

Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
профессионального образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"

Московский институт электроники и математики Национального  
исследовательского университета "Высшая школа экономики"

Департамент прикладной математики

ОТЧЕТ

По домашнему заданию  
«Бифуркация в одномерных динамических системах»  
По курсу «Введение в нелинейную динамику»

ФИО студента	Номер группы	Дата
Антонов Егор Алексеевич	БПМ-214	23 января, 2024 г.

Москва – 2024 г.

**ЗАДАНИЕ 1** (Вариант №9):

Требуется найти значение параметра при котором происходит бифуркация и определить ее тип, а также построить бифуркационную диаграмму.

$$\dot{x} = rx - \frac{3x}{1+x^2}$$

**РЕШЕНИЕ**

Находим неподвижные точки (положения равновесия) динамической системы:

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow rx - \frac{3x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(1+x^2)rx - 3x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{rx + rx^3 - 3x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{rx^3 + (r-3)x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(rx^2 + r - 3)}{1+x^2} = 0$$

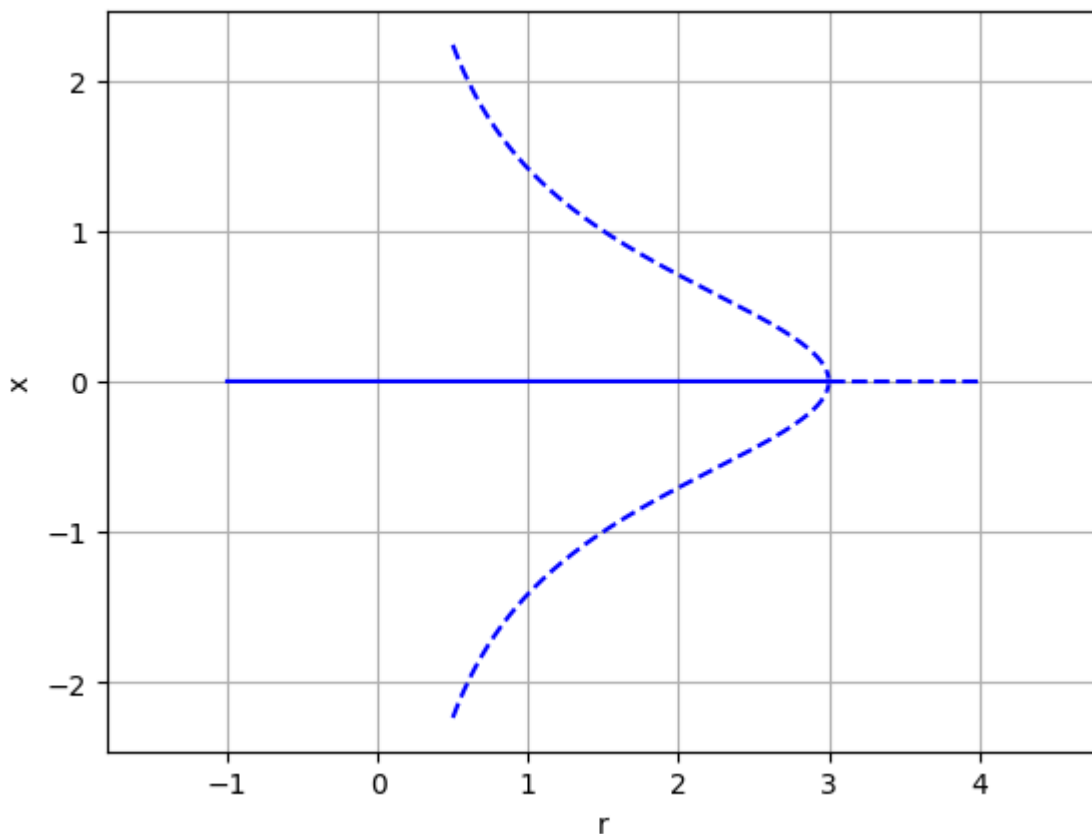
$$rx^2 + r - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{r} - 1}, \quad \frac{3}{r} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{r} \geq 1 \Leftrightarrow r \in (0; 3]$$

$x = 0$  – устойчивое положение равновесия при  $r < 3$ , неустойчивое положение равновесия при  $r \geq 3$

$x = \sqrt{\frac{3}{r} - 1}, r \in (0; 3)$  – неустойчивое положение равновесия

$x = -\sqrt{\frac{3}{r} - 1}, r \in (0; 3)$  – неустойчивое положение равновесия

Строим бифуркационную диаграмму:

**ВЫВОДЫ**

Бифуркация происходит при значении параметра  $r = 3$ , тип бифуркации – субкритическая бифуркация “вилка”

## ПРИЛОЖЕНИЕ.

Код программы для построения бифуркационного дерева:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x, r):
    return r * x - 3 * x / (1 + x**2)

def x1(r):
    return 0.0 * r

def x2(r):
    return np.sqrt(3 / r - 1)

def x3(r):
    return -np.sqrt(3 / r - 1)

R = np.arange(0.01, 3, 0.001)
plt.plot(R, x2(R), 'b--')
plt.plot(R, x3(R), 'b--')

R = np.arange(-1, 3, 0.001)
plt.plot(R, x1(R), 'b-')

R = np.arange(3, 4, 0.001)
plt.plot(R, x1(R), 'b--')

plt.xlabel('r')
plt.ylabel('x')

plt.grid()
plt.show()
```