解析学A期末試験

平成 28 年 2 月 3 日

1 後期中間試験で $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$ が極値を持たないことを示した．このことを認めて次の各問いに答えよ．

(1) 単位円周 $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \varphi(x,y) = x^2 + y^2 = 1\}$ 上における $f(x,y)$ の最大値を求めよ．C 上で最大値を持つことは認めてよい．

単位円周上の点 (a,b) に対し，仮に

$$\varphi'(a,b) = 2\,[a \quad b] = [0 \quad 0]$$

とすると，$a = b = 0$ となり矛盾します．よって

$$\varphi'(a,b) \neq [0 \quad 0]$$

でなければなりません．したがって単位円周上の点 $f(a,b)$ が極値ならば次が成り立ちます．

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : f'(a.b) = \lambda \varphi(a,b) \quad i.e. \quad 3\left[a^2 - b^2 - 1 \quad -2ab\right] = \lambda \cdot 2\,[a \quad b]$$

よって

$$\begin{cases} 3a^2 - 3b^2 - 3 = 2\lambda a \\ -6ab = 2\lambda b \end{cases}$$

$$3a^2 b - 3b^3 - 3b = -6a^2 b$$

$$9a^2 b - 3b^3 - 3b = 0$$

$$\therefore b = 0\,, a = 1 \quad or \quad b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,, a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{（複合同順でない）}$$

これより，$f(a,b)$ が最大となる点をもとめると，

$$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{4} = 2\sqrt{2}$$

したがって最大値は $2\sqrt{2}$ です．

(2) 単位閉円板 $D = \{(x,y) \leq \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上での $f(x,y)$ の最大値を求めよ．D 上で最大値を持つことは認めてよい．

$f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ の Jacobi 行列は，

$$f'(x,y) = 3\left[x^2 - y^2 - 1 \quad -2xy\right]$$

$$\varphi'(a,b) = 2\,[x \quad y]$$

です．仮に円板の内部 $\varphi(x,y) < 1$ で最大値をとったとすると，$f'(x,y) = 0$ でなければなりませんが，$x^2 - y^2 - 1 = -2xy = 0$ となり矛盾します．よって最大値は単位円周上でとらなければなりません．

したがって単位閉円板 $D = \{(x,y) \leq \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上の最大値は，(1) より $2\sqrt{2}$ です．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問いに答えよ.

(1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq x \leq \sin y\}$ を図示せよ。

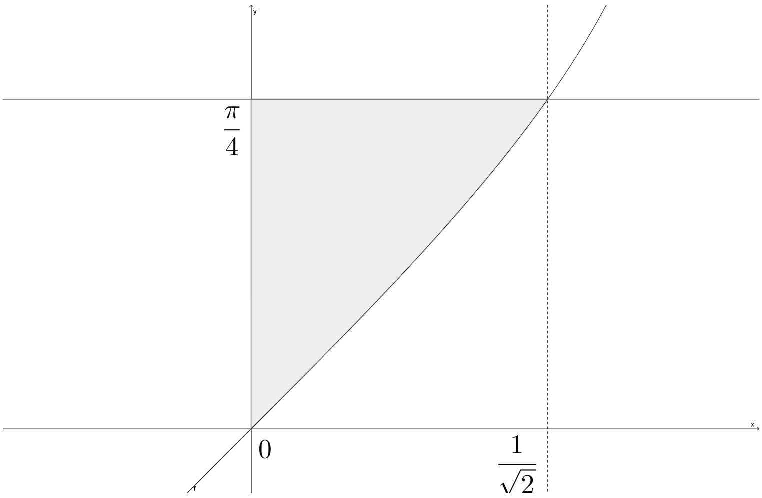

図 1: 積分領域 D

(2) $I = \iint_D \sqrt{1-x^2}dxdy$ を求めよ。ただし公式 $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c$ を用いてよい

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin y} \sqrt{1-x^2}dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x \right]_0^{\sin y} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin y \cos y + \arcsin \sin y) dy \\
&= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{2} \sin^2 y \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + [y \arcsin \sin y]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} y dy \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \left[y^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{32} \right) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{\pi^2}{64} \\
&\neq \frac{1}{8} + \frac{\pi^2}{16}
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$　次の各問いに答えよ.

