Отчет по домашнему заданию
"Тест на свойство Пенлеве"
по курсу
"Введение в нелинейную динамику"

Егор Антонов, БПМ214

26 марта 2024 г.

ЗАДАНИЕ 1 (Вариант №2)

Требуется найти значение параметра, при котором уравнение проходит тест на свойство Пенлеве.

РЕШЕНИЕ

$$yy_{zz} - y_z^2 - y^3 - \mu y y_z + y - 1 = 0 \tag{1}$$

$$y(z) \sim a_0(z - z_0)^p$$

$$a_0(z-z_0)^p a_0 p\,(p-1)\,(z-z_0)^{p-2} - \left(a_0 p\,(z-z_0)^{p-1}\right)^2 - \\ - \left(a_0\,(z-z_0)^p\right)^3 - \mu a_0\,(z-z_0)^p\,a_0 p\,(z-z_0)^{p-1} + a_0(z-z_0)^p - 1 = 0$$

$$a_0^2 p\,(p-1)\,(z-z_0)^{2p-2} - a_0^2 p^2\,(z-z_0)^{2p-2} - \\ - a_0^3\,(z-z_0)^{3p} - \mu a_0^2 p\,(z-z_0)^{2p-1} + a_0(z-z_0)^p - 1 = 0$$

$$(p, a_0) = (-2, 2), \text{ ведущие члены} : yy_{zz},\ -y_z^2,\ -y^3.$$

Упрощенное уравнение принимает вид:

$$yy_{zz} - y_z^2 - y^3 = 0$$

$$y(z) \sim a_0(z-z_0)^p + a_r(z-z_0)^{r-2} = 2(z-z_0)^{-2} + a_r(z-z_0)^{r-2} \implies$$

$$\left(2(z-z_0)^{-2} + a_r(z-z_0)^{r-2}\right)\left(12(z-z_0)^{-4} + a_r(r-2)(r-1)(z-z_0)^{r-4}\right) - \\ - \left(-4(z-z_0)^{-3} + a_r(r-2)(z-z_0)^{r-3}\right)^2 - \left(2(z-z_0)^{-2} + a_r(z-z_0)^{r-2}\right)^3 = 0$$

$$a_r \cdot 2(r-2)(r+1) \cdot (z-z_0)^{r-6} \implies Q(r) = 2(r-2)(r+1) = 0 \iff \left[\begin{aligned} r &= -1, \\ r &= 2. \end{aligned}\right.$$

$$y(z) = a_0(z-z_0)^p + \sum_{i=1}^{r_s} a_i(z-z_0)^{i+p} = 2(z-z_0)^{-2} + \sum_{i=1}^{2} a_i(z-z_0)^{i-2} =$$
$$= 2(z-z_0)^{-2} + a_1(z-z_0)^{-1} + a_2 \implies$$

$$yy_{zz} - y_z^2 - y^3 - \mu y y_z + y - 1 =$$
$$(8\mu - 4a_1)(z-z_0)^{-5} + \left(6a_1\mu - 5a_1^2\right)(z-z_0)^{-4} + \left(a_1^2\mu + 4a_2\mu - 10a_1a_2 - a_1^3\right)(z-z_0)^{-3} +$$
$$+\left(a_1a_2\mu - 3a_1^2a_2 - 6a_2^2 + 2\right)(z-z_0)^{-2} + \left(a_1 - 3a_1a_2^2\right)(z-z_0)^{-1} + \left(a_2 - a_2^3 - 1\right) = 0$$

$$8\mu - 4a_1 = 0 \iff a_1 = 2\mu$$
$$6a_1\mu - 5a_1^2 = 0 \iff -8\mu^2 = 0 \iff \mu = 0$$
$$a_1^2\mu + 4a_2\mu - 10a_1a_2 - a_1^3 = 0 \iff \forall a_2 \in \mathbb{C}$$

1 ВЫВОДЫ

Уравнение проходит тест на свойство Пенлеве при значении параметра $\mu = 0$.