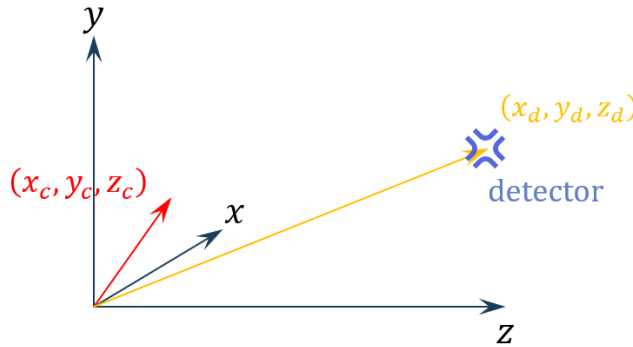


图 31 探测示意图

另外对能量的限制为 $\delta(\omega' - \bar{\omega})$ ，其中 $\bar{\omega}$ 由式 (2.92) 给出。综上，康普顿散射的高能 γ 射线的空间分布及能谱可由式 (5.8) 推广得到：

$$\begin{aligned} \frac{dN(\omega', x_d, y_d)}{d\omega' d\Omega_d} &= \int \frac{d\sigma_t(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{d\Omega_d} \delta(\omega' - \bar{\omega}) c (1 \\ &\quad - \beta \cos \theta_i) n_e(x, y, z, x', y', p, t) n_p(x_l, y_l, z_l, k, t) dx' dy' dp dk dV dt \end{aligned} \quad (5.11)$$

其中 $d\Omega_d = dx_d dy_d / L^2$ 为探测点处的空间角， $d\sigma_t(\mathbf{p}, \mathbf{k}) / d\Omega_d$ 为微分散射截面，由式 (2.113) 给出。此处用散射角 θ_{fx} 、 θ_{fy} 代替倾角 x' 、 y' ，忽略散射点本身处的倾角，将式 (5.11) 在全时空 $dV dt$ 上积分，得到

$$\begin{aligned}
 \frac{dN(\omega', x_d, y_d)}{d\omega' dx_d dy_d} = & \frac{L^2 N_e N_p}{(2\pi)^3 \sigma_p \sigma_k \beta_0} \int \frac{d\sigma_t(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{d\Omega_d} \delta(\omega' - \bar{\omega}) c(1 \\
 & - \beta \cos \theta_i) \frac{k}{\sqrt{\zeta_x \zeta_y}} \frac{1}{\sigma_{\theta_{fx}} \sigma_{\theta_{fy}}} \exp \left[-\frac{\left(\theta_{fx} - \frac{x_d}{L}\right)^2}{2\sigma_{\theta_{fx}}^2} - \frac{\left(\theta_{fy} - \frac{y_d}{L}\right)^2}{2\sigma_{\theta_{fy}}^2} \right. \\
 & \left. - \frac{(p - p_0)^2}{2\sigma_p^2} - \frac{(k - k_0)^2}{2\sigma_k^2} \right] d\theta_{fx} d\theta_{fy} dp dk
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

其中记号表示为 ($i = x, y$)

$$\begin{aligned}
 \eta_i &= 1 + \left(\alpha_i - \frac{\beta_i}{L} \right) + \frac{2k\beta_i \varepsilon_i}{\beta_0} \\
 \zeta_i &= 1 + \frac{2k\beta_i \varepsilon_i}{\beta_0} \\
 \sigma_{\theta_{fx}} &= \sqrt{\frac{\eta_i \varepsilon_i}{\zeta_i \beta_i}}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

由式 (2.92)，近轴条件下有

$$\begin{aligned}
 \omega' &= \frac{\omega(E_e + p)}{(E_e - p \cos \theta_f) + \omega(1 + \cos \theta_f)} \\
 &= \frac{\omega \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} \right)}{\sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} - 1 + \frac{4\omega}{2p} - \frac{\theta_{fx}^2 + \theta_{fy}^2}{2} \left(1 + \frac{\omega}{p} \right)}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

