Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Московский институт электроники и математики Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики"

Департамент прикладной математики

ОТЧЕТ
По домашнему заданию
«Динамические системы на плоскости II»
По курсу «Введение в нелинейную динамику»

ФИО студента	Номер группы	Дата
Антонов Егор Алексеевич	БПМ-214	6 февраля, 2024 г.

Москва – 2024 г.

ЗАДАНИЕ 1 (Вариант №12):
Требуется найти все неподвижные точки, провести их классификацию и построить фазовый портрет для нескольких значений параметра, описать бифуркации происходящие при изменении параметра.

$\dot{x} = y + \frac{x^3}{2},\ \dot{y} = -x + ax^2y + \frac{y^3}{2}$

РЕШЕНИЕ
Находим неподвижные точки (положения равновесия) динамической системы:

$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y + \frac{x^3}{2} = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{x^3}{2}$

$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow -x + ax^2y + \frac{y^3}{2} = 0$

$-x + ax^2\left(-\frac{x^3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{2}\right)^3 = 0 \Leftrightarrow -x - \frac{a}{2}x^5 - \frac{1}{16}x^9 = 0 \Leftrightarrow -\frac{x}{16}\left(16 + 8ax^4 + x^8\right) = 0$

$\forall a \in \Re \Rightarrow (0, 0)$

$x^8 + 8ax^4 + 16 = 0,\ \Delta = (8a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64a^2 - 64 = 64\left(a^2 - 1\right)$

$\Delta < 0 \Leftrightarrow 64\left(a^2 - 1\right) < 0 \Leftrightarrow a \in (-1;\ 1) \Rightarrow x^4 \notin \Re \Rightarrow x \notin \Re$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow a \in \{-1,\ 1\} \Rightarrow x^4 = -4a$

$a = 1 \Rightarrow x^4 = -4 \Rightarrow x \notin \Re,\ a = -1 \Rightarrow x^4 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow y = \mp\sqrt{2}$

$a = -1 \Rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right),\ \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

$\Delta > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty) \Rightarrow x^4 = -4a \pm 4\sqrt{a^2 - 1}$

$-4a \pm 4\sqrt{a^2 - 1} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -1$

$x^4 = -4a \pm 4\sqrt{a^2 - 1} \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{-4a \pm 4\sqrt{a^2 - 1}} \Leftrightarrow$

$x = \pm\sqrt{2}\sqrt[4]{-a \pm \sqrt{a^2 - 1}} \Rightarrow y = \mp\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{-a \pm \sqrt{a^2 - 1}}\right)^3$

$\forall a < -1 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\sqrt[4]{-a + \sqrt{a^2 - 1}},\ -\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{-a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)^3\right)$

$\forall a < -1 \Rightarrow \left(-\sqrt{2}\sqrt[4]{-a + \sqrt{a^2 - 1}},\ +\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{-a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)^3\right)$

$\forall a < -1 \Rightarrow \left(\sqrt{2}\sqrt[4]{-a - \sqrt{a^2 - 1}},\ -\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{-a - \sqrt{a^2 - 1}}\right)^3\right)$

$\forall a < -1 \Rightarrow \left(-\sqrt{2}\sqrt[4]{-a - \sqrt{a^2 - 1}},\ +\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{-a - \sqrt{a^2 - 1}}\right)^3\right)$

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{3x^2}{2}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 1,$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1 + 2axy,\ \frac{\partial Q}{\partial y} = ax^2 + \frac{3y^2}{2}$

$(0,\ 0)$: $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = \pm\ i \Rightarrow \forall a \in \Re \Rightarrow (0, 0) -$ центр

$\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$: $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 4 \Rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) -$ неустойчивый узел/седло

$\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$: $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 4 \Rightarrow \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) -$ неустойчивый узел/седло

