解析学A期末試験

平成 28 年 2 月 3 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ **後期中間試験で $f(x,y)=x^3-3x(1+y^2)$ が極値を持たないことを示した．このことを認めて次の各問いに答えよ．**

(1) 単位円周 $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\phi(x,y)=x^2+y^2=1\}$ 上における $f(x,y)$ の最大値を求めよ．C 上で最大値を持つことは認めてよい．

単位円周上の点 (a,b) に対し，仮に

$$\phi'(a,b)=2\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

とすると，$a=b=0$ となり矛盾します．よって

$$\phi'(a,b)\neq\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

でなければなりません．したがって単位円周上の点 $f(a,b)$ が極値ならば次が成り立ちます．

$$\exists\lambda\in\mathbb{R}:f'(a.b)=\lambda\phi(a,b)\quad i.e.\quad 3\begin{bmatrix}a^2-b^2-1 & -2ab\end{bmatrix}=\lambda\cdot 2\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}$$

よって

$$\begin{cases}3a^2-3b^2-3=2\lambda a\\ -6ab=2\lambda b\end{cases}$$
$$3a^2b-3b^3-3b=-6a^2b$$
$$9a^2b-3b^3-3b=0$$
$$\therefore b=0\,,a=1\quad or\quad b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,,a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\quad（複合同順でない）$$

これより，$f(a,b)$ が最大となる点をもとめると，

$$f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{2\sqrt{2}}+3\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{9}{2\sqrt{2}}=\frac{8}{2\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{4}=2\sqrt{2}$$

したがって最大値は $2\sqrt{2}$ です．

(2) 単位閉円板 $D=\{(x,y)\leq\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}$ 上での $f(x,y)$ の最大値を求めよ．D 上で最大値を持つことは認めてよい．

$f(x,y)$, $\phi(x,y)$ の Jacobi 行列は，

$$f'(x,y)=3\begin{bmatrix}x^2-y^2-1 & -2xy\end{bmatrix}$$
$$\phi'(a,b)=2\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}$$

です．仮に円板の内部 $\phi(x,y)<1$ で最大値をとったとすると，$f'(x,y)=0$ でなければなりませんが，$x^2-y^2-1=-2xy=0$ となり矛盾します．よって最大値は単位円周上でとらなければなりません．

したがって単位閉円板 $D=\{(x,y)\leq\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 1\}$ 上の最大値は，(1) より $2\sqrt{2}$ です．

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq y \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq x \leq \sin y\}$ を図示せよ。

図 1: 積分領域 D

(2) $I = \iint_D \sqrt{1-x^2}dxdy$ を求めよ。ただし公式 $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c$ を用いてよい

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin y} \sqrt{1-x^2}dxdy \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\left[x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right]_0^{\sin y} dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin y \cos y + \arcsin \sin y) dy \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}\sin^2 y\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + [y \arcsin \sin y]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} ydy\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\left[y^2\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{\pi^2}{32}\right) \\
&= \frac{1}{8} + \frac{\pi^2}{64} \\
&\neq \frac{1}{8} + \frac{\pi^2}{16}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(1) $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le x-y\le 1, 0\le x+y\le 1\}$ を図示せよ。なお (2) で変数変換を用いるときは新たな積分領域も描け。

図 2: 積分領域 D

図 3: 積分領域 E

(2) $I=\iint_D (x-y)\log{(x+y+1)}dxdy$ を求めよ

線形変換

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \varphi(x,y) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

は，

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 1(-1) - 1^2 =^2 \neq 0$$

より線形同型であって，逆変換は

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

である．よって，その Jacobi 行列式の絶対値は

$$|\det(\varphi^{-1})'(u,v)| = \left| \left(\frac{1}{2}\right)^2 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right| = \frac{1}{2}$$

であり，

$$(x,y)\in D \iff (u,v)\in E = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2|0\le u\le 1, 0\le v\le 1\}$$

だから，

$$\begin{aligned}
&\iint_D (x-y)\log{(x+y+1)}dxdy \\
&= \iint_E v\log(u+1)\frac{1}{2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 v\,dv \int_0^1 \log(u+1)du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}v^2\right]_0^1 \left([u\log(u+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{u+1}du \right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(\log 2 - [u - \log u + 1]_0^1 \right) \\
&= \frac{1}{4}\left(\log 2 - (1-\log 2)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2\log 2 - 1\right)
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq x\}$ を図示せよ。なお (2) で変数変換を用いる場合は新たな積分領域も描け。

(2) $I = \iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} dxdy$ を求めよ

$$\frac{\pi}{3} - \frac{4}{9}$$