考虑近似正对撞式反应，在所采取自然单位制下将式 (5.14)、式 (2.113) 代入分布函数 (5.12) 即得

$$\begin{aligned}
& \frac{dN(\omega', x_d, y_d)}{d\omega' dx_d dy_d} \\
&= \frac{L^2 N_e N_p}{(2\pi)^3 \sigma_p \sigma_k \beta_0} \frac{4r_e^2}{m^2} \int_0^\infty dp \int_0^\infty d\omega \int_{\theta_{ymin}}^{\theta_{ymax}} d\theta_{fy} \int_{\theta_{xmin}}^{\theta_{xmax}} d\theta_{fx} \frac{1}{x^2} \left\{ \left[1 \right. \right. \\
&+ P_t \cos 2\phi_f \left. \right] \left[\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right] + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \right\} \\
&\cdot \frac{c\omega^3 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} \right)}{\sqrt{\zeta_x \zeta_y} \sigma_{\theta_{fx}} \sigma_{\theta_{fy}} \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2} - 1 + \frac{4\omega}{2p} - \frac{\theta_{fx}^2 + \theta_{fy}^2}{2} \left(1 + \frac{\omega}{p} \right)}} \exp \left[-\frac{(\theta_{fx} - x_d/L)^2}{2\sigma_{\theta_{fx}}^2} \right. \\
&\left. - \frac{(\theta_{fy} - x_d/L)^2}{2\sigma_{\theta_{fy}}^2} - \frac{(p - p_0)^2}{2\sigma_p^2} - \frac{(k - k_0)^2}{2\sigma_k^2} \right] (1 + \beta)
\end{aligned} \tag{5.15}$$

其中

$$\begin{aligned}
x &= \frac{s - m^2}{m^2} = \frac{2\omega p \left(1 + \sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} \right)}{m^2} \\
y &= \frac{m^2 - u}{m^2} = \frac{2\omega' p \left(\sqrt{1 + \frac{m^2}{p^2}} + 1 - \frac{\theta_{fx}^2 + \theta_{fy}^2}{2} \right)}{m^2}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

式 (5.15) 即为修正后的高能光子空间及能量分布。

第六章 总结与展望

本文以量子电动力学 (QED) 为起点, 运用光子偏振理论、电子极化理论及散射理论, 推导出了线性康普顿散射中偏振光子与电子相互作用下的散射截面及散射能谱公式。在近轴情况下, 通过合理的近似条件, 我们模拟得到了激光康普顿散射 (LCS) 在远场处的辐射空间分布及能谱分布, 并特别展示了改变入射激光偏振状态对散射光中各偏振分量的空间和能量的影响。这为康普顿光源的制造和应用提供了理论上的辅助支撑。

之后, 文章详细介绍了 PIC 软件算法, 并阐述了粒子模拟软件通过有限时域差分法求解 Maxwell 方程, 并结合粒子动力学过程模拟电子-光子相互作用的具体过程, 通过建立合理的模型, 完成了 2D/3D 空间内康普顿散射的粒子模拟。另外, 通过改变入射光的波型特征 (连续波或脉冲) 及偏振特性, 对比得到了其对激光康普顿散射过程中高能光子产生、分布及辐射能谱的调控区别, 初步验证了标准数值模拟中部分结论。之后, 我们通过考虑粒子束散射过程中粒子在相空间的分布情况对散射截面公式做出了一定的修正, 为下一步将粒子模拟结果与理论对应提供了可能的新方法。

随着国内外超短超强激光大科学装置的不断蓬勃发展, 由强激光驱动的强场 QED 效应研究已吸引了大批的研究人员在此方向深入研究。除了利用强激光产生高质量偏振伽马射线外, 还有许多尚未很好解决的研究工作。例如至今还没有在实验上验证理论得到的强场双光子 BW 过程, 又如如何通过利用偏振伽马光或极化粒子与等离子体散射的方式达到在自旋维度上对等离子体内的物质状态进行更加细致的诊断等。这些潜在的研究与应用价值将不断推动人们对光与物质相互作用机理的深入理解, 也将为下一代技术的发展打下坚实基础。