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x - y \leq 1, 0 \leq x + y \leq 1\}$ を図示せよ。なお (2) で変数変換を用いるときは新たな積分領域も描け。

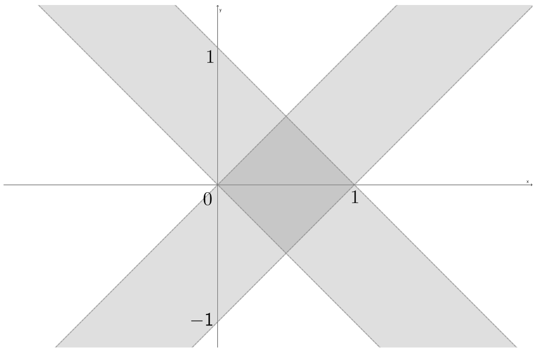

図 2: 積分領域 D

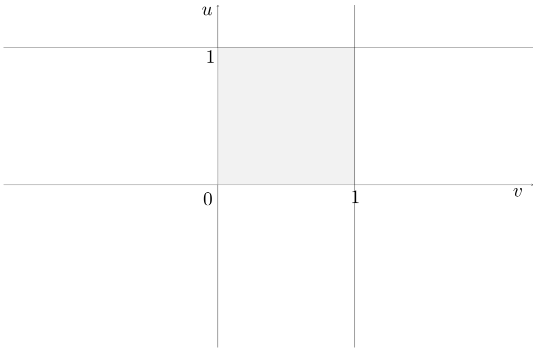

図 3: 積分領域 E

(2) $I = \iint_D (x - y) \log(x + y + 1) dxdy$ を求めよ

線形変換

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

は,

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1(-1) - 1^2 =^2 \neq 0$$

より線形同型であって，逆変換は

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

である．よって，その Jacobi 行列式の絶対値は

$$|\det(\varphi^{-1})'(u, v)| = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

であり,

$$(x, y) \in D \iff (u, v) \in E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$$

だから,

$$\begin{aligned}
&\iint_D (x - y) \log(x + y + 1) dxdy \\
&= \iint_E v \log(u + 1) \frac{1}{2} dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 v\, dv \int_0^1 \log(u + 1) du \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} v^2\right]_0^1 \left([u \log(u + 1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{u + 1} du \right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left(\log 2 - [u - \log u + 1]_0^1 \right) \\
&= \frac{1}{4} (\log 2 - (1 - \log 2)) \\
&= \frac{1}{4} (2 \log 2 - 1)
\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq x\}$ を図示せよ。なお (2) で変数変換を用いる場合は新たな積分領域も描け。

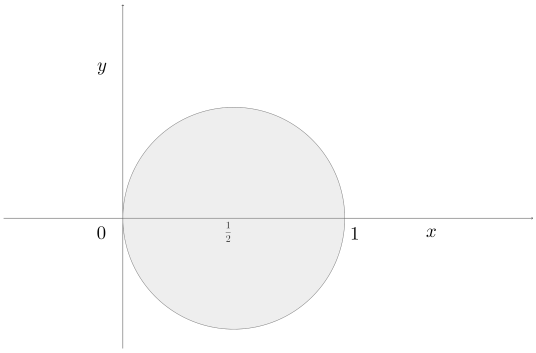

図 4: 積分領域 D

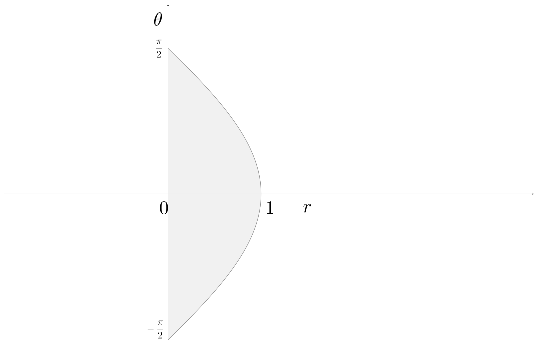

図 5: 積分領域 E

(2) $I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy$ を求めよ

極座標変換

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad r \geq 0, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

によって $r\theta$ 平面の領域 E が xy 平面上の領域 D に 1 対 1 にうつります．

$$\begin{aligned}
&\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \sqrt{1 - r^2\cos\theta - r^2\sin\theta} r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} r\sqrt{1 - r^2} dr d\theta
\end{aligned}$$

ここで，

$$t = \sqrt{1 - r^2} \qquad dt = -\frac{r}{2t} dr$$

r	$0 \to \cos\theta$
t	$1 \to \sin\theta$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{\sin\theta} r \cdot t \frac{-2t}{r} dt d\theta \\
&= -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3} t^3\right]_1^{\sin\theta} d\theta \\
&= -\frac{2}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta - 1) d\theta \\
&= -\frac{2}{3} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta - 1) d\theta \\
&= -\frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}
\end{aligned}$$