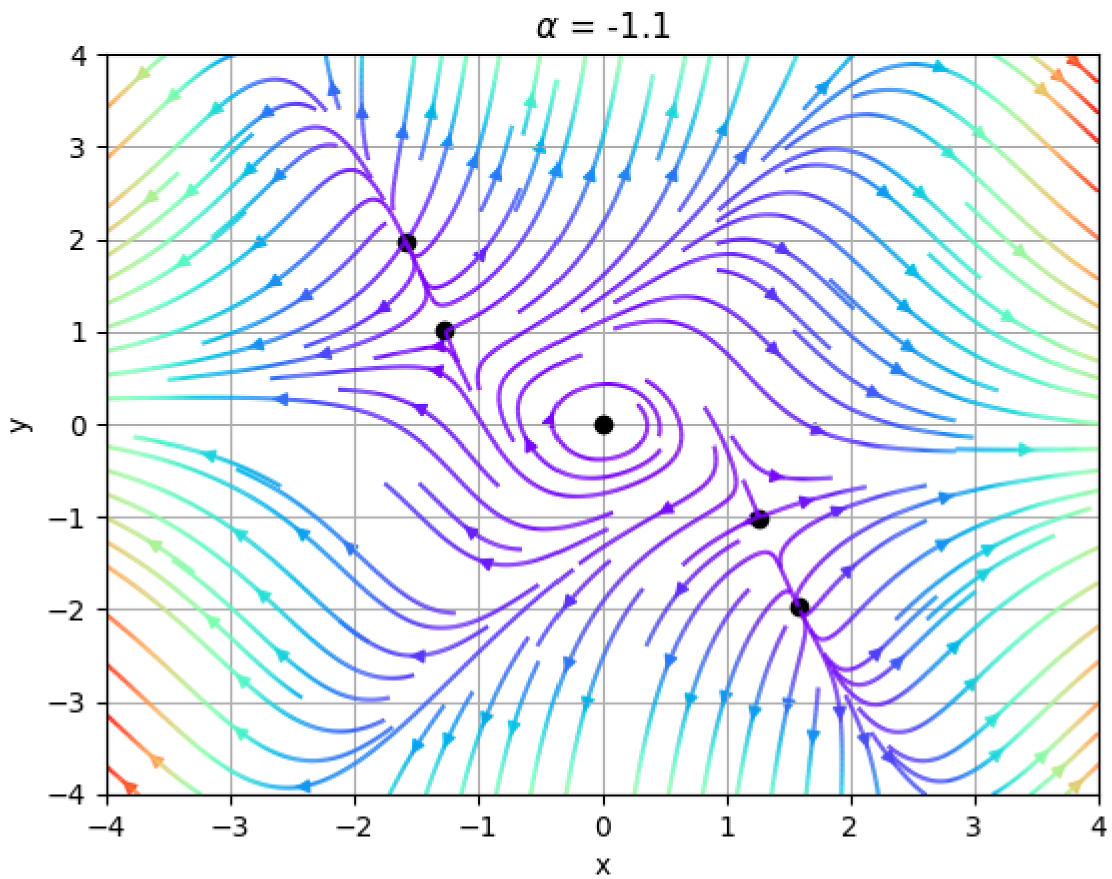
$\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{-a + \sqrt{a^2 - 1}},\ -\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{-a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)^3\right)$: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ неустойчивый узел