参 考 文 献

- [1] THOMSON J. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 47 253, 1899.
- [2] COMPTON A H. A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements[J/OL]. Physical Review, 1923, 21(5): 483-502.
- [3] HARDING A K. Inverse-compton gamma rays from plerions[J/OL]. Space Science Reviews, 1996, 75(1): 257-268.
- [4] STRICKLAND D, MOUROU G. Compression of amplified chirped optical pulses[J/OL]. Optics Communications, 1985, 56(3): 219-221.
- [5] YOON J W, JEON C, SHIN J, 等. Achieving the laser intensity of 5.5×10^{22} W/cm² with a wavefront-corrected multi-PW laser[J/OL]. Optics Express, 2019, 27(15): 20412-20420.
- [6] DANSON C N, HAEFNER C, BROMAGE J, 等. Petawatt and exawatt class lasers worldwide[J/OL]. High Power Laser Science and Engineering, 2019, 7: e54.
- [7] CAJIAO VÉLEZ F, KAMIŃSKI J Z, KRAJEWSKA K. Electron Scattering Processes in Non-Monochromatic and Relativistically Intense Laser Fields[J/OL]. Atoms, 2019, 7(1): 34.
- [8] OLSEN H, MAXIMON L C. Photon and Electron Polarization in High-Energy Bremsstrahlung and Pair Production with Screening[J/OL]. Physical Review, 1959, 114(3): 887-904.
- [9] TANG S, KING B, HU H. Highly polarised gamma photons from electron-laser collisions[J/OL]. Physics Letters B, 2020, 809: 135701.
- [10] [Landau L. D., Lifshitz E. M.] Course Of Theoretical Vol 2[M/OL]. [2023-05-18].
- [11] BERESTETSKII V B, LIFSHITZ E M, PITAEVSKII L P, 等. Course of Theoretical Physics, Volume 4: Relativistic Quantum Theory[J/OL]. Physics Today, 1976, 29(1): 64-68.
- [12] SUN C, WU Y K. Theoretical and simulation studies of characteristics of a Compton light source[J/OL]. Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams, 2011, 14(4): 044701.

- [13]JOHNSON A. The Relativistic Vlasov Equation[J].
- [14]VAY J L. Simulation of beams or plasmas crossing at relativistic velocitya)[J/OL]. Physics of Plasmas, 2008, 15(5): 056701.
- [15]ESIRKEPOV T Zh. Exact charge conservation scheme for Particle-in-Cell simulation with an arbitrary form-factor[J/OL]. Computer Physics Communications, 2001, 135(2): 144-153..
- [16]RITUS V I. Quantum effects of the interaction of elementary particles with an intense electromagnetic field[J/OL]. Journal of Soviet Laser Research, 1985, 6(5): 497-617.
- [17]NIEL F, RICONDA C, AMIRANOFF F, 等. From quantum to classical modeling of radiation reaction: A focus on stochasticity effects[J/OL]. Physical Review E, 2018, 97(4): 043209.
- [18]DUCLOUS R, KIRK J G, BELL A R. Monte Carlo calculations of pair production in high-intensity laser–plasma interactions[J/OL]. Plasma Physics and Controlled Fusion, 2010, 53(1): 015009.
- [19]LOBET M, D’HUMIÈRES E, GRECH M, 等. Modeling of radiative and quantum electrodynamics effects in PIC simulations of ultra-relativistic laser-plasma interaction[J/OL]. Journal of Physics: Conference Series, 2016, 688(1): 012058.
- [20]LOBET M. Effets radiatifs et d’électrodynamique quantique dans l’interaction laser-matière ultra-relativiste[D/OL]. Bordeaux, 2015[2023-05-19].

