Отчет по домашнему заданию "Представление Лакса" по курсу "Введение в нелинейную динамику"

Егор Антонов, БПМ214

26 марта 2024 г.

ЗАДАНИЕ 1 (Вариант №2)

Требуется показать что соответствующие уравнение допускает представление Лакса с L-матрицей с нулевым следом и найти его первый интеграл.

РЕШЕНИЕ

$$\ddot{x} + \frac{1}{(x+1)^2}\dot{x} + x + 1 = 0 \tag{1}$$

Это уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0,\ f(x) = \frac{1}{(x+1)^2},\ g(x) = x + 1. \tag{2}$$

Уравнение (2) эквивалентно следующей двумерной динамической системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x)y - g(x) \end{cases} \tag{3}$$

Для неё будем искать пару Лакса в виде

$$L = \begin{pmatrix} y + F & U \\ U & -y - F \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} & 0 \end{pmatrix},\ F = F(t,x),\ U = U(t,x).$$

Для матриц L и M должно выполняться уравнение Лакса:

$$\frac{dL}{dt} = ML - LM.$$

$$\frac{dL}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} & -\frac{dy}{dt} - \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} - \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -fy - g + \frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial U}{\partial x}y + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial x}y + \frac{\partial U}{\partial t} & fy + g - \frac{\partial F}{\partial x}y - \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$ML = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y+F & U \\ U & -y-F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}U & \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(y+F) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(y+F) & \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}U \end{pmatrix}$$

$$LM = \begin{pmatrix} y+F & U \\ U & -y-F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}U & -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(y+F) \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(y+F) & -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}U \end{pmatrix}$$

$$ML - LM = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}U & \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(y+F) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(y+F) & \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}U \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}U & -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(y+F) \\ -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(y+F) & -\frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}U \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x}U & \frac{\partial U}{\partial x}(y+F) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(y+F) & \frac{\partial U}{\partial x}U \end{pmatrix}$$

$$\frac{dL}{dt} = ML - LM \iff \begin{pmatrix} -fy - g + \frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial U}{\partial x}y + \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial x}y + \frac{\partial U}{\partial t} & fy + g - \frac{\partial F}{\partial x}y - \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x}U & \frac{\partial U}{\partial x}(y+F) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(y+F) & \frac{\partial U}{\partial x}U \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = f, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = g, \\ \frac{\partial U}{\partial t} = F\frac{\partial U}{\partial x}. \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = (x+1)^{-2}, \\ \frac{\partial F}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} = x+1, \\ \frac{\partial U}{\partial t} = F\frac{\partial U}{\partial x}. \end{cases} \implies \begin{cases} F(t,x) = -\frac{1}{x+1}, \\ U(t,x) = \sqrt{x^2+2x-2t}. \end{cases}$$

$$L = \begin{pmatrix} y - \frac{1}{x+1} & \sqrt{x^2+2x-2t} \\ \sqrt{x^2+2x-2t} & -y + \frac{1}{x+1} \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x-2t}} \\ \frac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x-2t}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = -\det L = x^2 + 2x - 2t + \left(\frac{xy+y-1}{x+1}\right)^2$$

ВЫВОДЫ

Уравнение $\ddot{x} + (x+1)^{-2}\dot{x} + x + 1 = 0$ допускает разложение Лакса с L-матрицей с нулевым следом:

$$L = \begin{pmatrix} y - \frac{1}{x+1} & \sqrt{x^2+2x-2t} \\ \sqrt{x^2+2x-2t} & -y + \frac{1}{x+1} \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x-2t}} \\ \frac{x+1}{2\sqrt{x^2+2x-2t}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Первым интегралом системы является $I = x^2 + 2x - 2t + \left(\frac{xy+y-1}{x+1}\right)^2$.