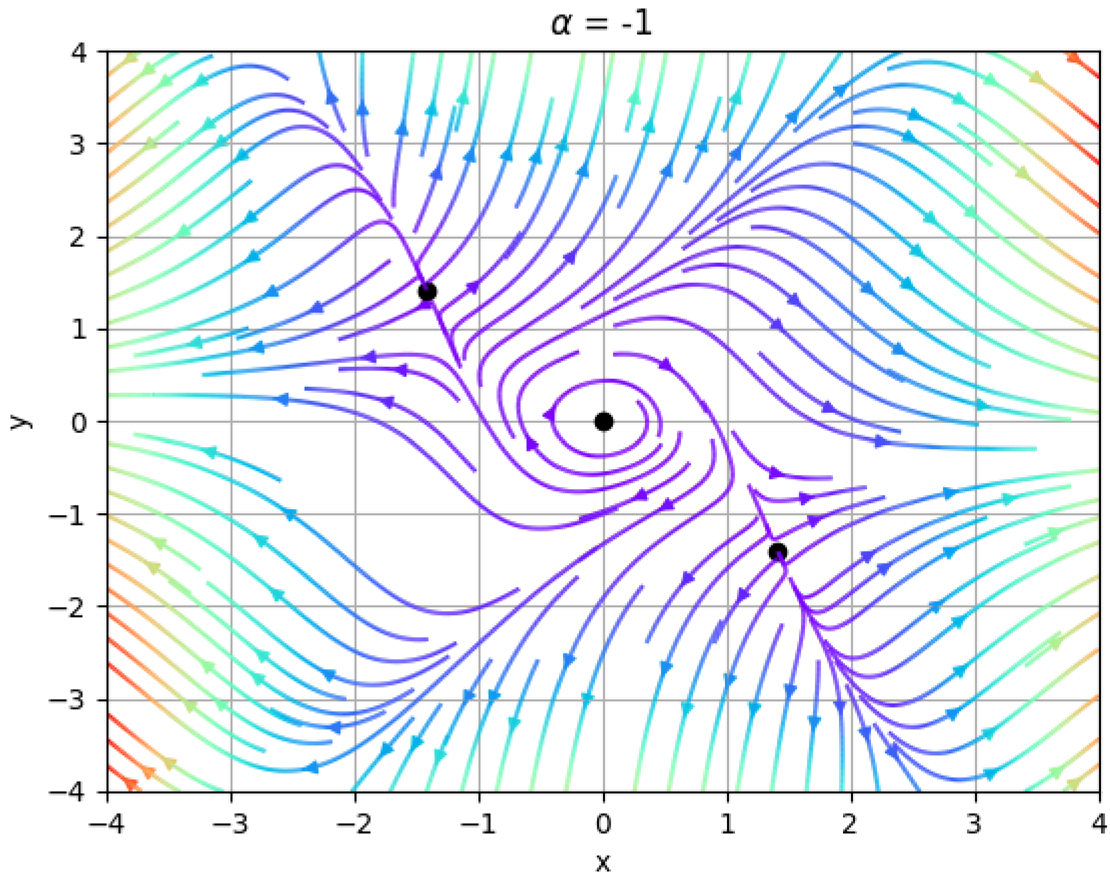
$\left(-\sqrt{2}\sqrt[4]{-a + \sqrt{a^2 - 1}},\ \sqrt{2}\left(\sqrt[4]{-a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)^3\right)$: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ неустойчивый узел

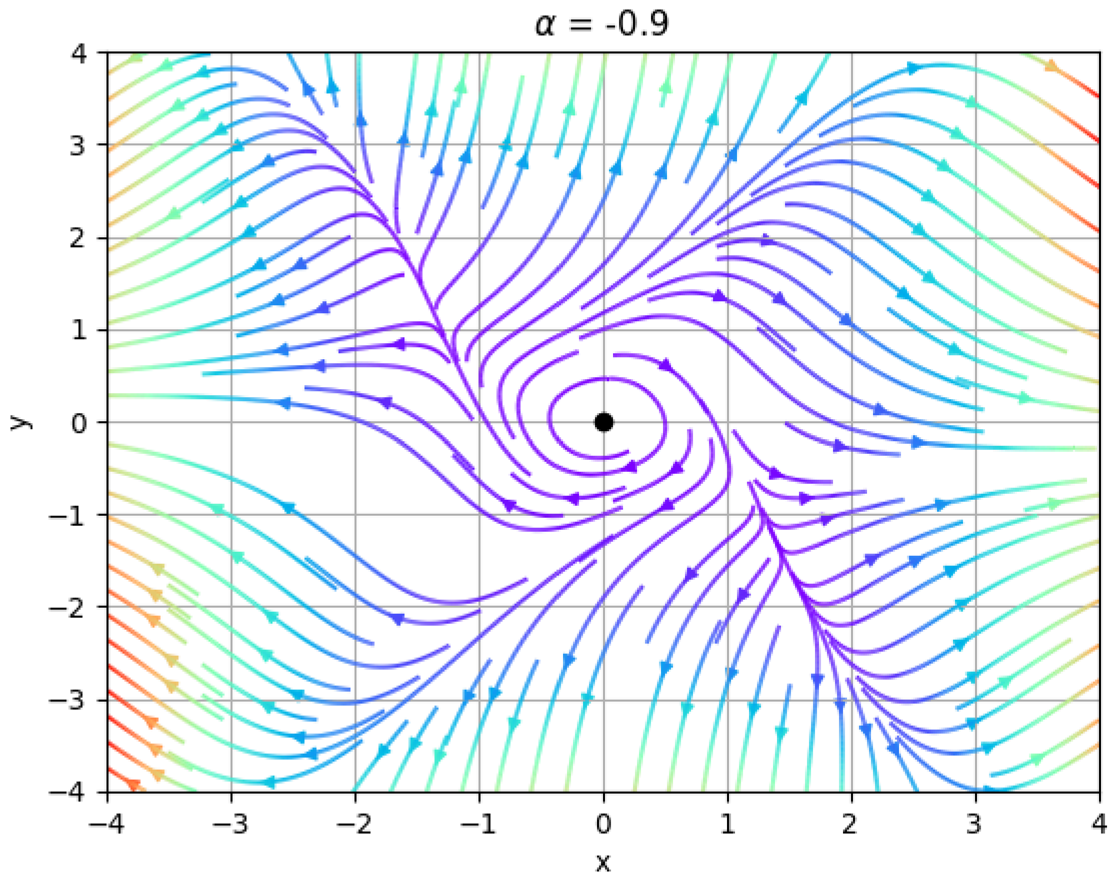
$\left(\sqrt{2}\sqrt[4]{-a - \sqrt{a^2 - 1}},\ -\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{-a - \sqrt{a^2 - 1}}\right)^3\right)$: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ седло