附录 A Dirac矩阵满足的Clifford代数

Dirac 矩阵满足的基本关系

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3) \\ \text{tr}(\gamma^\mu) &= 0 \\ (\gamma^0)^2 &= 1, (\gamma^i)^2 = -1 \quad (i = 1, 2, 3)\end{aligned}\tag{A.1}$$

定义矩阵 $\alpha = \gamma^0 \gamma^i$ 、 $\beta = \gamma^0$ ，易验证具有形式

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\tag{A.2}$$

Dirac 矩阵协变量为

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu\tag{A.3}$$

内积为

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4\tag{A.4}$$

Dirac 矩阵与另 4-矢量内积表示为

$$a\gamma \equiv a^\mu \gamma_\mu\tag{A.5}$$

由式 () 有

$$\begin{aligned}(a\gamma)(b\gamma) + (b\gamma)(a\gamma) &= 2(ab) \\ (a\gamma)(a\gamma) &= a^2 \\ \frac{1}{4}\text{tr}(a\gamma)(b\gamma) &= ab\end{aligned}\tag{A.6}$$

引入符号 $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ，具有性质

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu &= 0 \\ (\gamma^5)^2 &= 1 \\ (\gamma^5)^\dagger &= \gamma^5\end{aligned}\tag{A.7}$$

故其满足等式

$$\begin{aligned}i\gamma^5(\gamma a)(\gamma b)(\gamma c) &= \gamma e^{\lambda\mu\nu\rho} a_\mu b_\nu c_\rho \\ \frac{1}{4}\text{tr}\gamma^5 \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho &= i e^{\lambda\mu\nu\rho}\end{aligned}\tag{A.8}$$

与矩阵 α 、 β 间乘法满足

$$\begin{aligned}\alpha\gamma^5 - \gamma^5\alpha &= 0 \\ \beta\gamma^5 + \gamma^5\beta &= 0\end{aligned}\tag{A.9}$$

附录 B Smilei粒子模拟源文件（3D）

```
# -----
# SIMULATION PARAMETERS FOR THE PIC-
# CODE SMILEI
# -----
#
# Simulation process of Laser Compton
# Scattering in PIC-Code for Smilei
# The simulation is based on head-to-
# head Collision for electron & photon
# 3D Space
# Detection including:
# The energy distribution of electron
# The x-direction Spatial distributin
# of photons
# The y-direction Spatial distributin
# of photons
# The Electromagnetic field Intensity
# at Incident Plane by Probes0 & Final
# Plane
# Electrons' Radiation Spectrum
# Each macro-photon's position
# generated from the scattering at
# specific timesteps
#
# All rights owned by Wang Yusen,
# University of Science & Technology of
# China
# Contacting e-mail :
# wys2518@mail.ustc.edu.cn
# improt modules-----
import math
import numpy as np

# Units Definition-----
c = 299792458 # c-->Vr = c
electron_mass = 9.10938356e-31
# electron_mass-->Mr = me
electron_charge = 1.60217662e-19
# electron_charge-->Qr = e
# Reference Energy Kr = me*c^2 =
# 0.511MeV
```

```
# Reference momentum Pr = me*c
lambda_r = 1e-6
# Normalization wavelength
wr = 2*math.pi*c/lambda_r
# Normalization frequency
# reference Time Tr = 1/wr
# reference particle density Nr =
# Epsi0*me*wr^2/e^2

# Simulation Parameters Setup-----
# Normalized Laser parameters
l0 = 2.0*math.pi # Laser wavelength in
# units of Lambda_r
t0 = 10 laser cycle in units of c=1

# Simulation box parameters
Lx = 2.*10 # Simulation X-Length
Ly = 2.*10 # Simulation Y-Length
Lz = 20.*10 # Simulation Z-Length
Tsim = 30.*t0 Duration Time of the
# whole simulation
resx = 64. # Number of cells in one
# Laser wavelength
dx = 10/resx/2 # Space step for X-axis
dy = 10/resx/2 # Space step for Y-axis
dz = 10/resx # Space step for Z-axis
dt = 0.95/math.sqrt( 1./dx**2 +
# 1./dy**2 +1./dz**2) # Timestep
# (according to the protocol 0.95 x CFL)

# Namelists-----
Main(
    geometry = "3Dcartesian",
    # Dimension
    interpolation_order = 4 ,
    interpolator = "momentum-
# conserving",
    cell_length = [dx, dy, dz],
    grid_length = [Lx, Ly, Lz],
    simulation_time = Tsim,
    timestep = dt,
```

```

    number_of_patches = [16, 16,
32],          # power(2,n)
    maxwell_solver = 'Yee',
    EM_boundary_conditions = [
        ['silver-muller'],
        ['silver-muller'],
        ['silver-muller'],
    ],
    time_fields_frozen = 0.,
    reference_angular_frequency_SI =
wr,
    print_every = 1,
)

# Inject Laser definition-----
LaserGaussian3D(
    box_side = "zmax",
    # Inject from zmax
    a0 = 100.,
    # Normalized vector potential
    omega = 1., # Laser angular
    frequency in units of wr
    focus = [10, 10, 10*10],
    # Position of Laser focus
    waist = 0.6*10, # Laser waist
    polarization_phi = 0., # Angle of
    polarization ellipse major axis
    relative to perpendicular plane
    ellipticity = 0., # Polarization
    ellipticity (0 for linear)
    time_envelope = tconstant()
    # Constant Gaussian wave
    # Pulse Definition :
    # time_envelope =
    tgaussian(start=0., duration=3.*t0,
    fwhm=1.5*t0, center=1.5*t0, order=2),
)

# Electrons Properties Definition-----
# Electron bunch properties
n0 = 0.001
# Electron density in units of Nr
gamma = 1000./0.511 # Electron initial
energy in units of Kr

