解析学A後期中間試験

平成27年11月30日

$\boxed{1}$ 次の極限を求めよ

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$とおけば $(x,y)\to(0,0)$ であることは $r\to 0$ と同義である

$$\begin{aligned}\frac{xy^2}{x^2+y^2} &= \frac{r\cos\theta\cdot r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}\\ &= \frac{r\cos\theta\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\ &= r\cos\theta\sin^2\theta\\ &= 0\ as\ r\to 0\end{aligned}$$

(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

x 軸正の向きでは, $(x,y)=(x,0), \sqrt{x^2+0^2} = |x| = x$ だから

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{x} \to 1\ as\ (x,y)\to(0,0)$$

x 軸負の向きでは, $(x,y)=(x,0), \sqrt{x^2+0^2} = |x| = -x$ だから

$$\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{-x} \to -1\ as\ (x,y)\to(0,0)$$

(x,y) の近づけ方により極限がことなる、つまり極限は存在しない

$\boxed{2}$ 次のヤコビ行列を求めよ

(1) $f(x,y) = \sqrt{2x+3y}$

$$z = \sqrt{2x+3y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial(x,y)} = \frac{1}{2\sqrt{2x+3y}}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$$

(2) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

$$z = \frac{x-y}{x+y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial(x,y)} &= \frac{1}{(x+y)^2}\begin{pmatrix}(x+y)-(x-y) & -(x+y)-(x-y)\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{(x+y)^2}\begin{pmatrix}2y & -2x\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

(1) $z = g(x,y) = x^2y^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t) = \begin{pmatrix} t+e^t \\ t-e^t \end{pmatrix} \text{のとき} \frac{\partial z}{\partial t} \text{を求めよ}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial t} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2 & 2x^2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+e^t \\ 1-e^t \end{pmatrix} \\ &= 2\{xy^2(1+e^t) + 2x^2y(1-e^t)\} \end{aligned}$$

(2) $z = g(x,y) = \log(xy)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(t) = \begin{pmatrix} u^2+v^2 \\ 2uv \end{pmatrix} \text{のとき} (g \circ f)'(u,v) = \frac{\partial z}{\partial(u,v)} \text{を求めよ}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial(u,v)} &= \frac{\partial z}{\partial(x,y)} \cdot \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ 2v & 2u \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{xy} \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{xy} \begin{pmatrix} uy+vx & vy+ux \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{4}$ ヤコビ行列とヘッセ行列を求めよ

(1) $z = f(x,y) = (x+y)^2 - 2(x^4+y^4)$

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= 2(x+y)[1 \quad 1] - 2 \cdot 4[x^3 \quad y^3] \\ &= 2[x+y-4x^3 \quad x+y-4y^3] \end{aligned}$$

$$f''(x,y) = 2\begin{bmatrix} 1-12x^2 & 1 \\ 1 & 1-12y^2 \end{bmatrix}$$

(2) $z = f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

$$\begin{aligned} f'(x,y) &= e^{x^2-y^2}[-2x \quad -2y] \\ &= -2e^{x^2-y^2}[x \quad y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x,y) &= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 2e^{x^2-y^2}[-2x \quad -2y] - 2e^{x^2-y^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= -2e^{x^2-y^2}\left\{\begin{bmatrix} -2x^2 & -2xy \\ -2xy & -2y^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \\ &= -2e^{x^2-y^2}\begin{bmatrix} 1-2x^2 & -2xy \\ -2xy & 1-2y^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ $f(x,y) = (x-y)^3 - 8xy = 0$ によって定まる曲線 C について

(1) 点 $A(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}-2)$ が C 上にあることを確かめよ

$$x - y = 2\sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{3} - 2 = 4$$

$$xy = (2\sqrt{3}+2) \cdot (2\sqrt{3}-2) = 12 - 4 = 8$$

$$(x-y)^3 - 8xy = 4^3 - 8 \cdot 8 = 64 - 64 = 0$$

$\therefore$ 点 A は C 上にある

(2) 点 A における C の接線の方程式を求めよ

$$F = (x-y)^3 - 8xy \text{ とすれば}$$

$$F_x = 3(x-y)^2 - 8y \qquad F_y = -3(x-y)^2 - 8x$$

$$F_y \neq 0 \text{ だから}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x-y)^2 - 8y}{3(x-y)^2 + 8x}$$

点 A の値を代入して

$$\begin{aligned}
\frac{F_x(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}-2)}{-F_y(2\sqrt{3}+2, 2\sqrt{3}-2)} &= \frac{3 \cdot 4^2 - 8(2\sqrt{3}-2)}{3 \cdot 4^2 + 8(2\sqrt{3}+2)} \\
&= \frac{48 + 16 - 16\sqrt{3}}{48 + 16 + 16\sqrt{3}} \\
&= \frac{64 - 16\sqrt{3}}{64 + 16\sqrt{3}} \\
&= \frac{4 - \sqrt{3}}{4 + \sqrt{3}}
\end{aligned}$$

よって直線の方程式は

$$y - (2\sqrt{3}-2) = \frac{4-\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}(x - (2\sqrt{3}+2))$$

$$= \frac{(4-\sqrt{3})^2}{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}x - \frac{(4-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+2)}{4+\sqrt{3}} + (2\sqrt{3}-2)$$

$$= \frac{16+3-8\sqrt{3}}{16-3}x - \frac{2+6\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} + \frac{-2+6\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{19-8\sqrt{3}}{13}x - \frac{2+6\sqrt{3}+2-6\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{19-8\sqrt{3}}{13}x - \frac{4}{4+\sqrt{3}}$$