$\left(-\sqrt{2}\sqrt[4]{-a - \sqrt{a^2 - 1}},\ \sqrt{2}\left(\sqrt[4]{-a - \sqrt{a^2 - 1}}\right)^3\right)$: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ седло

Построим фазовые портреты для значений параметра $a \in \{-1.1,\ -1,\ -0.9\}$




α = -1
y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4


α = -0.9
y
x
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4

ВЫВОДЫ
При значении параметра $a = -1$ происходит бифуркация типа седло-узел

ПРИЛОЖЕНИЕ.
Код программы для построения фазовых портретов:

```
import numpy as np
import sympy
from sympy.abc import x, y, alpha
from phaseportrait import PhasePortrait2D
import matplotlib.pyplot as plt

def P(x0, y0):
    return (x0**3 / 2 + y0)


def Q(x0, y0, alpha0=alpha):
    return (-x0 + alpha0 * x0**2 * y0 + y0**3 / 2)


def field(x0, y0, alpha0=alpha):
    return (P(x0, y0), Q(x0, y0, alpha0))


alpha0 = -1.1
portrait = PhasePortrait2D(
    field, [-4, 4], dF_args={'alpha0': alpha0}, Title=r'$ \alpha $ = '
+ f'{alpha0}', xlabel='x', ylabel='y')


pts = [(0, 0)]
if (alpha0 == -1):
    pts.append((np.sqrt(2), -np.sqrt(2)))
    pts.append((-np.sqrt(2), np.sqrt(2)))

if (alpha0 < -1):
    pts.append((np.sqrt(2) * (-alpha0 + np.sqrt(alpha0**2 - 1))**(1/4),
                -np.sqrt(2) * (-alpha0 + np.sqrt(alpha0**2 -
1))**(3/4)))
    pts.append((-np.sqrt(2) * (-alpha0 + np.sqrt(alpha0**2 -
1))**(1/4),
                np.sqrt(2) * (-alpha0 + np.sqrt(alpha0**2 -
1))**(3/4)))
    pts.append((np.sqrt(2) * (-alpha0 - np.sqrt(alpha0**2 - 1))**(1/4),
```

```
                -np.sqrt(2) * (-alpha0 - np.sqrt(alpha0**2 -
1))**(3/4)))
    pts.append((-np.sqrt(2) * (-alpha0 - np.sqrt(alpha0**2 -
1))**(1/4),
                np.sqrt(2) * (-alpha0 - np.sqrt(alpha0**2 -
1))**(3/4)))

for (x0, y0) in pts:
    print(x0, y0)
    plt.plot(x0, y0, 'ko')

fig, ax = portrait.plot()
plt.show()
```