```

```

v0 = math.sqrt(1 - 1./gamma**2)
# Electron initial velocity in units
of c
n = constant(n0, xvacuum=Lx,
yvacuum=Ly) # Initial spatial density
distribution(vacancy)

Species(
    name = "electron",
    position_initialization =
"random",
    momentum_initialization = "cold",
# Zero temperature
    particles_per_cell = 64,
    mass = 1., # In units of mef
    charge = -1., # In units of e
    number_density = n,
    # In units of Nr
    #charge density
    mean_velocity = [0, 0, v0],
    # Mean velocity in units of c
    temperature = [0.], # Initial
    temperature in units of mec^2
    boundary_conditions =
[["remove"],["remove"],["remove"]],
    time_frozen = 0,
    pusher = "vay", # Particle pusher
    in relativistic situation
    radiation_model = "Monte-Carlo", #
    Choose appropriate radiation model
    radiation_photon_species =
"photon", # Radiation particles --
    photons
    radiation_photon_sampling = 1, #
    One Macro-photon generated per
    emission event
)

# Inject Electron Bunch Definition----
n_inject = gaussian(n0,
xvacuum=0.9*10, xlength=0.2*10,
xfwhm=0.1*10, xcenter=10, xorder=2,
yvacuum=0.9*10, ylength=0.2*10,
yfwhm=0.1*10, ycenter=10, yorder=2)

```

```

# n_inject = trapezoidal(n0,
xvacuum=0.9*l0, xplateau=0.2*l0,
xslope1=0., xslope2=0.,
ylvacuum=0.9*l0, yplateau=0.2*l0,
yslope1=0., yslope2=0.)

ParticleInjector(
    name = "Electron-Injector",
    species = "electron",
    box_side = "zmin",
    time_envelope = tconstant(),#
Inject constant electron bunch
    # Parameters inherited from the
    associated "species" by default
    position_initialization =
    "random",
    momentum_initialization =
    "cold",      # Zero temperature
    mean_velocity = [0, 0, v0],
    temperature = [0.],
    number_density = n_inject,
    particles_per_cell = 64,
)

# Radiation Method Parameters-----
RadiationReaction(
    # When radiation mode is
    Niel, include the statement:
    # Niel_computation_method = "fit5",
    # Radiation parameters
    minimum_chi_continuous = 1e-6,
    # Threshold of radiation considered
    minimum_chi_discontinuous = 1e-4, #
    Threshold between continuous /
    discontinuous model
)

# Photon Defination-----
Species(
    name = "photon",
    position_initialization =
    "random",
    momentum_initialization = "cold",
    particles_per_cell = 0,

```

```

    mass = 0.,
    charge = 0.,
    number_density = 0,
    mean_velocity = [0.],
    boundary_conditions =
    [["remove"]],
)

# Diagnostics-----
# Scalar Diagnostics
DiagScalar(
    every = 50, # 50 timesteps between
    each output.
)

# Energy-distribution of electrons
DiagParticleBinning(
    deposited_quantity = "weight",
    every = 50,
    time_average = 1,
    species = ["electron"],
    axes = [
        ["gamma", gamma/1.e4,
        gamma*2., 400, "logscale"],
    ]
)

# "Logscale" set the axis scale to
Logarithmic

# Spatial distribution of photons
along x
DiagParticleBinning(
    deposited_quantity = 'weight',
    every = 50,
    species = ["photon"],
    axes = [
        ["x", 0, Lx, 100],
    ]
)

# Spatial distribution of photons
along y
DiagParticleBinning(
    deposited_quantity = 'weight',

```

```

    every = 50,
    species = ["photon"],
    axes = [
        ["y", 0, Ly, 100],
    ]
)

# Spatial distribution of photons
along z
DiagParticleBinning(
    deposited_quantity = 'weight',
    every = 50,
    species = ["photon"],
    axes = [
        ["z", 0, Lz, 400],
    ]
)

# Spatial Intensity Distribution on
End Plane
DiagProbe(
    every = 50,
    origin = [0., 0., Lz-10],
    corners = [[0., Ly, Lz-10], [Lx,
0., Lz-10]],
    number = [100, 100],
    fields = ["Ex", "Ey", "Ez"]
)

# Spatial Intensity Distribution on
Incident Plane
DiagProbe(
    every = 50,

```

```

    origin = [0., 0., 10],
    corners = [[0., Ly, 10], [Lx, 0.,
10]],
    number = [100, 100],
    fields = ["Ex", "Ey", "Ez"]
)

# Track coordinates of electrons
DiagTrackParticles(
    species = "electron",
    every = 100,
    attributes = ["x", "y", "z"]
)

# Track coordinates of photons
DiagTrackParticles(
    species = "photon",
    every = 100,
    attributes = ["x", "y", "z"]
)

# Estimate maximum photon energy
photon_energy_max = gamma

# Radiation Spectrum
DiagRadiationSpectrum(
    every = 50,
    species = ["electron"],
    photon_energy_axis =
[photon_energy_max/1.e6, photon_energy_
max, 400, "logscale"],
    axes = []
)

```

致 谢

敲下毕业论文的最后一行字时，北京城落下了一场瓢泼大雨。我兴奋地跑到楼梯口，用手去接顺着门沿滴下的水，几日的疲惫顷刻间烟消云散。天色渐阴时我回到房间，小心翼翼地取出箱子里的黑胶唱片，决定再听一遍陪伴我度过了无数个大学日夜的 *folklore* 和 *evermore*。伴着唱头与音轨间星星点点的炒豆声，恍惚间好像回到了某个已记不得日期的晚上：也是同样的雨、也是同样的歌，我独自打着伞漫无目的地穿行在科大的校园里，带上耳机就拥有了整个世界，有那么一瞬间觉得自己也有了“一蓑烟雨任平生”的洒脱。

经历了起初的迷茫，如今也算是做了些事出来。在撰写这篇文章前后三个月中，北京大学的乔宾教授与雷碧峰老师给予了我无限的帮助。从最初的选题到论文的编排布局，无论是理论基础还是软件应用，他们不厌其烦地解答我从框架到细节的各种疑难，用耐心一点点协助我铺平了这段进入科研前的必经之路。面对一个年轻识浅的本科生，实验室的师兄们为我出谋划策、提供经验，在繁忙的工作之外关心着我的进展。这篇文章中的每一段字都与老师和师兄们相关，也是他们让最后存储在电脑中的 h5 文件附上了喜悦与温度。

这段日子，父母一直在为照顾老人忙前忙后。他们平日里也都案牍劳形，分享生活的机会也越来越少，总觉得不让他们操心就是最大的省心。渐渐习惯了“通知决定”式的打电话，恍然才发觉如今拥有的一切都归结于他们在我身后毫无保留的支持。或许对于他们而言，理解与信任就是能给我最强的后盾，也是这份支持让我将这条路走得如此无悔。父母总是我的避风港，让我昂首阔步时，不再左顾右盼为外界的风雨担惊受怕。

大学这四年过得并不平静，白驹过隙之时，一切都仿佛过眼云烟，却留下了散不去的痕迹。在波澜起伏和不断的自我怀疑中，有人来、有人走。我将恩师和朋友视为夜幕上的繁星，交织着指引我最终找到了如今的方向。蓦然回首，心中科研的萌芽来自中国科大孙方稳教授。孙老师为我提供了完备的学习和实验条件，让我能在自己一方小小的实验室天地中汲取知识；多少次与孙老师长谈后走在物质楼敞亮的廊道内，那种获益匪浅的酣畅淋漓仿佛刻进了骨子里难以忘怀。在实验室，我的师兄张少春博士花费了大量的科研时间来辅助我完成最初的项目，在我最焦虑的时候为我纾困解难，一次次发自肺腑鼓励着这个彷徨无知的新人。曾经一度茫茫无所适从，所幸最终在科大甘肃招生组找到了久违的归属感。周晓国

教授和朱林繁教授用他们年复一年的关照，指引着我淌过了心里那片波涛汹涌的大海。四年后，他们也终于看到一艘小船平稳地停靠在沙滩上，上面承载着当初各自给予学生的教诲。

我总和别人说自己像个纠结的矛盾体，老是越缠越乱，需要靠别人的手解开纷繁的绳结。当我环顾四周发觉大部分人只是听到了我的声音时，只有苏莘栋认真听完了每个字，拍掉我身上的尘土，指指前方示意这条路我不是一个人在走。当我在书桌前苦思冥想时看到大雨倾盆来了兴致想去转转整个城市，唐凡都会披上衣服跨上背包，无言地和我穿行在合肥的大街小巷。又或是当我面对未知独自一人来到这座陌生的城市，总有王启源陪在身边，在偌大的北京感觉自己也有了片刻栖身的安逸。我总想，若是到头来将所有都用“朋友们”一笔带过，即使是白纸黑字也会显得苍白无力。原来就算在生活中扮成了桀骜不驯的样子，内心也总会有多愁善感的一面。人生能得几次这样的机会，想来想去还是决定将那些在我彻夜无眠时向我伸手、驻足停留的名字记录下来，他们是：陈致亦、高瑞梓、巩珑钰、李睿、蒲怡如、苏莘栋、唐凡、王柏森、王瀚文、王启源、魏江恒、吴振淳、谢禛、朱梓菲。若还有遗漏，也望海涵了！

回首过去，那个曾经不怎么样的甘肃男孩，走出了小沟头，扎根在金寨路，也最终来到了中关村。人生似乎即是环环相扣，缺一步都将白往黑来。总觉得生命中不能说遗憾，毕竟以后的路还长。与其长吁短叹，不如珍惜所得，笃行致远。行文至此，虽然致谢还是写成了心里万般抵触的老样子，但依旧想用一段喜欢的歌词结束这篇论文：

Sometimes giving up is the strong thing.

Sometimes to run is the brave thing.

Sometimes walking out is the one thing.

That will find you the right thing.

And you know, in your soul.

When it's time to go.